

Л. П. Вовк, д-р техн. наук, проф.

**Автомобильно-дорожный институт ГВУЗ «Донецкий национальный
технический университет», г. Горловка**

ПРОБЛЕМЫ АНАЛИЗА ПРОЧНОСТИ НЕОДНОРОДНЫХ ДЕТАЛЕЙ СЛОЖНОЙ ВНУТРЕННЕЙ СТРУКТУРЫ

Дается анализ состояния проблемы развития теории и совершенствования методов анализа прочностных характеристик деталей автомобилей со сложными физико-механическими свойствами. Выполнен анализ результатов, полученных отечественными и зарубежными учеными. Значительное внимание уделено рассмотрению существующих методов расчета, позволяющих учесть различные факторы, влияющие на напряженно-деформированное состояние исследуемых объектов. В завершающей части статьи поставлены новые задачи исследования, решение которых позволит снизить металлоемкость и повысить надежность ответственных узлов автотранспортных средств.

Ключевые слова: *неоднородные детали, вибрационное деформирование, концентрация напряжений, краевой резонанс*

1. Введение

При расчете прочностных характеристик вибрационной деформации элементов конструкций и деталей машиностроения следует учитывать не только вид их внешнего вибрационного нагружения, прежде всего его амплитуду, частоту и длительность, но и характер их внутренней структуры. В современных промышленных технологиях широко представлены композиционные материалы со структурной неоднородностью и усложненными физико-механическими свойствами. Наблюдается нарастающее применение в современном машиностроении структурно-неоднородных деталей и конструктивных элементов, упругие и механические свойства материалов которых так или иначе изменяются по объему, т. е. представляют собой кусочно-неоднородные тела, состоящие из большого числа протяженных неоднородных участков, в пределах каждого из которых упругие и геометрические характеристики являются функциями координат.

Неоднородность элементов агрегатов или деталей машиностроения может быть обусловлена различными причинами, например, действием нагрузок, внешних полей различной природы, способом изготовления, восстановления и др. В транспортных средствах такими деталями являются поршневые пальцы, вкладыши нижней головки шатуна, прокладки между ступицей колеса и цапфой, рессоры, шатунные шейки, элементы распределительного и коленчатого валов и др. Изначально неоднородными по структуре следует считать сварные, паяные, клеевые, клеесварные детали. Неоднородность упругих свойств деталей может быть вызвана их зависимостью от температуры. Одним из примеров неоднородности является структурная технологическая неоднородность (слоистость), т. е. зависимость от технологии изготовления конструктивных элементов, что характерно для оболочечных деталей автомобилей, например, для корпуса поршней двигателей. Все эти особенности конструктивных элементов влекут за собой появление новых волновых эффектов, локализованных в окрестности внутренних и внешних границ рабочих поверхностей деталей. Изменяется и природа краевых эффектов, которые зависят не только от размеров области сечения детали, но и от геометрических и физических параметров, определяющих характер неоднородности структуры материалов деталей.

Актуальность регулирования напряженно-деформированного состояния (НДС) в неоднородных деталях вследствие их технологического формирования путем нанесения покрытий того или иного вида и упрочнения материалов электрофизико-химическими методами обусловлена тем, что мощные термомеханические и физико-химические воздействия приводят, как правило, к образованию неблагоприятных зон локальной концентрации напряжений (ЛКН). Их действие вызывает резкое снижение трещиностойкости, сопротивления усталостному разрушению, износостойкости и других функциональных свойств. Поэтому технологическое обеспечение качества машин связано с регламентированием комплекса показателей физико-механического характера, в число которых входит интенсивность ЛКН в особых зонах сечения деталей. Ее истинное значение необходимо определять с учетом формы, неоднородности упругих и механических характеристик материалов, термомеханических, вибрационных и других нагрузочных воздействий при технологическом формировании деталей. В связи со сложностью такой задачи и большой трудностью ее аналитического решения важным является создание расчетных основ определения ЛКН экспериментальными и аналитическими методами, установление закономерностей ее возникновения для технологического регулирования с целью получения требуемых прочностных свойств деталей.

Кроме того, в процессе изготовления и восстановления неоднородных деталей автотранспортных средств, нефтехимического и машиностроительного оборудования одновременно наряду со сваркой широко применяется вибрационная обработка изготавливаемых деталей [1, 2], что накладывает существенные дополнительные требования к методикам решения задач динамической механики деформируемого твердого тела [3, 4].

2. Особенности вибрационного деформирования неоднородных упругих деталей кусочно-однородного сечения

При рассмотрении стационарных и нестационарных деформационных процессов в ограниченных упругих деталях мы сталкиваемся с существенным усложнением структуры волнового поля по сравнению с теоретическим случаем бесконечных тел. Это связано, как известно, со сложным характером отражения упругих волн от границ тела, поскольку при этом изменяется направление общего потока энергии [5, 6]. Еще более усложняется структура волнового поля, если в теле существуют внутренние границы раздела областей с различными упругими свойствами или материал, из которого изготовлена деталь, неоднороден. Математические трудности в решении граничных задач динамической теории упругости определяются, в основном, эффектом трансформации типа волновых движений при отражении от границы.

В рамках активно развиваемого во многих научно-исследовательских учреждениях научного направления – физическая мезомеханика материалов [7, 8] – экспериментально изучено поведение под нагрузкой приграничных областей структурно-неоднородных сред и установлено, что возле внутренних границ раздела возникают осцилляции локальных напряжений и деформаций, амплитуда которых существенно превышает их средние значения в объеме материала. Они определяются внутренней структурой неоднородной среды и зависят от упругих параметров контактирующих сред. На микромасштабном уровне такие осцилляции напряжений рождают потоки дислокаций, на мезомасштабном уровне – протяженные мезополосы деформации, на макромасштабном уровне – стационарное распределение макрополос локализованной деформации и разрушение материала [9]. Полученные экспериментальные результаты имеют важные приложения в механике структурно-неоднородных сред, в свою очередь имеющие важное значение в микроэлектронике, геодинамике, материаловедении (в машиностроении).

Таким образом, можно считать доказанным, что в окрестности поверхностей раздела в нагруженной кусочно-неоднородной детали локальные напряжения резко возрастают, особенно при наличии дефектов. Если уровень локальных напряжений достаточно высок, то дефект становится неустойчивым и может развиваться до столь больших размеров, что деталь может разрушиться [10]. При исследовании динамических задач теории упругости было установлено, что динамическая концентрация напряжений выше концентрации,

рассчитанной для соответствующей статической задачи. Вследствие этого может оказаться, что дефект на поверхности раздела материалов сечения детали будет развиваться или не будет в зависимости от того, прикладывается ли внешняя нагрузка внезапно, скачком, возрастает постепенно или изменяется по гармоническому закону [11, 12].

Так как наличие ЛКН может быть причиной разрушения материала, то качественное или количественное определение меры концентрации напряжений является весьма важным и всегда актуальным вопросом. Расчет распределения напряжений и деформаций в деталях машин связан со значительными трудностями, обусловленными сложностью формы и внутренней структурой деталей и условиями их нагружения. Поэтому в приближенных расчетах обычно используют упрощенные модели с оценкой их эффективности экспериментальными методами, что часто приводит к неверным выводам [13–15].

Благодаря развитию численных методов решения задач теории упругости возможности расчета напряжений и деформаций (в том числе и контактных) в деталях машин существенно расширились. Однако возросла и трудоемкость расчетов. В этих условиях процесс оптимального проектирования деталей с учетом концентрации напряжений проводят, как показывает практика, в два этапа [16]. На первом, предварительном, этапе с помощью упрощенных моделей, дающих интегральные оценки концентрации напряжений, из большого числа возможных вариантов отбирают несколько наиболее предпочтительных. На втором этапе с использованием мощной компьютерной техники и современных численных методов один из вариантов принимается в качестве окончательного решения и дается оценка прочности детали. Естественно, при таком подходе уже в начале решения задачи можно внести в расчет необоснованные погрешности и свести на нет результаты второго наиболее трудоемкого этапа. Это будет тем более вероятно, чем сложнее характер внешнего нагружения детали (вибрационный, близкий к резонансному режиму, контактный и т. п.) и чем более сложной будет внутренняя структура детали.

Особенно остро проблемы учета интенсивности ЛКН возникают при анализе несущей способности сварных, клеевых и паяных деталей, где соединения можно рассматривать как типичные зоны концентрации напряжений. Например, сварные швы можно рассматривать в качестве геометрических концентраторов напряжений [14, 17]. Клеевые соединения имеют зоны концентрации напряжений из-за непостоянства упругих свойств и изменяющейся геометрии. На краях склеенных поверхностей и сварных соединений наблюдается увеличение касательных напряжений, основной причиной которого является разница в жесткостях соединенных поверхностей [5, 18]. Прочность паяных соединений (ПС) зависит не только от правильного выбора конструкции соединения, технологии пайки, но в значительной мере находится в прямой зависимости от соотношения механических характеристик припоев и основных материалов. В частности установлено [19, 20], что при растяжении стыковых соединений в пределах упругих деформаций в паяном шве возникает неоднородное напряженное состояние. Напряжения концентрируются на краях соединения в зоне трех-четырёх толщин соединяемых деталей. При этом следует отметить, что учет всех перечисленных факторов требует проведения предварительных дорогостоящих испытаний для получения количественных характеристик прочности соединений [13]. К тому же, при динамических нагрузках, прежде всего при вибрациях и ударах, поведение таких соединений существенно отличается от их поведения при статических нагрузках.

Из сказанного ясно, что проблемы определения особенностей ЛКН в паяных соединениях, сварных деталях и клеевых конструкциях имеют первостепенное значение. Прочность ПС зависит от прочности применяемых припоев, правильности выбора их в зависимости от физико-химических свойств основного материала, а также от величины зазора, способов и режимов пайки. Так, при увеличенных зазорах припой в шве находится в литом состоянии и, следовательно, прочность соединения лимитируется прочностью литого припоя. При слишком малых зазорах может не быть затекания припоя, в результате чего нарушается сплошность шва и механические свойства ПС снижаются. Поэтому определение оптимальной величины зазора в зависимости от геометрических и структурных параметров сечения детали следует считать актуальной задачей.

Иногда на кривых зависимости прочности ПС от величины соединительного зазора наблюдается резкий скачок прочности, например, при пайке нержавеющей сталей припоем системы серебро-медь-цинк-кадмий [13]. С другой стороны, при пайке тем же припоем низкоуглеродистых сталей наблюдается совершенно иная картина, когда величина зазора практически не влияет на прочность. Это объясняется тем, что в случае пайки низкоуглеродистых сталей прочность основного материала и припоя имеет близкие значения и при испытании ПС происходит одновременная и сравнительно равномерная деформация и основного материала, и припоя [21]. В случае же пайки нержавеющей сталей различие в свойствах основного материала и припоя более резкое, поэтому соединительный зазор может оказывать такое решающее влияние на прочность ПС.

При расчете ПС на прочность необходимо исходить из того, что прочность ПС определяется прочностью ее наиболее слабого элемента. Таким элементом, как правило, является паяный шов, так как прочность припоя в литом состоянии обычно ниже прочности основного металла. Поэтому при конструировании необходимо выбирать такой тип соединения и так его располагать, чтобы обеспечить равнопрочность всей детали. Это можно достигнуть только при правильном сочетании материалов, так как различные сочетания основного материала и припоя по-разному влияют на прочность ПС. К тому же следует отметить, что вопросы прочности ПС в настоящее время рассмотрены недостаточно. Расчеты проводятся в рамках зачастую необоснованных упрощающих гипотез [13, 21]. Поэтому при проектировании паяных деталей и расчете их на прочность часто бывает необходимо проводить экспериментальную проверку влияния на прочность того или иного сочетания основного металла – припоя.

Аналогичные задачи возникают при проектировании сварных и паяных деталей с угловым швом. Дополнительную особенность вносит наличие в таких конструкциях внутренней угловой точки, где возникает ЛКН, которая при традиционном проведении инженерного прочностного расчета игнорируется. Вместе с тем можно показать, что при определенных сочетаниях упругих постоянных контактирующих сред, эта локальная концентрация будет играть определяющую роль. Еще более актуальным следует признать учет ЛКН в стыковых и угловых швах для элементов конструкций, воспринимающих действие вибрационной нагрузки, поскольку ранее установлено [22], что наилучшим типом соединения при виброн нагружении является именно соединение встык или угловое соединение.

Важным явлением, характеризующим специфику динамического деформирования деталей машин, служит «краевой резонанс», т. е. сильная локализация на определенных частотах виброн нагружения области интенсивных движений вблизи границы детали. Многие аспекты краевой моды, характерной для упругих тел конечных размеров, к настоящему времени хорошо изучены [6, 23, 24]. С большой степенью уверенности можно говорить и о том, что формирование этой моды качественно объясняется как образование стоячей волны неоднородными бегущими волнами. Изменяемость поля напряжений (деформаций) в такой волне характеризуется опущенным масштабом, который не зависит от общих размеров упругого тела. Значит и собственная частота такой формы не зависит от геометрических размеров. Только в том случае, когда масштаб неоднородных волн становится соизмерим с высотой или длиной тела, наблюдается взаимодействие неоднородных волн, связанных с различными торцами и образование форм колебаний с типичной зависимостью собственной частоты от геометрических размеров тела. В этом заключается необходимость учета краевого эффекта и его влияния на прочностные характеристики.

Количественное и качественное исследования особенностей динамического деформирования упругих деталей составного сечения и, в частности, особенности краевых эффектов представляют интерес в различных областях. Например, такая задача возникает в акустоэлектронике в связи с изучением захвата энергии [25]. Другой возможной областью приложения является неразрушающий контроль [26, 27]. Контакт волновода-источника и приемника ультразвуковых сигналов с исследуемым упругим объектом, исследование формы сигнала, излучаемого дефектом – полостью или включением, – все это при строгой

постановке краевых задач приводит к динамическим задачам теории упругости (чаще всего смешанным) для неоднородных и кусочно-неоднородных сред. Если дефектоскопию ультразвуковым сигналом называют активным поиском дефектов, то явление акустической эмиссии – пассивным. Если эмиссия в исследуемой деформируемой детали имеет своим источником концентратор напряжения – край трещины или полости, образовавшейся в детали, то в этом случае также приходится иметь дело с динамическими задачами теории упругости [28].

Как уже было отмечено выше, специфика рассматриваемых задач определяется внутренними упругими параметрами сечения детали, которые могут быть кусочно-постоянными функциями координат. Важная особенность геометрии рассматриваемых областей обусловлена наличием в них не только угловых точек, но и линий раздела сред с различными упругими характеристиками. Представляет большой практический интерес исследование особенностей волнового поля в окрестности этих внутренних линий раздела сечения – так называемых граничных эффектов, под которыми в механике деформируемого твердого тела понимают величины протяженности концентрации напряжений или в более общем случае зоны концентрации. Так как наличие ЛКН может быть причиной разрушения материала, то качественное или количественное определение меры концентрации напряжений является весьма важным и всегда актуальным вопросом.

В этой связи следует отметить, что при построении различных асимптотических подходов для решения краевых задач динамической теории упругости существенную роль играют ограничения, налагаемые на поведение искомого решения в окрестности сингулярных точек и линий сечения [29]. Дело в том, что известные теоремы единственности [30–33] относятся к случаю гладких внешних границ и поверхностей (линий) раздела. Если же допустить наличие в сечении сингулярных точек и линий, то требование непрерывности производных от перемещений вплоть до этих точек и линий оказывается слишком сильным. В результате из рассмотрения выпадает широкий класс решений динамических задач, у которых нарушается непрерывность первых производных от перемещений в сингулярных точках и линиях. Сюда, прежде всего, относятся многочисленные нестационарные задачи о движении штампов на поверхности деталей, образования трещин, дифракции волн на телах с ребрами и внутренними линиями раздела и т. д. Эти задачи являются одними из самых интересных как с теоретической, так и с прикладной точек зрения. Поэтому при их решении, исходя из физического смысла, должны быть даны разумные ограничения на поведение решений рассматриваемых задач в окрестности сингулярных точек и линий, охватывающие широкий круг задач и обеспечивающие непрерывность всех характеристик волнового поля во всей области сечения детали.

3. Состояние проблемы решения задач вибрационного деформирования деталей неоднородного сечения с негладкой границей

В настоящее время разработано два подхода к решению граничных задач теории упругости для тел конечных размеров. Один из них, метод однородных решений [6, 34–38], нашел применение в плоской задаче теории упругости, в теории тонких и толстых плит, при исследовании деформации конечного цилиндра и в ряде других случаев. Решение задачи находится с помощью однородных решений, которые являются интегралами основных уравнений теории упругости и удовлетворяют нулевым граничным условиям на части поверхности тела, совпадающей с одной из координатных поверхностей.

Во втором подходе, развитом в [6, 39–43], решение задачи представляется в виде суперпозиции нескольких последовательных частных решений. При этом предполагается, что поверхность упругой детали образована частями координатных поверхностей разных семейств в декартовой, цилиндрической и сферической системах координат. Идейную основу метода суперпозиций положил Ламе [44]. Автор рассмотрел одну из сложных задач для параллелепипеда, находящегося под действием нормальных нагрузок по граням. Общее решение этой задачи Ламе строил в виде суперпозиции последовательностей частных решений для периодически нагруженного слоя, т. е. начал с построения общего решения, которое обладало бы необходимым функциональным произволом для удовлетворения

любых граничных условий на гранях. В свое время эта идея Ламе не нашла должного применения из-за отсутствия эффективных методов исследования и решения бесконечных систем, к которым приводило удовлетворение граничных условий.

Появление стройной теории бесконечных систем [45], а также электронных машин создали предпосылки для возрождения идеи Ламе, например, в работах Б. Л. Абрамяна [46–48]. В этих работах была впервые доказана регулярность бесконечных систем, полученных при удовлетворении граничных условий, что дало возможность их приближенного решения. Однако этого оказалось недостаточно для решения вопросов об особенностях напряженного состояния вблизи угловых точек границы.

Общим недостатком последующих работ, например [49–51], являлось то, что решение задач доводилось лишь до получения бесконечных систем, тем самым исключался учет физических особенностей рассматриваемых задач.

Этот недостаток был исправлен в цикле работ киевских ученых, обобщением результатов которых явилась монография [6], где указан способ исследования бесконечных систем алгебраических уравнений, позволяющий выделить главную часть частотного определителя путем учета асимптотического поведения характеристик волнового поля в окрестности внешней угловой точки прямоугольной области. Это позволило расширить возможности метода суперпозиции и построить эффективные алгоритмы определения резонансных частот и динамической напряженности упругих тел конечных размеров.

