УДК 51 (071)

Л.П. Мироненко (канд. физ.-мат. наук)
ГВУЗ «Донецкий национальный технический университет», г. Донецк
кафедра высшей математики
E-mail: mironenko.leon@yandex.ua

ДВА НОВЫХ МЕТОДА ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ ПРЕДЕЛОВ В МАТЕМАТИЧЕСКОМ АНАЛИЗЕ

В статье рассматривается два совершенно новых способа введения в математический анализ фундаментальных пределов – первый и второй замечательные пределы. Неожиданно найдено новое решение старой проблемы. Подход отличается лаконичностью и прозрачностью, что делает теорию оригинальной и общей для обоих пределов. Второй способ имеет кинематическое происхождение, что принципиально отличает нашу теорию от классической.
Ключевые слова: *методика, предел, функция, тригонометрический, гиперболический, замечательный, фундаментальный.*

Введение

В теории пределов выделяют два предела, которые играют исключительную роль в дифференциальном исчислении

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1, \quad \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e. \tag{1}$$

Последний часто представляют в другой форме $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$.

Ввиду их значимости в дифференциальном исчислении, многие авторы называют их первым и вторым фундаментальными пределами, часто встречается называние первого и второго замечательных пределов [1].

Доказательство каждого из пределов осуществляется различным путем. Так, доказательство первого предела (1) основано на предельном переходе в геометрических построениях с использованием тригонометрического круга, а доказательство второго предела в (1), как правило, на основе бинома Ньютона. Эти методы эффективны, наглядны, но не носят универсального характера [1].

Перечислим только универсальные подходы к пределам (1) [2-5]. Первый из подходов основан на двойных неравенствах, а предельный переход в этих неравенствах приводит к формулам (1) [2-3]. Второй подход основан на стандартных разложениях функций $\sin x$ и e^x. Но сначала доказываются разложения без формулы Тейлора, т.е. в рамках элементарной математики [4]. Затем, известным путем сразу получим (1). Наконец, существует оригинальный подход, основанный на формуле Эйлера. Здесь устанавливается геометрическая и аналитическая связь между пределами [5].

Целью работы является развитие универсального способа доказательства обоих пределов на единой платформе. Такой подход называют универсальным.

Аналитический метод доказательства

Рассмотрим следующее двойное неравенство

$$\sin x \le x \le tgx. \qquad (2)$$

Неравенства очевидны для достаточно больших значений $x \ge 0$ (Рис.1). Это следует из поведения функций $\sin x,\ x,\ tgx$ при больших x. Этот очевидный факт используется в доказательстве неравенств (2) для любых значений x, в том числе и малых. Доказательство будем вести от противного.

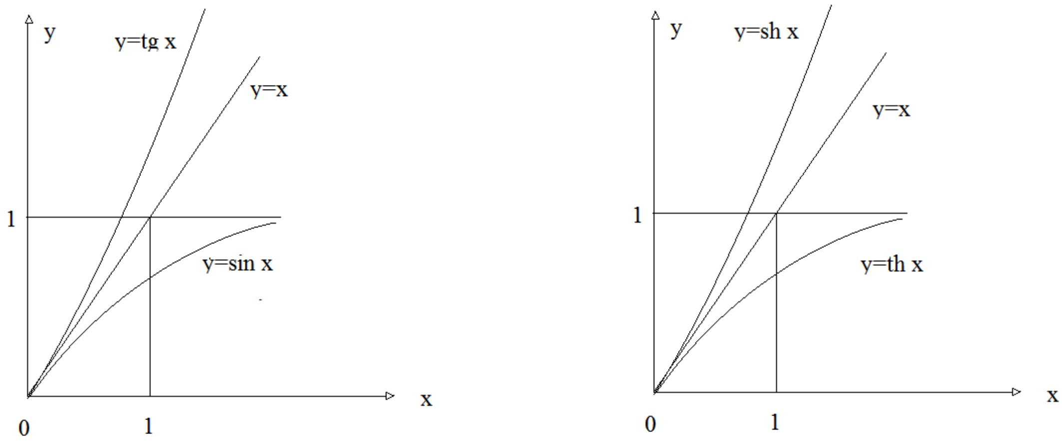

Рисунок 1 – Графики тригонометрических и гиперболических функций, демонстрирующие неравенства $\sin x \le x \le tgx$ и $thx \le x \le shx$.

Сначала рассмотрим первое из неравенств $\sin x \le x$, предположив, что существует корень $x_o \ne 0$ уравнения $\sin x = x$ (Рис. 2). На рисунке изображен предполагаемый корень $x_o \ne 0$ уравнения $\sin x_o = x_o$. Выполним простейшие преобразования и убедимся в том, что уравнение $\sin x = x$ имеет единственное решение $x_o = 0$.

$$\sin x = x \Rightarrow 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = x \Rightarrow \sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = \frac{x}{2}$$

Предположив, что уравнение $\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = \frac{x}{2}$ имеет отличный от нуля корень x_o, поэтому в последнем уравнении можно учесть равенство $\sin\frac{x_o}{2} = \frac{x_o}{2}$, получим $\cos\frac{x_o}{2} = 1$. Откуда следует, что $x_o = 0$. Неравенство $\sin x \le x$ доказано.

