

УДК 621.3.011  
КП  
Инв. №

Министерство образования и науки ДНР  
ГВУЗ «Донецкий национальный технический университет  
(ДонНТУ)  
г. Донецк, ул. Артема, 58; тел. 92 90 19, факс (0622) 92 12 78

У Т В Е Р Ж Д А Ю  
Проректор по научной работе  
д-р техн. наук, проф.

\_\_\_\_\_ К.Маренич

О Т Ч Ё Т  
О НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ РАБОТЕ НЗ-13

«Совершенствование методов анализа и синтеза электрических цепей в  
установившихся режимах»  
(промежуточный)

Руководитель НИР  
канд. техн. наук, доцент \_\_\_\_\_ А.Корощенко

Рукопись окончена 20 мая 2015г.  
Результаты этой работы рассмотрены Учёным Советом  
электротехнического факультета ДонНТУ, протокол № от 26 июня 2015г.

2015 г.

## СПИСОК АВТОРОВ

Руководитель НИР канд. техн. наук, доц.	А.Корощенко (вступление, разд. 1.1, 1.3, 1.4, 2)
Ответственный исполнитель канд. техн. наук, доц.	Е.Журавель (разд. 1.3, 2)
Канд. техн. наук, проф.	В.Денник (разд. 1.2)
Канд. техн. наук, доц.	В.Антамонов (реферат, вступление, выводы)
Канд. техн. наук, доц.	В.Чорноус (разд. 1.2)
Канд. техн. наук, доц.	В.Михайлов (разд. 1.2, 2.4)
Ст. преп.	Е.Чорноус (разд. 1.2)
Асс.	Л.Немолякина (приложения)

## РЕФЕРАТ

Промежуточный отчёт о НИР НЗ-13: 95 с., 9 табл., 51 рис., 15 источников.

Объект исследования – методы расчёта и синтеза электрических цепей.

Цель работы – критический анализ существующих методов расчёта и синтеза электрических цепей, их совершенствование применительно к разным режимам работы цепей на основе использования современных компьютерных методов расчёта, а также экспериментальная проверка предложенных методов и методик с разработкой предложений по использованию полученных результатов в реальных электрических устройствах и разветвлённых электрических цепях.

Методы исследования – аналитический и экспериментальный.

Критический анализ показал, что существующие методы или устарели, или недостаточно отработаны, в них практически не используются возможности современной компьютерной техники, поэтому разработка новых методов расчёта нелинейных цепей, нелинейной электротехники, новых подходов к анализу их режимов работы, а также модернизация старых методов с применением современной вычислительной техники являются актуальными.

В работе подробно рассмотрены методы расчёта электрических цепей, содержащих нелинейные двухполюсники, разработаны MathCAD-программы по расчёту таких цепей. Совершенствование теории линейных и нелинейных трёхполюсников постоянного тока достигнуто на основе геометрической интерпретации их характеристик. На основе разработанных MathCAD-программ достигнуто совершенствование методов расчёта разветвлённых нелинейных цепей постоянного тока.

По результатам НИР НЗ-13 подготовлена студенческая научная работа на Всеукраинский конкурс [10], сделаны три доклада на студенческой конференции [9, 11, 14], опубликованы 3 научных статьи [12, 13, 15].

ВОЛЬТ-АМПЕРНАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА, НЕЛИНЕЙНОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ, АКТИВНЫЙ ДВУХПОЛЮСНИК, ПАССИВНЫЙ ТРЁХПОЛЮСНИК, АППРОКСИМАЦИЯ ХАРАКТЕРИСТИКИ, АНАЛИЗ И

# СИНТЕЗ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ЦЕПИ, МЕТОДЫ РАСЧЁТА ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ЦЕПИ

## СОДЕРЖАНИЕ

ВСТУПЛЕНИЕ .....	6
1. КРИТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ СУЩЕСТВУЮЩИХ МЕТОДОВ РАСЧЁТА ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ И ФОРМУЛИРОВАНИЕ НАПРАВЛЕНИЙ ИХ СОВЕРШЕНСТВОВАНИЯ .....	7
1.1 Анализ методов расчёта линейных и нелинейных электрических цепей постоянного тока .....	7
1.2 Анализ методов расчёта электрических цепей переменного тока .	9
1.3 Анализ способов аппроксимации характеристик нелинейных элементов в цепях постоянного тока .....	12
1.4 Выводы .....	25
2. СОВЕРШЕНСТВОВАНИЕ МЕТОДОВ АНАЛИЗА И СИНТЕЗА ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ ПОСТОЯННОГО ТОКА .....	26
2.1 Совершенствование теории линейных трёхполюсников постоянного тока .....	26
2.2 Совершенствование теории электрических цепей постоянного тока, которые содержат нелинейные двухполюсники .....	49
2.3 Совершенствование теории нелинейных трёхполюсников .....	67
2.4 Совершенствование методов расчёта разветвлённых нелинейных цепей .....	76
2.5 Выводы .....	89
 ВЫВОДЫ .....	 90
ПЕРЕЧЕНЬ ИСТОЧНИКОВ .....	91
ПРИЛОЖЕНИЯ .....	93

## ВСТУПЛЕНИЕ

Нелинейная электротехника находит применение во всех отраслях науки и техники. Это выпрямители, стабилизаторы напряжения и тока, усилители, устройства с ферромагнитными сердечниками, полупроводниковые преобразователи и, наконец, вся компьютерно-вычислительная техника. Все эти устройства в своих эквивалентных расчётных схемах содержат нелинейные элементы. Анализ режимов работы этих устройств показывает, что для их расчёта необходимы специальные, современные методы расчёта нелинейных цепей.

Существующие методы или устарели, или недостаточно отработаны, в них практически не используются возможности современной компьютерной техники. Развитие вычислительной техники создаёт возможности и способствует пересмотру подходов к расчёту, возможности модернизации существующих старых методов и разработки новых методов в отношении анализа и расчёта нелинейных цепей с применением современной вычислительной техники.

В связи с этим разработка новых методов расчёта нелинейных цепей, нелинейной электротехники, новых подходов к анализу их режимов работы, а также модернизация старых методов с применением современной вычислительной техники являются актуальными.

В данной работе выполнено совершенствование методов анализа и синтеза электрических цепей постоянного тока. В первую очередь, это касается цепей, содержащих нелинейные двух- и трёхполюсники. В теории нелинейных трёхполюсников предложена геометрическая интерпретация их характеристик.

В разработке материалов подразделов 1.3, 2.1 и 2.3 принимала участие студентка гр. ЭСиСа-10 А.В.Хохлова.

По результатам НИР НЗ-13 подготовлена студенческая научная работа на Всеукраинский конкурс [10], сделаны три доклада на студенческой конференции [9, 11, 14], опубликованы 3 научных статьи [12, 13, 15].

# 1 КРИТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ СУЩЕСТВУЮЩИХ МЕТОДОВ РАСЧЁТА ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ И ФОРМУЛИРОВАНИЕ НАПРАВЛЕНИЙ ИХ СОВЕРШЕНСТВОВАНИЯ

## 1.1 Анализ методов расчёта линейных и нелинейных электрических цепей постоянного тока

Методов анализа линейных электрических цепей как простых, так и сложных, существует достаточно большое количество, они достаточно хорошо отработаны, что нашло своё отражение в ряде учебников [1-4]. Достаточно хорошо освещены и вопросы преобразования в линейных цепях. Могут быть лишь несколько углублены вопросы анализа состояния и поведения многополюсников, в частности, трёхполюсников.

В электрических цепях трёхполюсники широко встречаются как в виде отдельных устройств (потенциометр), так и как часть электрической цепи. В последнем случае, если токораспределение внутри этой части не является важным, её целесообразно представить эквивалентной схемой с целью упрощения будущих расчётов и анализов. Трёхполюсником может быть устройство, внутреннее содержание которого неизвестно. Поэтому для дальнейшей с ним работы нужно разработать его математическую и физическую модели (решить задачу синтеза). В связи с этим нужно выяснить, какие характеристики трёхполюсника нужны для получения полной о нём информации.

Теория линейных трёхполюсников, особенно активных, в литературе представлена недостаточно.

Что касается нелинейных электрических цепей постоянного тока, то лучше других разработаны графические методы расчёта для сравнительно простых цепей и численные методы с применением вычислительной техники при решении нелинейных алгебраических уравнений [4-8]. Графические методы характеризуются неудовлетворительной точностью и, главное, большим

объёмом работы. Численные методы не позволяют выполнять преобразования в электрических цепях и решать задачи синтеза (создание физических моделей разветвлённых цепей или многополюсников). Теория же трёх- и многополюсников, тем более, активных многополюсников, совсем отсутствует.

Таким образом, возникают следующие задачи для дальнейших исследований: углубление теории линейных как пассивных, так и активных многополюсников постоянного тока; разработка методик применения компьютерных программ для анализа нелинейных электрических цепей постоянного тока, преобразования в них; развитие теории нелинейных трёх- и многополюсников постоянного тока.



## 1.2 Анализ существующих методов расчёта электрических цепей переменного тока

Линейные электрические цепи синусоидального тока как простые, так и сложные, рассчитываются и анализируются теми же методами, что и цепи постоянного тока, но в комплексной форме, что нашло своё отражение в ряде учебников [1-4]. Достаточно хорошо освещены и вопросы преобразований в линейных цепях. Как и в цепях постоянного тока, в цепях синусоидального тока могут быть только несколько углублены вопросы анализа состояния и поведения многополюсников, в частности трёхполюсников.

Что касается линейных цепей несинусоидального тока, то их расчёт и анализ с использованием тригонометрических рядов Фурье также достаточно хорошо освещены в литературе [1-4].

Совсем иное положение с нелинейными цепями переменного тока. Явления, которые возникают в этих цепях, значительно сложнее и многограннее, чем при постоянном токе. Прежде всего, в таких цепях необходимо различать активные, индуктивные и ёмкостные элементы, причём в двух последних случаях связь между напряжением и током дифференциально-интегральная. Во-вторых, в этих цепях элементы делятся на инерционные и безынерционные, поскольку необходимо учитывать как статические, так и динамические свойства. В-третьих, расчёт таких цепей сводится к решению нелинейных алгебраических или дифференциальных уравнений. Так как отсутствуют общие математические методы решения таких уравнений, то отсутствуют и методы расчёта нелинейных цепей переменного тока любой сложности, причём как в установившихся режимах, так и в переходных процессах. В связи с этим имеется много частных методов, которые позволяют решать конкретные задачи расчёта нелинейных цепей переменного тока. Они достаточно освещены в литературе [4-6]. Поскольку их довольно много, то нет смысла их все перечислять.

Следует отметить, что характеристики нелинейных элементов (вольтамперные, вебер-амперные или кулон-вольтные) часто заданы таблицей

или графиком и аналитического выражения не имеют. Расчёт цепей с такими элементами, как правило, выполняется графическими методами, в основу которых лежат уравнения по законам Кирхгофа. Понятно, что такие решения являются приблизительными. Более того, анализ освещённых в литературе частных методов показывает, что почти все они дают приближенное решение. Особенно это касается расчётов переходных процессов.

Учитывая вышесказанное, можно сформулировать следующие задачи для дальнейших исследований:

- поиск новых частных методов расчёта нелинейных цепей переменного тока как в установившихся режимах, так и в переходных процессах;
- расширение круга задач, которые могут быть решены известными частными методами;
- поиск возможностей повышения точности расчёта нелинейных цепей переменного тока.

Выполнению поставленных задач, прежде всего, может поспособствовать применение компьютерных программ для расчёта и анализа нелинейных электрических цепей переменного тока.

При исследовании трёхфазных цепей в симметричном режиме их обычно сводят к однофазным, после чего можно применять все известные методы анализа однофазных цепей.