Говоря о методе суперпозиции, следует отметить работу А. В. Белоконя [39], в которой предлагается новый подход к решению такого типа задач. Строя общее решение в форме метода суперпозиции, автор вводит в рассмотрение некоторую вспомогательную задачу, позволяющую свести решение исходной задачи к системам интегральных уравнений. Такой подход был успешно применен в работах [52, 53]. В них для случая колебаний электроупругих тел приведена модификация указанного алгоритма, улучшающая его сходимость путем учета, наряду с вещественными, комплексных корней характеристического уравнения, определяющего особенность волнового поля в угловой точке сечения.

Интересный подход реализован в работе [54], где проведен анализ уточненных уравнений свободных колебаний стержня-полосы, построенных ранее в первом приближении путем редукции двумерных уравнений к одномерным путем использования тригонометрических базисных функций и удовлетворения статическим граничным условиям на граничных поверхностях.

Большое количество публикаций посвящено исследованию упомянутого выше явления краевого резонанса. Впервые необычные резонансные колебания экспериментально обнаружил при изучении колебаний толстых пьезокерамических плит Шоу [55]. Анализ перемещений в соответствующих формах колебаний показало наличие сильной локализации области интенсивных движений вблизи края диска. Позднее существенный вклад в изучение явления краевого резонанса внесли: А. В. Белоконь, М. Е. Богуш, И. И. Ворович, М. В. Вильде, И. П. Гетман, Н. С. Городецкая, В. Т. Гринченко, В. Л. Карлаш, В. В. Мелешко, А. Ф. Улитко, Ю. А. Устинов, Ле Хань Чай, Г. Г. Черных, А. П. Федорков, J. D. Gazis, R. Holland, Y. Kagawa, P. Lloyd, H. D. McNiven, R. D. Mindlin, M. Onoe, Y. H. Pao, D. C. Perry, M. Redwood, P. J. Torvic, T. Yamabushi и др.

Теоретическое осмысление явления краевого резонанса можно найти в работах [6, 56–61], где просматривается связь между явлением краевого резонанса и особенностями процесса отражения волн от торца упругого волновода. Например, в работе [6] решается важный вопрос о зависимости характеристик краевого резонанса от геометрических размеров прямоугольного сечения. Практически, если принять во внимание результаты, полученные в работах указанных авторов, можно считать явление краевого резонанса для тел конечных размеров полностью изученным.

Переходим к анализу состояния вопроса о гармонических колебаниях изотропных неоднородных тел. Различают три типа неоднородности: а) продольная неоднородность (граница раздела сред перпендикулярна образующим поверхностям); б) поперечная

неоднородность (направление границы раздела свойств материалов параллельно образующим поверхностям); в) непрерывная неоднородность.

Огромный вклад в развитие теории и совершенствования методологии решения динамических задач неоднородных упругих тел конечных и бесконечных размеров внесли отечественные и зарубежные ученые: В. М. Александров, А. Я. Александров, В. А. Бабешко, В. М. Бабич, М. К. Балакирев, А. В. Белоконь, В. В. Болотин, Л. М. Бреховских, А. О. Ватульян, И. И. Ворович, И. П. Гетман, И. А. Гишинский, Е. В. Глушков, Н. В. Глушкова, В. Т. Гринченко, А. С. Зильбергейт, Л. П. Зинчук, Л. М. Куршин, Г. Б. Колчин, Б. И. Копилевич, В. В. Калинин, В. А. Ломакин, И. А. Молотков, А. С. Никишин, Г. И. Петрашень, В. Г. Савин, М. Г. Селезнев, В. И. Сторожев, А. Ф. Улитко, И. Н. Успенский, Ю. А. Устинов, Г. С. Шатро, Н. А. Шульга, В. А. Auld, J. Ha, E. Kausel, V. J. Kennel, N. J. Kerry, R. Kind, P. Malishevsky, E. D. Tsao и др.

Одной из первых, где довольно полно изучались физические основы распространения волн в слоистых средах, приводился анализ некоторых работ и применяемых в них методов по данной теме, является монография Л. М. Бреховских [62].

В монографии И. И. Воровича, В. А. Бабешко [31] исследованы математические вопросы, связанные со спектральными свойствами волноводов, а также с вопросами существования и единственности решения смешанных задач для неоднородной изотропной полосы. Полученные результаты по спектральной теории обобщены на волноводы произвольного типа в монографии [63].

Изучение волнового поля в слоистых средах весьма важно, т. к. является первоначальным этапом решения задачи об установившихся колебаниях неоднородных плит конечных размеров.

Установившиеся гармонические колебания поперечно-неоднородного упругого полупространства, вызванные поверхностной нагрузкой, рассматривались в работах В. А. Бабешко, Е. В. Глушкова, Н. В. Глушковой [64, 65], где приводятся алгоритмы для непрерывно-неоднородного и слоистого полупространств, устойчивость реализации которых на ЭВМ обеспечивается выделением экспоненциальной составляющей решений в явном виде. Некоторые особенности возбуждения и распространения упругих волн в неоднородных средах изучаются в работах В. В. Калинин, М. Г. Селезнева [66, 67]. Среди других работ, в которых изучается распространение волн в слоистых средах, отметим работы [68–79], выполненные у нас в стране, и [61, 80–85] за рубежом.

Вопросы распространения волн в слоистых электроупругих волноводах рассмотрены, например, в монографии М. К. Балакирева, И. А. Гишинского [86]. Слоистые плиты с произвольным числом слоев изучаются в работе И. П. Гетмана, Ю. А. Устинова [87], где, также как и в работах [88–90], разработаны эффективные аналитический и численный методы расчета волновых полей в поперечно-неоднородных плитах и цилиндрах.

Существование двух типов волн в неограниченной упругой среде вызывает большой интерес к проблеме влияния граничных и стыкуемых поверхностей на процесс распространения гармонических волн, поскольку волновая картина в упругом теле при наличии границ значительно усложняется.

Задачи нормального и наклонного падения волн на границу плоско-параллельных слоев, в том числе электроупругих, изучались в работах Н. А. Шульги [91, 92], в публикациях [54, 93, 94] и др. Обзор исследований по применению поверхностных акустических волн для неразрушающей диагностики слоистых сред дан в [95].

Вопрос о возможности существования локализованных вблизи поверхности гармонических волн впервые был поставлен и решен еще в конце XIX-го века Рэлеем [96]. Он установил, что вдоль плоской свободной границы полубесконечного однородного упругого тела может распространяться гармоническая волна. Амплитуды компонент вектора перемещений в этой волне экспоненциально убывают с увеличением расстояния вглубь полупространства. Проблемы, связанные с этими волнами, названными волнами Рэлея, для однородного тела хорошо изучены. Отметим, например, работы [54, 57, 94, 97–100] и др. Значительное влияние поверхностным волнам уделяется также в сейсмологических исследованиях [101].

Следует также отметить широкое применение волн Рэлея при ультразвуковом исследовании как линейных, так и нелинейных свойств конструкционных материалов, особенно их приповерхностных слоев [102–105]. Приповерхностные слои деталей машин испытывают наибольшие напряжения от внешних нагрузок при основных видах напряженного состояния, несут конструктивные и технологические концентраторы напряжений, подвержены влиянию технологических обработок и поэтому оказывают также существенное влияние на развитие процесса усталости материалов [106].

Некоторые новые данные о роли границы в волновых процессах раскрываются при анализе отражения и преломления плоских волн на поверхности раздела двух сред из разных материалов. Анализ таких процессов дан, например, в работах [107–110]. В работе [111] рассматривается задача о гармонических колебаниях продольного сдвига упругой полосы, сцепленной с упругим полупространством. Методом интегральных преобразований эта задача сведена к сингулярному интегральному уравнению относительно контактных напряжений в области сцепления полосы и полупространства при наличии двух неподвижных особенностей в точках, ограничивающих промежутки интегрирования. Один из основных результатов статьи – метод численного решения этого уравнения, учитывающий истинную особенность решения и основанный на применении для сингулярных интегралов специальных квадратурных формул. Полученное приближенное решение дало возможность численно исследовать влияние частоты колебаний и отношения упругих постоянных полосы и полупространства на распределение напряжений в области контакта.

Наличие границы раздела двух сред приводит не только к эффектам отражения и преломления волн. Не менее важным являются эффекты резонансного типа, т. е. возможность глобального и локального существования волн, локализующихся вблизи границы. Такими волнами являются волны Стоунли [6, 112], изучению которых также посвящены работы [59, 80, 92, 94, 113–115]. В них составлены и исследованы уравнения для отыскания фазовой скорости волны Стоунли, разработан критерий существования волн, сосредоточенных вблизи поверхности раздела, в зависимости от заданных свойств материалов полупространств, изучено влияние коэффициентов Пуассона контактирующих сред на величину скорости волны Стоунли. Отличительной особенностью работы [116] является то, что все решения строятся для волновых пакетов произвольной формы. Это позволяет для их интерпретации использовать аппарат спектрального анализа. В качестве примера анализируются, в частности, и решения для волн Стоунли.

Как известно [6], классические задачи о распространении волн в упругих однородных средах могут быть сформулированы в терминах двух потенциалов, каждый из которых удовлетворяет дифференциальному уравнению второго порядка. Для задач, связанных с распространением волн в неоднородных средах это не всегда возможно. Ravindra [117] доказал, что если плотность среды постоянна, а коэффициент Пуассона ν равен 0,25 (т. е. переменные параметры Ламе $\lambda = \mu$), то возможно получить два отдельных дифференциальных уравнения второго порядка для волновых потенциалов. При этих достаточно жестких предположениях на базе упомянутого разделения были решены несколько важных задач. Acharya [118] использовал результаты работы [117] для изучения особенностей процесса отражения волн от свободной границы неоднородного полупространства. Рао [119] показал, что для случая плоской деформации компоненты тензора напряжений определяются одной функцией, удовлетворяющей дифференциальному уравнению четвертого порядка. В работе [120] это представление использовано при решении задачи Лэмба о силовом возбуждении упругого неоднородного полупространства. Полученные в отмеченных работах результаты позволили поставить и решить задачу о влиянии неоднородности на характеристики волн Стоунли в работе [121], где рассмотрены особенности волнового поля на границе раздела однородного анизотропного и неоднородного изотропного ($\lambda = \mu, \nu = 0,25$) полупространств.

В настоящее время вопросам изучения поведения решений в окрестности особых точек границы уделяется большое внимание, поскольку знание характера особенности в решении граничной задачи до получения самого решения можно использовать для

существенного повышения эффективности алгоритма количественной интерпретации общих формул [6, 39, 40, 52, 53, 111, 122–124].

Проблемам определения упругих напряжений в деталях возле концентраторов различного вида посвящены работы О. К. Аксентяна, В. М. Александрова, А. Е. Андрейкива, В. А. Бабешко, А. О. Ватульяна, И. И. Воровича, Л. А. Галина, Е. В. Коваленко, Б. М. Морозова, В. И. Моссаковского, В. В. Панасюка, В. З. Партон, П. И. Перлина, Г. Я. Попова, В. С. Проценко, В. Л. Рвачева, М. Г. Селезнева, Б. И. Сметанина, Б. В. Соболя, Г. П. Черепанова, Д. И. Шермана, И. Я. Штаермана, J. D. Achennbach, J. P. Benthem, D. V. Bogy, J. Dundurs, M. L. Williams и др.

Вопрос о разрешимости самих задач и характере особенностей, присутствующих в решении, изучен с общих позиций теории эллиптических уравнений в областях с негладкой границей [125], где установлена разрешимость этих уравнений. По-видимому, наиболее полезные для приложений результаты получены в работе [126], в которой дан общий способ явного вычисления тех членов решения, которые обращаются в бесконечность в окрестности сингулярных точек границы.

Можно отметить два важных положения, которые сформировались в теории упругости в процессе исследований и которые применяются в работах [9, 32, 107, 110, 127–139] и др. Первое – вопрос об особенностях может быть решен на основании анализа напряженно-деформированного поля в очень малых окрестностях особых точек без решения граничной задачи для всего тела [140, 141, 142]. Второе – вопрос об особенностях при гармонических колебаниях упругих тел может быть выяснен на основе анализа решений соответствующих статических граничных задач [6, 129]. В этом направлении накоплен обширный количественный материал о «показателе особенности» и его зависимости от свойств упругих сред, геометрии области. Обобщая полученные результаты, можно сказать, что рассмотрение вопроса об особенностях связано с решением некоторых трансцендентных уравнений, имеющих, как правило, несколько корней. В этом случае из получаемого множества решений следует исключить решения, приводящие к неограниченности энергии, накопленной в окрестности сингулярной точки границы. При этом можно исходить из того соображения, что в случае замены нерегулярной части границы гладкой поверхностью энергия конечна и поэтому при переходе к нерегулярной поверхности физический смысл имеют лишь те решения, при которых ограниченность энергии сохраняется [4]. В процессе проведения численного анализа наибольший интерес вызывает то слагаемое, которое после отсечения решений с неограниченной энергией содержит наиболее сильную особенность для производных и, следовательно, больше всего затрудняет реализацию расчетной схемы. Слагаемые же, дифференцируемые более одного раза, практически не влияют на реализацию численного алгоритма, и нет нужды в их предварительном выделении. Что касается вопроса о вычислении постоянных множителей при особенности, то он имеет первостепенное практическое значение, так как связан с количественной оценкой концентрации напряжений в окрестности нерегулярных точек границы сечения детали [16, 143].

4. Проблемы проектирования и расчетов на прочность анизотропных деталей машиностроения однородного и неоднородного сечения

Кроме зачастую необоснованного игнорирования характеристик концентрации напряжений в инженерных расчетах на прочность наблюдается практически повсеместное предположение об изотропии физико-механических свойств материалов, из которых изготовлена деталь. В большинстве случаев это предположение следует признать правомерным. Однако в современных автотранспортных средствах используются для изготовления деталей и анизотропные материалы, у которых наблюдается резкое различие в упругих свойствах для разных направлений. Поскольку учет анизотропии существенно усложняет прочностной расчет, повсеместно возникают вопросы об исследовании влияния меры анизотропии материалов на исследуемые динамические эффекты при различных геометрических и структурных параметрах сечения детали.

С исследованием динамических процессов в анизотропных неоднородных упругих средах связаны также многие теоретические и прикладные проблемы акустической дефектоскопии, горнодобывающей промышленности, механики, сейсмологии. Таким образом, широкий круг приложений наряду с логикой внутреннего развития механики деформируемого твердого тела является стимулом для дальнейших исследований в области краевых задач динамической теории упругости для анизотропных сред. В большинстве публикаций рассматриваются гармонические волновые процессы, что связано, во-первых, с широким кругом их практического применения, а во-вторых, с тем, что изучение стационарных процессов является самым удобным путем к количественному описанию и пониманию особенностей нестационарных процессов в упругих телах.

Анализ и проектирование инженерных конструкций на основе современных анизотропных и неоднородных материалов требует также адекватных расчетных моделей для

исследования затухания статических краевых и локальных эффектов в анизотропных композитных материалах различной структуры [144–147]. Актуальность проблемы обусловлена в первую очередь, следующими факторами.

Структурная и конструктивная анизотропия упругих свойств материалов и его неоднородность приводит к тому, что для некоторых схем нагружения и закрепления детали зона неустановившегося напряженно-деформированного состояния (зоны краевых эффектов) может иметь значительный относительный размер. На основании данных о геометрии и размерах зоны краевых и локальных эффектов в элементе конструкции можно выделить такие области, для анализа которых является правомерным использование механических моделей, построенных на предположении об однородности поля напряжений или об известном его характере. Оценка протяженности зоны краевого эффекта также важна при разработке методики испытаний неоднородных деталей.

Анизотропия упругих свойств материала и его структурная неоднородность могут привести к возникновению высокоградиентных полей напряжений. При этом зоны концентрации напряжений могут быть локализованы в пределах области неоднородности структуры или превышать ее. Данные о распределении напряжений в зоне краевых и локальных эффектов имеют зачастую определяющее значение для прочностного анализа материала и детали.

Краевые эффекты в анизотропных материалах исследуются в основном в рамках континуального подхода [148–151]. Здесь реализуются различные способы осреднения исходных расчетных моделей, а внешние факторы и структура области учитываются в интегральном смысле или в рамках модели кусочно-однородной среды, когда используются упрощающие предположения и гипотезы относительно характера деформирования, как для компонентов области, так и для всей структуры в целом. Применение различных методов решения задач определения краевых эффектов в большинстве случаев сводится к анализу корней характеристических уравнений и построению соответствующих решений, имеющих затухающий характер. Полученные таким способом результаты часто дают только крайние оценки для параметров затухания краевых эффектов, оставляя открытым вопрос о распределении напряжений в зоне краевого эффекта и о геометрии зоны.

Плоские и пространственные задачи динамики анизотропных тел для ограниченных и полуограниченных областей (в том числе для конструктивных элементов в виде пластин и оболочек) исследованы в значительно меньшей степени, чем соответствующие классы задач динамики для изотропных сред. Исследованию статических и динамических процессов в анизотропных средах посвящены работы Л. А. Агаловяна, С. А. Амбарцумяна, Е. К. Ашкенази, В. М. Бабича, М. К. Балакирева, В. Л. Бердичевского, В. С. Будаева, И. А. Гилинского, И. И. Гольденבלата, Э. И. Григолюка, А. Н. Гузя, В. И. Королева, А. С. Космодамианского, Б. А. Кудрявцева, С. Г. Лехницкого, В. А. Ломакина, Ю. Н. Немиша, Г. И. Петрашеня, И. Н. Преображенского, А. Л. Рабиновича, В. С. Саркисяна, И. Т. Селезова, В. И. Сторожева, Ю. М. Тарнопольского, К. Ф. Черных, Т. Д. Шермергора, М. А. Шленева, Н. А. Шульги, W. Bert Charles, C. J. Bors, N. J. De Capuna, S. N. Gangulu, R. Holland, E. P. Eer Nisse,

P. A. A. Laura, R. D. Mindlin, Y. H. Pao, P. W. Randes, B. Rogovski, N. Sugimoto, D. V. Taylor, H. F. Tiersten, H. Watanabe и др.

