

УДК 539.31 + 621.8

Е. С. Кисель

**Автомобильно-дорожный институт ГВУЗ «Донецкий национальный
технический университет», г. Горловка**

ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ ХАРАКТЕРИСТИК ВОЛНОВОГО ПОЛЯ В ЗАДАЧАХ ДИАГНОСТИКИ НЕОДНОРОДНЫХ ТЕРМОУПРУГИХ ДЕТАЛЕЙ

Получено подтверждение результатов аналитического метода решения граничных задач термоупругости для плоских неоднородных сечений автомобильных деталей. Проведено численное исследование зависимости краевых и граничных динамических эффектов от температурных, геометрических и упругих параметров, определяющих неоднородность детали. Определены особенности распределения термоупругих напряжений в зонах динамических эффектов на примере неоднородного термоупругого сечения детали.

Введение

Увеличение мощностей, скоростей, грузоподъемности, производительности и других технологических параметров машин и связанный с этим рост локальных напряжений в деталях приводит к тому, что указанную проблему повышения надежности и долговечности элементов машин по критериям прочности при одновременном снижении их металлоемкости можно решить оптимизацией конструкции деталей и машиностроительных материалов, т. е. использованием резервов в сфере конструирования.

В связи с этим можно утверждать, что независимо от выбранного критерия прочности, он обязательно должен учитывать именно максимальные напряжения, возникающие в зонах локальной концентрации напряжений (ЛКН). Поскольку наличие ЛКН может быть причиной выхода детали из строя, то качественное и количественное определение степени концентрации является всегда важным и актуальным вопросом.

Расчет распределения напряжений в деталях автомобилей связан со значительными трудностями, которые обусловлены сложностью формы и внутренней структуры деталей и условиями их нагрузки. Поэтому в приближенных расчетах чаще всего применяют упрощенные модели с экспериментальной оценкой их эффективности, что обычно приводит к неверным выводам. Погрешности расчетов еще больше возрастают, если необходимо рассматривать динамическое деформирование деталей, поскольку интенсивность ЛКН в динамических задачах существенно возрастает. Такие случаи возникают, например, при расчетах кривошипно-шатунных механизмов, прочности поршневых пальцев двигателей внутреннего сгорания (ДВС), шатунных шеек коленчатого вала и т. д.

Кроме того, появляется необходимость учета возможности проявления резонансных эффектов. Важная особенность геометрии деталей, подвергнутых ЛКН, обусловлена существованием на границе их пересечения некоторых сингулярных угловых точек, напряженно-деформированное состояние (НДС) в окрестности которых и определяет прочность всей детали в целом. Здесь также имеет место появление новых волновых эффектов, связанных с концентрацией динамических напряжений.

Базовыми для данного исследования стали работы [1–2]. Изложенные в них результаты позволили, во-первых, распространить известный метод суперпозиции на кусочно-однородные термоупругие области и, во-вторых, исследовать влияние температурных параметров на локальную концентрацию напряжений в нерегулярных зонах области. В данных работах автором исследовалась ЛКН в прямоугольных упругих сечениях деталей, соответственно отсутствует численно-аналитический анализ особенностей НДС термоупругих деталей с учетом влияния температурных напряжений на ЛКН.

Цель работы

Учитывая значительные технические трудности экспериментальных исследований, а также высокую стоимость, уникальность целого ряда машин и конструкций, важность некоторых ожидаемых результатов научных исследований, при правильно подобранном численном методе проверки прочностных характеристик, можно перейти на новый этап проектирования и эксплуатации, допускающей безопасную работу отдельных деталей и автомобилей в целом, с учетом физико-механической неоднородности составляющих их элементов и неотъемлемого присутствия температурного фактора.

Под проблемой диагностики понимается задача определения характеристик волнового поля на основе информации, полученной в результате численных исследований термоупругих характеристик волнового поля, возникающих под влиянием определенным образом подобранных геометрических параметров сечения, упругих и температурных свойств материала, внешних воздействий.

Также, проведение численного исследования является неотъемлемой частью общего аналитического исследования динамической прочности неоднородных термоупругих деталей автомобилей с определением характера динамического НДС в окрестности сингулярных угловых точек сечения деталей.

Основная часть

Исследование волновых эффектов в широком диапазоне термомеханических параметров позволяет описывать динамические явления термоупругости в неоднородных деталях. Теоретической основой проведенных исследований стал проведенный ранее в работах [3–5] аналитический расчет параметров локальной особенности (ПЛО) по напряжениям и температуре и анализ влияния температурных эффектов на НДС и ЛКН исследуемого объекта.

Рассмотрим зависимость частот краевого резонанса от внешних размеров сечения (параметр $\eta = L^{-1}$) неоднородной термоупругой области (рисунок 1).

На рисунках 1–3 приведены графики зависимости изменения резонансных частот от параметра L при различных значениях δ ($\delta = c/a, \delta_2 = 1 - \delta$) для сочетаний материалов титан ($Ti, G^{(2)}$)-свинец ($Pb, G^{(1)}$)-титан ($Ti, G^{(2)}$), а на рисунках 4–6 – для материалов свинец ($Pb, G^{(2)}$)-титан ($Ti, G^{(1)}$)-свинец ($Pb, G^{(2)}$), соответственно. Значения δ_2 выбираем таким образом: $\delta_2 = 0,9$ (широкая наплавка), $\delta_2 = 0,5$ (средняя наплавка), $\delta_2 = 0,17$ (узкая наплавка).