Несимметричные трёхфазные цепи можно рассматривать как сложные электрические цепи, содержащие несколько источников энергии, и снова применять к ним все известные методы анализа сложных цепей переменного тока. Однако бывают исключения. Рассмотрим схему рис. 1.1. Это схема шахтной кабельной сети, характеризующейся большой протяжённостью и, как следствие, значительной ёмкостной проводимостью  $\omega C$  по отношению к земле и значительными токами утечки через несовершенную изоляцию кабеля  $R$ ; сеть работает с изолированной нейтралью, содержит трёхфазный симметричный источник  $e_A, e_B, e_C$  с внутренним сопротивлением на фазу  $r_0, L_0$ , эквивалентную нагрузку  $r_n, L_n$ . При прикосновении человека с сопротивлением  $R_h$  к линейному

проводу возникает ток утечки на землю  $i_h$ , а режим работы сети становится несимметричным. Необходимо исследовать закон изменения потенциала нейтрали источника и потенциалов фаз при изменении сопротивления утечки  $R_h$  от бесконечности до нуля.

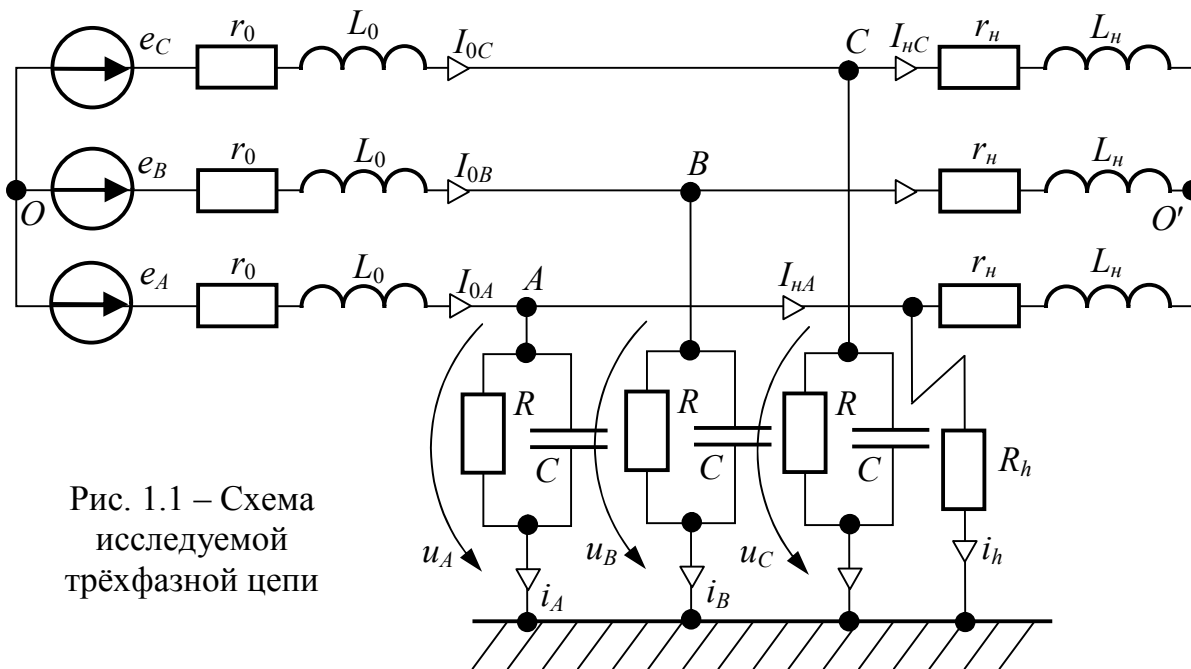


Рис. 1.1 – Схема исследуемой трёхфазной цепи

Решение этой задачи является актуальным как в отношении релейной защиты, так и охраны труда. С точки зрения электротехники к данной задаче может быть применён любой из известных методов анализа трёхфазных цепей. Однако проблема заключается в том, чтобы результаты исследования были представлены с максимальной наглядностью и просты в понимании и восприятии. Функциональные зависимости (формулы) этим условиям не отвечают. Требуются простые и наглядные графические образы, которые могут быть получены при использовании системы MathCAD.

### 1.3 Анализ способов аппроксимации характеристик нелинейных элементов в цепях постоянного тока [9]

#### 1.3.1 Типовые характеристики

Все методы анализа и расчёта нелинейных электрических цепей постоянного тока используют вольтамперные характеристики резисторов, которые могут быть представлены таблицей или в виде графиков. Исходя из реально существующих резистивных элементов, можно указать 6 видов типовых зависимостей  $y(x)$  (рис. 1.2): 1) функция  $y(x)$  в зависимости от аргумента  $x$  монотонно возрастает, причём наблюдается её насыщение (темпы роста замедляются); 2) функция  $y(x)$  монотонно возрастает, причём с ускорением; 3) функция  $y(x)$  монотонно возрастает, но на отдельном участке наблюдается стабилизация функции; 4) функция  $y(x)$  монотонно возрастает, но на отдельном участке наблюдается стабилизация аргумента (почти скачок функции); 5) функция в целом возрастает, но на отдельном участке наблюдается снижение функции (участок с отрицательным дифференциальным сопротивлением), так называемая функция типа  $N$ ; 6) функция в целом растёт, но на отдельном участке наблюдается снижение аргумента при продолжении роста функции, так называемая характеристика типа  $S$ . Последняя характеристика является неоднозначной функцией аргумента.

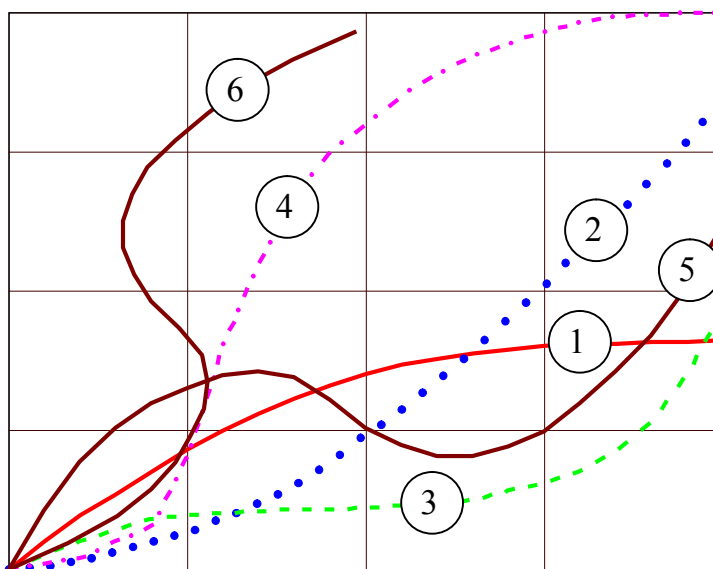


Рис. 1.2 – Типы графиков

Если функцией (ординатой) считать напряжение, а аргументом (абсциссой) – ток, то зависимость первого типа характерна для диода в проводящем направлении, второй тип характерен для лампы накаливания с металлической нитью или диода в непроводящем направлении, третий тип соответствует кенотрону, четвёртый – бареттеру, пятый – электрической дуге, шестой – туннельному диоду [2, 7].

Все вышеуказанные характеристики рассматриваются только в первом квадранте декартовой системы координат. Это обусловлено тем, что резисторы являются такими пассивными элементами, которые преобразуют электрическую энергию в тепловую, то есть мгновенная мощность, которую они потребляют, может быть только положительной, то есть функция всегда положительна, если аргумент положительный, и она отрицательна, если аргумент отрицательный. В случае отрицательного аргумента в цепях постоянного тока всегда можно изменить направление тока или напряжения на противоположное и рассматривать аргумент как положительный. В конце концов, если возникает необходимость в использовании двух квадрантов (первого и третьего), полную характеристику можно составить из двух частей, каждая из которых является одним из шести указанных типов.

### 1.3.2 Методы аналитического описания ВАХ

В случае аналитического представления нелинейных характеристик возможно использование степенного полинома ( $y=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\dots+a_nx^n$ ) [7], экспоненциального полинома ( $y=a_1e^{b_1x}+a_2e^{b_2x}+\dots+a_n e^{b_nx}$ ), а также следующих трансцендентных функций [6]:

- для функций первого типа –  $y=a \cdot th(\alpha x)$ ,  $y=a \cdot arctg(\alpha x)$ ,  $y=a \cdot arsh(\alpha x)$ ,  
 $y=a^{(2n+1)} \sqrt{bx}$ ,

- для функций второго типа –  $y=a \cdot arth(\alpha x)$ ,  $y=a \cdot tg(\alpha x)$ ,  $y=a \cdot sh(\alpha x)$ ,  $y=a \cdot x^{2n+1}$ ,  
 $y= ax^b e^{cx}$ ,

- для получения характеристик других типов при помощи трансцендентных функций используют их комбинации.

Использование трансцендентных функций крайне ограничено по следующим причинам: использование только одной функции не позволяет аппроксимировать функции третьего-шестого типов и, как правило, не даёт достаточной точности, а использование комбинации нескольких функций приводит к значительным усложнениям при определении коэффициентов. Определение коэффициентов экспоненциального полинома (например, методом наименьших квадратов) не является простым заданием. Таким образом, наиболее приемлемой формой аппроксимации является применение степенного полинома. Эта функция универсальна, то есть при помощи степенного полинома можно аппроксимировать с достаточной точностью подавляющее большинство реально существующих характеристик, система уравнений для определения коэффициентов полинома оказывается алгебраической и решается достаточно просто. Универсальность функции даёт эффект, когда возникает потребность преобразовать вольтамперную характеристику (зависимость напряжения от тока) в ампервольтную (зависимость тока от напряжения). Именно на таком преобразовании основаны методы расчёта нелинейных цепей, которые рассматриваются ниже. Ещё одной возможностью аппроксимации нелинейных характеристик является использование встроенных в математическую компьютерную систему MathCAD линейной и сплайновой интерполяций.

Для определения коэффициентов функции аппроксимирования (степенного полинома) предлагаются два метода [6, 7]: метод выбранных точек и метод наименьших квадратов. Для этих методов характерно следующее: с увеличением количества точек, использованных при вычислении коэффициентов, точность аппроксимации возрастает. И наоборот, с уменьшением количества слагаемых в формуле возрастает погрешность. В методе выбранных точек их количество должно равняться количеству слагаемых. Таким образом, если ограничиться, например, степенями до девятой включительно, количество точек составит всего десять. Метод наименьших квадратов может оперировать с любым количеством точек, то есть в этом

компоненте вон имеет преимущество. Однако при вычислении коэффициентов этим методом количество слагаемых может оказаться ограниченным, поскольку матрица коэффициентов при большом количестве слагаемых (7-9) становится сингулярной (вырожденной) или коэффициенты матрицы достигают слишком больших значений, вследствие чего её обратная матрица не вычисляется. Здесь преимущество на стороне метода выбранных точек.

Методика линейной и сплайн-интерполяции, которая используется в системе MathCAD, является достаточно удобной в использовании, но она не даёт формулы в явном виде, что может ограничить возможности анализа полученных результатов и т.п. При использовании линейной и сплайн-интерполяции фактически применяется метод выбранных точек, так как аппроксимированная характеристика проходит через выбранные точки, хотя их количество может быть произвольным. В случае линейной аппроксимации выбранные точки соединяются прямыми отрезками. При использовании сплайн-интерполяции выбранные точки соединяются кусочками кубических парабол, благодаря чему характеристика выглядит естественнее.

Оценим применение указанных четырёх методик.