Прежде всего, отметим, что вопросам построения общих решений уравнений теории упругости и изучения особенностей распространения волновых движений в анизотропных средах уделялось много внимания, и они рассматривались во многих работах. Некоторые из полученных результатов отражены в монографиях С. Г. Лехницкого [152], К. Борша [153], С. А. Амбарцумяна [154], А. Н. Гузя, Ю. Н. Немиша [155], К. Ф. Черных [156] и др. При этом точное решение, близкое по форме к соответствующему решению для изотропной среды, удается получить только в трансверсально изотропном случае. Для ортотропной среды и в более общих случаях анизотропии выполненные исследования можно условно разделить на три категории: 1) компоненты напряженно-деформированного состояния выражаются через некоторые функции, удовлетворяющие достаточно сложным дифференциальным уравнениям, что затрудняет их использование для решения конкретных задач; 2) общее решение строится на основе дополнительных гипотез (например, предполагается пропорциональность упругих постоянных по взаимно перпендикулярным направлениям и др.), которые во многих случаях естественной или конструктивной анизотропии приводят к значительным погрешностям; 3) решение задачи ищется приближенным методом типа последовательных приближений или малых параметров, причем за исходное (нулевое) приближение принимается решение соответствующей задачи для изотропной среды.

Построению интегральных уравнений, а также их исследованию и разработке методов решения для случая задач статических и динамических теории упругости анизотропных тел посвящены отдельные главы в монографиях В. Д. Купрадзе и др. [157], В. З. Партон и П. И. Перлина [158], Ю. В. Верюжского [159] и др.

В исследованиях краевых задач анизотропной плоской теории упругости можно выделить два классических направления. Первое из них связано с эффективным методом решения плоских граничных задач теории упругости с помощью аналитических функций комплексного переменного и контурных интегралов (интегралов типа Коши), предложенным и разработанным в классических монографиях Г. В. Колосова [160] и Н. И. Мухелишвили [161]. Данный метод находит применение и в задачах теории упругости для анизотропных сред. Это направление связано с работами С. Г. Лехницкого, Г. Н. Савина, С. Г. Михлина, А. Я. Александрова и др. Например, А. Я. Александровым [162] разработан метод представления решений основных уравнений осесимметричных задач теории упругости трансверсально-изотропного тела в форме интегральных операторов от аналитических функций комплексного переменного. Решение краевых задач с помощью этих представлений сводится, как и в изотропном случае, к нахождению некоторого числа аналитических функций. Этим методом решен ряд задач для трансверсально-изотропных тел канонической формы [163–167]. Заметим, что при таком подходе, по-видимому, основные трудности, возникающие при решении конкретных краевых задач, связаны с отысканием явного вида аналитических или обобщенных аналитических функций для различного вида геометрии областей, что особенно актуально при анализе прочности деталей автотранспортных средств. Второе направление основано на применении метода потенциала и развивалось в работах В. Д. Купрадзе, М. О. Башелейшвили [157] и др. Совершенно иной теоретико-функциональный подход, основанный на применении функций, аналитических по Дуглису, использован в работе А. П. Солдатова [168]. В работах [78, 79] на основании трехмерных уравнений связанной динамической задачи термоупругости анизотропного тела асимптотическим методом выведены двумерные рекуррентные разрешающие уравнения для неоднородного тонкого тела (пластины переменной толщины, оболочки), которые решены в случае анизотропии, обладающей в каждой точке одной плоскостью симметрии перпендикулярной поперечной оси.

Несомненный интерес представляют работы [142, 169, 170], посвященные развитию метода граничных состояний на класс задач анизотропной теории упругости. При разработке метода широко используется формализм гильбертовых пространств и теорема взаимности для среды. Вводятся понятия граничного и внутреннего состояний для анизотропной среды.

Особый интерес на наш взгляд представляют исследования, посвященные изучению влияния эффекта анизотропии на напряженно-деформированное состояние упругих сред. Это обусловлено несомненной практической значимостью таких задач, поскольку их решение позволит указать области изменения упругих параметров, в которых анизотропией упругих свойств исследуемого объекта можно пренебречь. В [155] излагается метод возмущения изотропных линейно-упругих свойств, который используется в основном для решения пространственных физически нелинейных граничных задач, однако приведены основные соотношения для применения его и при решении краевых задач для ортотропных тел, упругие свойства которых близки к линейно-упругим изотропным свойствам. На конкретных задачах для сплошной и полый сферы апробируется эффективность и практическая сходимость метода возмущения упругих изотропных свойств. В рамках такого подхода достаточно наглядно можно проследить влияние анизотропии, поскольку все решения представляют собой ряды по малому параметру, характеризующему отклонение упругих свойств объекта от изотропных. Следует отметить, что при решении задач для ортотропных тел более эффективным является метод возмущения трансверсально-изотропных свойств. За исходное приближение в этом случае принимается точное решение соответствующей задачи для трансверсально-изотропной среды.

В работах [31, 80, 86, 91, 152–154, 157, 171–175] и обзорных статьях [109, 176, 177] указаны и проанализированы основные методы, направления и результаты исследований в области изучения гармонических колебаний анизотропных сред. Наиболее широко и полно изучены вопросы распространения упругих волн в неограниченных анизотропных телах [172, 178], поверхностных волн у границы анизотропного полупространства [86, 121, 176, 179–181] с различным типом симметрии физико-механических свойств.

Плоские и пространственные краевые задачи динамики анизотропного тела для ограниченных и полуограниченных областей исследованы в значительно меньшей степени, чем соответствующие классы задач динамики для изотропных сред. В большинстве работ граница тела состоит из линий и поверхностей, совпадающих с упруго-эквивалентными направлениями анизотропных материалов и поверхностями упругой симметрии. В этом случае в граничных представлениях решений реализуется характерное для аналогичных по постановке задач динамики изотропного тела разделение переменных [154, 176, 177, 182, 183]. Следует отметить, что метод разделения переменных и его различные обобщения (метод интегральных преобразований, метод однородных решений, метод собственных векторных функций, метод суперпозиции) является основным методом, с помощью которого получено большинство точных решений граничных задач теории упругости для канонических областей. Он базируется на соответствующем использовании общих решений основных уравнений теории упругости в криволинейных ортогональных системах координат, допускающих разделение переменных в уравнении Лапласа (задачи статики) или Гельмгольца (задачи динамики). С помощью такого подхода в работах Б. Л. Абрамяна, В. М. Александрова, В. А. Бабешко, А. О. Ватульяна, И. И. Воровича, Л. А. Галина, В. Т. Гринченко, А. Н. Гузя, А. С. Космодамианского, Н. Н. Лебедева, А. И. Лурье, В. Л. Рвачева, В. И. Сторожева, Г. Н. Савина, Ю. А. Устинова, А. Ф. Улитко и других получены решения статических и динамических задач теории упругости в различных криволинейных ортогональных системах координат для канонических анизотропных областей. Многие из этих результатов отражены в указанных выше монографиях и обзорных статьях. Однако задачи этого типа не исчерпывают круг практически важных задач динамики анизотропных тел.

Для анизотропных упругих деталей, очертания границ которых не наследуют геометрию упругоэквивалентных направлений, исследование соответствующих краевых задач затруднено, что выражается в отсутствии сложившихся численно-аналитических методов решения. Ограниченность точных аналитических решений привело к интенсивному применению численных и приближенных методов механики деформируемого тела, которые позволяют для широкого круга математических моделей построить достаточные по точности приближенные решения. В качестве применяемых подходов используют метод конечных элементов (МКЭ) [183–188] и вариационные методы [189–194]. Решение также может

упрощаться при введении дополнительных искусственных ограничений на упругие постоянные [117–120, 192].

Достаточно универсальными являются методы, основанные на прямом численном интегрировании дифференциальных уравнений в частных производных с помощью метода прогонки по С. К. Годунову. Данный подход к решению общих задач механики анизотропных сред наиболее полно отражен в расчетах оболочечных конструкций в работах Я. М. Григоренко [195], В. И. Мяченкова [196].

5. Новые задачи исследований

Проведенный анализ подходов, методов и их практической реализации для решения задач определения НДС неоднородных по структуре деталей машиностроения, работающих в режиме виброн нагружения на режимах, близких к резонансным, позволяет определить круг вопросов, требующих дальнейшего развития и решения.

Использование существующих в настоящее время коммерческих фирменных универсальных программных комплексов (COSMOS/M, ANSYS и др.) для расчета прочностных характеристик деталей сложной неоднородной внутренней структуры в ряде случаев не представляется реальным по ряду причин. Во-первых, в силу их высокой конкретной стоимости (для лицензионных продуктов); во-вторых, из-за сложности освоения их инженерами; в-третьих, из-за практической неприменимости к решению специфических задач, связанных, прежде всего, с возможностью проявления тонких динамических эффектов в проблемных зонах сечения деталей (особенно при работе на частотах, близких к резонансным); в-четвертых, в силу проблем чисто вычислительного плана, связанных с ограничениями, накладываемыми на общее число элементов системы и невозможностью дополнения и расширения спектра решаемых задач.

Таким образом, даже при современном развитии численных методов, и в частности МКЭ, позволяющих с той или иной степенью точности практически решать любые задачи механики деформируемого твердого тела (объемные и в упругопластической постановке), расчеты НДС самой сложной детали, включающие совершенствование разбивки тела на элементы, по-видимому, не следует относить к числу фундаментальных теоретических разработок. В интересах развития фундаментальной науки по прочности необходимо уделить внимание развитию исследований, основанных на точных аналитических расчетах, для лучшего понимания физической сущности рассматриваемых задач механики деформируемого твердого тела. Эта сторона в методах расчета типа МКЭ полностью игнорируется, а инженерное понимание сути задачи при этом теряется.

Указанные обстоятельства определяют необходимость в формировании и создании новых подходов к анализу динамической прочности деталей сложной внутренней структуры, в разработке методов их оптимально-прочностного проектирования с учетом различной природы внутренней неоднородности и специфики внешнего динамического (в том числе контактного) нагружения. Эти подходы обязательно должны включать предварительное аналитическое или экспериментальное исследование поставленной задачи наряду с последующим применением методов численного моделирования.

В работах, посвященных решению прикладных задач механики неоднородных тел, деталь чаще всего моделируется бесконечной или полуограниченной средой. Это обстоятельство объясняется в основном возможностью применения различного рода интегральных преобразований и уменьшения размерности задачи. Хотя во многих случаях данный подход оправдан, усложнение природы волнового поля, связанное с ограничивающими граничными поверхностями детали, вызывает на некоторых частотах явления краевых эффектов [6, 108, 195, 197, 198]. Их игнорирование при инженерных расчетах может привести к неверной оценке прочностных параметров детали. Особо негативную роль играют различного рода конструктивные или технологические осложнения внутренней структуры детали, скачкообразное изменение упругих параметров сечения детали и наличие внутренних границ раздела разнородных сред. Все эти осложнения способствуют ЛКН, в результате чего возникают трещины или расслоения, приводящие к разрушению деталей. Особенно опасны такого рода концентраторы напряжений в деталях

машин, подверженных в условиях эксплуатации действию повторно-переменных напряжений. Превалирующая роль местных перенапряжений при оценке прочности деталей в зонах ЛКН, во-первых, делает невозможным непосредственное использование стандартных расчетных схем, принятых в инженерной практике и, во-вторых, требует введения достаточно простых научно обоснованных критериев оценки интенсивности ЛКН.

Существующие методы решения динамических задач теории упругости, разработанные выдающимися учеными в упомянутых выше исследованиях, хотя и являются достаточно универсальными, все же в большинстве своем нацелены на решение задач определенного типа. В одних из них не затрагиваются вопросы местной концентрации напряжений, в других – делается упор на чисто математические вопросы сходимости предлагаемых алгоритмов, в третьих – приведены сложные численные схемы решения без детального предварительного математического исследования особенностей решаемой задачи, что или понижает сходимость решения, или делает невозможным определение всех динамических прочностных характеристик (прежде всего определение компонент тензора напряжений) в окрестности нерегулярных точек границы, поскольку приводит к расходящимся рядам по выбранным координатным функциям.

Таким образом, следует считать актуальными проблемы разработки эффективных методов решения прикладных динамических задач теории упругости с учетом сложной геометрической и структурной неоднородности внутренней структуры деталей машиностроения. Эти методы должны учитывать тонкие динамические эффекты и связанные с ними особенности ЛКН, а также оценивать возможность пренебрежения в конкретных задачах при определенных сочетаниях геометрических, структурных и частотных параметров указанными эффектами.

Класс неоднородностей внутренней структуры деталей автотранспортных средств должен включать многие виды составных паяных, клеевых, сваренных и поверхностно упрочненных деталей, широко применяемых в машиностроении. При проведении прочностных расчетов их динамического НДС должны быть сформированы специальные расчетные схемы с учетом различного характера сопряжения внутренних сред, геометрии сечения и характера внешней нагрузки. На основе такого представления с использованием современных средств компьютерной техники и существующих мощных вычислительных комплексов возможно провести исследование работоспособности рассматриваемых классов неоднородных деталей.

6. Общая оценка положения дел в задачах расчета динамических прочностных параметров неоднородных тел

Представленный обзор научной периодики по аналитическим и численным методам анализа динамической прочности неоднородных изотропных и анизотропных деталей машин, находящихся в вибрационном поле, показал, что вопросы ЛКН и тонких динамических эффектов, связанных с усложнением внутренней структуры деталей, рассмотрены недостаточно полно. Наиболее эффективным и используемым методом для построения расчетных алгоритмов и создания программного обеспечения является МКЭ. Вместе с тем, непосредственное использование конечно-элементных подходов в ряде задач механики деформируемого твердого тела связано с определенными проблемами. К этим задачам относятся задачи контактного взаимодействия, оптимизационно-прочностного проектирования и другие, требующие использования аналитических, асимптотических или экспериментальных методов.

Анализ вопросов влияния ЛКН на прочностные характеристики неоднородных деталей позволил выделить круг задач, требующих дальнейшего изучения: задачи о динамическом деформировании составных деталей и влиянии на него частотного параметра (большинство исследований относится к статическим задачам); задачи, связанные с анализом сложного НДС, возникающего на стыке трех и четырех разнородных сред (в литературе все авторы ограничивались рассмотрением только случая стыка двух упругих сред), и введением для таких случаев сопряжения комплексного понятия параметра локальной особенности по напряжениям (ПЛО) и др. Эти проблемы возникают во многих прикладных задачах, где сопряжение материалов существенно влияет на прочность всей составной детали в целом,

например, при проектировании стыковых сварных и паяных соединений, в том числе угловых.

Проведенный обзор литературы, посвященной исследованию динамических характеристик волнового поля в анизотропных неоднородных средах, показал, что практически неизученной следует считать задачу о влиянии меры анизотропии на краевые и граничные динамические эффекты при вибронагрузении деталей составного сечения. Полностью отсутствуют результаты анализа взаимосвязи мер анизотропии составных частей сечения с его геометрическими и структурными параметрами, а также не введены ПЛО для случая сопряжения анизотропных сред. Между тем, зная эти зависимости и значения ПЛО, можно дать рекомендации по подбору материалов, составляющих сечение, для каждого конкретного режима вибронагрузки детали, а также оптимизировать геометрические параметры составного анизотропного сечения.

Подобные проблемы существуют и при анализе влияния структурных и геометрических параметров неоднородного сечения детали на зоны протяженности краевых и граничных эффектов. Практически полностью завершенной можно считать задачу исследования явления краевого резонанса только для однородных конечных тел канонической формы [6]. Поскольку расчет таких тонких динамических эффектов в инженерной практике затруднителен, то актуальным следует считать недостаточно изученный вопрос о зонах протяженности краевых и граничных динамических эффектов и их связи с геометрией составного сечения и частотным параметром, а также с мерами анизотропии. Ответ на этот вопрос позволит указать классы сочетаний типов материалов составного сечения, для которых при определенных сочетаниях геометрических параметров можно указанными эффектами при инженерных расчетах пренебречь.

Список литературы

1. Численное моделирование вибрационного воздействия на сварные стыковые соединения листовых заготовок / А. М. Файрушин, Т. З. Абдулин, Р. М. Ахтямов, И. Г. Ибрагимов // Электронный научный журнал «Нефтегазовое дело». – 2012. – № 3. – С. 384–392.
Chislennoye modelirovaniye vibratsionnogo vozdeystviya na svarnyye stykovyye soyedineniya listovykh zagotovok (Numerical Modelling of Vibration Impact on Welded Joints of Sheets) / A. M. Fayrushin, T. Z. Abdulin, R. M. Akhtyamov, I. G. Ibragimov // Elektronnyi nauchnyi zhurnal “Neftegazovoye delo”. – 2012. – № 3. – S. 384–392.
2. О влиянии параметров вибрационной обработки на свойства металла сварного соединения / А. М. Файрушин, Д. В. Каретников, А. Н. Салмин, Дж. А. Хаддад // Нефтегазовое дело. – 2011. – Т. 9. – № 2. – С. 70–75.
O vliyaniy parametrov vibratsionnoy obrabotki na svoystva metalla svarnogo soyedineniya (About the Influence of the Parameters of Vibration Treatment on the Metal Properties of the Welded Joints) / A. M. Fayrushin, D. V. Karetnikov, A. N. Salmin, Dzh. A. Khaddad // Neftegazovoye delo. – 2011. – T. 9. – № 2. – S. 70–75.
3. Буденков А. Г. Динамические задачи теории упругости в приложении к проблемам акустического контроля и диагностики / А. Г. Буденков, О. В. Недзвецкая. – М.: Издательство физико-математической литературы, 2004. – 136 с.
Budenkov A. G. Dinamicheskiye zadachi teorii uprugosti v prilozhenii k problemam akusticheskogo kontrolya i diagnostiki (Dynamic Problems of the Theory of Elasticity Applying to the Problems of Acoustic Control and Diagnostics) / A. G. Budenkov, O. V. Nedzvetskaya. – M.: Izdatelstvo fiziko-matematicheskoy literatury, 2004. – 136 s.
4. Партон В. З. Методы математической теории упругости / В. З. Партон, П. И. Перлин. – М.: Наука, 1981. – 688 с.
Parton V. Z. Metody matematicheskoy teorii uprugosti (Methods of the Mathematical Theory of Elasticity) / V. Z. Parton, P. I. Perlin. – M.: Nauka, 1981. – 668 s.
5. Вильнав Ж.-Ж. Клеевые соединения / Ж.-Ж. Вильнав. – М.: Техносфера, 2007. – 384 с. – (Серия: «Мир материалов и технологий»).
6. Вильнав Ж.-Ж. Клеевые соединения / Ж.-Ж. Вильнав. – М.: Техносфера, 2007. – 384 с. – (Серия: «Мир материалов и технологий»).
6. Гринченко В. Т. Гармонические колебания и волны в упругих телах / В. Т. Гринченко, В. В. Мелешко. – К.: Наук. думка, 1981. – 283 с.
Grinchenko V. T. Garmonicheskiye kolebaniya i volny v uprugikh telakh (Harmonic Oscillations and Waves in Elastic Bodies) / V. T. Grinchenko, V. V. Meleshko. – K.: Nauk. dumka, 1981. – 283 s.
7. Малинин В. Г. Структурно-аналитическая теория физической мезомеханики / В. Г. Малинин, Н. А. Малинина // Вопросы материаловедения. – 2001. – № 1 (29). – С. 123–143.
Malinin V. G. Strukturno-analicheskaya teoriya fizicheskoy mezomekhaniki (Structural-Analytical Theory of Physical Mesomechanics) / V. G. Malinin, N. A. Malinina // Voprosy materialovedeniya. – 2001. – № 1 (29). – S. 123–143.