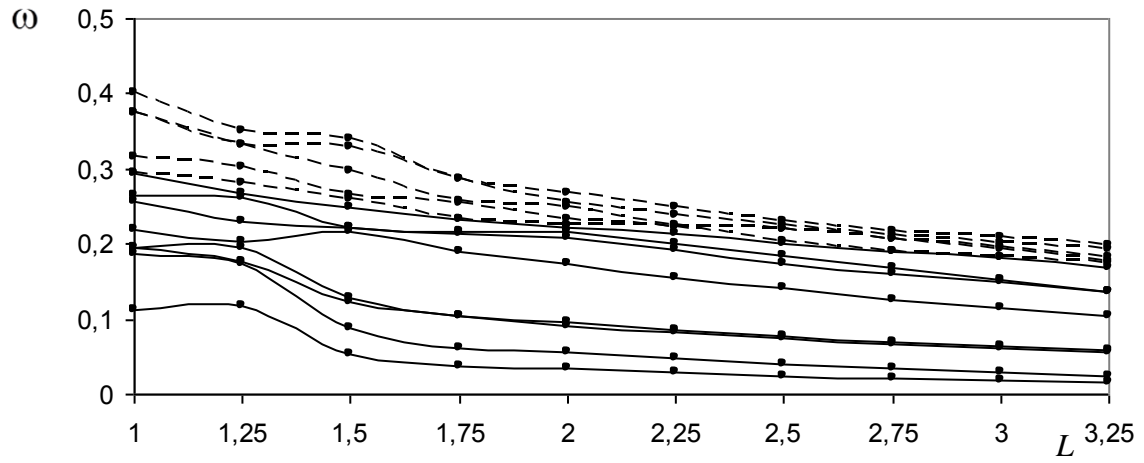


Рисунок 1 – Широкая наплавка, $\delta_2 = 0,9$ (Ti-Pb-Ti)

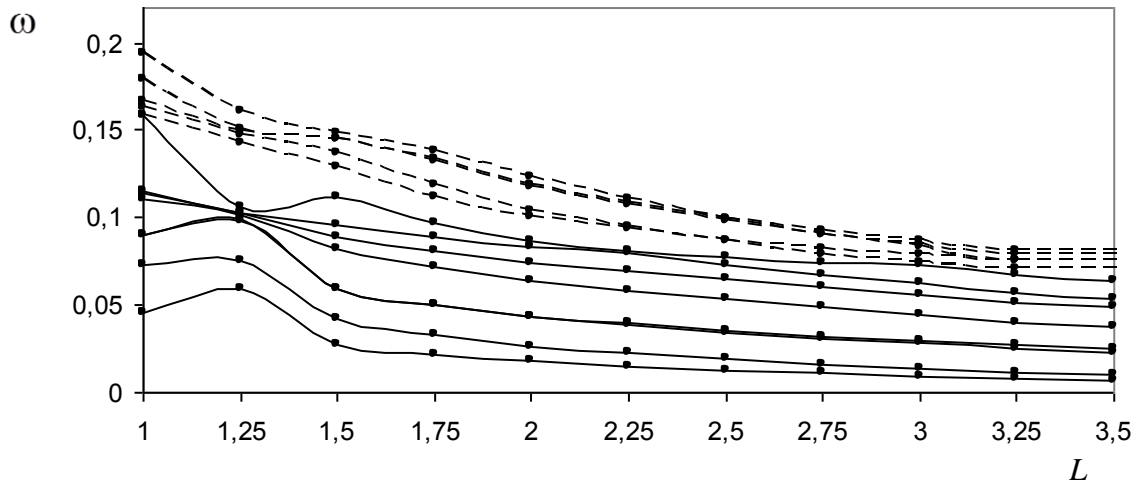


Рисунок 2 – Средняя наплавка, $\delta_2 = 0,5$ (Ti-Pb-Ti)

