УДК 517.977.58

Сравнение эффективности алгоритмов динамического управления капиталом по функции мощности

Гурьянова Т.В.
Донецкий национальный технический университет
gurianova_taya@ukr.net

Abstract

Gurianova T. Comparison of effectiveness of money management's dynamics algorithms by power function. *Estimation of effectiveness of money management's dynamics algorithms by statistical power function is proposed. Analysis of effectiveness is performed for new money management's dynamics algorithms in comparison of well-known R. Vince's method. New algorithm is more effective and can be used in practical management of economic and social systems.*

Введение

В своей монографии [1] Р. Винс разработал оригинальную теорию «оптимального *f*». В работах [2, 3] нами показано, что применение эмпирического метода нахождения «оптимального *f*» Р. Винса в алгоритмах динамического управления капиталом (ДУК) нуждается в серьезной корректировке. Применение новых методов позволяет существенно повысить эффективность алгоритмов ДУК по критериям достижения максимальной прибыльности, минимального риска и т.д. В статье предлагается метод оценки эффективности алгоритмов ДУК по их разделительным способностям для различных поведений системы управления – мощности алгоритма.

Постановка задачи

Целью настоящего исследования является сравнение эффективности известного и предложенных алгоритмов ДУК с использованием функции мощности комбинированным аналитическим и экспериментальным методами.

Известный метод Р. Винса [1, 2]:

$$K_{1n}\Big|_{\max} = \prod_{i=1}^{n}\left[1 + \frac{-x_i}{x_j}\cdot f_i\right], \qquad (1)$$

где K_{1n} - множитель капитала, $\{x_n\}$ - ряд выигрышей и проигрышей компьютерной торговой системы, x_j - наибольший проигрыш системы, f_i - часть капитала, предназначенная для реинвестирования, сравнивается со следующими методами:

- методом, основанном на интервальных оценках [3]

$$F_{1i} = \bar{f} \pm \frac{k\cdot\sigma_f}{\sqrt{n}}, \qquad (2)$$

где $\bar{f} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f_i^*$, $\sigma_f = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(f_i^* - \bar{f})^2$ - соответственно математическое ожидание и СКО оценок f^*, полученных по (1); k - критическое значение $t-$статистики Стьюдента для числа степеней свободы $k = n-1$ и заданной доверительной вероятности $P_{дов}$, F_{1i} - оценка части капитала при реинвестировании;

- методом предварительного усреднения ряда $\{x_i\}$ [3]

$$K_{2n}\Big|_{\max} = \prod_{i=1}^{n}\left[1 + \frac{-EMA[x_i]}{EMA[x_j]}\cdot F_{2i}\right], \qquad (3)$$

где K_{2n} - множитель капитала, F_{2i} - оценка части капитала при реинвестировании, $EMA[x_i]$ - усредненная с помощью экспоненциальной скользящей средней величина x_i, $EMA[x_j]$ - самый большой усредненный проигрыш;

- методом последующего усреднения точечных оценок $\{f_i^*\}$, полученных по (1)

$$F_{3i} = EMA[f_i] = EMA[f_{i-1}] + \frac{2}{m+1}\{f_i - EMA[f_{i-1}]\} \qquad (4)$$

где F_{3i} - оценка части капитала при реинвестировании, f_i - оценки, полученные по (1), m – эквивалентное окно временного усреднения;

- параметрическим методом определения оптимального f [4]

$$\ln(K_{4n})\big|_{\max} = \int_{-1}^{1}\ln(1 + f\cdot x)\cdot w(x)\cdot dx\,, \qquad (5)$$

где K_{4n} - множитель капитала, $w(x)$ - функция плотности вероятности распределения ряда $\{x_n\}$.

При сравнении эффективности анализируемых методов мы основывались на методах сравнения эффективности оценок и сравнении функций мощности [5]. В [5] предлагается в качестве меры сравнения эффективности двух критериев использовать показатель, который определяется как отношение:

$$A = \frac{n_2}{n_1}, \qquad (6)$$

где n_1 – объем выборки, при котором первый критерий достигает определенной мощности, n_2 – объем выборки, при котором второй критерий достигает того же уровня мощности. При этом, если A<1, то второй критерий является более эффективным, чем первый, при A>1 – справедливо обратное утверждение.

