УДК 517.5

НОВЫЕ УСЛОВИЯ ПОЛНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛА И НЕЗАВИСИМОСТИ ИНТЕГРАЛА ОТ ФОРМЫ КРИВОЙ

Волчкова Н.П.

Донецкий национальный технический университет

Анотація. Одержано нові умови повного диференціалу.

I. Введение. Тема «Криволинейный интеграл» излагается студентам второго курса электротехнического факультета в соответствии с ОПП для электротехнических направлений обучения. В данной теме важным вопросом является теорема об условиях полного дифференциала и независимости криволинейного интеграла от формы кривой. Здесь мы приведем новый вариант указанной теоремы.

II. Постановка задачи. При изучении уравнений вида $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$ возникает вопрос о том, когда выражение $Pdx+Qdy$ является полным дифференциалом некоторой функции U. Этот вопрос тесно связан с вопросом об условиях независимости криволинейного интеграла $\int\limits_{\gamma} Pdx+Qdy$ от формы кривой интегрирования γ.

III. Результаты. Ответы на указанные вопросы можно резюмировать в виде следующей теоремы, рассматриваемой в общем курсе высшей математики.

Теорема А. Пусть функции P и Q непрерывно дифференцируемы в односвязной области D. Тогда следующие условия эквивалентны:

1) $\int\limits_{\gamma} Pdx+Qdy=0$ для любой замкнутой кусочно-гладкой кривой $\gamma\subset D$.

2) $\int\limits_{\Gamma_{AB}} Pdx+Qdy$ не зависит от пути интегрирования Γ_{AB} (кусочно-гладкая кривая Γ_{AB} лежит в D, A - ее начало, B - конец).

3) Выражение $Pdx+Qdy$ является полным дифференциалом некоторой функции $U=U(x,y)$ в области D. При этом $\int\limits_{\Gamma_{AB}} Pdx+Qdy=U(B)-U(A)$.

4) В области D выполнено условие $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$.

Доказательство теоремы А опирается на свойства криволинейного интеграла и существенно использует произвольность контуров γ. Вместе с тем в ряде случаев это условие на γ можно значительно ослабить. Одним из результатов в этом направлении является следующая теорема.

Теорема 1. Пусть D - круг радиуса $R\geq\frac{\sqrt{5}}{2}$, функции P и Q непрерывно дифференцируемы в D и интеграл от $Pdx+Qdy$ по границе любого единичного квадрата из D равен нулю. Тогда в круге D выражение $Pdx+Qdy$ является полным дифференциалом некоторой функции U.

Доказательство. Если $f\in C(D)$ и

$$\iint\limits_{K} f(x,y)dxdy=0$$

для любого единичного квадрата K из D, то $f=0$ (см. [1,часть 4, гл.2]). Далее по формуле Грина

$$\iint\limits_{K}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=\int\limits_{\partial K} Pdx+Qdy .$$

Поэтому из условия и утверждения выше следует, что $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ в D. Теперь из теоремы А заключаем, что выражение $Pdx + Qdy$ является полным дифференциалом некоторой функции U. Теорема 1 доказана.

IV. Выводы. Особенность теоремы 1 состоит в том, что контуры, по которым ведется интегрирование, конгруэнтны границе квадрата фиксированного размера. Можно доказать, что значение R в теореме 1 уменьшить нельзя. Отметим также, что при подходящем R вместо квадратов можно брать и различные другие множества с негладкими границами. Указанные явления тесно связаны с некоторыми экстремальными задачами интегральной геометрии и уравнений в свёртках (см. [1]- [3]).

Литература

1. Volchkov V.V. Integral Geometry and Convolution Equations. Kluwer Academic Publishers. Dordrecht , 2003, 454 pp.
2. Volchkov V.V., Volchkov Vit.V. Harmonic Analysis of Mean Periodic Functions on Symmetric Spaces and the Heisenberg Group. Springer-Verlag, Dordrecht - Heidelberg - London - New-York, 2009, 671 pp.
3. Volchkov V.V., Volchkov Vit.V. Offbeat Integral Geometry on Symmetric Spaces. Birkhäuser- Springer. Basel - Heidelberg - New-York- Dordrecht – London, 2013, 592 pp.