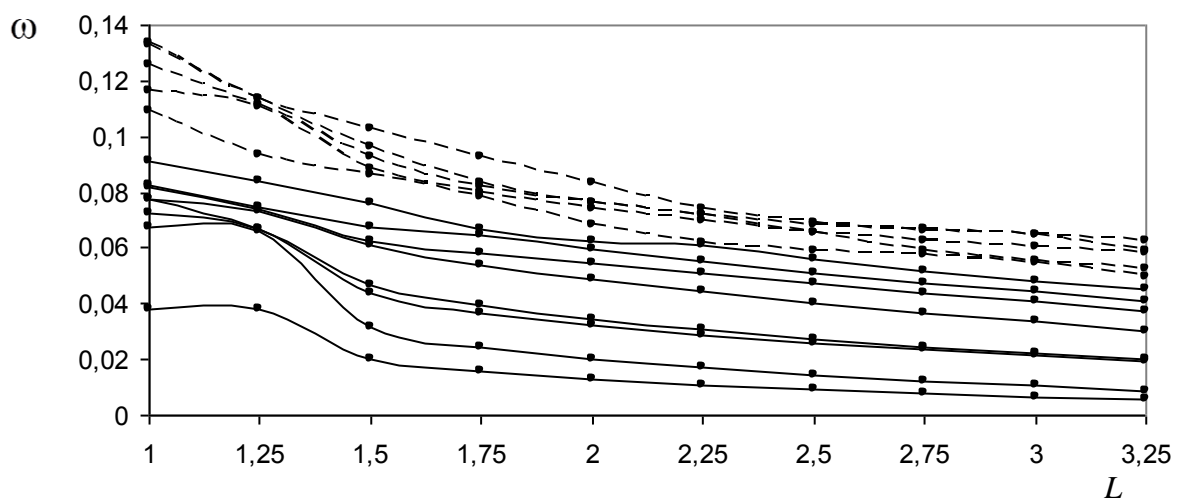
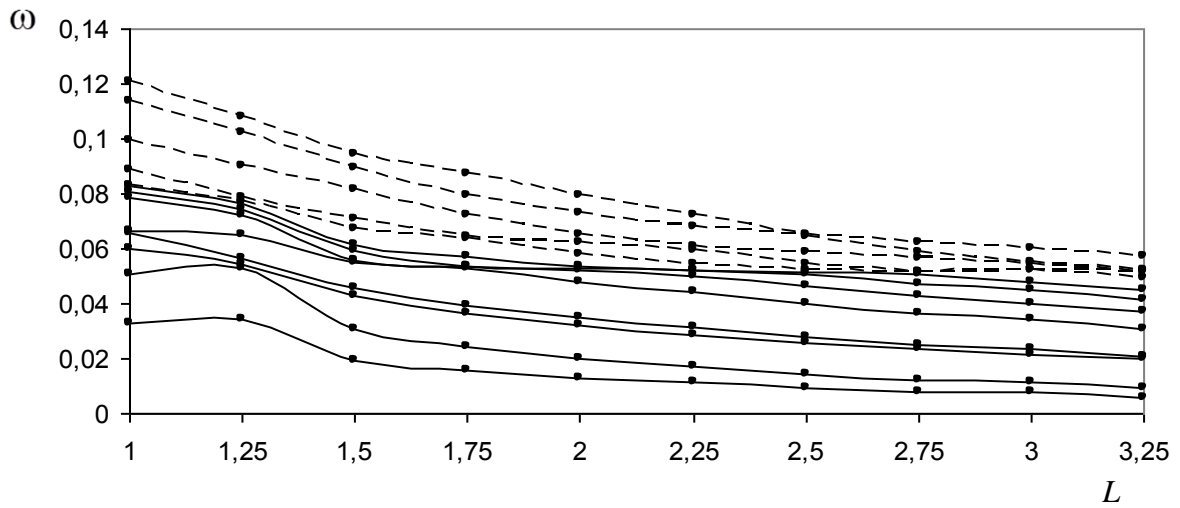
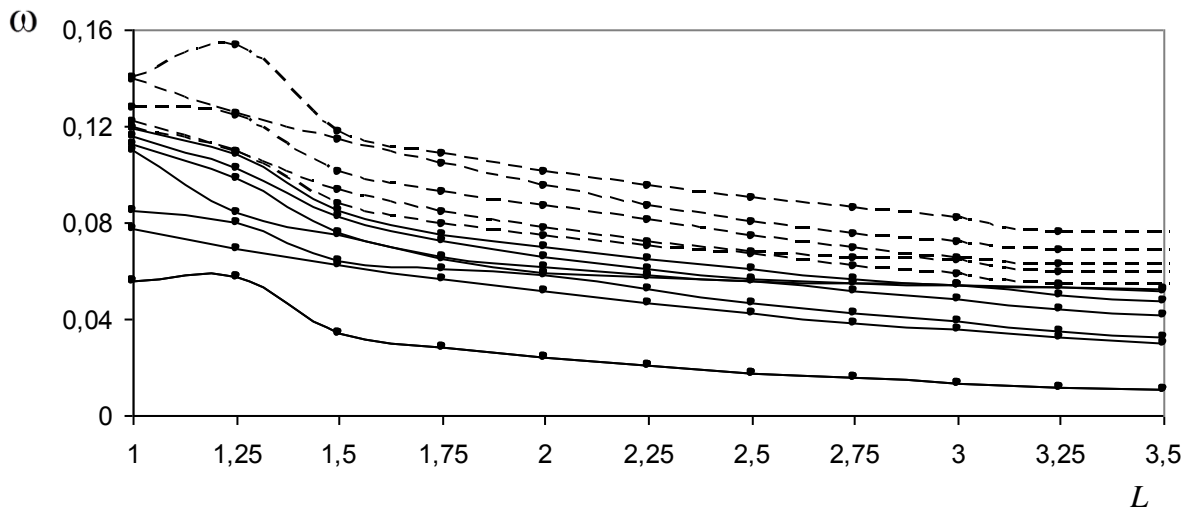
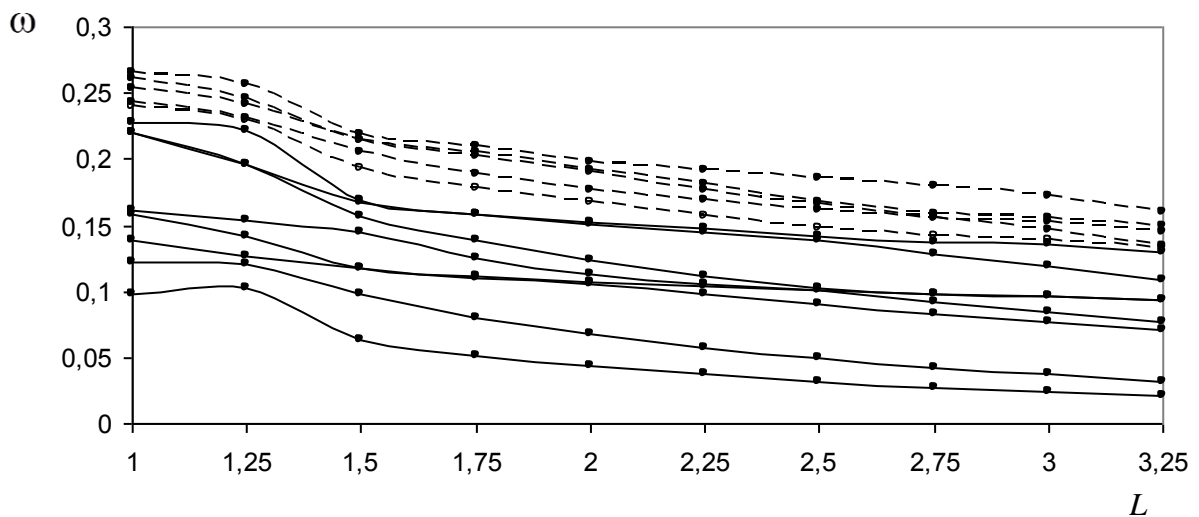


Рисунок 3 – Узкая наплавка, $\delta_2 = 0,17$ (Ti-Pb-Ti)

Рисунок 4 – Широкая наплавка, $\delta_2 = 0,9$ (Pb-Ti-Pb)Рисунок 5 – Средняя наплавка, $\delta_2 = 0,5$ (Pb-Ti-Pb)Рисунок 6 – Узкая наплавка, $\delta_2 = 0,17$ (Pb-Ti-Pb)

Из данных представленных рисунков следует, что с увеличением ширины наплавки (увеличение значения δ_2) для любых сочетаний материалов отмечаем рост номера и значения частоты краевого резонанса.

Так, например, для сочетания материалов Pb-Ti-Pb и $L \in (2; 3)$ имеем следующие частоты краевого резонанса: $\delta_2 = 0,17 \sim 6$ -7 частоты, $\delta_2 = 0,5 \sim 7$ -8 частоты, $\delta_2 = 0,9 \sim 9$ -10 частоты. Для сочетания материалов Ti-Pb-Ti (с более жестким материалом по краям) и $L \in (2; 3)$ имеем следующие краевые частоты: $\delta_2 = 0,17 \sim 11$ -12 частоты, $\delta_2 = 0,5 \sim 9$ -10 частоты, $\delta_2 = 0,9 \sim 10$ -11 частоты.