Ниже предложен приближенный метод оценки эффективности алгоритмов ДУК путем анализа нового варианта функции мощности – показателя E.

Полученные результаты

В работе [2] нами были определены границы применимости на практике метода «оптимального f» Р. Винса: для интервала адаптации $\tau = 20$ и среднеквадратического отклонения $SD = 0{,}47$ метод Р. Винса работает при $1{,}05 \le G \le 1{,}3$, где G - среднее геометрическое системы, а математическое ожидание связано с G и SD формулой

$$M = \sqrt{G^2 + SD^2}. \qquad (7)$$

Точный аналитический расчет апостериорных законов распределения выходных оценок представляет собой сложную математическую задачу. Апостериорные законы можно получить только в приближенном виде. Поэтому нахождение этих законов было осуществлено путем имитационного моделирования. Исходным законом распределения вероятностей случайных величин $\{x_n\}$ является усеченный нормальный.

Имитационная модель строилась на следующих данных: для каждого из перечисленных алгоритмов были сгенерированы по усеченному нормальному закону распределения по три ряда $\{x^i{}_n\}$, $n = 30020,\ i = 1,\ 2,\ 3$ с $SD = 0{,}47$, средними геометрическими $G = 1{,}05; 1{,}175;\ 1{,}3$ и соответствующими им математическими ожиданиями $M = 1{,}15; 1{,}265\ 1{,}38$, вычисленными по формуле (7). Причем, все данные подчиняются соотношению $\left|x_j\right| \le 1\ \forall j = \overline{1,n}$ из экономических соображений (т.е. выигрыш или проигрыш системы не может превышать 100%).

Затем для каждого из трех рядов данных каждого из пяти алгоритмов (1)-(5) были построены ряды оценок $\{f\}$ оптимальной доли капитала при реинвестировании. Также были построены полигоны частот этих оценок. На рис.1 изображены полигоны частот для метода (1) Р. Винса, где полигон частот №1 получен из ряда оценок $\{f^1{}_m\}$, $m = 30000$, вычисленного на ряде данных $\{x^1{}_n\}$, $n = 30020$, сгенерированных для метода (1) при $SD = 0{,}47$ и $M = 1{,}15$; полигон частот №2 получен из ряда оценок $\{f^2{}_m\}$ $m = 30000$, вычисленного на ряде данных $\{x^2{}_n\}$, $n = 30020$, сгенерированных для метода (1) при $SD = 0{,}47$ и $M = 1{,}265$; полигон частот №3 получен из ряда оценок $\{f^3{}_m\}$, $m = 30000$, вычисленного на ряде данных $\{x^3{}_n\}$, $n = 30020$, сгенерированных для метода (1) при $SD = 0{,}47$ и $M = 1{,}38$.

Далее были подобраны наиболее подходящие теоретические распределения для полученных полигонов частот. Им оказалось бета-распределение.

Случайная величина имеет бета-распределение, если плотность вероятности $f(x)$ случайной величины имеет вид [6]:

$$f(x) = \frac{1}{B(\alpha,\beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}, \qquad (8)$$

$$B(\alpha,\beta) = \int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx, \qquad (9)$$

где $\alpha, \beta > 0$ - произвольные фиксированные параметры и $B(\alpha,\beta)$ - бета-функция. Математическое ожидание случайной величины x при бета-распределении равно:

$$m = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}, \qquad (10)$$

а дисперсия случайной величины имеет вид:

$$\sigma^2 = \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}. \qquad (11)$$

На рис. 2 приведен пример аппроксимации трех экспериментальных полигонов частот соответствующими теоретическими бета-распределениями.