Любая аппроксимация используется для заранее заданного рабочего участка характеристики. Будем считать точность достаточной, если среднеквадратическое отклонение аппроксимированной функции от заданной по отношению к наибольшему значению функции на рабочем участке не превышает 5%. Причём расчёт относительного среднеквадратического отклонения в методе наименьших квадратов выполняется для всех точек, координаты которых использованы при вычислении коэффициентов. В трёх других методах, по определению, характеристика проходит через выбранные точки. Поэтому относительное среднеквадратическое отклонение вычисляется для точек посередине каждого отрезка между выбранными точками. При расчётах применяются следующие формулы:

- метод наименьших квадратов

$m+1=21$  – количество использованных точек,  $X_m$  – максимальное значение аргумента на рабочем участке,  $dX$  – шаг изменения аргумента,  $n$  – наивысшая степень слагаемых функции аппроксимирования,  $X$  – вектор значений аргумента,  $Y$  – вектор соответствующих значений функции; расчёт выполняется в циклах, переменными в которых являются  $i$ ,  $j$  и  $k$ ;  $f(x)$  – аналитическая функция, взятая в качестве истинной;  $aa$  – вектор коэффициентов функции аппроксимирования;  $y(x)$  – функция аппроксимирования;  $\sqrt{d}$  – среднеквадратическое отклонение (дисперсия),  $p$  – относительное среднеквадратическое отклонение (погрешность аппроксимации) выраженное в процентах;

$$k=0..m; \quad dX=Xm/m; \quad X_k=k \cdot dX; \quad Y_k=f(X_k);$$

$$i=0..n; \quad j=0..n; \quad A_{i,j} = \sum_k (X_k)^{i+j}; \quad B_i = \sum_k [Y_k \cdot (X_k)^i]; \quad aa = A^{-1} \cdot B;$$

$$y(x) = \sum_{k=0}^m (x^k \cdot aa_k); \quad d = \frac{\sum_{k=0}^m (y(X_k) - f(X_k))^2}{m}; \quad p = \frac{\sqrt{d}}{Y_m} \cdot 100;$$

- метод выбранных точек

количество использованных точек – 10,  $X_m$  – максимальное значение аргумента на рабочем участке,  $dX$  – шаг изменения аргумента,  $X$  – вектор значений аргумента,  $Y$  – вектор соответствующих значений функции; расчёт выполняется в циклах, переменными в которых являются  $i$  и  $j$ ;  $f(x)$  – аналитическая функция, взятая в качестве истинной;  $aa$  – вектор коэффициентов функции аппроксимирования;  $y(x)$  – функция аппроксимирования;  $\sqrt{d}$  – среднеквадратическое отклонение (дисперсия),  $p$  – относительное среднеквадратическое отклонение (погрешность аппроксимации) выраженное в процентах;

$$i=0..9; \quad j=0..9; \quad dX=Xm/9; \quad X_j=j \cdot dX; \quad Y_j=f(X_j);$$

$$A_{i,j} = (X_j)^j; \quad aa = A^{-1} \cdot Y; \quad y(x) = \sum_{k=0}^9 (x^k \cdot aa_k);$$



$$d = \frac{\sum_{k=1}^m (y(0,5 \cdot (X_k + X_{k-1})) - f(0,5 \cdot (X_k + X_{k-1})))^2}{9}; \quad p = \frac{\sqrt{d}}{Y_m} \cdot 100;$$

- метод линейной и сплайн-интерполяции

$m+1=21$  – количество использованных точек,  $X_m$  – максимальное значение аргумента на рабочем участке,  $dX$  – шаг изменения аргумента,  $X$  – вектор значений аргумента,  $Y$  – вектор соответствующих значений функции; расчёт выполняется в цикле, переменной в котором является  $k$ ;  $f(x)$  – аналитическая функция, взятая в качестве истинной;  $pspline(X,Y)$  – вектор значений коэффициентов квадратичного сплайна,  $s$  – вектор вторых производных, созданный функцией сопровождения  $pspline$ ,  $interp(s,X,Y,x)$  – функция, аппроксимирующая данные векторов  $X$  и  $Y$ ;  $y(x)$  – функция аппроксимирования;  $\sqrt{d}$  – среднеквадратическое отклонение (дисперсия),  $p$  – относительное среднеквадратическое отклонение (погрешность аппроксимации) выраженное в процентах;

$$k=0..m; \quad dX=X_m/m; \quad X_k=k \cdot dX; \quad Y_k=f(X_k);$$

$$s = pspline(X,Y); \quad y(x) = interp(s,X,Y,x);$$

(для линейной аппроксимации  $y(x) = linterp(X,Y,x)$ )

$$d = \frac{\sum_{k=1}^m (y(0,5 \cdot (X_k + X_{k-1})) - f(0,5 \cdot (X_k + X_{k-1})))^2}{9}; \quad p = \frac{\sqrt{d}}{Y_m} \cdot 100.$$

Выполним аппроксимацию характеристики первого типа. В качестве заданной возьмём трансцендентную функцию  $f(x)=a \cdot th(\alpha x)=2 \cdot th(0,1 \cdot x)$  (рис. 1.3). Вначале рассмотрим случай, когда точки берутся при условии равномерного шага аргумента  $x$ . Ограничимся девятой степенью характеристики аппроксимирования. Таким образом, для метода выбранных точек будем использовать 10 точек, а для остальных трёх методов – 21 точку. Изменение наклона характеристики реализуется изменением максимального значения аргументу  $X_m$ . Результаты расчёта сведены в табл. 1.1. В табл. 1.1 первый метод

– метод наименьших квадратов, второй – метод выбранных точек, третий – метод сплайн-интерполяций, четвертый – линейная интерполяция. Для первого метода помимо погрешности аппроксимирования дополнительно определялась наивысшая степень слагаемых функции аппроксимирования  $n$ .

Таблица 1.1 – Сравнение методов аппроксимирования при условии равномерного шага аргумента

	$Xm$	10	20	25	30	35	40	50
№1	$n$	9	7	7	6	6	6	6
	$p, \%$	$3,1 \cdot 10^{-3}$	$3,11 \cdot 10^{-3}$	$8,69 \cdot 10^{-3}$	0,028	0,082	0,158	0,335
№2	$p, \%$	$1,08 \cdot 10^{-6}$	$5,77 \cdot 10^{-4}$	$1,18 \cdot 10^{-3}$	$6,12 \cdot 10^{-3}$	0,02	0,039	0,064
№3	$p, \%$	$1,18 \cdot 10^{-3}$	$7,41 \cdot 10^{-3}$	0,014	0,024	0,038	0,055	0,105
№4	$p, \%$	$2,05 \cdot 10^{-3}$	0,013	0,025	0,042	0,066	0,098	0,335

Как видим, наклон кривой незначительный, аппроксимирование всеми методами даёт очень точные результаты. При увеличении насыщения функции погрешность растёт, но остаётся в приемлемых границах (менее 1%). При этом наиболее точным оказался метод выбранных точек.

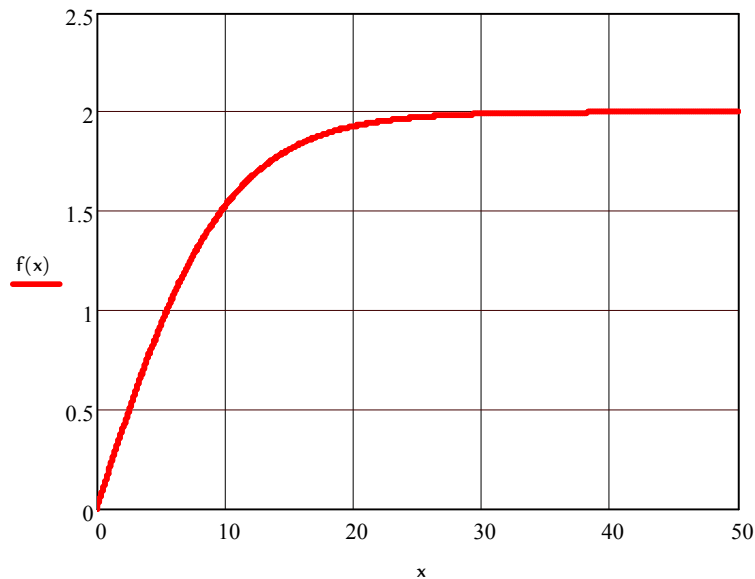


Рис. 1.3 – Исследуемая зависимость  $f(x)=2 \cdot th(0,1 \cdot x)$

Выполним те же самые расчёты при условии неравномерности шага изменения аргумента. Эту неравномерность будем оценивать как отношение наибольшего шага к наименьшему:  $nr = dX_{max}/dX_{min}$ . Неравномерность получим при условии равномерного шага изменения функции. Изменение наклона

характеристики реализуется изменением максимального значения функции  $Ym$ . Результаты расчёта сведены в табл. 1.2. В табл. 1.2 первый метод – метод наименьших квадратов, второй – метод выбранных точек, третий – метод сплайн-интерполяций. Для первого метода помимо погрешности аппроксимирования дополнительно определялась наивысшая возможная степень слагаемых аппроксимирующей функции  $n$ .

Таблица 1.2 – Сравнение методов аппроксимирования при условии неравномерного шага аргумента

	$Ym$	0,4	0,8	1,2	1,6	1,8	1,9	1,95
№1	$n$	13	11	9	8	7	7	7
	$nr$	1,04	1,18	1,52	2,559	4,392	7,284	11,343
	$p, \%$	$2,37 \cdot 10^{-4}$	$6,71 \cdot 10^{-4}$	$3,07 \cdot 10^{-3}$	$8,63 \cdot 10^{-5}$	$1,34 \cdot 10^{-4}$	$7,03 \cdot 10^{-4}$	$1,52 \cdot 10^{-3}$
№2	$nr$	1,037	1,166	1,473	2,347	3,724	5,619	7,96
	$p, \%$	$1,09 \cdot 10^{-9}$	$2,05 \cdot 10^{-9}$	$2,57 \cdot 10^{-7}$	$1,13 \cdot 10^{-5}$	$1,09 \cdot 10^{-3}$	0,016	0,118
№3	$nr$	1,04	1,18	1,52	2,559	4,392	7,284	11,343
	$p, \%$	$1,16 \cdot 10^{-3}$	$4,2 \cdot 10^{-3}$	$7,56 \cdot 10^{-5}$	$7,0 \cdot 10^{-4}$	$3,96 \cdot 10^{-3}$	0,014	0,039
№4	$nr$	1,04	1,18	1,52	2,559	4,392	7,284	11,343
	$p, \%$	$1,45 \cdot 10^{-3}$	$6,4 \cdot 10^{-3}$	0,017	0,042	0,075	0,119	0,173

Как видим из табл. 1.2, качество аппроксимации всеми методами зависит от неравномерности шага изменения аргумента, ухудшаясь с ростом неравномерности. Но и в этих условиях погрешность остаётся незначительной.

Таким образом, в случае монотонной функции любая из рассмотренных аппроксимаций может быть использована.

Рассмотрим функцию пятого типа с участком с отрицательным дифференциальным сопротивлением при условии равномерного шага изменения аргумента. Формула для такой функции была получена путём комбинации трансцендентных функций (рис. 1.4):

$$f(x) = 40 \cdot th(0,08x) + 0,01 \cdot sh(0,5x) - 40 \cdot tg(0,05x).$$

При данных  $m=20$ ,  $Xm=16$ ,  $dX=0,8$  в методе наименьших квадратов получены следующие результаты аппроксимирования:  $n=7$ ,  $p=0,049\%$ . В методе выбранных точек:  $n=9$ ,  $Xm=16$ ,  $dX=1,778$ ,  $p=6,89 \cdot 10^{-3}\%$ . В методе сплайн-

интерполяций:  $m=20$ ,  $Xm=16$ ,  $dX=0,8$ ,  $p=0,011\%$ ; при условии линейной интерполяции –  $p=0,02\%$ .

Таким образом, все четыре способа аппроксимации дают высокую точность для любой формы графика функции как при равномерном шаге изменения аргумента, так и при достаточно большой неравномерности шага. По сравнению с другими несколько худшие показатели у линейной аппроксимации.