Таким образом, краевой резонанс при жестких наплавках проявляется на более высоких частотах. При узких и средних жестких наплавках краевой резонанс относительно слабо выражен (рисунки 2–3). Также следует отметить, что явление краевого резонанса возникает с увеличением δ_2 при большем значении L (сравнительная таблица 1).

Таблица 1 – Зависимость краевого резонанса для различных сочетаний материалов от параметра δ_2

Сочетание материалов	Ti-Pb-Ti	Pb-Ti-Pb
$\delta_2 = 0,9$	$L = 1,5$	$L = 1,5$
$\delta_2 = 0,5$	$L = 1,75$	$L = 2$
$\delta_2 = 0,17$	$L = 2$	$L = 2,25$

Рассмотрим зависимости значений безразмерных частот от параметра δ_2 , определяющего ширину наплавки (области $G^{(2)}$). Соответствующие графические зависимости для термоупругой области $L = 3$ и сочетаний материалов (Pb-St -Pb) и (St-Pb-St) представлены на рисунках 7–8 соответственно. Параметр δ_2 принимает значения 0,038; 0,135; 0,337; 0,865 (изменяем ширину наплавки от очень узкой до очень широкой).

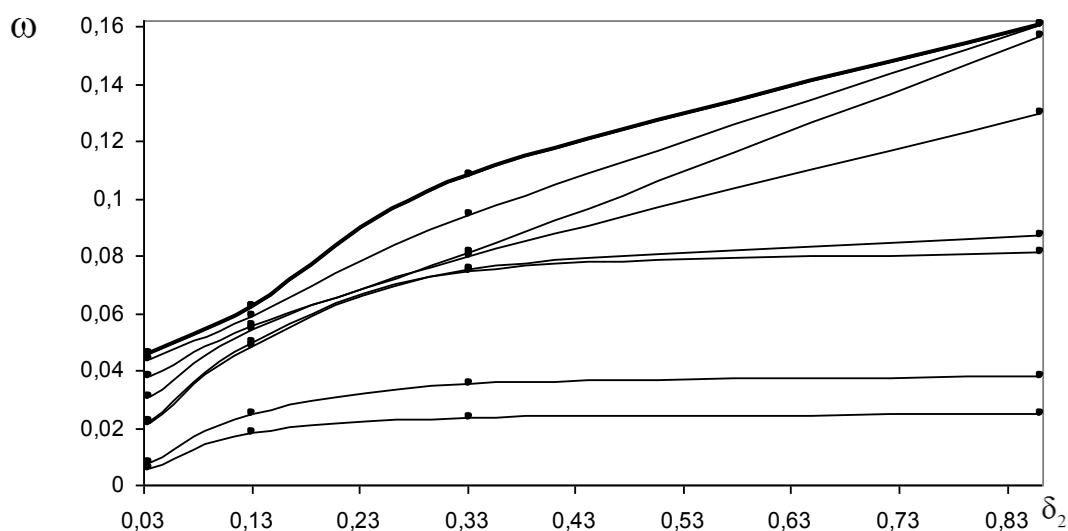


Рисунок 7 – Графическая зависимость значений безразмерных частот от ширины наплавки, $L = 3$, (Pb-St-Pb)

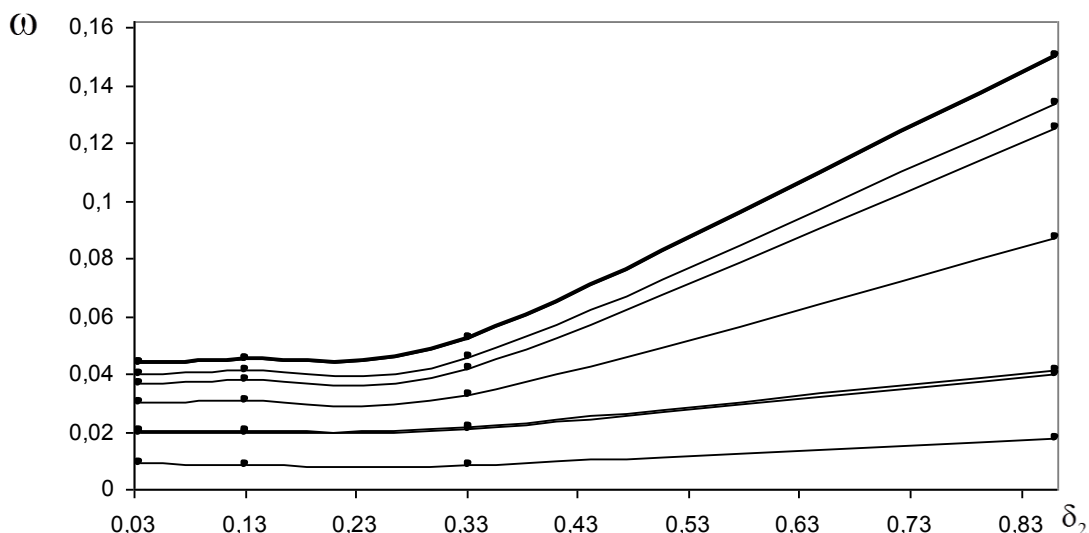


Рисунок 8 – Графическая зависимость значений безразмерных частот от ширины наплавки, $L = 3$, (St-Pb-St)

Можно сделать следующие выводы:

1. При различных сочетаниях материалов собственные частоты растут с увеличением δ_2 .
2. Полученные результаты свидетельствуют о том, что с уменьшением значения параметра δ_2 уменьшается различие между частотами, «смазываются» признаки краевого резонанса. Для сочетания материалов (Pb-St-Pb) при больших и средних размерах внешних областей различие в значениях частот (начиная с 7-ой) существенно.
3. При максимальной ширине наплавки $\delta_2 = 0,9$, данное различие сглаживается. Для материалов (St-Pb-St) значения частот практически не изменяются до $\delta_2 = 0,337$, далее отмечается рост значений частот, начиная с 6-ого номера.
4. При жестких наплавках наблюдаем значительный рост значений собственных частот с ростом δ_2 . При мягких же наплавках имеем некоторую стабилизацию значений частот при увеличении δ_2 , что наблюдается для жестких наплавки при малом δ_2 .
5. Основной вывод заключается в том, что интенсивность краевого резонанса в первую очередь зависит от величины площади, занимаемой жестким материалом, в составном сечении. Чем больше площадь, тем ярче выражены плато на частотном спектре и тем сильнее локализация волновых движений в сингулярных точках сечения.