Второе неравенство $x \le tgx$ доказывается аналогично в предположении, что существует корень $x_o \ne 0$ уравнения $x = tgx$,

$$x = tgx \Rightarrow x = \frac{\sin x}{cosx} \Rightarrow x = \frac{2\sin\frac{x}{2}cos\frac{x}{2}}{cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}} \Rightarrow \frac{x}{2} = \frac{tg\frac{x}{2}}{1 - tg^2\frac{x}{2}}.$$

Последнее уравнение удовлетворяется только при $x = 0$.

Таким образом, неравенство (2) доказано полностью. Из него следует первый фундаментальный предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$.

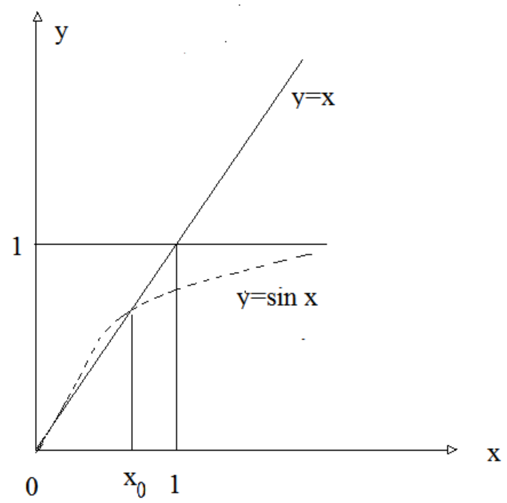

Рисунок 2 – Доказательство от противного. Предполагается, что существует корень $x_o \neq 0$ уравнения $\sin x_o = x_o$.

Методика доказательства легко переносится на гиперболические функции. Запишем очевидное при больших значениях *x* неравенство (рис.1):

$$thx \le x \le shx. \qquad (3)$$

Поступаем точно так же, как в случае неравенства (2), используя формулы-аналоги для гиперболических функций $shx = 2sh\frac{x}{2}ch\frac{x}{2}$, $chx = ch^2\frac{x}{2} + sh^2\frac{x}{2}$. Например, $shx = x \Rightarrow 2sh\frac{x}{2}ch\frac{x}{2} = x \Rightarrow sh\frac{x}{2}ch\frac{x}{2} = \frac{x}{2} \Rightarrow ch\frac{x}{2} = 1 \Rightarrow x = 0$. Разделим неравенство (3) на $shx > 0$, представив $thx = shx / chx$, получим

$$\frac{1}{chx} \le \frac{x}{shx} \le 1 \Rightarrow 1 \le \frac{shx.}{x} \le chx.$$

Перейдем в неравенствах к пределу при $x \to 0$, учитывая, что $\lim\limits_{x\to 0} chx = 1$, получим

$$\lim_{x\to 0}\frac{shx}{x} = 1. \qquad (4)$$

Это один из вариантов второго фундаментального предела.

В самом деле, формулу легко привести к привычному виду, используя определение $shx = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x - e^{-x}}{2x} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x - 1}{2x} + \lim_{x\to 0}\frac{1 - e^{-x}}{2x} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x - 1}{x}. \qquad (5)$$

В выражении $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1 - e^{-x}}{2x}$ сделаем замену $x \to -y$, получим $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1 - e^{-x}}{2x} = \lim\limits_{y\to 0}\frac{e^y - 1}{2y}$. Это выражение в точности совпадает с первым слагаемым суммы (5).

Кинематический метод доказательства первого фундаментального предела

Существует много подходов к выводу первого стандартного предела [1-5]. Не будем выяснять, какие из них являются более эффективными, имеют преимущества. Отметим только, что условно их можно разделить на две группы - геометрические методы доказательства [1,5] и аналитические [2-4]. Рассмотрим совершенно новый подход, основанный на кинематическом движении точки по окружности.

Обозначим предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = A$. Заметим, что число A не может быть отрицательным, поскольку функции $\sin x$ и x являются нечетными, а при малых $x > 0$ имеем $\sin x > 0$. Поэтому при малых x обе функции $\sin x$ и x имеют одинаковый знак, либо обе положительные (при $x > 0$), либо отрицательные (при $x < 0$).

Рассмотрим вычисление производной от тригонометрических функций $\sin x$ и $\cos x$ по определению производной

$$(\sin x)' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin(x+\Delta x)-\sin x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin(\Delta x/2)}{\Delta x/2}\lim_{\Delta x\to 0}\cos(x+\Delta x/2) = A\cdot\cos x.$$

Аналогично найдем

$$(\cos x)' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\cos(x+\Delta x)-\cos x}{\Delta x} = -A\cdot\sin x.$$

Рассмотрим движение точки по окружности единичного радиуса. Как известно, такое движение можно описывать параметрически с помощью тригонометрических функций $y = \sin t$ и $x = \cos t$, где t время, x и y - декартовые координаты точки на окружности единичного радиуса. Полный оборот совершается за 2π единиц времени – период функций $\sin t$ и $\cos t$.