8. Малинина Н. А. Структурно-аналитическая мезомеханика материалов с микронапряжениями / Н. А. Малинина // Изв. вузов. Физика. – 2002. – № 3. – С. 72–82.
- Malinina N. A. Strukturno-analiticheskaya mezomekhanika materialov s mikronapryazheniyami (Structural-Analitical Mesomechanics of Materials with Microstresses) / N. A. Malinina // Izv. vuzov. Fizika. – 2002. – № 3. – S. 72–82.
9. Панин В. Е. Основы физической мезомеханики структурно-неоднородных сред / В. Е. Панин, Ю. В. Гриняев, В. Е. Егорушкин // Изв. РАН. МТТ. – 2010. – № 4. – С. 8–29.
- Panin V. Ye. Osnovy fizicheskoy mezomekhaniki strukturno-neodnorodnykh sred (Basics of Physical Mesomechanics of Structurally Heterogeneous Media) / V. Ye. Panin, Yu. V. Grinyayev, V. Ye. Yegorushkin // Izv. RAN. MTT. – 2010. – № 4. – S. 8–29.
10. Пестриков В. М. Механика разрушения твердых тел: курс лекций / В. М. Пестриков, Е. М. Морозов. – М.: Профессия, 2002. – 304 с.
- Pestrikov V. M. Mekhanika razrusheniya tverdykh tel: kurs lektsiy (Mechanics of Solid Bodies Destruction: Course of Lectures) / V. M. Pestrikov, Ye. M. Morozov. – M.: Professiya, 2002. – 304 s.
11. Петров Ю. В. Об инкубационной стадии разрушения и структурных превращений в сплошных средах при импульсном вводе энергии / Ю. В. Петров // Изв. РАН. Мех. тверд. тела. – 2007. – № 5. – С. 40–49.
- Petrov Yu. V. Ob inkubatsionnoy stadii razrusheniya i strukturnykh prevrasheniy v sploshnykh sredakh pri impulsnom vvode energii (About the Incubation Stage of Destruction and Structural Transformations in Continuous Media while Energy Impulse Inlet) / Yu. V. Petrov // Izv. RAN. Mekh. tverd. tela. – 2007. – № 5. – S. 40–49.
12. Bratov V. Application of Incubation Time Approach to Simulate Dynamic Crack Propagation / V. Bratov, Y. Petrov // International Journal of Fracture. – 2007. – V. 146. – Pp. 53–60.
13. Кузнецов О. А. Прочность паяных соединений / О. А. Кузнецов, А. И. Погалов. – М.: Машиностроение, 1987. – 112 с.
- Kuznetsov O. A. Prochnost payannykh soyedineniy (Soldered Joints Strength) / O. A. Kuznetsov, A. I. Pogalov. – M.: Mashinostroyeniye, 1987. – 112 s.
14. Недосека А. Я. Основы расчета и диагностики сварных конструкций / А. Я. Недосека. – К.: ИНДПРОМ, 1998. – 640 с.
- Nedoseka A. Ya. Osnovy rascheta i diagnostiki svarnykh konstruksiy (Design and Diagnostics Basics of Weldered Structures) / A. Ya. Nedoseka. – K.: INDPROM, 1998. – 640 s.
15. Радкевич Я. М. Метрология, стандартизация и сертификация: учеб. для вузов / Я. М. Радкевич, А. Г. Схиртладзе, Б. И. Лактионов. – М.: Высш. шк., 2004. – 767 с.
- Radkevich Ya. M. Metrologiya, standartizatsiya i sertifikatsiya: ucheb. dlya vuzov (Metrology, Standartization and Certification: College Textbook) / Ya. M. Radkevich, A. G. Skhirtladze, B. I. Laktionov. – M.: Vyssh. shk., 2004. – 767 s.
16. Иосилевич Г. Б. Концентрация напряжений и деформаций в деталях машин / Г. Б. Иосилевич. – М.: Машиностроение, 1981. – 224 с.
- Iosilevich G. B. Kontsentratsiya napryazheniy i deformatsiy v detalyakh mashin (Stresses and Deformations Concentration in Machine Elements) / G. V. Iosilevich. – M.: Mashinostroyeniye, 1981. – 224 s.
17. Маслов Б. Г. Неразрушающий контроль сварных соединений и изделий в машиностроении / Б. Г. Маслов. – М.: Академия, 2008. – 272 с.
- Maslov B. G. Nerazrushayushchiy kontrol svarnykh soyedineniy i izdeliy v mashinostroyenii (Nondestructive Control of Welded Joints and Products of Machine Engineering) / B. G. Maslov. – M.: Akademiya, 2008. – 272 s.
18. Касаткин Б. С. Напряжения и деформации при сварке / Б. С. Касаткин, В. М. Прохоренко, И. М. Чертов. – К.: Вища школа, 1987. – 246 с.
- Kasatkin B. S. Napryazheniye i deformatsii pri svarke (Stresses and Deformations while Welding) / B. S. Kasatkin, V. M. Prokhorenko, I. M. Chertov. – K.: Vyshcha shkola, 1987. – 246 s.
19. Турусов Р. А. Напряженное состояние и особенности оценки прочности адгезионных соединений при отрыве / Р. А. Турусов, К. Т. Вубе // Физика и химия обработки материалов. – 1980. – № 2. – С. 108–115.
- Turusov R. A. Napryazhennoye sostoyaniye i osobennosti otsenki prochnosti adgezionnykh soyedineniy pri otryve (Stress State and Strength Assessment Features of Adhesive Junctions at Separation) / R. A. Turusov, K. T. Vube // Fizika i khimiya obrabotki materialov. – № 2. – S. 108–115.
20. Фрейдин А. С. Прочность и долговечность клеевых соединений / А. С. Фрейдин. – М.: Химия, 1981. – 272 с.
- Freydin A. S. Prochnost i dolgovechnost kleyevykh soyedineniy (Strength and Durability of Glued Joints) / A. S. Freydin. – M.: Khimiya, 1981. – 272 s.
21. Парфенов А. Введение в теорию прочности паяных соединений / А. Парфенов // Технологии в электронной промышленности. – 2007. – № 3. – С. 20–24.
- Parfenov A. Vvedeniye v teoriyu prochnosti payannykh soyedineniy (Introduction to the Theory of Strength of Soldered Joints) / A. Parfenov // Tekhnologii v elektronnoy promyshlennosti. – 2007. – № 3. – S. 20–24.
22. Навроцкий Д. И. Прочность сварных соединений / Д. И. Навроцкий. – М.–Л.: Госуд. научно-техн. изд-во машиностр. л-ры, 1961. – 176 с.

- Navrotskiy D. I. Prochnost svarnykh soyedineniy (Strength of Weldered Joints) / D. I. Navrotskiy. – М. – Л.: Gosud. nauchno-tekhn. izd-vo mashinostr. l-ry, 1961. – 176 s.
23. Вильде М. В. Изгибный граничный резонанс в системе из двух состыкованных торцами полуполос / М. В. Вильде, И. М. Гуляева // Математика. Механика. – Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2004. – С. 174–176.
- Vilde M. V. Izgibnyi granichnyi rezonans v sisteme iz dvukh sostykovannykh tortsami polupolos (Bend Boundary Resonance in the System of Two Butt Jointed Half Strips) / M. V. Vilde, I. M. Gulyayeva // Matematika. Mekhanika. – Saratov: Izd-vo Sarat. un-ta, 2004. – S. 174–176.
24. Метод слоистых элементов в динамической теории упругости / Е. В. Глушков, Н. В. Глушкова, А. А. Еремин, В. В. Михаськив // ПММ. – 2009. – Т. 73. – Вып. 4. – С. 622–634.
- Metod sloistykh elementov v dinamicheskoy teorii uprugosti (Method of Layered Elements in the Dynamic Theory of Elasticity) / Ye. V. Glushkov, N. V. Glushkova, A. A. Yeremin, V. V. Mikhaskiv // PMM. – 2009. – T. 73. – Vyp. 4. – S. 622–634.
25. Watanabe H. A New Type of Energy Trapping Caused by Contribution from the Complex Branches of Dispersion Curves / H. Watanabe, H. Hiroshi // IEEE. Trans. Son. and Ultrasonics. – 1981. – Vol. 28. – № 4. – Pp. 265–270.
26. Буйло С. И. Физико-механические и статистические аспекты повышения достоверности результатов акустико-эмиссионного контроля и диагностики / С. И. Буйло; ответственный редактор д-р физ.-мат. наук, проф. А. В. Белоконь. – Ростов-н/Д.: Изд-во Южного федерального ун-та, 2008. – 192 с.
- Buylo S. I. Fiziko-mekhanicheskiye i statisticheskiye aspekty povysheniya dostovernosti rezultatov akustiko-emissionnogo kontrolya i diagnostiki (Physical-Mechanical and Statistical Aspects of Improvement of the Accuracy of Results of Acoustic-Emission Control and Diagnostics) / S. I. Buylo; otvetstvennyi redactor d-r fiz.-mat. nauk, prof. A. V. Belokon. – Rostov-n/D.: Izd-vo Yuzhnogo federalnogo un-ta, 2008. – 192 s.
27. Rokhlin S. I. Coupling of Lamb Waves with the Aperture between two Elastic Sheets / S. I. Rokhlin, F. Bendec // Ibid. – 1983. – Vol. 73. – № 1. – P. 55–60.
28. Буйло С. И. Диагностика ранних стадий разрушения материалов по амплитудным и временным инвариантам потока актов акустической эмиссии / С. И. Буйло // Контроль. Диагностика. – 2009. – № 5. – С. 33–38.
- Buylo S. I. Diagnostika rannikh stadiy razrusheniya materialov po amplitudnym i vremennym invariantam potoka aktov akusticheskoy emissii (Diagnostics of Early Stages of Materials Destruction by Amplitude and Temporal Invariants of Flows of Acoustic Emission) / S. I. Buylo // Kontrol. Diagnostika. – 2009.– № 5. – S. 33–38.
29. Nkemzi B. On Solution of Lamé Equations in Axisymmetric Domains with Conical Points / B. Nkemzi // Math. Methods Appl. Sciences. – 2005. – V. 28. – Iss.1. – Pp. 29–41.
30. Петрашень Г. И. Основы математической теории распространения упругих волн / Г. И. Петрашень // Вопросы динамической теории распространения сейсмических волн. – Л.: Наука, 1978. – Вып. XVIII. – 288 с.
- Petrashen G. I. Osnovy matematicheskoy teorii rasprostraneniya uprugikh voln (Basis of the Mathematical Theory of Elastic Waves Propagation) / G. I. Petrashen // Voprosy dinamicheskoy teorii rasprostraneniya seysmicheskikh voln. – L. Nauka, 1978. – Vyp. XVIII. – 288 s.
31. Ворович И. И. Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей / И. И. Ворович, В. А. Бабешко. – М.: Наука, 1979. – 319 с.
- Vorovich I. I. Dinamicheskiye smeshannyye zadachi teorii uprugosti dlya neklassicheskikh oblastey (Dynamic Mixed Problems of the Theory of Elasticity for Nonclassical Areas) / I. I. Vorovich, V. A. Babeshko. – М.: Nauka, 1979. – 319 s.
32. Ворович И. И. О поведении решения основной краевой задачи плоской теории упругости в окрестности особых точек границы / И. И. Ворович // III Всесоюз. съезд по теор. и прикл. механ. – М., 1968. – С. 80.
- Vorovich I. I. O provedenii resheniya osnovnoy krayevoy zadachi ploskoy teorii uprugosti v okrestnosti osobykh tochek granitsy (About Solving the Main Boundary Problem of the Plain Theory of Elasticity in the Vicinity of Critical Points of the Boundary) / I. I. Vorovich // III Vsesoyuz. syezhd po teor. i prikl. mekhan. – М., 1968. – S. 80.
33. Глушков Е. В. Показатели сингулярности упругих напряжений в точке выхода трещины на поверхность / Е. В. Глушков, Н. В. Глушкова, О. Н. Лапина // Изв. РАН. «Мех. твердого тела.» – 1998. – № 5. – С. 146–153.
- Glushkov Ye. V. Pokazateli singulyarnosti uprugikh napryazheniy v tochke vykhoda treshchiny na poverkhnost (Indexes of Singularity of Elastic Stresses at the Point of the Crack Exposure) / Ye. V. Glushkov, N. V. Glushkova, O. N. Lapina // Izv. RAN “Mekh. tverdogo tela”. – 1998. – № 5. – S. 146–153.
34. Ахметов Н. К. Некоторые задачи теории упругости для сильно неоднородных слоистых пластин и оболочек / Н. К. Ахметов, Ю. А. Устинов // Актуальні аспекти фізико-механічних досліджень. Акустика і хвилі. – К.: Наукова думка, 2007. – Т. 2. – С. 48–61.
- Akhmetov N. K. Nekotoryye zadachi teorii uprugosti dlya silno neodnorodnykh sloistykh plastin i obolochek (Some Problems of the Theory of Elasticity for very Heterogeneous Layered Plates and Shells) / N. K. Akhmetov, Yu. A. Ustinov // Aktualni aspekty fizyko-mekhanichnykh doslidzhen. Akustyka i khvili. – К.: Naukova dumka, 2007. – T. 2. – S. 48–61.
35. Базаренко Н. А. Взаимодействие полого цилиндра конечной длины и плиты с цилиндрической полостью с жестким вкладышем / Н. А. Базаренко // ПММ. – 2010. – Т. 74. – Вып. 3. – С. 455–468.

- Bazarenko N. A. Vzaimodeystviye pologo tsilindra konechnoy dliny s tsilindricheskoy polostyu s zhestkim vkladyshe (Interaction of the Hollow Cylinder of Finite Length with the Cylindrical Cavity with a Rigid Insert) / N. A. Bazarenko // PMM. – 2010. – Т. 74. – Вып. 3. – С. 455–468.
36. Космодамианский А. С. Толстые многосвязные пластины / А. С. Космодамианский, В. С. Шалдырван. – К.: Наукова думка, 1978. – 240 с.
- Kosmodamianskiy A. S. Tolstyeye mnogovyaznyye plastiny (Thick Multiply Connected Plates) / A. S. Kosmodamianskiy, V. S. Shaldyrvan. – K.: Naukova dumka, 1978. – 240 s.
37. Прокопов В. К. Обзор работ по однородным решениям теории упругости и их приложениям / В. К. Прокопов // Тр. Ленингр. политехн. ин-та. – 1967. – № 279. – С. 31–46.
- Prokopov V. K. Obzor rabot po odnorodnym resheniyam teorii uprugosti i ikh prilozheniyam (Review of Works on Homogeneous Solutions of the Theory of Elasticity and their Applications) / V. K. Prokopov // Tr. Leningr. politekhn. in-ta. – 1967. – № 279. – С. 31–46.
38. Коваленко М. Д. Однородные решения теории упругости. Биортогональные разложения / М. Д. Коваленко, Н. В. Клейн // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2005. – Т. 11. – № 3. – С. 393–408.
- Kovalenko M. D. Odnorodnyye resheniya teorii uprugosti. Biortogonalnyye razlozheniya (Homogenous Solutions of the Theory of Elasticity. Biorthogonal Decomposition) / M. D. Kovalenko, N. V. Kleyn // Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruktsiy. – 2005. – Т. 11. – № 3. – С. 393–408.
39. Белоконь А. В. Об одном методе решения задач теории упругости для тел конечных размеров / А. В. Белоконь // Докл. АН СССР. – 1977. – Т. 233. – № 1. – С. 56–59.
- Belokon A. V. Ob odnom metode resheniya zadach teorii uprugosti dlya tel konechnykh razmerov (About One Method of Solution of Problems of the Theory of Elasticity for Bodies of Finite Sizes) / A. V. Belokon // Dokl. AN SSSR. – 1977. – Т. 233. – № 1. – С. 56–59.
40. Гринченко В. Т. Равновесие упругих тел канонической формы / В. Т. Гринченко, А. Ф. Улитко. – К.: Наук. думка, 1985. – (Пространственные задачи теории упругости и пластичности: в 6-ти т.). Т. 3. – 1985. – 280 с.
- Grinchenko V. T. Ravnovesiye uprugikh tel kanonicheskoy formy (Equilibrium of Elastic Bodies of Canonical Shape) / V. T. Grinchenko, A. F. Ulitko. – K.: Nauk. dumka, 1985. – (Prostranstvennyye zadachi teorii uprugosti i plastichnosti: v 6-ti t.). Т. 3. – 1985. – 280 s.
41. Vovk L. P. Dynamic Concentration of Stresses in Elastic Compound Solids / L. P. Vovk. – Proceedings of Donetsk National Technical University. – 2010. – № 1. – Pp. 39–54.
42. Вовк Л. П. Динамические задачи для тел сложной структуры / Л. П. Вовк. – Ростов-н/Д.: Ростовский гос. строит. ун-т, 2003. – 169 с.
- Vovk L. P. Dinamicheskiye zadachi dlya tel slozhnoy struktury (Dynamic Problems for Bodies of Complex Structure) / L. P. Vovk. – Rostov-n/D.: Rostovskiy gos. stroit. un-t, 2003. – 169 s.
43. Вовк Л. П. Особенности локальной концентрации волнового поля на границе раздела упругих сред / Л. П. Вовк. – Донецк: Норд-Пресс, 2004. – 267 с.
- Vovk L. P. Osobennosti lokalnoy kontsentratsii volnovogo polya na granitse razdela uprugikh sred (Peculiarities of the Local Concentration of the Wave Field at the Interface of Elastic Media) / L. P. Vovk. – Donetsk: Nord-Press, 2004. – 267 s.
44. Lamé G. Leçons sur la théorie mathématique de l'élasticité des corps solides / G. Lamé // Paris: Bachelier. – 1852. – 335 p.
45. Коялович Б. М. Исследование о бесконечных системах линейных уравнений / Б. М. Коялович // Изв. физ.-мат. ин-та им. И. А. Стеклова. – 1930. – Т. 3. – С. 41–67.
- Koyalovich B. M. Issledovaniye o beskonechnykh sistemakh lineynykh uravneniy (Investigation about Infinite Systems of Linear Equations) / B. M. Koyalovich // Izv. fiz.-mat. in-ta im I. A. Steklova. – 1930. – Т. 3. – С. 41–67.
46. Абрамян Б. Л. К плоской задаче теории упругости для прямоугольника / Б. Л. Абрамян // ПММ. – 1957. – Т. 21. – Вып. 1. – С. 89–101.
- Abramyan B. L. K ploskoy zadache teorii uprugosti dlya pryamougolnika (To the Plane Problem of the Theory of Elasticity for a Rectangle) / B. L. Abramyan // PMM. – 1957. – Т. 21. – Вып. 1 – С. 89–101.
47. Абрамян Б. Л. Решение плоской задачи теории упругости для прямоугольника в перемещениях / Б. Л. Абрамян, М. М. Манукян // ДАН Арм. ССР. – 1959. – Т. 25. – № 4. – С. 177–184.
- Abramyan B. L. Resheniye ploskoy teorii uprugosti dlya pryamougolnika v peremesheniyakh (Solution of the Plane Problem of the Theory of Elasticity for a Rectangle at Movements) / B. L. Abramyan, M. M. Manukyan // DAN Arm. SSR. – 1959. – Т. 25. – № 4. – С. 177–184.
48. Абрамян Б. Л. Об одном случае плоской задачи теории упругости для прямоугольника / Б. Л. Абрамян // Докл. АН Арм. ССР. – 1955. – Т. 21. – № 5. – С. 65–72.
- Abramyan B. L. Ob odnom sluchaye ploskoy zadachi teorii uprugosti dlya pryamougolnika (About One Case of the Plane Problem of the Theory of Elasticity for a Rectangle) / B. L. Abramyan // Dokl. AN. Arm. SSR. – 1955. – Т. 21. – № 5. – С. 65–72.