Исследуем зависимость значений собственных частот термоупругой области G от коэффициента температурного расширения ($\alpha/^\circ\text{C}$) центральной области $G^{(1)}$. Исходная область представлена сочетанием материалов (Pb, $G^{(2)}$)-(St, $G^{(1)}$)-(Pb, $G^{(2)}$), $L = 3$. Изменим α области $G^{(1)}$ от $4,50\text{e-}06/^\circ\text{C}$ (вольфрам) до $5,30\text{e-}05/^\circ\text{C}$ (свинец), оставляя неизменными остальные свойства материала.

При значительном увеличении α значения частот очень незначительно уменьшаются. Следовательно, коэффициент линейного теплового расширения не оказывает значительного влияния на собственные частоты исследуемой области (таблица 2).

Таблица 2 – Зависимость собственных частот термоупругой области от коэффициента температурного расширения области $G^{(1)}$

№ ω	Коэффициент линейного теплового расширения, $\alpha/^\circ\text{C}$							
	вольфра м 4,5e-06	молибде н 5e-06	титан 8,15e-06	ванадий 8,3e-06	кобальт 1,2e-05	сталь 1,8e-05	медь 2,4e-05	свинец 5,3e-05
3	0,02595	0,02591	0,02560	0,02559	0,02522	0,02461	0,02397	0,02038
4	0,03954	0,03946	0,03897	0,03895	0,03836	0,03737	0,03634	0,03065
5	0,07801	0,07801	0,07806	0,07806	0,07811	0,07819	0,07826	0,07793
6	0,07984	0,07982	0,07971	0,07970	0,07957	0,07935	0,07912	0,07858
7	0,08422	0,08421	0,08414	0,08414	0,08406	0,08393	0,08380	0,08308
8	0,08535	0,08534	0,08528	0,08528	0,08522	0,08511	0,08501	0,08447
9	0,09989	0,09987	0,09973	0,09973	0,09957	0,09931	0,09905	0,09778
10	0,11382	0,11380	0,11366	0,11365	0,11350	0,11324	0,11298	0,11165

Графически данный вывод подтверждает зависимость безразмерных частот от величины, равной α/α_{st} (α_{st} – коэффициент температурного расширения стали), которая изображена на рисунке 9.

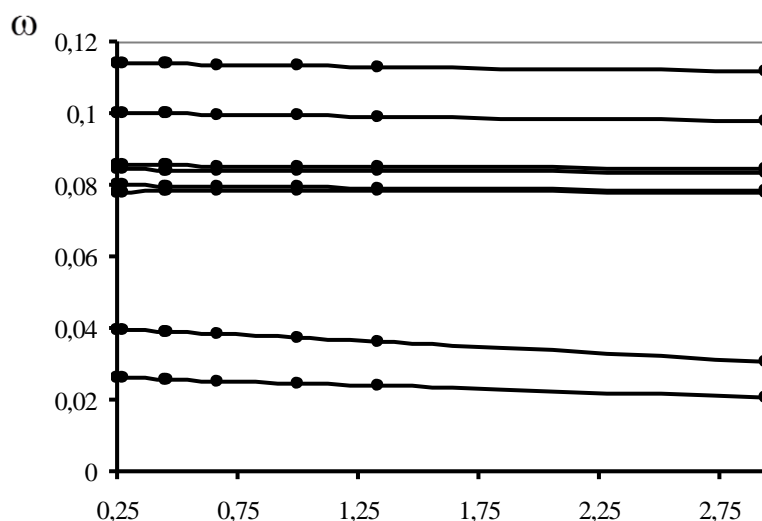


Рисунок 9 – Зависимость собственных частот термоупругой области от безразмерной величины α/α_{st}

Проведем аналогичное исследование зависимости значений собственных частот термоупругой области G от жесткости стыкуемых областей, т. е. от изменения модуля сдвига центральной области $G^{(1)}$. Исходная область представлена также сочетанием материалов (Pb, $G^{(2)}$)-(St, $G^{(1)}$)-(Pb, $G^{(2)}$), $L = 3$.

При изменении модуля сдвига «центральной» области $G^{(1)}$ от $2,7e + 10 \text{ н/м}^2$ (легир. аллюм.) до $1,6e + 11 \text{ н/м}^2$ (вольфрам), оставим неизменными остальные свойства материала (стали). Результаты вычислений занесены в таблицу 4.3. Отметим, что значения собственных частот уменьшаются, причем на частотах краевого резонанса более резко (рисунок 10).

Таблица 3 – Зависимость собственных частот термоупругой области от модуля сдвига, μ области $G^{(1)}$

№ ω	Модуль сдвига, μ н/м ²							
	легир. аллюм. 2,7e + 10	латунь 3,7e + 10	медь 4e + 10	ванадий 5,1e + 10	сталь 7,5e + 10	кобальт 8,8e + 10	молибден 1,2e + 11	вольфрам 1,6e + 11
3	0,0246	0,0254	0,0254	0,0254	0,0246	0,0238	0,0245	0,0237
4	0,0379	0,0389	0,0390	0,0388	0,0374	0,0361	0,0368	0,0350
5	0,0818	0,0835	0,0841	0,0832	0,0782	0,0750	0,0690	0,0606
6	0,0864	0,0872	0,0868	0,0851	0,0794	0,0755	0,0695	0,0609
7	0,1207	0,1098	0,1071	0,0982	0,0839	0,0783	0,0715	0,0649
8	0,1211	0,1103	0,1077	0,0988	0,0851	0,0801	0,0792	0,0737
9	0,1253	0,1223	0,1205	0,1134	0,0993	0,0930	0,0839	0,0748
10	0,1542	0,1438	0,1402	0,1294	0,1132	0,1065	0,0990	0,0896