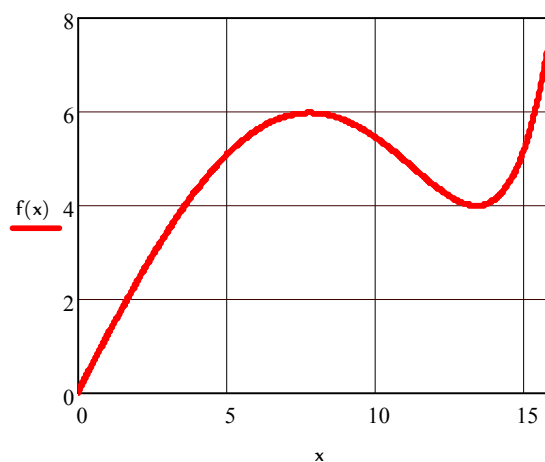


Рис. 1.4 – Исследуемая зависимость  
 $f(x) = 40 \cdot th(0,08x) + 0,01 \cdot sh(0,5x) - 40 \cdot tg(0,05x)$ .

Напоследок рассмотрим аппроксимацию функции при условии её резкого увеличения на отдельном участке (четвертый тип графика рис. 1.2). Этот график зададим табл. 1.3.

Таблица 1.3 – Координаты точек функции четвёртого типа

$X$	0	0,817	1,618	2,387	3,107	3,766	4,352	4,853	5,265	5,582	5,807
$Y$	0	0,7	1,4	2,1	2,8	3,5	4,2	4,9	5,6	6,3	7
$X$	5,945	6,009	6,024	6,026	6,07	6,235	6,637	7,445	8,895	11,33	15,24
$Y$	7,7	8,4	9,1	9,8	10,5	11,2	11,9	12,6	13,3	14	14,7

При условии равномерного шага изменения функции (неравномерного шага аргумента) при данных  $m=20$ ,  $Xm=14$ ,  $dX=0,7$  в методе наименьших квадратов получены следующие результаты аппроксимирования:  $n=7$ ,  $p=6,357\%$ . В методе выбранных точек:  $n=9$ ,  $Xm=14$ ,  $dX=1,556$ ,  $p=2,5 \cdot 10^5\%$

(аппроксимация не состоялась). В методе сплайн-интерполяции:  $m=20$ ,  $Xm=14$ ,  $dX=0,7$ ,  $p=0,01\%$ ; при условии линейной интерполяции –  $p=0,02\%$ .

В случае равномерного шага аргументу можно улучшить результаты аппроксимирования первыми двумя методами: метод наименьших квадратов –  $n=8$ ,  $p=4,615\%$ ; метод выбранных точек –  $p=29,5\%$ .

На рис. 1.5 показаны результаты последней аппроксимации.

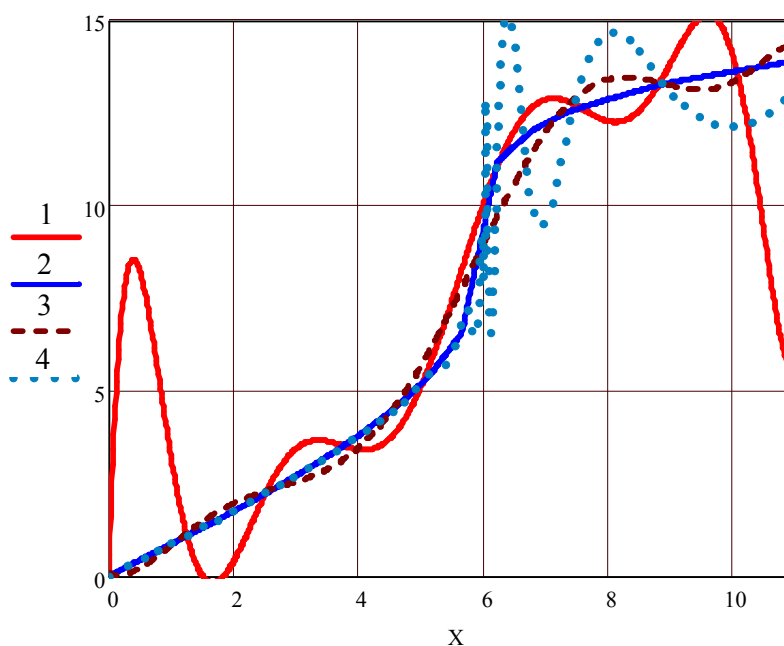


Рис. 1.5 – Аппроксимация функции четвертого типа при условии равномерного шага аргумента следующими методами: 1) – выбранных точек; 2) линейной интерполяции; 3) наименьших квадратов; 4) сплайн-интерполяции

Как видим из рис. 1.5, недопустимо аппроксимировать функции четвертого типа методом выбранных точек. Методы наименьших квадратов и сплайн-интерполяции также дают неудовлетворительные результаты. Наблюдаемое явление по своему происхождению может быть приравнено к эффекту Гиббса, когда скачкообразная функция (например, прямоугольные импульсы) раскладывается в ряд Фурье. Используемые в разложении синусоидальные функции по сути не являются скачкообразными. Поэтому в местах перелома графика наблюдаются характерные выбросы даже при большом количестве составляющих. Тут аналогично. Степенная функция имеет плавный характер.

Поэтому в местах быстрого изменения функции наблюдаются значительные отклонения при аппроксимировании методами наименьших квадратов, сплайн-интерполяции и выбранных точек, где по определению используются степенные функции. Здесь к месту оказывается метод линейной аппроксимации, но только при условии большого количества точек.

Можно подвести итоги.

1. Наиболее пригодными для аппроксимации реальных вольтамперных характеристик резисторов можно считать четыре метода: метод наименьших квадратов и метод выбранных точек с использованием степенного полинома, линейная интерполяция и сплайн-интерполяция, встроенные в компьютерную систему MathCAD.

2. Если количество точек невелико (5-8), а характеристика по характеру не сложная, для аппроксимации следует использовать метод выбранных точек и метод сплайн-интерполяции. При условии большого количества точек (20 и более) хорошие показатели у метода наименьших квадратов.

3. В случае характеристики со сложным характером и большого количества точек к месту оказывается метод линейной интерполяции.

4. Таким образом, чтобы достичь наилучших результатов (наименьшей погрешности) во время аппроксимирования, следует использовать комбинацию рассмотренных методов.

Оценим качество преобразования функции  $y(x)$  в  $x(y)$  и обратно при использовании четырёх рассматриваемых способов аппроксимации.

Сначала выполним этот переход по отношению к функции первого типа (рис. 1.2), которая преобразуется в функцию второго типа.

В качестве исследуемой возьмём следующую функцию:

$$y(x) = 40 \cdot th(0,08x).$$

Обратная ей

$$x(y) = 12,5 \cdot arth(0,025y).$$

Результаты аппроксимации прямой функции следующие. Метод наименьших квадратов –  $m=20$ ,  $Xm=30$ ,  $dX=1,5$ ,  $n=6$ ,  $p=9,35 \cdot 10^{-3} \%$ . Метод

выбранных точек –  $n=9$ ,  $Xm=30$ ,  $dX=3,333$ ,  $p=9,91 \cdot 10^{-4}$  %. Метод сплайн-интерполяции –  $m=20$ ,  $Xm=30$ ,  $dX=1,5$ ,  $p=0,012$ %. Метод линейной интерполяции –  $p=0,022$ %.

Обратная функция определялась через прямую  $f(x)$  в каждом методе через массив точек – по массиву данных аргумента  $X$  с равномерным шагом  $dX$  при помощи функции  $f(x)$  определялся соответствующий массив данных  $Y$ . Проверка выполнялась с использованием исходной функции  $x(y)$ .

Результаты аппроксимации обратной функции (при условии неравномерного шага изменения  $Y$ ) следующие. Метод наименьших квадратов –  $m=20$ ,  $Xm=30$ ,  $dX=1,5$ ,  $n=6$ ,  $p=0,931$  %. Метод выбранных точек –  $n=9$ ,  $Xm=30$ ,  $dX=3,333$ ,  $p=6,499 \cdot 10^3$  % (аппроксимация не состоялась). Метод сплайн-интерполяции –  $m=20$ ,  $Xm=30$ ,  $dX=1,5$ ,  $p=2,97 \cdot 10^{-3}$  %. Метод линейной интерполяции –  $p=4,0 \cdot 10^{-3}$  %.

Для метода выбранных точек пришлось пересчитывать массив данных, чтобы получить равномерный шаг изменения  $Y$ . После этого была получена следующая погрешность –  $p=0,466$  %.

Выполним такой же переход по отношению к функции третьего типа (рис. 1.2) как наиболее сложной с точки зрения аппроксимирования (функции пятого и шестого типов не являются однозначными функциями и трансформации не подлежат). В качестве исследуемой возьмем следующую функцию

$$y(x) = 40 \cdot th(0,08x) - 31 \cdot tg(0,05x) + 0,01 \cdot sh(0,5x).$$

Результаты аппроксимации прямой функции следующие. Метод наименьших квадратов –  $m=20$ ,  $Xm=16$ ,  $dX=0,8$ ,  $n=6$ ,  $p=0,102$  %. Метод выбранных точек –  $n=9$ ,  $Xm=16$ ,  $dX=1,778$ ,  $p=3,2 \cdot 10^{-3}$  %. Метод сплайн-интерполяции –  $m=20$ ,  $Xm=16$ ,  $dX=0,8$ ,  $p=5,066 \cdot 10^{-3}$  %. Метод линейной интерполяции –  $p=8,79 \cdot 10^{-3}$  %.

Результаты аппроксимации обратной функции по методу линейной интерполяции, чья погрешность мало зависит от вида характеристики,

практически остались теми же. Результаты при условии неравномерного шага изменения  $Y$  следующие. Метод наименьших квадратов –  $m=20$ ,  $Xm=16$ ,  $dX=0,8$ ,  $n=7$ ,  $p=3,049$  %. Метод выбранных точек –  $n=9$ ,  $Xm=16$ ,  $dX=1,778$ ,  $p=2,689 \cdot 10^3$  % (аппроксимация не состоялась). Метод сплайн-интерполяции –  $m=20$ ,  $Xm=16$ ,  $dX=0,8$ ,  $p=7,4 \cdot 10^{-3}$  %.

После пересчёта массива данных для получения равномерного шага  $Y$  результаты улучшились: метод наименьших квадратов –  $m=20$ ,  $Ym=17,226$ ,  $dY=0,861$ ,  $n=7$ ,  $p=2,72$  %; метод выбранных точек –  $n=9$ ,  $Ym=17,226$ ,  $dY=1,914$ ,  $p=15,74$  % (аппроксимация неудовлетворительная).

Таким образом, при преобразовании характеристики  $y(x)$  в обратную  $x(y)$  не следует использовать метод выбранных точек, а если использовать, то необходимо пересчитывать данные под равномерный шаг изменения  $Y$ . В случае достаточно простой функции (первого или второго типа) методы наименьших квадратов и выбранных точек лучше, чем интерполяционные методы MathCAD при аппроксимации прямой функции, а интерполяционные методы следует применять к обратным функциям.



## 1.4 Выводы

1. Теория линейных как пассивных, так и активных многополюсников постоянного тока имеет недостатки и требует развития и совершенствования. Теория линейных трёхполюсников, особенно активных, в литературе представлена недостаточно. Применяемые для анализа трёхфазных цепей функциональные зависимости (формулы) современным условиям не отвечают, требуются простые и наглядные графические образы, которые могут быть получены при использовании системы MathCAD.

2. Назрела потребность в разработке методик по применению компьютерных программ при анализе нелинейных электрических цепей постоянного тока, преобразованиях в них, а также в развитии теории нелинейных трёхполюсников и многополюсников постоянного тока.