Во всех случаях среднеквадратическое отклонение теоретического распределения от экспериментального не превышало 10^{-4}. С помощью критерия согласия χ^2 Пирсона при использовании в качестве нулевой гипотезы теоретического бета-распределения была доказана состоятельность данной нулевой гипотезы ($p > 0{,}05$). В таблице 1 приведены параметры α и β для бета-распределения каждого полигона частот.

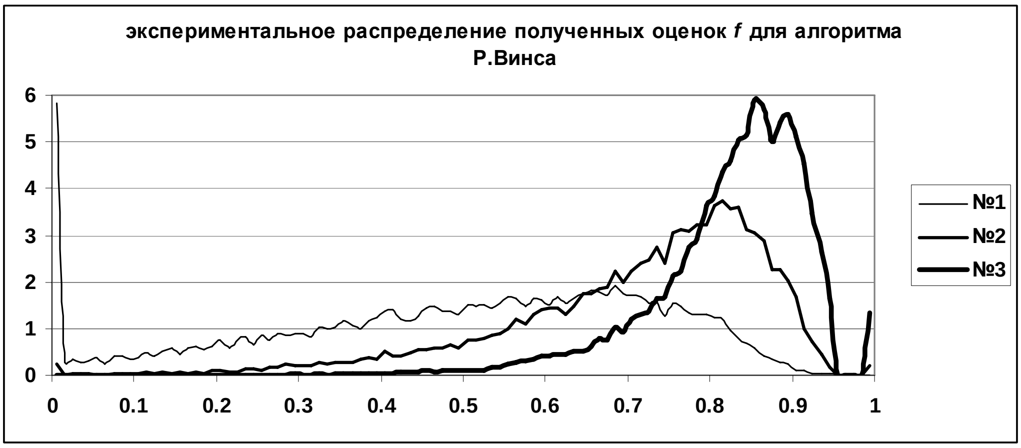

Рисунок 1 – Экспериментальные полигоны частот оценок $\{f\}$ для метода (1)

Рисунок 2 - Аппроксимация трех экспериментальных полигонов частот для метода (1) теоретическими бета-распределениями

Таблица 1. Параметры бета-распределения

	$G = 1{,}05$		$G = 1{,}175$		$G = 1{,}3$	
	α	β	α	β	α	β
Алгоритм (1)	2.5782	2.1054	7.4203	2.4343	16.096	2.7476
Алгоритм (2)	2.5275	2.0756	7.6085	2.5389	15.205	2.7442
Алгоритм (3) при $m = 2$	3.4886	1.5924	11.73	2.0108	36.125	2.8987
Алгоритм (3) при $m = 3$	4.3737	1.4362	19.252	2.1174	63.886	3.6272
Алгоритм (4) при $m = 2$	2.6322	2.1635	7.8056	2.7044	16.756	2.9057
Алгоритм (4) при $m = 5$	2.6638	2.2567	8.5157	2.9299	16.994	3.0659
Алгоритм (5)	1.5364	0.9669	2.9296	0.874	6.9033	0.9009

Таблица 2 – экспериментальные m и σ полигонов частот рядов оценок $\{f\}$ для методов (1)-(5)

	$G=1{,}05$		$G=1{,}175$		$G=1{,}3$	
	m	σ	m	σ	m	σ
Алгоритм (1)	0.493	0.236	0.710	0.159	0.823	0.098
Алгоритм (2)	0.490	0.238	0.704	0.165	0.817	0.100
Алгоритм (3) при $m=2$	0.602	0.259	0.808	0.142	0.897	0.076
Алгоритм (3) при $m=3$	0.664	0.257	0.858	0.129	0.935	0.058
Алгоритм (4) при $m=2$	0.494	0.232	0.701	0.158	0.822	0.094
Алгоритм (4) при $m=5$	0.491	0.224	0.707	0.146	0.818	0.090
Алгоритм (5)	0.676	0.314	0.899	0.180	0.981	0.060

Эффективность алгоритмов ДУК

Нашей задачей было сравнить алгоритм (1) с алгоритмами (2)-(5). Сравнение проходило следующим образом:

1) в первом алгоритме ДУК рассчитывается распределение значений оценок $\{f\}$ для ряда $\{x'_n\}, n=30020$, при заданном значении M' и SD' и вычисляется математическое ожидание ряда $\{f\}$ $<f_1>$ и его стандартное отклонение – SD_{f_1};

2) для того же алгоритма рассчитывается распределение значений оценок $\{f\}$ для ряда $\{x''_n\}, n=30020$, при заданных значениях параметров M'' и SD'' и вычисляется математическое ожидание ряда $\{f\}$ $<f_2>$ и его стандартное отклонение – SD_{f_2};

3) во втором алгоритме ДУК (сравниваемом) аналогично рассчитывается распределение для тех же заданных параметров M' и SD' и вычисляется $<f_3>$ и SD_{f_3};

4) также во втором алгоритме ДУК аналогично рассчитывается распределение значений оценок $\{f\}$ для заданных параметров M'' и SD'' и вычисляется $<f_4>$ и SD_{f_4};

5) для первого алгоритма (1) при n_1=30000 вычисляется значение показателя T_1:

$$T_1 = \frac{|<f_1> - <f_2>|}{\sqrt{\dfrac{SD_{f1}^2 + SD_{f2}^2}{n_1}}}; \qquad (12)$$

6) затем рассчитывается значение объема выборки n_2 для второго алгоритма, при котором выполняется равенство:

$$\frac{|<f_3> - <f_4>|}{\sqrt{\dfrac{SD_{f3}^2 + SD_{f4}^2}{n_2}}} = T_1 \quad ; \qquad (13)$$

7) в качестве меры эффективности алгоритмов ДУК вычисляется значение показателя эффективности E:

$$E = \frac{n_2}{n_1}. \qquad (14)$$

При этом, если E<1, то второй алгоритм ДУК является более эффективным, чем первый, при E>1 – справедливо обратное утверждение.

В таблице 2 приведены значения m и σ каждого из полигонов частот.

Для большей наглядности сравним алгоритм (3) при $m=2$ с алгоритмом (1) поэтапно. В соответствии с таблицей 1 алгоритм (1) имеет три полигона частот оценок $\{f\}$ с такими параметрами: 1) $m=0{,}493,\ \sigma=0{,}236$ для данных $\{x^1{}_n\}$ с $G=1{,}05$ и $SD=0{,}47$; 2) $m=0{,}71,\ \sigma=0{,}159$ для ряда данных $\{x^3{}_n\}$ с $G=1{,}175$ и $SD=0{,}47$; 3) $m=0{,}823,\ \sigma=0{,}098$ для данных $\{x^3{}_n\}$ с $G=1{,}3$ и $SD=0{,}47$. Тогда по алгоритму (3) можно рассчитать три полигона частот со следующими параметрами: 1) $m=0{,}602,\ \sigma=0{,}259$ для данных $\{x^1{}_n\}$ с $G=1{,}05$ и $SD=0{,}47$; 2) $m=0{,}808,\ \sigma=0{,}142$ для ряда данных $\{x^3{}_n\}$ с $G=1{,}175$ и $SD=0{,}47$; 3) $m=0{,}897,\ \sigma=0{,}076$ для данных $\{x^3{}_n\}$ с $G=1{,}3$ и $SD=0{,}47$. Тогда по формуле (12) T_1 для пары рядов данных $G=1{,}05/G=1{,}175$ равно: $T_1 = \dfrac{|0{,}493-0{,}71|}{\sqrt{\dfrac{0{,}236^2+0{,}159^2}{30000}}} = 132{,}08$, а для пары $G=1{,}175/G=1{,}3$:

$T_1 = \dfrac{|0{,}71-0{,}823|}{\sqrt{\dfrac{0{,}159^2+0{,}098^2}{30000}}} = 104{,}79$. Откуда по формуле (13) для пары $G=1{,}05/G=1{,}175$

$132{,}08 = \dfrac{|0{,}602-0{,}808|}{\sqrt{\dfrac{0{,}259^2+0{,}142^2}{n_2}}} = 0{,}697\sqrt{n_2}$, т.е.