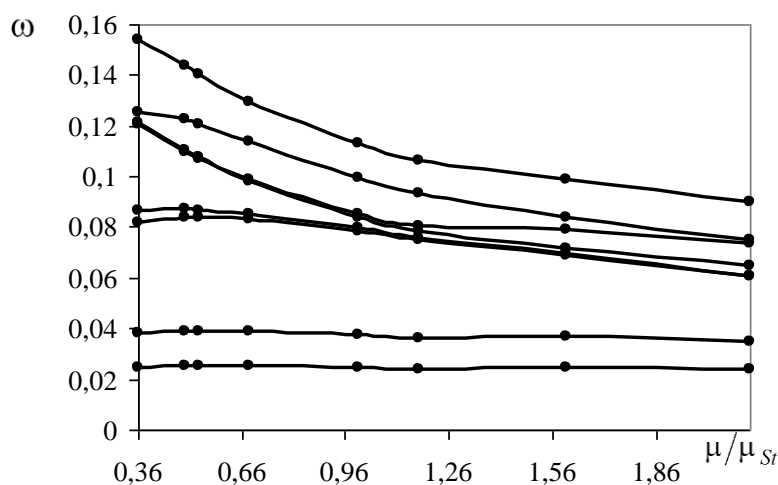


Рисунок 10 – Зависимость собственных частот термоупругой области от модуля сдвига, μ области $G^{(1)}$

Анализ влияния сочетаний материалов и размеров наплавок (область $G^{(2)}$) на интенсивность тонких динамических эффектов в условиях динамических и температурных нагрузок на элементы конструкций, позволяет оптимизировать их геометрические параметры сечения с целью улучшения прочностных характеристик неоднородных деталей.

Как показывают результаты экспериментальных исследований, наиболее уязвимыми в плане прочности участками составных областей являются границы соединений составных частей области, обладающих различными термомеханическими свойствами. Аналитические расчеты и численное моделирование показывают, что напряжения (энергия), возникающие в этих участках, напрямую зависят также и от геометрических характеристик составных частей области, а также термической нагрузки. В качестве величины, определяющей меру повреждения (прочности), можно использовать энергию упругой / термоупругой деформации в материале. Считается, что минимальная энергия, обусловленная напряжениями, соответствует максимальной прочности составной области. Следовательно, целесообразно проведение сравнительного анализа энергетической характеристики (\bar{E}) средней за период, накопленной во внутренней области сечения детали, для интегрального описания влияния особенностей волнового поля на вибродинамическое поведение составных деталей. Данная безразмерная величина вычисляется по формуле (1)

$$\bar{E} = \sum_{m=1}^2 \iint_{G^{(m)}} (U_1^{(m)2} + U_2^{(m)2}) dG^{(m)}. \quad (1)$$

Результаты анализа распределения средней за период энергии по площади прямоугольника, в частности, в особых областях прямоугольного сечения деталей для разных форм колебаний отражены в сравнительной таблице 4.

Таблица 4 – Проявление резонанса для различных сочетаний материалов, в зависимости от ширины наплавки для термоупругой и упругой областей

Наплавка	Узкая								Средняя								Широкая								
	Ti-Pb-Ti				Pb-Ti-Pb				Ti-Pb-Ti				Pb-Ti-Pb				Ti-Pb-Ti				Pb-Ti-Pb				
	ГР		КР		ГР		КР		ГР		КР		ГР		КР		ГР		КР		ГР		КР		
№ част.	ТУ	У	ТУ	У	ТУ	У	ТУ	У	ТУ	У	ТУ	У	ТУ	У	ТУ	У	ТУ	У	ТУ	У	ТУ	У	ТУ	У	
	1		+-								+-		+-	+-	+-		+-								+-
2		+-								+-			+-	+-			+-							+	+-
3		+-								+-			+	+-		+-	+-							+	
4					+-					+-			+	+			+							+	+
5					+					+-	+-			+	+			+-	+					+	+
6					+					+				+	+			+	+					+	+-
7					+			+-	+-	+	+-			+-	+			+	+					+-	+-
8					+			+-	+-	+	+-				+-			+	+-						
9					+					+	+				+	+-		+	+-					+	
10					+			+-	+-	+					+	+	+	+						+	+
11					+			+-								+		+						+-	+
12	+-	+-			+			+-		+-				+	+		+-	+	+					+-	+-
13	+-		+-		+			+-	+	+-								+-						+-	+-
14		+-			+			+-	+-	+							+-	+					+		+-
15					+			+	+-		+				+-	+		+-	+-						

Рассмотрены сечения с наплавками различной ширины: узкая наплавка при $\delta_2 = 0,17$; средняя ширина наплавки $-\delta_2 = 0,5$; широкая наплавка $-\delta_2 = 0,9$. Каждое из рассмотренных сечений представлено для сочетания материалов Ti-Pb-Ti и Pb-Ti-Pb (сечения с жесткими и мягкими наплавками) при наличии и отсутствии термоупругой составляющей. На найденных 15-ти собственных частотах исследуем проявление эффектов граничного («ГР») и краевого резонанса («КР»). Ярко выраженную ЛКН отметим знаком «+» в соответствующей ячейке таблицы, слабо выраженную ЛКН, соответственно, «+ -», при отсутствии ЛКН ячейка таблицы остается пустой. Внешние размеры исследуемого составного сечения определяет параметр $L = 3,25$.

Для проверки результатов аналитических расчетов напряженно-деформированных состояний в неоднородных деталях (средах) наиболее приемлемыми являются численные методы, в первую очередь, метод конечных элементов, широко используемый в современных программных пакетах анализа элементов конструкций, таких как ANSYS, COSMOS/Design, STAR LS Dyna и т. п. В подтверждение полученных результатов были проведены расчеты с использованием программного комплекса ANSYS. Задачей программного анализа стала проверка полученной зависимости явления граничного и краевого резонанса от параметра δ_2 для различных сочетаний материалов в упругом и термоупругом случаях.