Компьютерные программы анализа нелинейных цепей постоянного тока предусматривают аналитическую аппроксимацию нелинейных ВАХ. Наиболее универсальной и дающей приемлемую точность можно считать методику линейной интерполяции, встроенную в математическом редакторе системы MathCAD. В связи с этим именно она применяется в дальнейших разработках.

3. Актуальными задачами при анализе нелинейных цепей переменного тока являются следующие:

- поиск новых частных методов расчёта нелинейных цепей переменного тока как в установившихся режимах, так и в переходных процессах;

- расширение круга задач, которые могут быть решены известными частными методами;

- поиск возможностей повышения точности расчёта нелинейных цепей переменного тока.

## 2 СОВЕРШЕНСТВОВАНИЕ МЕТОДОВ АНАЛИЗА И СИНТЕЗА ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ ПОСТОЯННОГО ТОКА

2.1 Совершенствование теории линейных трёхполюсников постоянного тока

### 2.1.1 Геометрия характеристик пассивных трёхполюсников [10, 11]

Основными схемами соединения элементов пассивных трёхполюсников являются звезда и треугольник, поэтому исследования проводились в отношении трёхполюсников при соединении звездой, треугольником и произвольной конфигурации. Для описания режима работы и энергетического состояния трёхполюсника используются такие величины: входные напряжения и токи, узловое напряжение  $U_n$  (в схеме «звезда»), отдельные внутренние токи треугольника или их сумма  $I_d$ , мощность  $P$  (для пассивного трёхполюсника – потребляемая, для активного – передаваемая в нагрузку). В связи с этим рассматривались следующие зависимости, характеризующие трёхполюсник:  $I_{31}(U_2)$ ,  $I_d(U_n)$ ,  $U_{23}(U_{12})$ . Принятые в работе обозначения и положительные направления токов и направлений показаны на рис. 2.1.

Для описания (задания) состояния произвольного пассивного линейного трёхполюсника используются такие параметры (величины), которые позволяют вычислить потребляемую трёхполюсником мощность (оценить его энергетическое состояние). Таких величин четыре (в соответствии с рис. 2.1): два тока (третий определяется через первые два из уравнения по первому закону Кирхгофа  $I_1 + I_2 + I_3 = 0$ ) и два напряжения (третье напряжение определяется через первые два из уравнения по второму закону Кирхгофа  $U_{12} + U_{23} + U_{31} = 0$ ). Мощность трёхполюсника вычисляется по формуле  $P = U_{12} \cdot I_1 - U_{23} \cdot I_3$ .

Однако такому энергетическому состоянию соответствует бесконечное множество трёхполюсников, которые не являются эквивалентными друг другу в других режимах работы (при изменении входных напряжений входные токи меняются по-разному). Покажем, что это так. Пусть требуется определить

сопротивления звезды  $r_1, r_2, r_3$  рис. 2.1,а по известным входным токам и напряжениям  $I_1, I_2, U_{12}, U_{23}$ :

$$r_1 = \frac{U_1}{I_1} = \frac{U_{12} + U_2}{I_1}, \quad r_2 = \frac{U_2}{I_2}, \quad r_3 = \frac{U_3}{I_3} = \frac{U_2 - U_{23}}{-I_1 - I_2}. \quad (2.1)$$

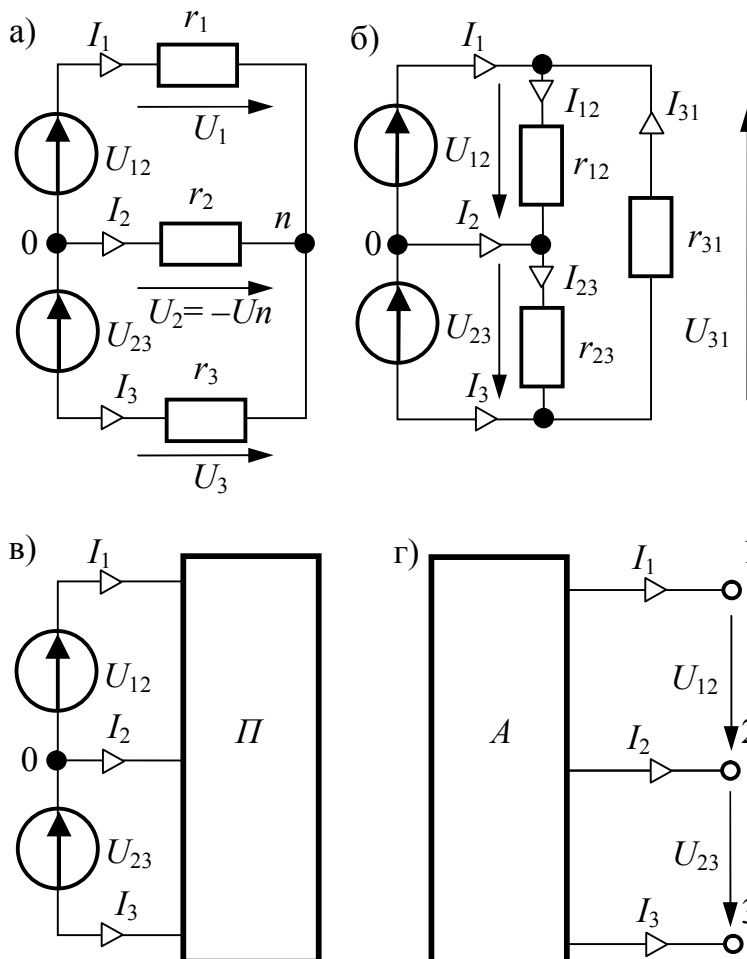


Рис. 2.1 – Типы трёхполюсников, которые рассматриваются в работе, и условные обозначения к ним: а) соединение звездой, б) соединение треугольником, в) произвольный пассивный трёхполюсник, г) произвольный активный трёхполюсник

Как видим, в формулах (2.1) присутствует произвольная величина  $U_2$ , которая и обеспечивает множественность решения. Поскольку входные напряжения и токи описывают энергетическое состояние, то трёхполюсники с одним и тем же энергетическим состоянием могут быть с разными схемами соединения элементов и разного характера (линейные или нелинейные).

Для описания двух эквивалентных в любых режимах трёхполюсников следует использовать пять величин. Например, для трёхполюсника, соединённого звездой (рис. 2.1,а), могут использоваться три сопротивления и два тока, или два тока и три напряжения (потенциалы входных выводов по отношению к нулевой точке  $n$ ), или два входных напряжения и три сопротивления; для трёхполюсника, соединённого треугольником (рис. 2.1,б): три внутренних тока треугольника и два напряжения на входе или три сопротивления и два входных напряжения.

### Исследуем зависимость $I_{31}(U_2)$ .

При работе с разными пассивными трёхполюсниками (рис. 2.1,а, б, в) будем оперировать с 16 величинами ( $U_{12}, U_{23}, U_{31}, U_2, r_1, r_2, r_3, r_{12}, r_{23}, r_{31}, I_1, I_2, I_3, I_{12}, I_{23}, I_{31}$ ) и одиннадцатью независимыми уравнениями (в ниже приведенных уравнениях величины  $U_{12}, U_{23}, r_1, r_2, r_3$  считаются заданными, а каждое следующее уравнение добавляет одну новую величину, ввиду чего общее число независимых переменных (пять) остаётся неизменным):

$$\begin{aligned} U_{12} + U_{23} + U_{31} &= 0, \quad U_2 = (-U_{12} \cdot r_1^{-1} + U_{23} \cdot r_3^{-1}) / (r_1^{-1} + r_2^{-1} + r_3^{-1}), \\ r_{12} &= r_1 + r_2 + r_1 \cdot r_2 / r_3, \quad r_{23} = r_2 + r_3 + r_2 \cdot r_3 / r_1, \quad r_{31} = r_3 + r_1 + r_3 \cdot r_1 / r_2, \\ I_{12} &= U_{12} / r_{12}, \quad I_{23} = U_{23} / r_{23}, \quad I_{31} = U_{31} / r_{31}, \\ I_1 + I_2 + I_3 &= 0, \quad r_1 \cdot I_1 - r_2 \cdot I_2 = U_{12}, \quad r_2 \cdot I_2 - r_3 \cdot I_3 = U_{23}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

В случае произвольного трёхполюсника с неизвестной внутренней конфигурацией (так называемый «чёрный ящик») неясно, что брать в качестве пятой величины, поскольку данных по значениям сопротивлений и конфигурации у трёхполюсного чёрного ящика нет, узловое напряжение  $U_2$  звезды или внутренние токи треугольника применить не к чему. Учитывая, что произвольный линейный трёхполюсник всегда можно однозначно заменить эквивалентной звездой или треугольником, ограничимся рассмотрением трёхполюсников с соединением звездой или треугольником.

Состоянию трёхполюсника, заданному четырьмя параметрами (двумя напряжениями источников и двумя токами), соответствует бесконечное число звезд и бесконечное число треугольников. Можно сказать, что задавая узловое

напряжение  $U_2$ , мы задаём уже конкретную звезду, сопротивления которой вычисляются по формулам (2.1).

Из уравнений по методу контурных токов можно получить следующую формулу для соединения треугольником (рис. 2.1,б):

$$I_{31} = (-I_1 \cdot r_{12} + I_3 \cdot r_{23}) / (r_{12} + r_{23} + r_{31}). \quad (2.3)$$

Формула (2.3) дуальна по своей структуре формуле (2.2) для  $U_2$ . В связи с этим, для получения конкретного треугольника следует задаваться одним внутренним током треугольника, например,  $I_{31}$ . Далее остальные внутренние токи вычисляются через входные ( $I_{12} = I_1 + I_{31}$ ,  $I_{23} = I_2 + I_{31}$ ), затем определяются сопротивления треугольника

$$r_{12} = U_{12}/I_{12} = U_{12}/(I_1 + I_{31}), \quad r_{23} = U_{23}/I_{23} = U_{23}/(I_2 + I_{31}), \quad r_{31} = U_{31}/I_{31}. \quad (2.4)$$

Ввиду эквивалентности получаемых звезды и треугольника должна иметься связь между задаваемым параметром звезды  $U_2$  и треугольника  $I_{31}$ :

$$\begin{aligned} I_{31}(U_2) &= U_{31}/r_{31} = \frac{-U_{12} - U_{23}}{r_1 + r_3 + \frac{r_1 \cdot r_3}{r_2}} = \\ &= \frac{-(U_{12} + U_{23}) \cdot U_2 \cdot I_1 \cdot I_3}{(U_{12} + U_2) \cdot U_2 \cdot I_3 + U_2 \cdot (U_2 - U_{23}) \cdot I_1 + (U_2 - U_{23}) \cdot (U_{12} + U_2) \cdot I_2} = \\ &= \frac{(U_{12} + U_{23}) \cdot I_1 \cdot I_3 \cdot U_2}{(U_{23} \cdot I_3 - U_{12} \cdot I_1) \cdot U_2 - U_{12} \cdot U_{23} \cdot I_2} = \frac{-U_{31} \cdot I_1 \cdot I_3 \cdot U_2}{P \cdot U_2 - U_{12} \cdot U_{23} \cdot I_2}. \end{aligned}$$

$$\text{Обратная зависимость } U_2(I_{31}) = \frac{U_{12} \cdot U_{23} \cdot I_2 \cdot I_{31}}{(U_{12} + U_{23}) \cdot I_1 \cdot I_3 - P \cdot I_{31}}.$$

В качестве примера графики зависимостей  $I_{31}(U_2)$  и  $U_2(I_{31})$  для значений параметров  $U_{12} = 10$ ,  $U_{23} = -35$ ,  $I_1 = -20$ ,  $I_2 = -10$  представлены на рис. 2.2.