49. Головин О. А. О вынужденных продольных колебаниях цилиндра / О. А. Головин // Изв. АН Арм. ССР. – 1970. – Т. 23. – № 3. – С. 43–49. – (Серия «Механика»).
- Golovin O. A. O vyzhuzhennykh prodolnykh kolebaniyakh tsilindra (About Forced Longitudinal Oscillation of a Cylinder) / O. A. Golovin // Izv. AN Arm. SSR. – 1970. – Т. 23. – № 3. – С. 43–49. – (Seriya “Mekhanika”).
50. Головин О. А. О вынужденных продольных колебаниях цилиндра при заданных на поверхности напряжениях / О. А. Головин // Изв. АН Арм. ССР. – 1971. – Т. 24. – № 4. – С. 69–76. – (Серия «Механика»).
- Golovin O. A. O vyzhuzhennykh prodolnykh kolebaniyakh tsilindra pri zadannykh na poverkhnosti napryazheniyakh (About Forced Longitudinal Oscillations of a Cylinder at the Set Surface Stresses) / O. A. Golovin // Izv. AN Arm. SSR. – 1971. – Т. 24. – № 4. – С. 69–76. – (Seriya “Mekhanika”).
51. Листов Г. Н. Динамическая задача теории упругости об установившихся колебаниях прямоугольной области / Г. Н. Листов // Изв. АН СССР. – 1968. – № 1. – С. 116–122. – (Серия «Механика твердого тела»).
- Listov G. N. Dinamicheskaya zadacha teorii uprugosti ob ustanovivshixsya kolebaniyakh pryamougolnoy oblasti (Dynamic Problem of the Theory of Elasticity about Steady Oscillations of the Rectangular Area) / G. N. Listov // Izv. AN SSSR. – 1968. – № 1. – С. 116–122. – (Seriya “Mekhanika tverdogo tela”).
52. Вовк Л. П. Симметричные колебания электроупругой пластины / Л. П. Вовк // Известия СКНЦ ВШ. – 1982. – № 3. – С. 42–45.
- Vovk L. P. Simmetrichnyye kolebaniya elektrouprugoy plastiny (Symmetrical Oscillations of an Electroelastic Plate) / L. P. Vovk // Izvestiya SKNTs VSh. – 1982. – № 3. – С. 42–45.
53. Вовк Л. П. Об установившихся колебаниях электроупругой пластины переменной толщины / Л. П. Вовк, А. В. Белоконь // Прикладная механика. – 1982. – Т. 18. – № 5. – С. 93–97.
- Vovk L. P. Ob ustanovivshixsya kolebaniyakh elektrouprugoy plastiny peremennoy tolshchiny (About Steady Oscillations of the Electroelastic Plate with Variable Thickness) / L. P. Vovk, A. V. Belokon // Prikladnaya mekhanika. – 1982. – Т. 18. – № 5. – С. 93–97.
54. Савин В. Г. Фазовые и групповые скорости поверхностной волны Лява в слоистой среде / В. Г. Савин, Н. А. Шульга // Акуст. журнал. – 1975. – Т. 21. – № 2. – С. 260–263.
- Savin V. G. Fazovye i gruppovye skorosti poverkhnostnoy volny Lyava v sloistoy srede (Phase and Group Velocities of Surface Love Waves in a Layered Medium) / V. G. Savin, N. A. Shulga // Akust. zhurnal. – 1975. – Т. 21. – № 2. – С. 260–263.
55. Shaw E. A. G. On the Resonant Vibrations of Thick Barium Titanate Disks / E. A. G. Shaw // J. Acoust. Soc. Amer. – 1956. – Vol. 20. – № 1. – Pp. 38–50.
56. Вильде М. В. Изгибный краевой резонанс в тонкой упругой пластинке / М. В. Вильде // Вестник ННГУ. – 2004. – Вып. 1 (6). – С. 43–56. – (Серия «Механика»).
- Vilde M. V. Izgibnyi krayevoj rezonans v tonkoj uprugoy plastinke (Bend Boundary Resonance in a Thin Elastic Plate) / M. V. Vilde // Vestnik NNGU. – 2004. – Вып. 1 (6). – С. 43–56. – (Seriya “Mekhanika”).
57. Вильде М. В. Резонансы волны Рэлея в полуполосе / М. В. Вильде // Проблемы прочности и пластичности. – Н. Новгород: Изд-во Нижневгородского ун-та, 2004. – Вып. 66. – С. 29–38.
- Vilde M. V. Rezonansy volny Releya v polupolose (Rayleigh Wave Resonance in a Half Strip) / M. V. Vilde // Problemy prochnosti i elastichnosti. – N. Novgorod: Izd-vo Nizhnevgorodskogo un-ta, 2004. – Вып. 66. – С. 29–38.
58. Вильде М. В. Асимптотики изгибных мод бесконечной тонкой пластины-полосы / М. В. Вильде // Изв. Северо-Кавказского региона. Приложение № 11. – 2004. – С. 36–51.
- Vilde M. V. Asimptotiki izgibnykh mod beskonechnoy tonkoj plastiny-polosy (Asymptotics of Bending Modes of an Endless Plate-Strip) / M. V. Vilde // Izv. Severo-Kavkazskogo regiona. Prilozheniye № 11. – 2004. – С. 36–51.
59. Вильде М. В. Резонансы планарной волны типа Стоунли в продольно-неоднородной полосе / М. В. Вильде, С. А. Залесная // Математика. Механика. – Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 2004. – С. 176–178.
- Vilde M. V. Rezonansy planarnoy volny tipa Stounli v prodolno-neodnorodnoy polose (Resonances of a Plane Wave of Stoneley Type in a Longitudinal Heterogeneous Strip) / M. V. Vilde, S. A. Zalesnaya // Matematika. Mekhanika. – Saratov: Izd-vo Sarat. un-ta, 2004. – С. 176–178.
60. Ле Хань Чай О краевом резонансе в полубесконечной упругой полосе / Ле Хань Чай // Вестн. МГУ. – 1984. – № 5. – С. 57–60. – (Серия 1 «Математика и механика»).
- Le Khan Chay O krayevom rezonanse v polubeskonechnoy uprugoy polose (About Boundary Resonance in Half Endless Elastic Strip) / Le Khan Chay // Vestn. MGU. Ser. I. Matem i mekhan. – 1984. – № 5. – С. 57–60. – (Seriya 1 “Matematika i mekhanika”).
61. Kausel E. Wave Propagation in Anisotropic Layered Media / E. Kausel // Ins. J. Numa. Meth. Eng. – 1986. – Vol. 23. – № 8. – Pp. 1567–1578.
62. Бреховских Л. М. Волны в слоистых средах / Л. М. Бреховских. – М.: Изд-во АН СССР, 1957. – 502 с.
- Brekhovskikh L. M. Volny v sloistyx sredakh (Waves in Layered Media) / L. M. Brekhovskikh. – M.: Izd-vo AN SSSR, 1957. – 502 s.

63. Зильбергейт А. С. Спектральная теория регулярных волноводов / А. С. Зильбергейт, Ю. И. Копилевич. – Л.: Наука, 1983. – 302 с.
- Zilbergleyt A. S. Spektralnaya teoriya regulyarnykh volnovodov (Spectral Theory of Regular Waveguides) / A. S. Zilbergleyt, Yu. I. Kopilevich. – L.: Nauka, 1983. – 302 s.
64. Бабешко В. А. Методы построения матрицы Грина стратифицированного упругого полупространства / В. А. Бабешко, Е. В. Глушков, Н. В. Глушкова // Журнал вычисл. матем. и математ. физики. – 1987. – Т. 27. – № 1. – С. 93–101.
- Babeshko V. A. Metody postroyeniya matritsy Grina stratifitsirovannogo uprugogo poluprostranstva (Methods of Green Matrix of Elastic Stratified Half Space Building) / V. A. Babeshko, Ye. V. Glushkov, N. V. Glushkova // Zhurnal vychisl. matem i matem. fiziki. – 1987. – Т. 27. – № 1. – С. 93–101.
65. Бабешко В. А. Динамика неоднородных линейно-упругих сред / В. А. Бабешко, Е. В. Глушков, Ж. В. Зинченко. – М.: Наука, 1989. – 344 с.
- Babeshko V. A. Dinamika neodnorodnykh lineynouprugikh sred (Dynamics of Heterogeneous Linear-Elastic Media) / V. A. Babeshko, Ye. V. Glushkov, Zh. V. Zinchenko. – M.: Nauka, 1989. – 344 s.
66. Калинин В. В. Некоторые особенности возбуждения и распространения упругих волн в неоднородных средах / В. В. Калинин, М. Г. Селезнев // Разработка и исследование источников сейсмических сигналов и методов невязрывной сейсморазведки. – М., 1986. – С. 61–66.
- Kalinchuk V. V. Nekotoryye osobennosti vozbuzhdeniya i rasprostraneniya uprugikh voln v neodnorodnykh sredakh (Some Peculiarities of Generation and Propagation of Elastic Waves in Heterogeneous Media) / V. V. Kalinchuk, M. G. Seleznev // Razrabotka i issledovaniye istochnikov seysmicheskikh signalov i metodov nevzryvnoy seysmorazvedki. – M., 1986. – С. 61–66.
67. Калинин В. В. Динамика поверхности неоднородных сред / В. В. Калинин, Т. И. Белянкова. – М.: Физматлит, 2009. – 312 с.
- Kalinchuk V. V. Dinamika poverkhnosti neodnorodnykh sred (Dynamics of Surface of Heterogeneous Media) / V. V. Kalinchuk, T. I. Belyankova. – M.: Fizmatlit, 2009. – 312 s.
68. Альшиц В. И. Аномальная дисперсия поперечных акустических волн в пьезоэлектрической сэндвич-структуре / В. И. Альшиц, В. Н. Любимов // Физика твердого тела. – 2003. – Т. 45. – Вып. 5. – С. 832–835.
- Alshits V. I. Anomalnaya dispersiya poperechnykh akusticheskikh voln v pyezoelektricheskoy sandwich-strukture (Abnormal Dispersion of Transverse Waves in Piezoelectric Sandwich Structure) / V. I. Alshits, V. N. Lyubimov // Fizika tverdogo tela. – 2003. – Т. 45. – Вып. 5. – С. 832–835.
69. Бабич В. М. Фундаментальные решения динамических уравнений теории упругости для неоднородной среды / В. М. Бабич // Прикл. матем. и механ. – 1961. – Т. 21. – № 1. – С. 38–45.
- Babich V. M. Fundamentalnyye resheniya dinamicheskikh uravneniy teorii uprugosti dlya neodnorodnoy sredy (Basic Solutions of Dynamic Equations of the Theory of Elasticity for a Nonhomogeneous Medium) / V. M. Babich // Prikl. matem. i mekhan. – 1961. – Т. 21. – № 1. – С. 38–45.
70. Румянцев В. В. Распространение упругих волн в неидеальной слоистой среде / В. В. Румянцев, С. А. Федоров, В. М. Юрченко // Журнал технической физики. – 2013. – Т. 83. – Вып. 2. – С. 110–114.
- Rumyantsev V. V. Rasprostraneniye uprugikh voln v neidealnoy srede (Elastic Waves Propagation in Heterogeneous Layered Medium) / V. V. Rumyantsev, S. A. Fedorov, V. M. Yurchenko // Zhurnal tekhnicheskoy fiziki. – 2013. – Т. 83. – Вып. 2. – С. 110–114.
71. Глушков Е. В. Возбуждение и распространение упругих волн в многослойных анизотропных композитах / Е. В. Глушков, Н. В. Глушкова, А. С. Кривонос // ПММ. – 2010. – Т. 74. – Вып. 3. – С. 419–432.
- Glushkov Ye. V. Vozbuzhdeniye i rasprostraneniye uprugikh voln v mnogosloynnykh anizotropnykh kompozitakh (Generation and Propagation of Elastic Waves in Multilayered Anisotropic Composites) / Ye. V. Glushkov, N. V. Glushkova, A. S. Krivonos // PMM. – 2010. – Т. 74. – Вып. 3. – С. 419–432.
72. Болотин В. В. Механика многослойных конструкций / В. В. Болотин, Ю. Н. Новичков. – М.: Машиностроение, 1980. – 375 с.
- Bolotin V. V. Mekhanika mnogosloynnykh konstruksiy (Mechanics of Multilayered Structures) / V. V. Bolotin, Yu. N. Novichkov. – M.: Mashinostroyeniye, 1980. – 375 s.
73. Колчин Г. Б. Расчет элементов конструкций из упругих неоднородных материалов / Г. Б. Колчин. – Кишинев: Карта молдовеняскэ, 1971. – 172 с.
- Kolchin G. B. Raschet elementov konstruksiy iz uprugikh neodnorodnykh materialov (Design of Elements of Structures from Elastic Nonhomogeneous Materials) / G. B. Kolchin. – Kishinev: Kartya moldovenyaske, 1971. – 172 s.
74. Колчин Г. Б. Теория упругости неоднородных тел / Г. Б. Колчин, Э. А. Фатерман. – Кишинев: Штеница, 1972.
- Kolchin G. B. Teoriya uprugosti neodnorodnykh tel (The Theory of Elasticity of Heterogeneous Bodies) / G. B. Kolchin, E. A. Faterman. – Kishinev: Shtinitza, 1972.
75. Кривонос А. С. Энергетические характеристики упругих волн в многослойных анизотропных композитах / А. С. Кривонос // Экологический вестник научных центров ЧЭС. – 2009. – № 3. – С. 64–71.