Основываясь на результатах проведенных аналитических и численных исследований, можно сформулировать следующие выводы относительно особенностей ЛКН в сингулярных зонах составного сечения детали.

1. Наличие неоднородности в сечении резко уменьшает интенсивность краевого резонанса. Это следует как из данных таблицы 4, так и из представленных на рисунках 11–25 эюр распределения энергии по сечению тела. Он представлен слабо только при узких жестких наплавках и только на высоких частотах. Наличие же мягких наплавки резко уменьшает интенсивность краевого резонанса при любых значениях δ_2 .

2. Основные признаки локализации волновых движений наблюдаются на меньших частотах в окрестности границы раздела сред (граничный резонанс). Наиболее ярко он представлен при узких мягких и широких жестких наплавках. То есть, как было указано ранее, наличие граничного резонанса и его интенсивность прямо пропорциональны площади части сечения, занимаемого жестким материалом (Ti). Сформулированные выводы подтверждаются результатами численных расчетов по МКЭ. Для сочетания материалов Ti-Pb-Ti ($L=3,25, \delta_2=0,17$) результаты представлены на рисунках 11–13. Исследуемые эффекты отмечены на соответствующих рисунках стрелкой.

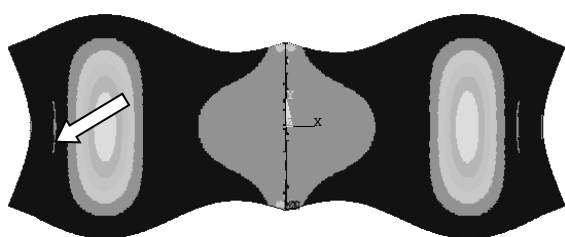


Рисунок 11 – Эюра распределения энергии для 12-ой частоты

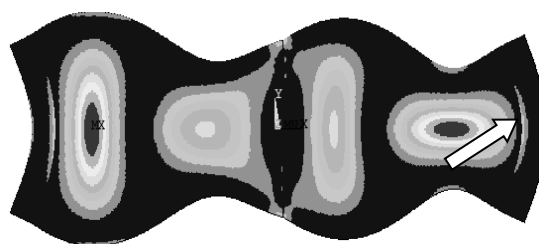


Рисунок 12 – Эюра распределения энергии для 13-ой частоты

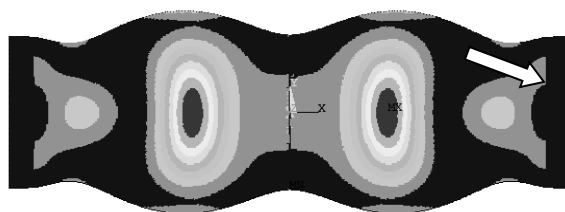


Рисунок 13 – Эюра распределения энергии для 15-ой частоты

В остальных случаях локализация волнового поля на границе раздела сред существенна. Например, для сочетания материалов Pb-Ti-Pb ($L=3,25, \delta_2=0,17$) на рисунках 14–25 представлены эюры распределения энергии по площади составного сечения для различных частот.

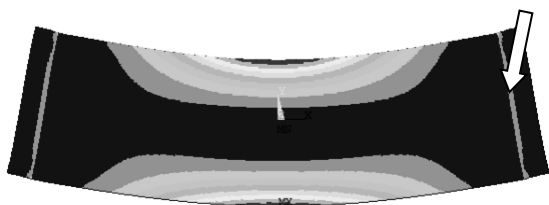


Рисунок 14 – Эюра распределения энергии для 4-ой частоты

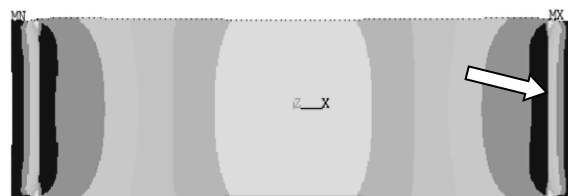


Рисунок 15 – Эюра распределения энергии для 5-ой частоты

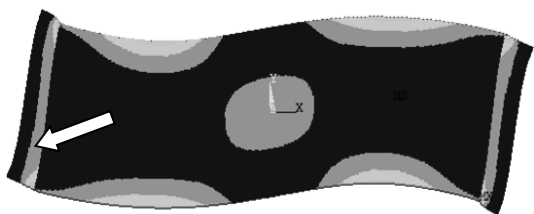


Рисунок 16 – Эпюра распределения энергии для 6-ой частоты



Рисунок 17 – Эпюра распределения энергии для 7-ой частоты



Рисунок 18 – Эпюра распределения энергии для 8-ой частоты

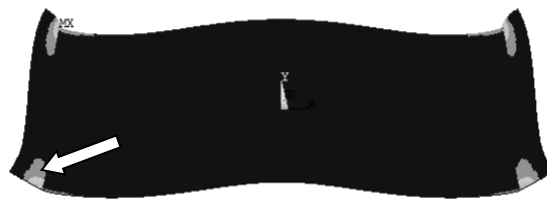


Рисунок 19 – Эпюра распределения энергии для 9-ой частоты



Рисунок 20 – Эпюра распределения энергии для 10-ой частоты

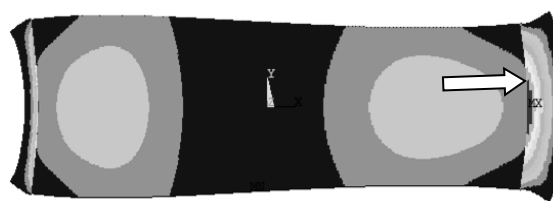


Рисунок 21 – Эпюра распределения энергии для 11-ой частоты



Рисунок 22 – Эпюра распределения энергии для 12-ой частоты



Рисунок 23 – Эпюра распределения энергии для 13-ой частоты

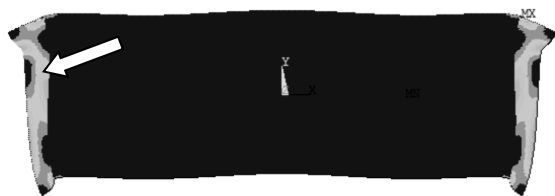


Рисунок 24 – Эпюра распределения энергии для 14-ой частоты

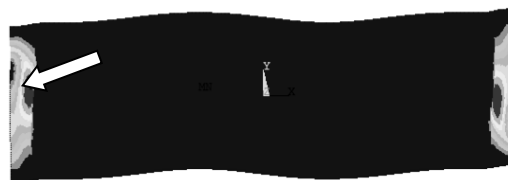


Рисунок 25 – Эпюра распределения энергии для 15-ой частоты

Термоупругость «смазывает» краевой и граничный эффекты. Отмечается гораздо меньше частот, на которых происходит локализация исследуемых явлений. Так, например, для (Ti-Pb-Ti, $\delta_2 = 0,5$) граничный эффект отмечается на 14-ти частотах, а для термоупругой – на семи. Аналогично, для упругой области (Pb-Ti-Pb, $\delta_2 = 0,17$) краевой эффект присутствует на семи частотах, а для термоупругой – на четырех.