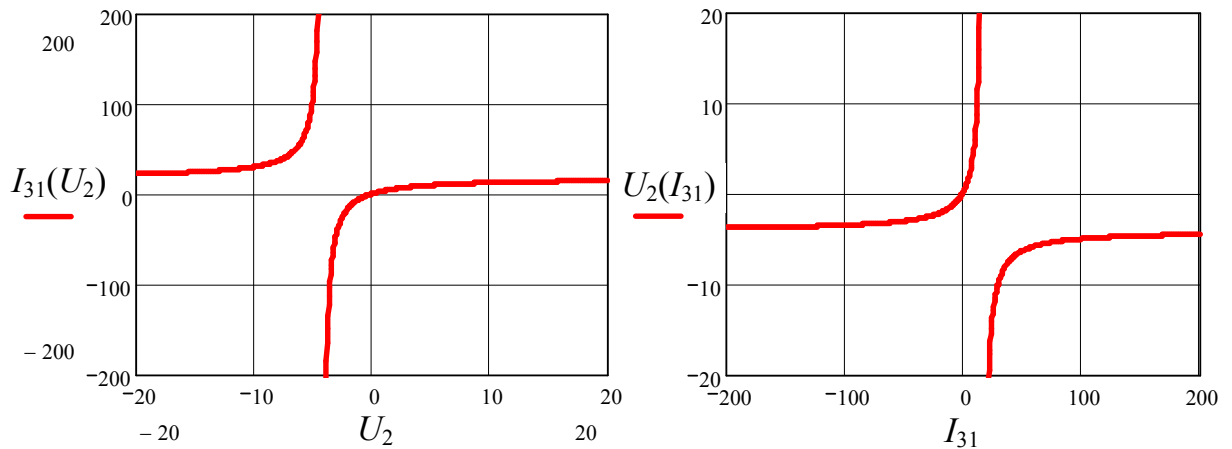


Рис. 2.2 – Пример графиков зависимостей  $I_{31}(U_2)$  и  $U_2(I_{31})$

Гиперболическая зависимость  $I_{31}(U_2)$  имеет две асимптоты – горизонтальную  $I_{31\infty}$  и вертикальную  $U_{2\infty}$ .  $I_{31\infty}$  находится из условия  $U_2 \rightarrow \pm\infty$ :

$$I_{31\infty} = \frac{-U_{31} \cdot I_1 \cdot I_3}{P}.$$

$U_{2\infty}$  находится из условия, что знаменатель дроби  $I_{31}(U_2)$  обращается в нуль

(при этом  $I_{31} \rightarrow \pm\infty$ ): 
$$U_{2\infty} = \frac{-U_{12} \cdot U_{23} \cdot I_2}{P}.$$

Их произведение: 
$$P_\infty = U_{2\infty} \cdot I_{31\infty} = \frac{U_{12} \cdot U_{23} \cdot U_{31} \cdot I_1 \cdot I_2 \cdot I_3}{P^2}.$$

$P_\infty$  физического смысла не имеет, но имеет геометрический смысл – это константа гиперболы:  $P_\infty = (I_{31}(U_2) - I_{31\infty}) \cdot (U_2 - U_{2\infty})$ .

С учётом формул для  $I_{31\infty}$  и  $U_{2\infty}$  зависимости  $I_{31}(U_2)$  и  $U_2(I_{31})$  можно переписать следующим образом:

$$I_{31}(U_2) = I_{31\infty} \cdot U_2 / (U_2 + U_{2\infty}); \quad U_2(I_{31}) = U_{2\infty} \cdot I_{31} / (I_{31} + I_{31\infty}).$$

Как видно из последних формул, графики полностью определяются асимптотами, которые зависят от режима работы (входных напряжений, токов и мощности).

При  $U_2 \rightarrow U_{2\infty}$  (соответственно,  $I_{31} \rightarrow \pm\infty$ ) сопротивления треугольника (2.4) стремятся к нулю, что похоже на общее короткое замыкание треугольника (треугольник обращается в точку). Тем не менее, соотношение между сопротивлениями треугольника является определённым, благодаря чему внешние токи фиксированные, в то время как внутри контура треугольника

циркулирует бесконечно большой ток. Хотя все сопротивления треугольника бесконечно малые по величине, но они имеют разные знаки, благодаря чему сопротивления звезды оказываются вполне конкретными, причём справедливы следующие соотношения:

$$r_{12}/r_{23} = r_1/r_3 = U_{12}/U_{23}; \quad r_{31}/r_{12} = r_3/r_2 = U_{31}/U_{12}; \quad r_{23}/r_{31} = r_2/r_1 = U_{23}/U_{31}. \quad (2.5)$$

При  $U_2 \rightarrow \pm\infty$  сопротивления треугольника увеличиваются до бесконечности, что символизирует режим общего холостого хода для звезды. Ввиду того, что знаки у этих сопротивлений разные, внешние токи не нулевые, а сопротивления треугольника совершенно конкретные, причём справедливы следующие соотношения:

$$r_{12}/r_{23} = r_1/r_3 = I_3/I_1; \quad r_{31}/r_{12} = r_3/r_2 = I_2/I_3; \quad r_{23}/r_{31} = r_2/r_1 = I_1/I_2. \quad (2.6)$$

Имеется диапазон для напряжения  $U_2$  (соответственно, и диапазон для тока  $I_{31}$ ), в котором сопротивления и звезды, и треугольника являются положительными числами, то есть данные звезда и треугольник могут быть реализованы физически.

В системе координат  $I_{31}-U_2$  вертикальные линии, соответствующие значениям  $U_2$ , определяют звезду, входные токи и напряжения которой равны заданным. Горизонтальные линии (значение  $I_{31}$ ) определяют треугольники. Пересечение этих линий даёт звезду и треугольник, которые эквивалентны друг другу в любых режимах работы. Таким образом, точка на графике  $I_{31}(U_2)$  даёт нам эквивалентные звезду и треугольник, которые соответствуют заданному состоянию трёхполюсника.

Очевидно, что состояние, заданное только входными токами и напряжениями, однозначно определяет график  $I_{31}(U_2)$  вместе с асимптотами. Таким образом, зависимость  $I_{31}(U_2)$  является **линией равного энергетического состояния трёхполюсника**.

Рассмотрим зависимость  $I_{31}(U_2)$  применительно к конкретным звезде, заданной своими сопротивлениями  $r_1, r_2, r_3$ , а соответственно, и треугольнику с сопротивлениями

$$r_{12} = r_1 + r_2 + r_1 \cdot r_2 / r_3, \quad r_{23} = r_2 + r_3 + r_2 \cdot r_3 / r_1, \quad r_{31} = r_3 + r_1 + r_3 \cdot r_1 / r_2.$$

Получим зависимости  $I_{31}(U_2)$  для разных значений мощности  $P$ . Если задаться узловым напряжением  $U_2$  (рис. 2.1,а), то  $I_2 = U_2/r_2$ ,

$$\begin{cases} I_1 + I_3 = -I_2 = -U_2/r_2, \\ r_1 \cdot I_1^2 + r_3 \cdot I_3^2 = P - U_2^2/r_2, \end{cases}$$

$$I_3 = -U_2/r_2 - I_1,$$

$$(r_1 + r_3) \cdot I_1^2 + 2 \frac{r_3}{r_2} \cdot U_2 \cdot I_1 + \frac{r_2 + r_3}{r_2^2} U_2^2 - P = 0. \quad (2.7)$$

Квадратное уравнение (2.7) относительно тока  $I_1$  даёт два решения. Поэтому токи  $I_1$ ,  $I_3$ , а следом и другие токи и напряжения имеют по два значения, то есть имеется два разных режима работы, которые при одном и том же значении мощности  $P$  характеризуются двумя зависимостями  $I_{31}(U_2)$ , образующими замкнутый контур на координатной плоскости.

Получим аналитическую зависимость  $I_{31}(U_2)$ .

Обозначим коэффициенты квадратного уравнения (2.7) как функции напряжения  $U_2$ :

$$a = r_1 + r_3, \quad b(U_2) = 2 \frac{r_3}{r_2} \cdot U_2, \quad c(U_2) = \frac{r_2 + r_3}{r_2^2} U_2^2 - P, \quad D(U_2) = b(U_2)^2 - 4a \cdot c(U_2).$$

Тогда ток

$$I_1(U_2) = \frac{-b(U_2) \pm \sqrt{D(U_2)}}{2a} = \frac{-r_3 \cdot U_2 \pm \sqrt{P \cdot r_2^2 (r_1 + r_3) - U_2^2 \cdot (r_1 r_2 + r_2 r_3 + r_3 r_1)}}{(r_1 + r_3) \cdot r_2}.$$

$$\text{Напряжения } U_{12} = r_1 \cdot I_1 - U_2, \quad U_{23} = U_2 + r_3 \cdot (U_2/r_2 + I_1), \quad U_{31} = -(U_{12} + U_{23}).$$

Искомая зависимость

$$\begin{aligned} I_{31}(U_2) = U_{31}/r_{31} &= \frac{-(r_1 + r_3) \cdot I_1(U_2) - \frac{r_3}{r_2} U_2}{r_{31}} = \\ &= \frac{\sqrt{P \cdot r_2^2 (r_1 + r_3) - U_2^2 \cdot (r_1 r_2 + r_2 r_3 + r_3 r_1)}}{r_1 r_2 + r_2 r_3 + r_3 r_1}. \end{aligned}$$

График  $I_{31}(U_2)$  имеет форму эллипса с центром в начале координат, полуоси которого

$$I_{31m} = r_2 \cdot \frac{\sqrt{P \cdot (r_1 + r_3)}}{r_1 r_2 + r_2 r_3 + r_3 r_1}, \quad U_{2m} = r_2 \cdot \sqrt{\frac{P \cdot (r_1 + r_3)}{r_1 r_2 + r_2 r_3 + r_3 r_1}} = \sqrt{r_1 r_2 + r_2 r_3 + r_3 r_1} \cdot I_{31m}.$$

Можно получить и каноническое уравнение эллипса:



$$\frac{U_2^2 \cdot (r_1 r_2 + r_2 r_3 + r_3 r_1)}{P \cdot r_2^2 \cdot (r_1 + r_3)} + \frac{I_{31}^2 \cdot (r_1 r_2 + r_2 r_3 + r_3 r_1)^2}{P \cdot r_2^2 \cdot (r_1 + r_3)} = 1,$$

$$\frac{U_2^2}{U_{2m}^2} + \frac{I_{31}^2}{I_{31m}^2} = 1.$$

Эллипсы зависимости  $I_{31}(U_2)$  для нескольких значений мощности представлены на рис. 2.3.