- Krivos A. S. Energeticheskiye kharakteristiki uprugikh voln v mnogoslounnykh anizotropnykh kompozitakh (Energy Characteristics of Elastic Waves in Multilayered Anisotropic Composites) / A. S. Krivos // *Ekologicheskiy vestnik nauchnykh tse ntrov ChES*. – 2009. – № 3. – S. 64–71.
76. Ломакин В. А. Теория упругости неоднородных тел / В. А. Ломакин. – М.: Изд-во МГУ, 1976. – 367 с.
- Lomakin V. A. Teoriya uprugosti neodnorodnykh tel (Theory of Elasticity of Heterogeneous Bodies) / V. A. Lomakin. – М.: Изд-во МГУ, 1976. – 367 s.
77. Тютюкин В. В. Нормальные волны твердых слоисто-неоднородных волноводов / В. В. Тютюкин // *Акуст. журнал*. – 1984. – Т. 30. – № 3. – С. 373–379.
- Tyutekin V. V. Normalnyye volny tverdykh sloisto-neodnorodnykh volnovodov (Normal Waves of Solid Layered-Heterogeneous Waveguides) / V. V. Tyutekin // *Akust. zhurnal*. – 1984. – Т. 30. – № 3. – С. 373–379.
78. Агаловян Л. А. Асимптотические решения связанных динамических задач термоупругости для тонких тел из анизотропных, в плане неоднородных материалов / Л. А. Агаловян, Р. С. Геворкян // *ПММ*. – 2011. – Т. 75. – Вып. 5. – С. 858–871.
- Agalovyan L. A. Asimptoticheskiye resheniya svyazannykh dinamicheskikh zadach termouprugosti dlya tonkikh tel iz anizotropnykh, v plane neodnorodnykh materialov (Asymptotic Solutions of Coupled Dynamic Problems of Thermoelasticity for Thin Bodies from Anisotropic in Terms of Nonhomogeneous Materials) / L. A. Agalovyan, R. S. Gevorkyan // *PMM*. – 2011. – Т. 75. – Вып. 5. – С. 858–871.
79. Агаловян Л. А. Смешанные краевые задачи теории упругости слоистых тонких тел переменной толщины, состоящих из анизотропных неоднородных материалов / Л. А. Агаловян, Р. С. Геворкян // *ПММ*. – 2009. – Т. 73. – Вып. 5. – С. 849–857.
- Agalovyan L. A. Smeshannyye krayevyye zadachi teorii uprugosti sloistyykh tonkikh tel peremennoy tolshchiny, sostoyashchikh iz anizotropnykh neodnorodnykh materialov (Mixed Boundary Problems of the Theory of Elasticity of Layered Thin Bodies, Composed of Anisotropic Nonhomogeneous Materials) / L. A. Agalovyan, R. S. Gevorkyan // *Pmm*. – 2009. – Т. 73. – Вып. 5. – С. 849–857.
80. Auld B. A. Acoustic Fields and Waves in Solids / B. A. Auld. – N.Y.: Wiley, 1973. – Vol. 1, 2. – 633 p.
81. Chang J. The Ultrasonic Wave Propagation in Composite Material and its Characteristic Evaluation / J. Chang, C. Zheng, Q.-Q. Ni // *Composite Structures*. – 2006. – V. 75. – Pp. 451–456.
82. На J. Wave Propagation in Transversely Isotropic and Periodically Layered Isotropic Media / J. На // *Geophys. J. Roy. Astron. Soc.* – 1986. – Vol. 68. – № 2. – Pp. 635–650.
83. Kennet B. J. Seismic Waves in a Stratified Half Space / B. J. Kennet, N. J. Kerry // *Geophys. J. Roy. Astron. Soc.* – 1979. – Vol. 57. – № 3. – Pp. 557–583.
84. Kind R. Computation of Reflection for Layered Media / R. Kind // *J. Geophys.* – 1976. – Vol. 42. – № 1. – Pp. 191–200.
85. Malischewsky P. Surface Waves and Discontinuities / P. Malischewsky // Berlin. Akad. Verl. – 1987. – 229 p.
86. Балакирев М. К. Волны в пьезокристаллах / М. К. Балакирев, И. А. Гилинский. – Новосибирск: Наука, 1982. – 240 с.
- Balakirev M. K. Volny v pyezokristallakh (Waves in Piezocrystals) / M. K. Balakirev, I. A. Gilinskiy. – Novosibirsk: Nauka, 1982. – 240 s.
87. Гетман И. П. Распространение волн в поперечно-неоднородных пьезоактивных волноводах / И. П. Гетман, Ю. А. Устинов // *Акуст. журнал*. – 1985. – Т. 31. – № 3. – С. 314–319.
- Getman I. P. Rasprostraneniye voln v poperechno-neodnorodnykh pye zoaktivnykh volnovodakh (Propagation of Waves in Transversal-Heterogeneous Pyezoelectric Waveguides) / I. P. Getman, Yu. A. Ustinov // *Akust. Zhurnal*. – 1985. – Т. 31. – № 3. – С. 314–319.
88. Гетман И. П. Аналитические и численные методы в задачах о распространении волн в неоднородных плитах и цилиндрах из пьезоактивных материалов: материалы III Всесоюз. симпозиума «Теор. вопросы магнитоупругости», (Ереван, 17–21 сент. 1984 г.) / И. П. Гетман, А. А. Матросов, Ю. А. Устинов. – Ереван, 1984. – С. 62–63.
- Getman I. P. Analiticheskiye i chislennyye metody v zadachakh o rasprostranenii voln v neodnorodnykh plitakh i tsilindrakh iz piezoaktivnykh materialov: materialy III Vsesoyuz. simpoziuma “Teor. voprosy magnitouprugosti”, (Yerevan, 17–21 sent. 1984 g.) (Analytic and Numeric Methods in Problems of Waves Propagation in Heterogeneous Plates and Cylinders from Piezoelectric Materials: Proceedings of 3^d All-Union Symposium on “Theoretical Problems of Magnetoelasticity”, (Yerevan, September 17–21, 1984) / I. P. Getman, A. A. Matrosov, Yu. A. Ustinov. – Yerevan, 1984. – S. 62–63.
89. Гетман И. П. Методы расчета полей в неоднородных плитах и цилиндрах из электроупругих материалов: материалы IV Всесоюз. съезда «Теор. и прикл. механика», (Ташкент, 24 – 30 сент. 1986 г.) аннот. докл. / И. П. Гетман, Ю. А. Устинов. – 1986. – С. 193.
- Getman I. P. Metody rascheta poley v neodnorodnykh plitakh i tsilindrakh iz elektrouprugikh materialov: materialy IV Vsesoyuz. syezda “Teor. i prikl. mekhanika”, (Tashkent, 24–30 sent. 1986 g.) annot. dokl. – (Methods of Design of Fields in Heterogeneous Plates and Cylinders from Electroelastic Materials: Proceedings of 4th All-Union Conference on “Theoretical and Applied Mechanics”, (Tashkent, September 24–30, 1986), annotated report) / I. P. Getman, Yu. A. Ustinov. – 1986. – S. 193.

90. Гетман И. П. Математическая теория нерегулярных твердых волноводов / И. П. Гетман, Ю. А. Устинов. – Ростов-н/Д: Изд-во РГУ, 1993. – 143 с.
- Getman I. P. Matematicheskaya teoriya neregulyarnykh tverdykh volnovodov (Mathematical Theory of Irregular Solid Waveguides) / I. P. Getman, Yu. A. Ustinov. – Rostov-n/D: Izd-vo RGU, 1993. – 143 s.
91. Шульга Н. А. Основы механики слоистых сред периодической структуры / Н. А. Шульга. – К.: Наук. думка, 1980. – 200 с.
- Shulga N. A. Osnovy mekhaniki sloistykh sred periodicheskoy struktury (Basics of Mechanics of Layered Media of Periodic Structure) / N. A. Shulga. – K.: Nauk. dumka, 1980. – 200 s.
92. Шульга Н. А. Распространение электроупругих волн поперек слоев регулярно-сплошной среды / Н. А. Шульга // Прикл. механика. – 1986. – Т. 22. – № 5. – С. 113–115.
- Shulga N. A. Rasprostraneniye elektrouprugikh voln poperek sloyev regulyarno-splushnoy sredy (Electroelastic Waves Propagation across Layers of a Regular Continuous Medium) / N. A. Shulga // Prikl. mekhanika. – 1986. – Т. 22. – № 5. – С. 113–115.
93. Зинчук Л. П. О симметрии форм колебаний на границах зон пропускания волн сдвига в пьезоэлектрической регулярно-слоистой среде / Л. П. Зинчук // Прикл. механика. – 1988. – Т. 24. – № 6. – С. 73–79.
- Zinchuk L. P. O simmetrii form kolebaniy na granitsakh zon propuskaniya voln sdviga v pyeoelektricheskoy regulyarno-sloistoy sredy (About the Symmetry of Oscillations Forms at the Boundaries of the Transmission Range of Shear Waves in the Piezoelectric Regular Layered Medium) L. P. Zinchuk // Prikl. mekhanika. – 1988. – Т. 24. – № 6. – С. 73–79.
94. Савин В. Г. Волны Рэлея в изотропной регулярно-слоистой среде / В. Г. Савин, Н. А. Шульга // Акуст. журнал. – 1975. – Т. 21. – № 3. – С. 448–451.
- Savin V. G. Volny Releya v izotropnoy regulyarno-sloistoy sredy (Rayleigh Waves in the Isotropic Regular Layered Medium) / V. G. Savin, N. A. Shulga // Akust. zhurnal. – 1975. – Т. 21. – № 3. – С. 448–451.
95. Гольдштейн Р. В. Поверхностные акустические волны в диагностике слоистых сред. Чувствительность волн к вариации свойств отдельных слоев / Р. В. Гольдштейн, С. В. Кузнецов // ПММ. – 2013. – Т. 77. – Вып. 1. – С. 74–82.
- Goldshteyn R. V. Poverkhnostnyye akusticheskiye volny v diagnostike sloistykh sred. Chuvstvitelnost voln k variatsii svoystv otdelnykh sloyev (Surface Acoustic Waves in the Diagnostics of Layered Media. The Sensitivity of Waves to Variations of Properties of Certain Layers) / R. V. Goldshteyn, S. V. Kuznetsov // PMM. – 2013. – Т. 77. – Вып. 1. – С. 74–82.
96. Rayleigh J. W. On Waves Propagated along the Plane Surface of an Elastic Solid / J. W. Rayleigh // Proc. Lond. Math. Soc. – 1885/1886. – Vol. 17. – № 253. – Pp. 4–11.
97. Викторов И. А. Типы звуковых поверхностных волн в твердых телах / И. А. Викторов // Акуст. журн. – 1979. – Т. 25. – Вып. 1. – С. 1–17.
- Viktorov I. A. Tipy zvukovykh poverkhnostnykh voln v tverdykh telakh (Types of Surfaces Sound Waves in Solid Bodies) / I. A. Viktorov // Akust. zhurn. – 1979. – Т. 25. – Вып. 1. – С. 1–17.
98. Farnell G. W. Elastic Waves Propagation in Thin Layers / G. W. Farnell, E. L. Adler // Phys. Acoustics: Principles and Methods. – 1972. – Vol. 9. – Pp. 35–127.
99. Owen T. E. Surface Wave Phenomena in Ultrasonics / T. E. Owen // Progr. Appl. Mater. Res. – 1964. – Vol. 6. – Pp. 61–64.
100. Überal H. Surface Waves in Acoustics / H. Überal // Phys. Acoustics: Principles and Methods. – 1973. – Vol. 10. – Pp. 1–60.
101. Oliver J. A Summary of Observed Seismic Surface Wave Dispersion / J. A. Oliver // Bull. Seism. Soc. Amer. – 1962. – Vol. 52. – № 1. – Pp. 81–90.
102. Махорт Ф. Г. Некоторые акустические соотношения рэлеевских волн для определения напряжений в деформируемых телах / Ф. Г. Махорт // Прикл. механика. – 1978. – Т. 14. – № 10. – С. 123–125.
- Makhort F. G. Nekotoryye akusticheskiye sootnosheniya releyevskikh voln dlya opredeleniya napryazheniy v deformiruyemykh telakh (Some Acoustic Relations of Rayleigh Waves for Determining Stresses in Deformable Bodies) / F. G. Makhort // Prikl. mekhan. – 1978. – Т. 14. – № 10. – С. 123–125.
103. Махорт Ф. Г. К теории акустоупругости поверхностных волн Рэлея / Ф. Г. Махорт, О. И. Гуща, А. А. Черноотченко // Прикл. механика. – 1990. – Т. 26. – № 4. – С. 35–41.
- Makhort F. G. K teorii akoustouprugosti poverkhnostnykh voln releya (To the Theory of Acoustoelasticity of Surface Rayleigh Waves) / F. G. Makhort, O. I. Gushcha, A. A. Chernootchenko // Prikl. Mekhanika. – 1990. – Т. 26. – № 4. – С. 35–41.
104. Махорт Ф. Г. Применение теории акустоупругости поверхностных волн Рэлея для определения напряжений в твердых телах / Ф. Г. Махорт, О. И. Гуща, А. А. Черноотченко // Прикл. механика. – 1991. – Т. 27. – № 1. – С. 44–46.
- Makhort F. G. Primeneniye teorii akoustouprugosti poverkhnostnykh voln Releya dlya opredeleniya napryazheniy v tverdykh telakh (The Application of the Theory of Acoustoelasticity of Rayleigh Surface Waves for Determining the Stresses in Solid Bodies) / F. G. Makhort, O. I. Gushcha, A. A. Chernootchenko // Prikl. mekhanika. – 1991. – Т. 27. – № 1. – С. 44–46.

105. Махорт Ф. Г. Применение волн Рэлея для исследования нелинейных упругих свойств приповерхностных слоев конструкционных материалов / Ф. Г. Махорт, О. И. Гуща, А. А. Черноотченко // Прикл. механика. – 1992. – Т. 28. – № 7. – С. 33–37.
- Makhort F. G. Primeneniye voln Releya dlya issledovaniya nelineynykh uprugikh svoystv pripoverkhnostnykh sloeyv konstruksionnykh materialov (The Use of Rayleigh Waves for Studying Nonlinear Elastic Properties of Near-Surface Layers of Construction Materials) / F. G. Makhort, O. I. Gushcha, A. A. Chernootchenko // Prikl. mekhanika. – 1992. – Т. 28. – № 7. – С. 33–37.
106. Вовк Л. П. Численно-аналитическое исследование процессов динамического контакта цилиндрических деталей машин / Л. П. Вовк, Б. В. Соболев // Вестник Донского государственного технического университета. – 2010. – Т. 10. – № 1(44). – С. 5–15.
- Vovk L. P. Chislenno-analiticheskoye issledovaniye protsessov dinamicheskogo kontakta tsilindricheskikh detaley mashin (Numeric and Analytical Study of the Processes of Dynamic Contact of Cylindrical Machine Elements) / L. P. Vovk, B. V. Sobol // Vestnik Donskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. – 2010. – Т. 10. – № 1 (44). – С. 5–15.
107. Гринченко В. Т. Трансформация энергии падающей волны при отражении от защемленного торца полуполосы / В. Т. Гринченко, Н. С. Городецкая. – Прикл. механика. – 1991. – Т. 27. – № 5. – С. 77–82.
- Grinchenko V. T. Transformatsiya energii padayushchey volny pri otrazhenii ot zashchemlennogo tortsa polupolosy (Transformation of the Energy of the Incident Wave while Reflecting from the Clamped End of the Half-Strip) / V. T. Grinchenko, N. S. Gorodetskaya. – Prikl. mekhanika. – 1991. – Т. 27. – № 5. – С. 77–82.
108. Гринченко В. Т. Отражение волн Лэмба от границы раздела в составном волноводе / В. Т. Гринченко, Н. С. Городецкая // Прикладная механика. – 1985. – Т. 21. – № 5. – С. 121–125.
- Grinchenko V. T. Otrazheniye voln Lemba ot granitsy razdela v sostavnom volnovode (Reflection of Lamb Waves from the Interface in the Composite Waveguide) / V. T. Grinchenko, N. S. Gorodetskaya // Prikladnaya mekhanika. – 1985. – Т. 21 – № 5. – С. 121–125.
109. Коханенко Ю. В. Численное исследование затухания краевых эффектов в металлических слоистых материалах / Ю. В. Коханенко, В. М. Быстров, В. С. Зеленский // Прикл. механика. – 1997. – Т. 33. – № 12. – С. 50–57.
- Kokhanenko Yu. V. Chislennoye issledovaniye zatukhaniya krayevykh effektov v metallicheskikh sloistyykh materialakh (Numeric Investigation of Boundary Effects Decaying in Metallic Layered Materials) / Yu. V. Kokhanenko, V. M. Bystrov, V. S. Zlelenskiy // Prikl. mekhanika. – 1997. – Т. 33. – № 12. – С. 50–57.
110. Лобода В. В. О контактном взаимодействии упругой прямоугольной пластины и полосы / В. В. Лобода // Прикл. механика. – 1989. – Т. 25. – № 4. – С. 69–76.
- Loboda V. V. O kontaktnom vzaimodeystvii uprugoy pryamougolnoy plastiny i polosy (About Contact Interaction of Elastic Rectangular Plate and Strip) / V. V. Loboda // Prikl. mekhanika. – 1989. – Т. 25. – № 4. – С. 69–76.
111. Попов В. Г. Динамическая контактная задача, приводящая к сингулярному интегральному уравнению с двумя неподвижными особенностями / В. Г. Попов // ПММ. – 2012. – Т. 76. – Вып. 3. – С. 484–496.
- Popov V. G. Dinamicheskaya kontaktnaya zadacha, privodyashchaya k singulyarnomu integralnomu uravneniyu s dvumya nepodvizhnymi osobennostyami (Dynamic Contact Problem, Resulting in Singular Integral Equation with Two Non Derivative Features) / V. G. Popov // PMM. – 2012. – Т. 76. – Вып. 3. – С. 484–496.
112. Гоголадзе В. Г. Отражение и преломление упругих волн. Общая теория граничных волн Рэлея / В. Г. Гоголадзе // Тр. сейсмол. ин-та АН СССР. – 1947. – № 126. – С. 1–43.
- Gogoladze V. G. Otrazheniye i prelomleniye uprugikh voln. Obshchaya teoriya granichnykh voln Releya (Reflection and Refraction of Elastic Waves. General Theory of Rayleigh Interface Waves) / V. G. Gogoladze // Tr. Seysmol. in-ta AN SSSR. – 1947. – № 126. – С. 1–43.
113. Дьелесан Э. Упругие волны в твердых телах / Э. Дьелесан, Д. Руайе. – М.: Наука, 1982. – 424 с.
- Dyelesan E. Uprugiye volny v tverdykh telakh (Elastic Waves in Solid Bodies) / E. Dyelesan, D. Ruaye. – М.: Nauka, 1982. – 424 s.
114. Молотков И. А. О затухающих волнах, образованных на границе двух упругих полупространств / И. А. Молотков, Н. С. Смирнова // Вопросы динам. теории распространения сейсмич. волн. – Л.: Наука, 1974. – № 12. – С. 32–43.
- Molotkov I. A. O zatukhayushchikh volnakh, obrazovannykh na granitse dvukh uprugikh poluprostranstv (About Decaying Waves Formed at the Interface of Two Elastic Half Spaces) / I. A. Molotkov, N. S. Smirnova // Voprosy dinam. teorii rasprostraneniya seysmich. voln. – L.: Nauka, 1974. – № 12. – С. 32–43.
115. Moniven H. D. The Influence of the End Mode on the Resonant Frequencies of Finite, Hollow, Elastic Rods / H. D. Moniven, A. H. Shah // J. Sound Vibr. – 1967. – Vol. 6. – № 1. – Pp. 8–19.
116. Кулеш М. А. Волновая динамика упругих сред / М. А. Кулеш, И. Н. Шардаков. – Пермь: редакционно-издательский отдел Пермского ун-та, 2007. – 60 с.
- Kulesh M. A. Volnovaya dinamika uprugikh sred (Wave Dynamics of Elastic Bodies) / M. A. Kulesh, I. N. Shardakov. – Perm: redaktsionno-izdatelskiy otdel Permskogo un-ta, 2007. – 60 s.