Найдем скорость точки

$$v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = \sqrt{(\cos t)'^2 + (\sin t)'^2}.$$

Теперь учтем $(\sin x)' = A\cos x$ и $(\cos x)' = -A\sin x$

$$v = \sqrt{A^2(-\sin t)^2 + A^2(\cos t)^2 t} = |A|\sqrt{(\sin t)^2 + (\cos t)^2} = |A|.$$

Отсюда видно, что скорость движения точки по окружности является постоянной, а с учетом того, что $A \geq 0$ модуль можно снять.

Длина окружности единичного радиуса 2π. С другой стороны, длина окружности – это путь, проходимый точкой с постоянной скоростью $v = A$ за период 2π. Поэтому имеем равенство $vt = A\cdot 2\pi = 2\pi$. Откуда $A = 1$.

Выводы

1. Главным результатом работы является разработка двух совершенно новых подходов в изучении стандартных пределов в теории пределов.

2. Первый подход характеризуется универсальностью. Метод доказательства двух внешне совершенно различных пределов, оказывается, имеет одну основу и может рассматриваться с одной точки зрения. Доказано, что природа обоих фундаментальных пределов является общей.

3. Второй подход, условно названный кинематическим подходом, характеризуется тем, что первый стандартный предел связан с механическим движением, не является абстрактным пределом в математике. Он прямо связан с равномерным вращением точки по окружности.

Список использованной литературы

1. Кудрявцев Л.Д. Математический анализ. Том 1., Наука,1970 - 571 с.
2. Мироненко Л.П., Петренко И.В. Вывод первого и второго стандартных пределов из единой системы неравенств// Искусственный интеллект, 1, 2013, С. 172-179.

3. Mironenko L.P., Vlasenko A.Yu. A compact system of inequalities for the standard limits in the theory of limits // Artificial Intelligence, 2, 2013, 61-70.
4. Мироненко Л.П. Новый метод доказательства фундаментальный пределов в теории пределов // Міжнародна науково-практична конференція «Математика в сучасному технічному університеті», 2013.
5. Мироненко Л.П. Эквивалентность стандартных пределов в теории пределов // Искусственный интеллект, 2, 2012, С. 123-128.

References

1. Kudrjavstev, L.D. (1970), *Matematichesky analiz. Tom 1*. [Mathematical analysis. Vol.1.], Nauka, Moskow, Russia.
2. Mironenko, L.P.and Petrenko, I.V. (2013), "Vivod pervogo I vtorogo standartnih predelov iz edinoj sistemi neravenstv", *Iscustvenniy intelekt* [Arficial intelligence], no. 1, pp. 172-179.
3. Mironenko, L.P.and Vlasenko, A.Yu. (2013), "A compactof inequalities for the standard limits in the theory of limits", *Iscustvenniy intelekt* [Arficial intelligence], no. 2, pp. 61-70.
4. Mironenko, L.P. (2013), "The new method of epy proof of the fundamental limits in the theory of limits", *Mignarodna naukovo-praktichna konderentsia «Matematika v suchasnomu tehnichnomu universiteti»* [International scientific-practical conferenc. Mathematics is in a modern technical university], National Technical University, Donetsk.
5. Mironenko, L.P. (2012), "Ekwivalentnost standartnih predelov v teorii predelov", *Iskustvenij intellekt* [Arficial intelligence], no. 2, pp. 123-128.

Надійшла до редакції: 18.05.2014 р.

Рецензент: докт. фіз.-мат. наук, проф. Малашенко В.В.

Л.П.Мироненко
ДВНЗ «Донецький національний технічний університет»

Два нових метода доведення фундаментальних границь у математичному аналізі. *У статті розглянуто два нових метода введення у математичний аналіз фундаментальних границь – перша і друга стандартні границі. Непередбачено знайдено нове рішення старої проблеми. Підхід відрізняється стислістю і транспарентністю, що робить теорію оригінальною і загальною для обох границь. Другий спосіб має кінематичне походження, що принципово відрізняє нашу теорію від класичної.*

Ключові слова: *методика, границя, функція, тригонометричний, гіперболічний, стандартний, фундаментальний.*

L.P.Mironenko
Donetsk National Technical University

Two new methods of the proof of the fundamental limits in the mathematical analysis. *In the paper it is considered absolutely two new methods of introduction to the mathematical analysis of the fundamental limits – first and second standard limits. It is found a new solution of the old problem. The method has brief and transparent character that makes the theory attractive and general for both limits. The second method has kinematical nature that differs our theory radically from the classical theory.*

Keywords: *methodical, limit, function, trigonometric, hyperbolic, standard, fundamental.*