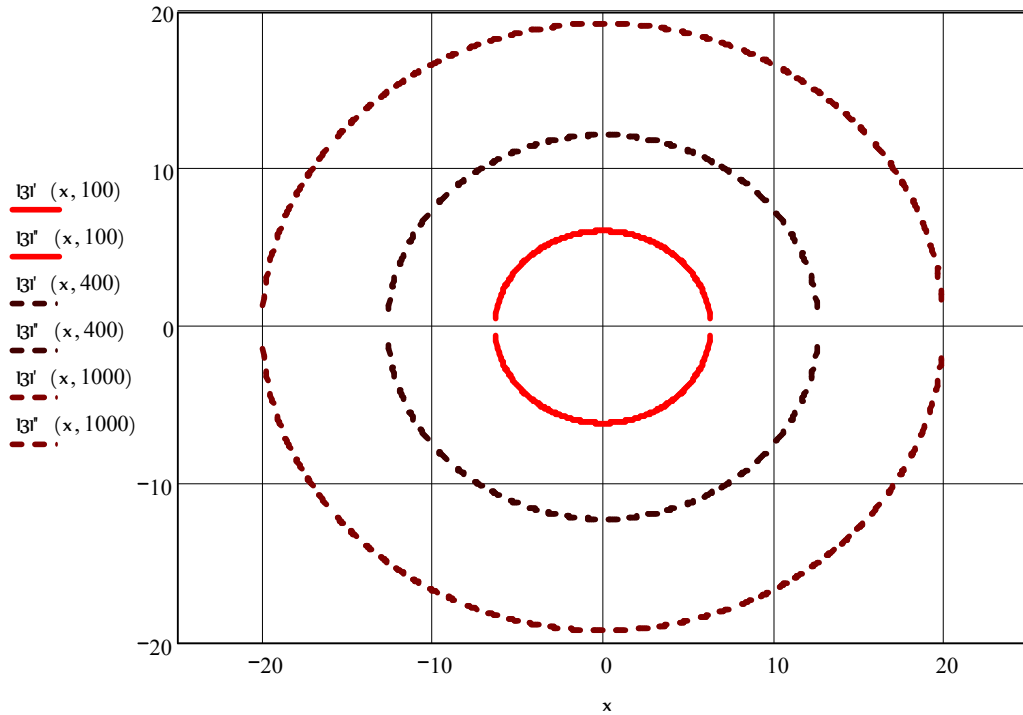


Рис. 2.3 – Пример эллипсов зависимости  $I_{31}(U_2)$

Получим формулу зависимости  $U_2(I_{31})$  отталкиваясь от линейного трёхполюсника, соединённого треугольником. Исходными данными являются значения проводимостей  $g_{12} = r_{12}^{-1}$ ,  $g_{23} = r_{23}^{-1}$ ,  $g_{31} = r_{31}^{-1}$  (а соответственно, и  $g_1 = r_1^{-1}$ ,  $g_2 = r_2^{-1}$ ,  $g_3 = r_3^{-1}$ ) и мощности  $P$ . Если задаться током  $I_{31}$  (рис. 2.1,б), то  $U_{31} = I_{31}/g_{31}$ ,  $U_{12} + U_{23} = -U_{31} = -I_{31}/g_{31}$ ,

$$g_{12} \cdot U_{12}^2 + g_{23} \cdot U_{23}^2 + g_{31} \cdot U_{31}^2 = P,$$

$$U_{12} = -I_{31}/g_{31} - U_{23},$$

$$(g_{12} + g_{23}) \cdot U_{23}^2 + 2 \frac{g_{12}}{g_{31}} \cdot I_{31} \cdot U_{23} + \frac{g_{12} + g_{31}}{g_{31}^2} I_{31}^2 - P = 0,$$

$$U_{23}(I_{31}) = \frac{-g_{12} \cdot I_{31} \pm \sqrt{P \cdot g_{31}^2 \cdot (g_{23} + g_{12}) - I_{31}^2 \cdot (g_{12} g_{23} + g_{23} g_{31} + g_{31} g_{12})}}{(g_{12} + g_{23}) g_{31}}.$$

Искомая зависимость

$$U_2(I_{31}) = \frac{\sqrt{P \cdot g_{31}^2 \cdot (g_{23} + g_{12}) - I_{31}^2 \cdot (g_{12}g_{23} + g_{23}g_{31} + g_{31}g_{12})}}{g_{12}g_{23} + g_{23}g_{31} + g_{31}g_{12}}.$$

Формулы для звезды и треугольника являются полностью дуальными.

В общем, получается, что характеризовать одно и то же энергетическое состояние разных трёхполюсников можно одним графиком  $I_{31}(U_2)$  (рис. 2.2), а конкретный соединённый звездой трёхполюсник в разных состояниях – другим графиком  $I_{31}(U_2)$  (рис. 2.3).

Таким образом, семейство зависимостей  $I_{31}(U_2)$ , построенных для разных значений мощности  $P$ , полностью характеризует любой линейный пассивный трёхполюсник.

### Исследуем зависимость $Id(Un)$ .

При работе с разными пассивными трёхполюсниками (рис. 2.1, а б) будем оперировать с 18 величинами ( $U_{12}, U_{23}, U_{31}, Un = -U_2, r_1, r_2, r_3, r_{12}, r_{23}, r_{31}, I_1, I_2, I_3, Id, I_{12}, I_{23}, I_{31}, P$ ) и тринадцатью независимыми уравнениями (в ниже приведенных уравнениях величины  $U_{12}, U_{23}, r_1, r_2, r_3$  считаются заданными, а каждое следующее уравнение добавляет одну новую величину, ввиду чего общее число независимых переменных (пять) остаётся неизменным):

$$U_{12} + U_{23} + U_{31} = 0, \quad Un = (U_{12} \cdot r_1^{-1} - U_{23} \cdot r_3^{-1}) / (r_1^{-1} + r_2^{-1} + r_3^{-1}),$$

$$r_{12} = r_1 + r_2 + r_1 \cdot r_2 / r_3, \quad r_{23} = r_2 + r_3 + r_2 \cdot r_3 / r_1, \quad r_{31} = r_3 + r_1 + r_3 \cdot r_1 / r_2,$$

$$I_{12} = U_{12} / r_{12}, \quad I_{23} = U_{23} / r_{23}, \quad I_{31} = U_{31} / r_{31},$$

$$I_1 + I_2 + I_3 = 0, \quad r_1 \cdot I_1 - r_2 \cdot I_2 = U_{12}, \quad r_2 \cdot I_2 - r_3 \cdot I_3 = U_{23},$$

$$Id = I_{12} + I_{23} + I_{31}, \quad P = U_{12} \cdot I_1 - U_{23} \cdot I_3.$$

Состоянию трёхполюсника, заданному четырьмя параметрами (двумя напряжениями источников и токами), соответствует бесконечное число звезд и бесконечное число треугольников. Задавая узловое напряжение  $Un$ , мы задаём конкретную звезду, сопротивления которой вычисляются по формулам  $r_1 = (U_{12} - Un) / I_1$ ,  $r_2 = -Un / I_2$ ,  $r_3 = (-U_{23} - Un) / I_3$ . Для получения конкретного треугольника задаёмся суммой внутренних токов треугольника  $Id$ . Далее эти внутренние токи вычисляются через входные ( $I_{12} = \frac{1}{3}(I_1 - I_2 + Id)$ ),

$I_{23} = \frac{1}{3}(I_2 - I_3 + Id)$ ,  $I_{31} = \frac{1}{3}(I_3 - I_1 + Id)$ , затем определяются сопротивления треугольника  $r_{12} = U_{12}/I_{12}$ ,  $r_{23} = U_{23}/I_{23}$ ,  $r_{31} = U_{31}/I_{31}$ .

Ввиду эквивалентности получаемых звезды и треугольника имеется связь между задаваемым параметром звезды  $Un$  и треугольника  $Id$ :

$$\begin{aligned} Id(Un) &= 3 \cdot I_{12} - I_1 + I_2 = \frac{3 \cdot U_{12}}{r_1 + r_2 + \frac{r_1 \cdot r_2}{r_3}} - I_1 + I_2 = \\ &= \frac{3 \cdot U_{12}}{\frac{U_{12} - Un}{I_1} + \frac{-Un}{I_2} + \frac{I_3}{-U_{23} - Un} \cdot \frac{U_{12} - Un}{I_1} \cdot \frac{-Un}{I_2}} - I_1 + I_2. \end{aligned}$$

Эта гиперболическая зависимость имеет две асимптоты – горизонтальную  $Id_\infty$  и вертикальную  $Un_\infty$ .  $Id_\infty$  находится из условия  $Un \rightarrow \pm\infty$ :

$$\begin{aligned} Id_\infty &= \frac{3 \cdot U_{12} \cdot I_1 \cdot I_2}{(U_{12} - U_{23}) \cdot I_2 + (-U_{23}) \cdot I_1 + U_{12} \cdot I_3} - I_1 + I_2 = \\ &= \frac{U_{12} \cdot I_1 \cdot (I_2 - I_3) - U_{23} \cdot I_3 \cdot (I_1 - I_2)}{-P} = \frac{P_{12} \cdot (I_2 - I_3) + P_{23} \cdot (I_1 - I_2)}{-P}, \end{aligned}$$

где  $P_{12} = U_{12} \cdot I_1$ ,  $P_{23} = -U_{23} \cdot I_3$  – мощности источников схем рис. 2.1, а, б, в.

$Un_\infty$  находится из условия, что знаменатель дроби  $Id(Un)$  обращается в нуль (при этом  $Id \rightarrow \pm\infty$ ):

$$Un_\infty = \frac{U_{12} \cdot (-U_{23}) \cdot I_2}{(U_{12} - U_{23}) \cdot I_2 + (-U_{23}) \cdot I_1 + U_{12} \cdot I_3} = \frac{U_{12} \cdot U_{23} \cdot I_2}{P} = \frac{P_{12} \cdot U_{23} + P_{23} \cdot U_{12}}{-P}.$$

Их произведение:

$$P_\infty = Un_\infty \cdot Id_\infty = \frac{U_{12}^2 \cdot U_{23} \cdot I_1 \cdot I_2 \cdot (I_2 - I_3) - U_{12} \cdot U_{23}^2 \cdot I_2 \cdot I_3 \cdot (I_1 - I_2)}{-P^2}.$$

При  $Un \rightarrow Un_\infty$  сопротивления треугольника стремятся к нулю, что похоже на общее короткое замыкание треугольника (треугольник обращается в точку-узел). Тем не менее, соотношение между сопротивлениями треугольника является определённым, благодаря чему внешние токи фиксированные, в то время как внутри контура треугольника циркулирует бесконечно большой ток. Хотя все сопротивления треугольника бесконечно малые по величине, но они имеют разные знаки, благодаря чему сопротивления звезды оказываются вполне конкретными, причём справедливы соотношения (2.5).

При  $Un \rightarrow \pm\infty$  сопротивления звезды увеличиваются до бесконечности, что символизирует режим общего холостого хода для звезды. Ввиду того, что знаки у этих сопротивлений разные, внешние токи не нулевые, а сопротивления треугольника совершенно конкретные, причём справедливы соотношения (2.6).

Имеется диапазон для напряжения  $Un$  (соответственно, и диапазон для тока  $Id$ ), в котором сопротивления и звезды, и треугольника являются положительными числами, то есть данные звезда и треугольник могут быть реализованы физически.

В системе координат  $Id-Un$  вертикальные линии, соответствующие значениям  $Un$ , определяют звезду, входные токи и напряжения которой равны заданным. Горизонтальные линии (значения  $Id$ ) определяют треугольники. Пересечение этих линий даёт звезду и треугольник, которые эквивалентны друг другу в любых режимах работы. Таким образом, точка на графике  $Id(Un)$  (пример графика на рис. 2.4) даёт эквивалентные звезду и треугольник, которые соответствуют заданному состоянию трёхполюсника.

Очевидно, что состояние, заданное только входными токами и напряжениями, однозначно определяет график  $Id(Un)$  вместе с асимптотами. Таким образом, зависимость  $Id(Un)$  является **линией равного энергетического состояния трёхполюсников**.

Для любой точки гиперболического графика  $Id(Un)$  справедливым является соотношение

$$(Id(Un) - Id_\infty) \cdot (Un - Un_\infty) = \frac{-3 \cdot U_{12} \cdot U_{23} \cdot U_{31} \cdot I_1 \cdot I_2 \cdot I_3}{P^2}.$$

Рассмотрим поведение зависимости  $Id(Un)$  при одной и той же мощности и одних асимптотах. Варьировать будем ток  $I_3$ . Остальные токи и напряжения находятся из системы уравнений

$$\begin{cases} Id_\infty = \frac{U_{12} \cdot I_1 \cdot (I_2 - I_3) - U_{23} \cdot I_2 \cdot (I_1 - I_2)}{-P}, & Un_\infty = \frac{U_{12} \cdot U_{23} \cdot I_2}{P}, \\ P = U_{12} \cdot I_1 - U_{23} \cdot I_3, & I_1 + I_2 + I_3 = 0. \end{cases}$$

Графики приведены на рис. 2.4 для значений  $I_3 = -20; 0; 20; 40; 60$ . Как видно из графиков, при отрицательном значении  $I_3$  график располагается во 2-й и 4-й четвертях, при нулевом значении  $I_3$  – гипербола вырождается в горизонтальную линию, при положительном значении  $I_3$  график находится в 1-й и 3-й четвертях, причём при увеличении значения тока радиус кривизны в вершине параболы увеличивается.