117. Ravindara N. G. Reflection of Elastic Waves from a Linear Transition Layer / N. G. Ravindara // Bull. Seis. Soc. Am. – 1966. – Vol. 56. – Pp. 511–526.
118. Acharya H. K. Reflection from the Free Surface of an Inhomogeneous Media / H. K. Acharya // Bull. Seis. Soc. Am. – 1970. – Vol. 60. – Pp. 1101–1104.
119. Rao C. R. Separation of the Stress Equations of Motion in Inhomogeneous Isotropic Media / C. R. A. Rao // J. Acoust. Soc. Am. – 1967. – Vol. 41. – P. 612–614.
120. Rao C. R. A. Generalization of Lamb's problem to a Class of Inhomogeneous Half-Spaces / C. R. A. Rao, M. A. A. Goda // Proc. R. Soc. Lond. – 1978. – Vol. A359. – P. 93–110.
121. Goda M. A. A. The Effect of Inhomogeneity and Anisotropy on Stoneley Waves / M. A. A. Goda // Acta Mechanica. – 1992. – Vol. 93. – № 1–4. – Pp. 89–98.
122. Куликовский А. Г. Классические и неклассические разрывы в решениях уравнений нелинейной теории упругости / А. Г. Куликовский, А. П. Чайгунова // Успехи мат. наук. – 2008. – Т. 63. – № 2. – С. 85–152.
- Kulikovskiy A. G. Klassicheskiye i neklassicheskiye razryvy v resheniyakh uravneniy nelineynoy teorii uprugosti (Classical and Non Classical Discontinuities in the Solutions of Equations of Non Linear Theory of Elasticity) / A. G. Kulikovskiy, A. P. Chaygunova // Uspekhi mat. nauk. – 2008. – Т. 63. – № 2. – S. 85–152.
- Куликовский А. Г. О многопараметрических фронтах сильных разрывов в механике сплошных сред / А. Г. Куликовский // ПММ. – 2011. – Т. 75. – Вып. 4. – С. 531–550.
- Kulikovskiy A. G. O mnogoparametricheskikh frontakh silnykh razryvov v mekhanike sploshnykh sred (About Multiparametric Break Areas of Strong Discontinuity Areas in Mechanics of Continuous Media) / A. G. Kulikovskiy // PMM. – 2011. – Т. 75. – Вып. 4. – S. 531–550.
124. Сингулярность напряжений в вершине однородных и составных конусов при разных граничных условиях / В. П. Матвеевко, Т. О. Накарякова, Н. В. Севодина, И. Н. Шардакова // ПММ. – 2008. – Т. 72. – Вып. 3. – С. 477–484.
- Singulyarnost napryazheniy v vershine odnorodnykh i sostavnykh konusov pri raznykh granichnykh usloviyakh (Singularity of Stresses in the Point of Homogeneous and Composites Cones at Different Boundary Conditions) / V. P. Matveyenko, T. O. Nakaryakova, N. V. Sevodina, I. N. Shardakova // PMM. – 2008. – Т. 72. – Вып. 3. – S. 477–484.
125. Кондратьев В. А. Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими или угловыми точками / В. А. Кондратьев // Труды Московского математ. об-ва. – 1967. – Т. 16. – С. 209–292.
- Kondratyev V. A. Krayevyye zadachi dlya ellipticheskikh uravneniy v oblastiakh s konicheskimi uglovymi tochkami (Boundary Problems for Elliptical Equations in the Areas with Conical or Angular Points) / V. A. Kondratyev // Trudy Moskovskogo matem. ob-va. – 1967. – Т. 16. – S. 209–292.
126. Мазья В. Г. О коэффициентах в асимптотике решения эллиптических краевых задач вблизи ребра / В. Г. Мазья, Б. А. Пламеневский // Доклад АН СССР. – 1976. – Т. 229. – № 1. – С. 33–36.
- Mazyu V. G. O koeffitsientakh v asimptotike resheniya ellipticheskikh krayevykh zadach vblizi rebra (About Coefficients in the Asymptotics of Solutions of Elliptical Boundary Problems near the Edge) / V. G. Mazyu, B. A. Plamenevskiy // Doklad AN SSSR. – 1976. – Т. 229. – № 1. – S. 33–36.
127. Александров В. М. Контактное взаимодействие толстой плиты с упругим слоем большой толщины / В. М. Александров, С. А. Гришин, Е. В. Коваленко // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1985. – № 5. – С. 64–69.
- Aleksandrov V. M. Kontaknoye vzaimodeystviye tolstoy plity s uprugim sloyem bolshoy tolshchiny (Contact Interaction of a Thick Plate with the Elastic Layer of Big Thickness) / V. M. Aleksandrov, S. A. Grishin, Ye. V. Kovalenko // Izv. AN SSSR. Mekhanika tverdogo tela. – 1985. – № 5. – S. 64–69.
128. Александров В. М. Пространственная задача о тонком включении в составном упругом клине / В. М. Александров, Д. А. Пожарский // ПММ. – 2011. – Т. 75. – Вып. 5. – С. 843–849.
- Aleksandrov V. M. Prostranstvennaya zadacha o tonkom vkluchenii v sostavnom uprugom kline (Three-Dimensional Problem of Thin Inclusion in a Composite Elastic Wedge) / V. M. Aleksandrov, D. A. Pozharskiy // PMM. – 2011. – Т. 75. – Вып. 5. – S. 843–849.
129. Александров В. М. Тонкие концентраторы напряжений в упругих телах / В. М. Александров, Б. И. Сметанин, Б. В. Соболев. – М.: Физматлит, 1993. – 224 с.
- Aleksandrov V. M. Tonkiye kontsentratory napryazheniy v uprugikh telakh (Thin Stress Concentrators in Elastic Bodies) / V. M. Aleksandrov, B. I. Smetanin, B. V. Sobol. – M.: Fizmatlit, 1993. – 224 s.
130. Борщ С. П. Метод выделения особенностей в задаче о гидроупругих колебаниях оболочки, возбуждаемых сосредоточенными силами / С. П. Борщ, А. Л. Попов, Г. Н. Чернышев // ПММ. – 1990. – Т. 54. – Вып. 4. – С. 619–626.
- Borshch S. P. Metod vydeleniya osobennostey v zadache o gidrouprugikh kolebaniyakh obolochki, vzbuzhdayemykh sosredotochennymi silami (The Method of Peculiarities Distinguishing in the Problem of Hydroelastic Oscillations of the Shell, Excited by Concentrated Forces) / S. P. Borshch, A. L. Popov, G. N. Chernyshev // PMM. – 1990. – Т. 54. – Вып. 4. – S. 619–626.
131. Каландия А. И. Замечания об особенности упругих решений вблизи углов / А. И. Каландия // ПММ. – 1969. – Т. 33. – Вып. 1. – С. 132–135.

- Kalandiya A. I. Zamechaniya ob osobennosti uprugikh resheniy vblizi uglov (Remarks on Peculiarities of Elastic Decisions near Angles) / A. I. Kalandiya // PMM. – 1969. – Т. 33. – Вып. 1. – С. 132–135.
132. Лобода В. В. Об особенностях напряженного состояния ортотропной полуполосы / Лобода В. В. // PMM. – 1986. – Т. 50. – Вып. 2. – С. 263–270.
- Loboda V. V. Ob osobennostyakh napryazhennogo sostoyaniya ortotropnoy polupolosy (About Peculiarities of the Stress State of the Orthotropic Half-Strip) / V. V. Loboda // PMM. – 1986. – Т. 50. – Вып. 2. – С. 263–270.
133. Паймушин В. Н. Точные и приближенные аналитические решения задачи о плоских формах свободных колебаний прямоугольной ортотропной пластины со свободными краями, основанные на тригонометрических базисных функциях / В. Н. Паймушин // Механика композитных материалов. – 2005. – Т. 41. – № 4. – С. 461–488.
- Paymushin V. N. Tochnyye i priblizhennyye analiticheskiye resheniya zadach o ploskikh formakh svobodnykh kolebaniy pryamougolnoy ortotropnoy plastiny so svobodnymi krayami, osnovannyye na trigonometricheskikh bazisnykh funktsiyakh (Exact and Approximate Analytical Solutions of Problems about Plane Forms of Free Oscillations of the Rectangular Orthotropic Plate with Free Edges Based on Trigonometric Basic Functions) / V. N. Paymushin // Mekhanika kompozitnykh materialov. – 2005. – Т. – № 4. – С. 461–488.
134. Паймушин В. Н. Точные аналитические решения задачи о плоских формах свободных колебаний прямоугольной пластины со свободными краями / В. Н. Паймушин // Изв. вузов. Математика. – 2006. – № 8. – С. 54–62.
- Paymushin V. N. Tochnyye analiticheskiye resheniya zadachi o ploskikh formakh svobodnykh kolebaniy pryamougolnoy plastiny so svobodnymi krayami (Exact Analytical Solutions of Problems about Plane Forms of Free Oscillations of the Rectangular Orthotropic Plate with Free Edges) / V. N. Paymushin // Izv. vuzov. Matematika. – 2006. – № 8. – С. 54–62.
135. Паймушин В. Н. О малых свободных колебаниях полосы / В. Н. Паймушин, Т. В. Полякова // PMM. – 2011. – Т. 75. – Вып. 1. – С. 72–82.
- Paymushin V. N. O malykh svobodnykh kolebaniyakh polosy (About Small Free Oscillations of a Strip) / V. N. Paymushin, T. V. Polyakova // PMM. – 2011. – Т. 75. – Вып. 1. – С. 72–82.
136. Рудой Е. М. Асимптотика функционала энергии для упругого тела с трещиной и жестким включением. Плоская задача / Е. М. Рудой // PMM. – 2011. – Т. 75. – Вып. 6. – С. 1038–1048.
- Rudoy Ye. M. Asimptotika funktsionala energii dlya uprugogo tela s treshchinoy i zhestkim vklyucheniym (Asymptotics of the Energy Functional for an Elastic Body with a Crack and a Rigid Inclusion. Two-Dimensional Problem) / Ye. M. Rudoy // PMM. – 2011. – Т. 75. – Вып. 6. – С. 1038–1048.
137. Напряженно-деформированное состояние полупространства в окрестности жесткого шара, находящегося под действием нормальной нагрузки / И. К. Сенченков, В. И. Козлов, И. Г. Рубцова, А. Б. Олейников // Прикл. механика. – 1988. – Т. 24. – № 4. – С. 19–25.
- Napryazhenno-deformirovannoye sostoyaniye poluprostranstva v okrestnosti zhestkogo shara, nakhodyashchegosya pod deystviyem normalnoy nagruzki (Stress-Strain State of the Half-Space near the Rigid Sphere Being under the Normal Load) / I. K. Senchenkov, V. I. Kozlov, I. G. Rubtsova, A. B. Oleynikov // Prikl. mekhanika. – 1998. – Т. 24. – № 4. – С. 19–25.
138. England A. H. On Stress Singularities in Linear Elasticity / A. H. England // Int. J. Eng. Sci. – 1971. – Vol. 9. – № 6. – Pp. 571–585.
139. Williams M. L. Stress Singularities Resulting from Various Boundary Conditions in Angular Corners of Plate in Extension / M. L. Williams // J. Appl. Mech. – 1952. – Vol. 19. – № 4. – Pp. 526–528.
140. Аксентян О. К. Особенности напряженно-деформированного состояния плиты в окрестности ребра / А. К. Оксентян // Прикл. механика. – 1967. – Т. 31. – № 1. – С. 178–186.
- Aksentyan O. K. Osobennosti napryazhenno-deformirovannogo sostoyaniya plity v okrestnosti rebra (Peculiarities of the Stressedly Deformed State of the Plate near the Rib) / O. K. Aksentyan // Prikl. mekhanika. – 1967. – Т. 31. – № 1. – С. 178–186.
141. Боджи Д. Действие поверхностных нагрузок на систему из двух соединенных вдоль одной из граней упругих клиньев, изготовленных из различных материалов и имеющих произвольные углы раствора / Д. Боджи // Тр. Амер. общества инженеров-механиков. Прикл. механика. – 1971. – Т. 38. – № 2. – С. 87–96.
- Bodzhi D. Deystviye poverkhnostnykh nagruzok na sistemu iz dvukh soyedinennykh vdol odnoy iz graney uprugikh klinyev, izgotovlennykh iz razlichnykh materialov i imeyushchikh proizvolnyye ugly rastvora (Surface Loads Effect on the System of Two Elastic Wedges Connected along One of the Edges Made from Different Materials and Having Random Opening Angles) / D. Bodzhi // Tr. Amer. obshchestva inzhenerov-mekhanikov. Prikl. mekhanika. – 1971. – Т. 38. – № 2. – С. 87–96.
142. Пеньков В. Б. Исследование равновесия анизотропного цилиндра методом граничных состояний / В. Б. Пеньков, Д. А. Иванычев // Вестник Тульского государственного университета. – Тула, 2009. – Вып. 5. – С. 118–122. – (Серия «Актуальные вопросы механики»).
- Penkov V. B. Issledovaniye ravnovesiya anizotropnogo tsilindra metodom granichnykh sostoyaniy (Investigation of the Anisotropic Cylinder Equilibrium by Means of Boundary Conditions) / V. B. Penkov, D. A. Ivanychev // Vestnik Tulskego gosudarstvennogo universiteta. – Tula, 2009. – Вып. 5 – С. 118–122. – (Seriya “Aktualnyye voprosy mekhaniki”).

143. Писаренко Г. С. Актуальные вопросы прочности в современном машиностроении / Г. С. Писаренко. – К.: Наук. думка, 1992. – 192 с.
Pisarenko G. S. Aktualnyye voprosy prochnosti v sovremennom mashinostroyenii (Urgent Questions of Strength in the Modern Mechanical Engineering) / G. S. Pisarenko. – K.: Nauk. dumka, 1992. – 192 s.
144. Винсон Ж. П. Поведение конструкций из композитных материалов / Ж. П. Винсон, Р. А. Сираковский. – М.: Metallurgiya, 1991. – 264 с.
Winson Zh. R. Povedeniye konstruksiy iz kompozitnykh materialov (Behavior of the Structure from Composite Materials) / Zh. R. Winson, R. A. Sirakovskiy. – M.: Metallurgiya, 1991. – 264 s.
145. Немировский Ю. В. Метод асимптотических разложений решений задачи стационарной теплопроводности слоистых анизотропных неоднородных пластин / Ю. В. Немировский, А. П. Янковский // ПММ. – 2008. – Т. 72. – Вып. 1. – С. 157–175.
Nemirovskiy Yu. V. Metod asimptoticheskikh razlozheniy resheniy zadachi statsionarnoy teploprovodnosti sloistyykh anizotropnykh neodnorodnykh plastin (Method of Asymptotic Expansions of the Solutions of the Problem of Stationary Thermal Conductivity of Layered Anisotropic Heterogeneous Plates) / Yu. V. Nemirovskiy, A. P. Yankovskiy // PMM. – 2008. – T. 72. – Вып. 1. – S. 157–175.
146. Apel T. Structured Eigenvalue Methods for the Computation of Corner Singularities in 3D Anisotropic Elastic Structures / T. Apel, V. Mehrmann, D. Watkins // Comput. Methods Appl. Mech. Engng. – 2002. – № 191. – Pp. 4459–4473.
147. Balasubramaniam K. Ultrasonic Guided Wave Energy Behavior in Laminated Anisotropic Plates / K. Balasubramaniam, C. V. Krishnamurthy // Journal of Sound and Vibration. – 2006. – V. 296. – Pp. 968–978.
148. Романова В. А. О роли внутренних границ раздела в процессах формирования мезоскопического деформационного рельефа на свободной поверхности нагруженных металлов / В. А. Романова, Р. Р. Балахонов // Физ. мезомех. – 2010. – Т. 13. – № 4. – С. 35–44.
Romanova V. A. O roli vnutrennikh granits razdela v protsessakh formirovaniya mezoskopicheskogo deformatsionnogo relyefa na svobodnoy poverkhnosti nagruzhennykh metallov (About the Role of Interfaces in the Processes of Formation of Mesoscopic Deformative Relief on the Load Metal Free Surface) / V. A. Romanova, R. R. Balakhonov // Fiz. mezomekh. – 2010. – T. 13. – № 4. – S. 35–44.
149. Дискретно-континуальный подход к решению задач теплопроводности / А. Б. Золотов, М. Л. Мозгалева, П. А. Акимов, В. Н. Сидоров // Вестник МГСУ. – 2010. – № 2. – С. 68–72.
Diskretno-kontinualnyy podkhod k resheniyu zadach teploprovodnosti (Discrete-Continuous Approach to the Solution of the Tasks of Thermal Conductivity) / A. B. Zolotov, M. L. Mozgaleva, P. A. Akimov, V. N. Sidorov // Vestnik MGSU. – 2010. – № 2. – S. 68–72.
150. Сендецки Дж. Механика композиционных материалов / Дж. Сендецки. – М.: Мир, 1978. – 564 с.
Sendetski Dzh. Mekhanika kompozitsionnykh materialov (Mechanics of Composite Materials) / Dzh. Sendetski. – M.: Mir, 1978. – 564 s.
151. Статика материалов / под ред. В. Т. Головчана. – К.: Наук. думка, 1993. – 455 с.
Statika materialov (Statics of Materials) / pod red. V. T. Golovchana. – K.: Nauk. dumka, 1993. – 455 s.
152. Лехницкий С. Г. Теория упругости анизотропного тела / С. Г. Лехницкий. – М.: Наука, 1977. – 416 с.
Lekhnitskiy S. G. Teoriya uprugosti anizotropnogo tela (Theory of Elasticity of the Anisotropic Body) / S. G. Lekhnitskiy – M.: Nauka, 1977. – 416 s.
153. Амбарцумян С. А. Теория анизотропных пластин / С. А. Амбарцумян. – Наука, 1967. – 268 с.
Ambartsumyan S. A. Teoriya anizotropnykh plastin (Theory of Anisotropic Plates) / S. A. Ambartsumyan. – Nauka, 1967. – 268 s.
154. Bors C. I. Teoria elasticitatii corpurilor anisotrope / C. I. Bors. – Bucuresti: Editura Academiei R. S. Romania, 1970. – 518 p.
155. Гузь А. Н. Методы возмущений в пространственных задачах теории упругости / А. Н. Гузь, Ю. Н. Немиш. – К.: Вища школа, 1982. – 352 с.
Guz A. N. Metody vozmushcheniy v prostranstvennykh zadachakh teorii uprugosti (Methods of Disturbance in Three-Dimensional Problems of the Theory of Elasticity) / A. N. Guz, Yu. N. Nemish. – K.: Vyscha shkola, 1982. – 352 s.
156. Черных К. Ф. Введение в анизотропную упругость / К. Ф. Черных. – М.: Наука, 1988. – 192 с.
Chernykh K. F. Vvedeniye v anizotropnyuyu uprugost (Introduction to the Anisotropic Elasticity) / K. F. Chernykh. – M.: Nauka, 1988. – 192 s.
157. Трехмерные задачи математической теории упругости и термоупругости / В. Д. Купрадзе, Т. Г. Гегелиа, М. О. Башелейшвили, Т. В. Бурчуладзе. – М.: Наука, 1976. – 663 с.
Trehmernyye zadachi matematicheskoy teorii uprugosti i termouprugosti (Three-Dimensional Problems of the Mathematical Theory of Elasticity and Thermoelasticity) / V. D. Kupradze, T. G. Gegelia, M. O. Basheleyshvili, T. V. Burchuladze. – M.: Nauka, 1976. – 663 s.
158. Партон В. З. Интегральные уравнения теории упругости / В. З. Партон, П. И. Перлин. – М.: Наука, 1977. – 311 с.