$n_2 = \left(\frac{132{,}08}{0{,}697}\right)^2 \approx 35909$ и тогда $\frac{n_2}{n_1} = \frac{35909}{30000} \approx 1{,}19$; аналогично для пары $G = 1{,}175 / G = 1{,}3$: $\frac{n_2}{n_1} = \frac{35452}{30000} \approx 1{,}18$.

В таблице 3 приведены полученные в результате имитационного моделирования коэффициенты E.

Таблица 3 – полученные коэффициенты E.

	$G = 1{,}05 /$ $G = 1{,}175$	$G = 1{,}175 /$ $G = 1{,}3$
Алгоритм (1)	1	1
Алгоритм (2)	1,07	1,06
Алгоритм (3) при $m = 2$	1,19	1,18
Алгоритм (3) при $m = 3$	1,28	1,23
Алгоритм (4) при $m = 2$	1,07	0,84
Алгоритм (4) при $m = 5$	0,89	0,87
Алгоритм (5)	1,53	1,94

Выводы

1. Впервые исследованы законы распределений оценок известного алгоритма ДУК Р. Винса и предложенных оригинальных алгоритмов ДУК [2, 3]. Эти законы аппроксимируются бета-распределением ($p > 0{,}05$, по критерию χ^2 Пирсона).

2. Предложен упрощенный вариант вычисления функций мощности известного и предложенных алгоритмов ДУК с использованием статистики Т, которая представляет собой отношение изменения средних значений распределения оценок $\{f\}$ при различных значениях G системы к стандартной ошибке этого изменения.

3. На основании п.2 можно ранжировать известный алгоритм ДУК Р. Винса и предложенные оригинальные алгоритмы ДУК [2, 3] по их эффективности:
1) алгоритм последующего усреднения точечных оценок $\{f_i^*\}$ при $m = 5$;
2) алгоритм «оптимального f » Р. Винса;
3) алгоритм последующего усреднения точечных оценок $\{f_i^*\}$ при $m = 2$;
4) алгоритм, основанный на интервальных оценках;
5) алгоритм предварительного усреднения ряда $\{x_i\}$ при $m = 2$;
6) алгоритм предварительного усреднения ряда $\{x_i\}$ при $m = 3$;
7) параметрический алгоритм.

4. Предложенный оригинальный алгоритм ДУК последующего усреднения точечных оценок $\{f_i^*\}$ (при $m = 5$) является более эффективным (по функции мощности) по сравнению с методом-прототипом Р. Винса и может быть рекомендован для практического использования в автоматизированных информационных системах для эффективного управления рисками экономических и социальных систем.

Литература

1. Винс Р. Математика управления капиталом. Методы анализа риска для трейдеров и портфельных менеджеров: Пер. с англ. – М.: Альпина Паблишер, 2001. – 400 с.
2. Смирнов А.В., Гурьянова Т.В. Об «оптимальном f » Ральфа Винса. Наукові праці Донецького національного технічного університету, серія «Інформатика, кібернетика та обчислювальна техніка», вып. 9 (132), Донецк, ДонНТУ, 2008. – С. 216-220.
3. Смирнов А.В., Гурьянова Т.В. Новое в динамическом управлении. Наукові праці Донецького національного технічного університету, серія «Інформатика, кібернетика та обчислювальна техніка», вып. 10 (153), Донецк, ДонНТУ, 2009. – С. 230-233.
4. Vince R. The Handbook of Portfolio Mathematics: Formulas for Optimal Allocation & Leverage. Hoboken, NJ: Wiley, 2007.
5. Кендалл М., Стьюарт А. Статистические выводы и связи: Пер. с англ. – М.: Наука, 1973. – 899 с.
6. Evans M., Hastings N., Peacock B. Statistical distributions. 2nd edition. New York: John Wiley&Sons, 1993.

Поступила в редакцию 30.03.2010