Наблюдается гораздо меньшее влияние геометрии неоднородности на интенсивность краевого резонанса в упругом и термоупругом расчетах. Локализация во внешних угловых точках и на внешней границе сечения происходит гораздо реже, чем на границе раздела сред.

При малых L ($L < 1,5$) и больших значениях L ($L > 5$) локализация напряжений в особых зонах сечения отсутствует.

Выводы и перспективы дальнейших исследований

Таким образом, для проверки достоверности предложенных в [3–5] аналитических методов выполнено решение отдельных задач, имеющих известные аналитические решения и экспериментальные результаты. Адекватность разработанной методики и численные результаты, полученные в работе с использованием построенных решений граничных задач, сопоставлены с численными результатами, полученными при помощи МКЭ в вычислительном комплексе ANSYS.

Дополнительным контролем достоверности в каждой рассматриваемой задаче служила точность удовлетворения граничных условий и условий сопряжения. Можно утверждать, что влияние температурного поля на спектр резонансных частот для кусочно-неоднородной прямоугольной области незначительно, что и подтверждает проведенный КЭ анализ для различных сочетаний геометрических, упругих и температурных параметров двухслойной прямоугольной области: резонансные частоты, рассчитанные с учетом и без учета температурного поля, различаются незначительно.

Предложенные методы могут найти свое применение при проведении прочностных расчетов динамического НДС элементов конструкций и деталей машиностроения со сложными физико-механическими свойствами. На основе проведенных исследований выработаны практические рекомендации по снижению уровня термоупругих напряжений в элементах машиностроительных конструкций.

В анализе прочностных характеристик учет ПЛО по напряжениям и влияния температурных эффектов, может оказать положительное влияние на рекомендации по подбору материалов, составляющих сечение детали, а также оптимизировать геометрические параметры составного сечения.

Дальнейшим перспективным направлением исследований может быть обобщение полученных результатов на детали с другой формой сечения, а также содержащие более двух слоев неоднородности.

Список литературы

1. Вовк Л. П. Динамические задачи для тел сложной структуры / Л. П. Вовк. – Ростов-н/Д.: Ростовский гос. строит. ун-т, 2003. – 169 с.
Vovk L. P. Dinamicheskiye zadachi dlya tel slozhnoy struktury (Dynamical Problems for Bodies with Complex Structure) / L. P. Vovk. – Rostov-n/D.: Rostovskiy gos. stroit. un-t, 2003. – 169 s.
2. Вовк Л. П. Особенности локальной концентрации волнового поля на границе раздела упругих сред / Л. П. Вовк. – Донецк: Норд-Пресс, 2004. – 267 с.
Vovk L. P. Osobennosti lokalnoy kontsentratsii volnovogo polya na granitse razdela uprugikh sred (Characteristics of Local Concentration of Wave Field on the Elastic Medium Boundaries) / L. P. Vovk. – Donetsk: Nord-Press, 2004. – 267 s.
3. Вовк Л. П. Якісний аналіз особливостей концентрації термічних напружень у деталях з нерегулярною границею / Л. П. Вовк, К. С. Кисіль // Вісті Автомобільно-дорожнього інституту: науково-виробничий збірник. – Горлівка: АДІ ДВНЗ «ДонНТУ», 2009. – № 1 (8). – С. 13–23.
Vovk L. P. Yakisnyi analiz osoblyvostey kontsentratsii termichnykh napruzhen u detaliakh z nerehularnoiu hranytseiu (Qualitative Analysis of Thermal Stresses in Components with Irregular Boundaries) / L. P. Vovk. – Horlivka: ADI DVNZ "DonNTU", 2009. – № 1 (8). – S. 13–23.
4. Вовк Л. П. Розв'язання крайових задач термопружних областей з негладкою границею / Л. П. Вовк, К. С. Кисіль // Вісник Тернопільського державного технічного університету. – 2009. – Т. 14. – № 4. – С. 176–180.
Vovk L. P. Rozv'iazannia kraiovykh zadach termoprzhnykh oblastey z nehladkoiu hranytseiu (Solution of Boundary Value Problems of Thermoelastic Areas with Irregular Boundary) / L. P. Vovk, K. S. Kisel // Visnyk Ternopilskoho derzhavnoho tekhnichnoho universytetu. – 2009. – Т. 14. – № 4. – S. 176–180.

5. Вовк Л. П. Інтенсивність динамічної концентрації напружень у задачах сталих коливань кусково-неоднорідних термопружних областей / Л. П. Вовк, К. С. Кісель // Вісник СумДУ. – 2010. – № 3. – Т. 1. – С. 20–25. – (Серія «Технічні науки»).

Vovk L. P. Intensyvnist dynamichnoi kontsentratsii napruzhen u zadachakh stalykh kolyvan kuskovo-neodnorodnykh termoprzhnykh oblastey (Intensity of Dynamical Concentration of Stresses in Stationary Vibration Problems of Sectionally Heterogeneous Thermoelastic Areas) / L. P. Vovk, K. S. Kisel // Visnyk SumDU. – 2010. – № 3. – Т. 1. – S. 20–25. – (Seriya "Tekhnichni nauky").

Рецензент: д-р техн. наук, проф. Л. П. Вовк, АДІ ДонНТУ
Стаття надійшла до редакції: 07.02.2014