- Parton V. Z. Integralnyye uravneniya teorii uprugosti (Integral Equations of the Theory of Elasticity) / V. Z. Parton, P. I. Perlin. – М.: Nauka, 1977. – 311 s.
159. Верюжский Ю. В. Численные методы потенциала в некоторых задачах прикладной механики / Ю. В. Верюжский. – К.: Вища школа, 1978. – 183 с.
- Veryuzhskiy Yu. V. Chislennyye metody potentsiala v nekotorykh zadachakh prikladnoy mekhaniki (Numerical Methods of the Potential in Some Applied Mechanics Problems) / Yu. V. Veryuzhskiy. – К.: Vyshcha shkola, 1978. – 183 s.
160. Колосов Г. В. Применение комплексных диаграмм и теории функций комплексной переменной к теории упругости / Г. В. Колосов. – Л.; М.: ОНТИ, 1935. – 224 с.
- Kolosov G. V. Primeneniye kompleksnykh diagram i teorii funktsyy kompleksnoy peremennoy k teorii uprugosti (Application of Complex Diagrams and the Theory of the Functions of the Complex Variable to the Theory of Elasticity) / G. V. Kolosov. – L., M.: ONTI, 1935. – 224 s.
161. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости / Н. И. Мусхелишвили. – М.: Наука, 1966. – 707 с.
- Muskhelishvili N. I. Nekotoryye osnovnyye zadachi matematicheskoy teorii uprugosti (Some of the Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity) / N. I. Muskhelishvili. – М.: Nauka, 1966. – 707 s.
162. Александров А. Я. Некоторые зависимости между решениями плоской и осесимметричной задач теории упругости и решение осесимметричных задач при помощи аналитических функций / А. Я. Александров // Доклад АН СССР. Серия А. – 1959. – Т. 129. – № 4. – С. 754–757.
- Aleksandrov A. Ya. Nekotoryye zavisimosti mezhdru resheniyami ploskoy i osesimmetrichnoy zadach teorii uprugosti i resheniye osesimmetrichnykh zadach pri pomoshchi analiticheskikh funktsiy (Some of the Dependences between the Solutions of Plane and Axisymmetric Problems of the Theory of Elasticity and the Solution of Axisymmetric Problems with the Help of Analytical Functions) / A. Ya. Aleksandrov // Doklad AN SSSR. Seriya A. – 1959. – Т. 129. – № 4. – S. 754–757.
163. Александров А. Я. Решение осесимметричных задач теории упругости при помощи аналитических функций / А. Я. Александров // Доклад АН СССР. Серия А. – 1961. – Т. 139. – № 2. – С. 337–340.
- Aleksandrov A. Ya. Resheniye osesimmetrichnykh zadach teorii uprugosti pri pomoshchi analiticheskikh funktsiy (The Solution of Axisymmetric Problems of the Theory of Elasticity with the Help of Analytical Functions) / A. Ya. Aleksandrov // Doklad AN SSSR. Seriya A. – 1961. – Т. 139. – № 2. – S. 337–340.
164. Александров А. Я. Решение задач теории упругости для тел вращения при помощи аналитических и обобщенных аналитических функций / А. Я. Александров // Тр. Новосибир. ин-та инженеров ж.-д. трансп. – 1970. – Вып. 96. – С. 5–35.
- Aleksandrov A. Ya. Resheniye zadach teorii uprugosti dlya tel vrashcheniya pri pomoshchi analiticheskikh i obobshennykh analiticheskikh funktsiy (Solutions of the Elasticity Theory Problems for Rotary Bodies by Means of Analytical and Generalized Analytical Functions) / A. Ya. Aleksandrov // Tr. Novosibir. in-ta inzhenerov zh.-d. transp. – 1970. – Vyp. 96. – S. 5–35.
165. Александров А. Я. Одна форма решения пространственных осесимметричных задач теории упругости при помощи функций комплексного переменного и решение этих задач для сферы / А. Я. Александров, Ю. И. Соловьев // ПММ. – 1962. – Т. 26. – Вып. 1. – С. 138–145.
- Aleksandrov A. Ya. Odnа forma resheniya prostranstvennykh osesimmetrichnykh zadach teorii uprugosti pri pomoshchi funktsiy kompleksnogo peremennogo i resheniye etikh zadach dlya sfery (One Form of Solution of Three-Dimensional Axisymmetric Problems of the Theory of Elasticity by Means of the Functions of Complex Variable and Solution of these Problems for a Sphere) / A. Ya. Aleksandrov, Yu. I. Solovyev // PMM. – 1962. – Т. 26. – Vyp. 1. – S. 138–145.
166. Александров А. Я. Пространственные задачи теории упругости / А. Я. Александров, Ю. И. Соловьев. – М.: Наука, 1978. – 464 с.
- Aleksandrov A. Ya. Prostranstvennyye zadachi teorii uprugosti (Three-Dimensional Problems of the Elasticity Theory) / A. Ya. Aleksandrov, Yu. I. Solovyev. – М.: Nauka, 1978. – 464 s.
167. Соловьев Ю. И. Представление общего решения осесимметричной задачи теории упругости для многосвязных тел вращения при помощи аналитических функций комплексного переменного / Ю. И. Соловьев // Тр. Новосибир. ин-та инженеров ж.-д. трансп. – 1970. – Вып. 96. – С. 42–61.
- Solovyev Yu. I. Predstavleniye obshchego resheniya osesimmetrichnoy zadachi teorii uprugosti dlya mnogosvyaznykh tel vrashcheniya pri pomoshchi analiticheskikh funktsiy kompleksnogo peremennogo (Presentation of the General Solution of the Axisymmetric Problems of the Theory of Elasticity for Multiply Connected Rotary Bodies by Means of Analytical Functions of Complex Variable) / Yu. I. Solovyev // Tr. Novosibir. in-ta inzhenerov zh.-d. transp. – 1970. – Vyp. 96. – S. 42–61.
168. Солдатов А. П. Система Ламе плоской анизотропной теории упругости / А. П. Солдатов // Докл. РАН. – 2002. – Т. 385. – № 2. – С. 163–167.
- Soldatov A. P. Sistema Lame ploskoy anizotropnoy teorii uprugosti (Lame System of the Plane Anisotropic Theory of Elasticity) / A. P. Soldatov // Dokl. RAN. – 2002. – Т. 385. – № 2. – S. 163–167.

169. Пеньков В. Б. Решение осесимметричных задач анизотропной теории упругости методом граничных состояний / В. Б. Пеньков, Д. А. Иванычев // Вестник Тульского государственного университета. – Тула, 2010. – Вып. 6. – С. 88–91. – (Серия «Актуальные вопросы механики»).
- Penkov V. B. Resheniye osesimmetrichnykh zadach anizotropnoy teorii uprugosti metodom granichnykh sostoyaniy (Solution of Axisymmetric Problems of the Anisotropic Theory of Elasticity by Means of Boundary Conditions) / V. B. Penkov, D. A. Ivanychev // Vestnik Tulsogo gosudarstvennogo universiteta. – Tula, 2010. – Vyp. 6. – S. 88–91. – (Seriya “Aktualnyye voprosy mekhaniki”).
170. Пеньков В. Б. Решение плоских задач анизотропной теории упругости методом граничных состояний / В. Б. Пеньков, Д. А. Иванычев // Вести высших учебных заведений Черноземья. Научно-технический и производственный журнал. – № 2 (20). – Липецк: ЛГТУ, 2010. – С. 31–35.
- Penkov V. B. Resheniye ploskikh zadach anizotropnoy teorii uprugosti metodom granichnykh sostoyaniy (Solution of Plane Problems of the Anisotropic Theory of Elasticity by the Method of Boundary Conditions) / V. B. Penkov, D. A. Ivanychev // Vestnik vysshikh uchebnykh zavedeniy Chernozemya. Nauchno-tekhnicheskii i proizvodstvennyy zhurnal. – № 2 (20). – Lipetsk: LGTU, 2010. – S. 31–35.
171. Космодамианский А. С. Динамические задачи теории упругости для анизотропных сред / А. С. Космодамианский, В. И. Сторожев. – К.: Наукова думка, 1985. – 176 с.
- Kosmodamianskiy A. S. Dinamicheskiye zadachi teorii uprugosti dlya anizotropnykh sred (Dynamic Problems of the Theory of Elasticity for Anisotropic Media) / A. S. Kosmodamianskiy, V. I. Storozhev. – K.: Naukova dumka, 1985. – 176 s.
172. Петрашень Г. И. Распространение волн в анизотропных упругих средах / Г. И. Петрашень. – Л.: Наука, 1980. – 280 с.
- Petrashen G. I. Rasprostraneniye voln v anizotropnykh uprugikh sredakh (Waves Propagation in Anisotropic Elastic Media) / G. I. Petrashen. – L.: Nauka, 1980. – 280 s.
173. Ditri J. J. Excitation of Guided Waves in Generally Anisotropic Layers using Finite Sources / J. J. Ditri, J. L. Rose // Journal of Applied Mechanics. – 1994. – Vol. 61. – Pp. 330–338.
174. Joseph L. Rose. Ultrasonic Waves in Solid Media. – Cambridge University Press, 2004. – 476 p.
175. Analytical Solution of Coupled Thermoelastic Axisymmetric Transient Waves in a Transversely Isotropic Half-Space / M. Raoofian Naeni, M. Eskandari-Ghadi, A. Ardalan Alireza and others // Journal of Applied Mechanics. – 2013. – Vol. 80. – Pp. 12–18.
176. Бабич В. М. Математические методы в теории упругих волн. Механика деформируемого твердого тела / В. М. Бабич, И. А. Молотков // ВИНТИ. – 1977. – Т. 10. – С. 5–62.
- Babich V. M. Matematicheskiye metody v teorii uprugikh voln. Mekhanika deformiruyemogo tverdogo tela (Mathematical Methods in the Theory of Elastic Waves. Mechanics of a Deformable Solid Body) / V. M. Babich, I. A. Molotkov // VINITI. – 1977. – T. 10. – S. 5–62.
177. Космодамианский А. С. Пространственные задачи теории упругости для многосвязных пластин: обзор / А. С. Космодамианский // Прикл. механика. – 1983. – Т. 19. – № 12. – С. 3–21.
- Kosmodamianskiy A. S. Prostranstvennyye zadachi teorii uprugosti dlya mnogovyaznykh plastin: obzor (Three-Dimensional Problems of the Theory of Elasticity for Multiply Connected Plates: Review) / A. S. Kosmodamianskiy // Prikl. mekhanika. – 1983. – T. 19. – № 12. – S. 3–21.
178. Xiao H. On Symmetries and Anisotropies of Classical and Micropolar Linear Elasticities: a New Method Based upon a Complex Vector Basis and Some Systematic Results / H. Xiao // Journal of Elasticity. – 1997. – Vol. 49. – № 2. – Pp. 129–162.
179. Taylor D. B. Surface Waves in Anisotropic Media: the Secular Equation and its Numerical Solution / D. B. Taylor // Proc. Roy. Soc. London A. – 1981. – Vol. 376. – № 1765. – Pp. 265–300.
180. Лукьянов А. А. О распространении ударных волн в анизотропных материалах / А. А. Лукьянов, В. Б. Пеньков // ПММ. – 2009. – Т. 73. – Вып. 4. – С. 635–644.
- Lukyanov A. A. O rasprostraneniі udarnykh voln v anizotropnykh materialakh (About Shock Waves Propagation in Anisotropic Materials) / A. A. Lukyanov, V. B. Penkov // PMM. – 2009. – T. 73. – Vyp. 4. – S. 635–644.
181. Камоцкий И. В. Энергетический подход к доказательству существования волн Рэлея в анизотропном упругом полупространстве / И. В. Камоцкий, А. П. Киселев // ПММ. – 2009. – Т. 73. – Вып. 4. – С. 645–654.
- Kamotskiy I. V. Energeticheskiy podkhod k dokazatelstvu sushchestvovaniya voln Releya v anizotropnom uprugom poluprostranstve (Energy Approach to Proving the Existence of Rayleigh Waves in the Anisotropic Elastic Half-Space) / I. V. Kamotskiy, A. P. Kiselev // PMM. – 2009. – T. 73. – Vyp. 4. – S. 645–654.
182. Григолюк Э. И. Неклассические теории колебаний стержней, пластин и оболочек. Механика твердых деформируемых тел / Э. И. Григолюк, И. Т. Селезов // ВИНТИ. – 1973. – Т. 5. – С. 1–262.
- Grigolyuk E. I. Neklassicheskiye teorii kolebaniy sterzhney, plastin i obolochek. Mekhanika tverdyykh deformiruyemykh tel (Non Classical Theories of Vibrations of Rods, Plates and Shells. Solid Deformable Bodies mechanics) / E. I. Grigolyuk, I. T. Selezov // VINITI. – 1973. – T. 5. – S. 1–262.
183. Bert Charles W. Vibration of Composite Structures / W. Bert Charles // In: Recent adv. struct. dyn. pap. int. conf. – Southampton, 1980. – Vol. 2. – Pp. 693–712.

184. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике / О. Зенкевич; пер. с англ. – М.: Мир, 1975. – 591 с.
Zenkevich O. Metod konechnykh elementov v tekhnike (Method of Finite Elements in Technics) / O. Zenkevich; per. s angl. – М.: Mir, 1975. – 591 s.
185. Метод конечных элементов в технике / А. С. Сахаров, В. Н. Кислокий, В. В. Киричевский и др. – К.: Вища школа, 1982. – 480 с.
Metod konechnykh elementov v tekhnike (Method of Finite Elements in Technics) / A. S. Sakharov, V. N. Kislookiy, V. V. Kirichevskiy i dr. – К.: Vyshcha shkola, 1982. – 480 s.
186. Расчеты машиностроительных конструкций методом конечных элементов / В. И. Мяченков, В. П. Мальцев, В. П. Майборода и др. – М.: Машиностроение, 1982. – 520 с.
Raschety mashinostroitelnykh konstruksiy metodom konechnykh elementov (Mechanical Engineering Structures Design by the Method of Finite Elements) / V. I. Myachenkov, V. P. Maltsev, V. P. Mayboroda i dr. – М.: Mashinostroyeniye, 1982. – 520 s.
187. Сегерлинд Л. Применение метода конечных элементов / Л. Сегерлинд; пер. с англ. – М.: Мир, 1977. – 392 с.
Segerlind L. Primeneniye metoda konechnykh elementov (Application of the Method of Finite Elements) / L. Segerlind; per. s angl. – М.: Mir, 1977. – 392 s.
188. Cowdrey D. R. Application of the Finite Element Method to the Vibration of Quartz Plates / D. R. Cowdrey, I. R. Willis // J. Acoust. Soc. Amer. – 1974. – Vol. 56. – № 1. – Pp. 94–98.
189. De Capua N. J. Transverse Vibration of a Class of Orthotropic Plates / N. J. De Capua, B. C. Sun // Trans. ASME, E. – 1972. – Vol. 39. – № 2. – Pp. 613–615.
190. Irie T. Free Vibration of an Orthotropic Elliptical Plate with a Similar Hole / T. Irie, G. Yamada // Bull. JSME. – 1979. – Vol. 22. – № 172. – Pp. 1456–1462.
191. Laura P. A. A Method for the Determination of the Fundamental Frequency of Orthotropic Plates of Polygonal Boundary / P. A. A. Laura, L. F. Luisoni, G. A. Sarmiento // J. Sound and Vibr. – 1980. – Vol. 70. – № 1. – Pp. 77–84.
192. Lubove A. G. Extensional Vibrations of Thin Quartz Disks / A. G. Lubove, R. D. Mindlin // J. Acoust. Soc. Amer. – 1962. – Vol. 34. – № 12. – Pp. 1886–1892.
193. Luisoni L. E. Vibrations of Rectangularly Orthotropic, Circular Plates with Edges Elastically Restrained against Rotation / L. E. Luisoni, P. A. A. Laura // Fibre. Sci. and Technol. – 1981. – Vol. 15. – № 1. – Pp. 1–11.
194. Sathyamoorthy M. Large Amplitude Vibration of Orthotropic Elliptical Plates / M. Sathyamoorthy, C. G. Chia // Acta mech. – 1980. – Vol. 37. – № 3/4. – Pp. 247–258.
195. Григоренко Я. М. Изотропные и анизотропные слоистые оболочки вращения переменной жесткости / Я. М. Григоренко. – К.: Наукова думка, 1973. – 212 с.
Grigorenko Ya. M. Izotropnyye i anizotropnyye sloistyye obolochki vrashecheniya peremennoy zhestkosti (Isotropic and Anisotropic Layered Shells of Rotation of Variable Stiffness) / Ya. M. Grigorenko. – К.: Naukova dumka, 1973. – 212 s.
196. Мяченков В. И. Расчет составных оболочечных конструкций на ЭВМ: справочник / В. И. Мяченков, И. В. Григорьев. – М.: Машиностроение, 1981. – 216 с.
Myachenkov V. I. Raschet sostavnykh obolocheknykh konstruksiy na EVM: spravochnik (Computer Design of Composite Shell Structures: Guide Book) / V. I. Myachenkov, I. V. Grigoryev. – М.: Mashinostroyeniye, 1981. – 216 s.
197. Вовк Л. П. О концентрации волнового поля на границе раздела упругих сред / Л. П. Вовк, Б. В. Соболев // ПММ. – 2005. – Т. 69. – Вып. 2. – С. 269–278.
Vovk L. P. O kontsentratsii volnovogo polya na granitse razdela uprugikh sred (Wave Field Concentration at the Elastic Media Interface) / L. P. Vovk, B. V. Sobol // PMM. – 2005. – T. 69. – Vyp. 2. – S. 269–278.
198. Гетман И. П. Об отражении изгибных волн Лэмба от границы раздела двух состыкованных полуполос / И. П. Гетман, О. Н. Лисицкий // Прикл. механика. – 1991. – Т. 27. – № 8. – С. 54–59.
Getman I. P. Ob otrazhenii izgibnykh voln Lemba ot granitsy razdela dvukh sostykovannykh polupolos (About Displaying of Lamb Bending Waves from the Interface of Two Conjoined Half-Strips) // Prikl. mekhanika. – 1991. – T. 27. – № 8. – S. 54–59.

Рецензент: д-р. техн. наук, проф. О. П. Мельникова, АДІ ДонНТУ
Стаття надійшла до редакції: 05.07.2013