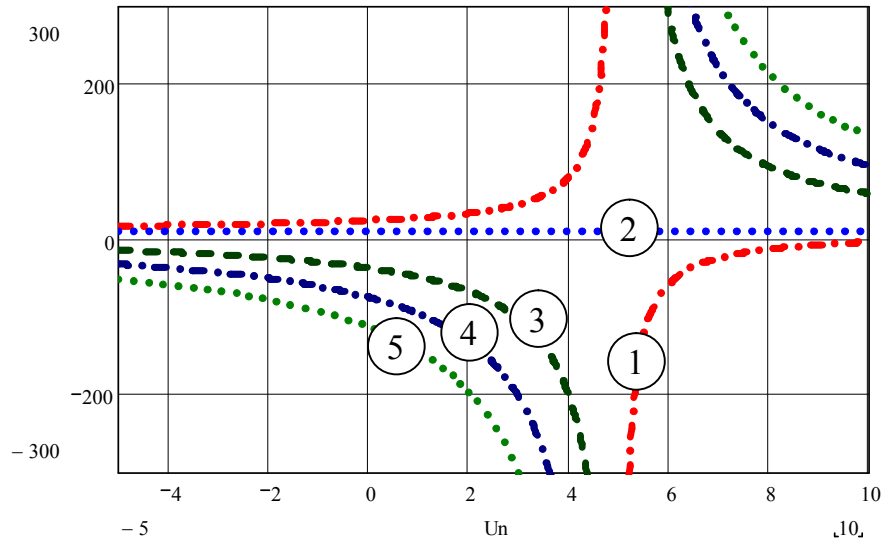


Рис. 2.4 – Примеры зависимостей  $Id(Un)$  с одинаковыми асимптотами ( $Un_\infty = 5; Id_\infty = 10$ ) и мощностью ( $P = 500$ ) при следующих значениях  $I_3$ :  
1)  $(-20)$ ; 2)  $0$ ; 3)  $20$ ; 4)  $40$ ; 5)  $60$

Рассмотрим зависимость  $Id(Un)$  применительно к конкретным звезде, заданной своими сопротивлениями  $r_1, r_2, r_3$ , а соответственно, и треугольнику с сопротивлениями  $r_{12}, r_{23}, r_{31}$ .

Зависимости  $Id(Un)$  получим для разных значений мощности  $P$ . Если задаться узловым напряжением  $Un$  (рис. 2.1,а), то

$$\begin{cases} I_2 = -Un/r_2, \\ I_1 + I_3 = -I_2 = Un/r_2, \\ r_1 \cdot I_1^2 + r_3 \cdot I_3^2 = P - r_2 \cdot I_2^2, \\ I_3 = Un/r_2 - I_1, \end{cases}$$

$$(r_1 + r_3) \cdot I_1^2 - \frac{r_3}{r_2} \cdot 2Un \cdot I_1 + \frac{r_2 + r_3}{r_2^2} Un^2 - P = 0. \quad (2.8)$$

Таким образом, токи  $I_1, I_3$ , а следом и другие токи и напряжения имеют по два значения, то есть имеется два режима работы, которые при одном и том же значении мощности  $P$  характеризуются двумя зависимостями  $Id(Un)$ , образующими замкнутый контур на координатной плоскости.

Получим аналитическую зависимость  $Id(Un)$ .

Обозначим коэффициенты квадратного уравнения (2.8) как функции напряжения  $Un$ :  $a = r_1 + r_3$ ,  $b(Un) = -2 \frac{r_3}{r_2} \cdot Un$ ,  $c(Un) = \frac{r_2 + r_3}{r_2^2} Un^2 - P$ ,

$$D(Un) = b(Un)^2 - 4 \cdot a \cdot c(Un).$$

$$\text{Тогда ток } I_1(Un) = \frac{-b(Un) \pm \sqrt{D(Un)}}{2a}.$$

$$\text{Далее } U_{12} = r_1 \cdot I_1 + Un, \quad U_{23} = -Un - r_3 \cdot (Un/r_2 - I_1), \quad U_{31} = -(U_{12} + U_{23}).$$

Искомая зависимость

$$\begin{aligned} Id(Un) &= I_{12} + I_{23} + I_{31} = U_{12}/r_{12} + U_{23}/r_{23} + U_{31}/r_{31} = \\ &= \frac{r_1 \cdot I_1(Un) + Un}{r_{12}} + \frac{r_3 \cdot I_1(Un) - \left(1 + \frac{r_3}{r_2}\right) \cdot Un}{r_{23}} + \frac{-(r_1 + r_3) \cdot I_1(Un) + \frac{r_3}{r_2} Un}{r_{31}} = \\ &= [(r_1 r_2 + r_2 r_3 + r_3 r_1) \cdot r_2 \cdot (r_1 + r_3)]^{-1} \cdot [(r_3 - r_1) \cdot (r_1 r_2 + r_2 r_3 + r_3 r_1) \cdot Un \pm \\ &\quad \pm (2r_1 r_3 - r_1 r_2 - r_2 r_3) \sqrt{P \cdot r_2^2 (r_1 + r_3) - Un^2 \cdot (r_1 r_2 + r_2 r_3 + r_3 r_1)}]. \end{aligned}$$

В случае симметричной звезды (треугольника)  $r_1 = r_2 = r_3$   $Id(Un) = 0$ , то есть зависимость представляет собой отрезок на оси абсцисс, симметричный относительно начала координат, причём длина отрезка определяется мощностью  $P$  (рис. 2.5, кривая 1). Чем больше мощность, тем длиннее отрезок. По координате конца отрезка можно вычислить значение сопротивлений звезды. При  $P = 0$  отрезок стягивается в точку (начало координат).

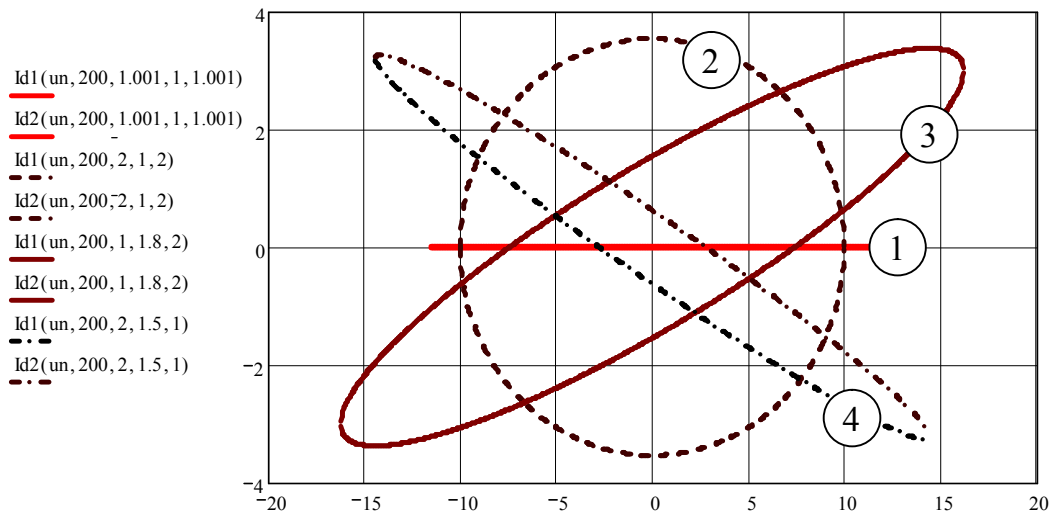


Рис. 2.5 – Примеры зависимостей  $Id(Un)$  с одинаковой мощностью ( $P = 200$ ) при следующих значениях сопротивлений звезды  $r_1, r_2, r_3$ :  
 1) 1; 1; 1; 2) 2; 1; 2; 3) 1; 1,8; 2; 4) 2; 1,5; 1

Если только два одинаковых сопротивления ( $r_1 = r_3 = r_2/k$ , здесь  $k$  – коэффициент неодинаковости), то график  $Id(Un)$  принимает форму эллипса с центром в начале координат (рис. 2.5, кривая 2), полуоси которого

$$Id_m = \sqrt{\frac{2P}{r_1} \cdot \frac{1-k}{1+2k}}, \quad Un_m = \sqrt{\frac{2P \cdot r_1}{1+2k}} \cdot k.$$

Вывод этих формул следующий.

$$\text{При } Un = 0 \quad I_2 = 0, \quad I_1 = \sqrt{\frac{P - r_2 \cdot I_2^2}{r_1 + r_3}} = \sqrt{\frac{2P}{r_1}},$$

$$r_{12} = r_{23} = r_1 \cdot (1 + 2k), \quad r_{31} = r_1 \cdot (2 + 1/k),$$

$$I_{12} = I_{23} = U_{31}/(2 \cdot r_{12}), \quad I_{31} = -U_{31}/r_{31} = -2k \cdot I_{12}, \quad I_1 = I_{12} - I_{31} = I_{12} \cdot (1 + 2k),$$

$$Id_m = 2 \cdot I_{12} - 2k \cdot I_{12} = I_{12} \cdot (1 - k) = \frac{2 \cdot (1 - k)}{1 + 2k} \cdot I_1 = \frac{2 \cdot (1 - k)}{1 + 2k} \cdot \sqrt{\frac{2P}{r_1}} = \sqrt{\frac{2P}{r_1} \cdot \frac{1 - k}{1 + 2k}}.$$

$Un_m$  находится из условия, что дискриминант квадратного уравнения (2.8) относительно тока  $I_1$  равен нулю, поскольку при большем значении напряжения  $Un$  ток  $I_1$  принимает комплексные значения, то есть реально не существует.

$$D = b^2 - 4ac = \left( \frac{2Un_m}{k} \right)^2 - 4 \cdot \left[ 2 \left( \frac{Un_m}{k} \right)^2 - 2r_1 \cdot \left( P - k \cdot r_1 \cdot \left( \frac{Un_m}{k \cdot r_1} \right)^2 \right) \right] = 0.$$

Отсюда формула для  $Un_m$ . Формулы для  $Id_m$  и  $Un_m$  в дальнейшем можно анализировать в зависимости от  $P$ ,  $k$  и  $r_1$ . По значениям  $Id_m$  и  $Un_m$  можно определить  $k$  и  $r_1$ , то есть сопротивления звезды.

Покажем, что можно получить каноническое уравнение эллипса для рассматриваемого случая  $r_1 = r_3 = r_2/k$ .

$$Id(Un) = \frac{(2r_1^2 - 2r_1r_2)\sqrt{P \cdot r_2^2 2r_1 - Un^2 \cdot (r_1^2 + 2r_1r_2)}}{(r_1^2 + 2r_1r_2)r_2 \cdot 2r_1} =$$

$$= \frac{(r_1 - r_2)\sqrt{P \cdot r_2^2 2r_1 - Un^2 \cdot (r_1^2 + 2r_1r_2)}}{(r_1 + 2r_2)r_2 \cdot r_1},$$

$$Id(Un)^2 = \frac{(r_1 - r_2)^2 (P \cdot r_2^2 2r_1 - Un^2 \cdot r_1(r_1 + 2r_2))}{(r_1 + 2r_2)^2 (r_2 \cdot r_1)^2};$$

$$\frac{Un^2 \cdot (r_1 + 2r_2)}{P \cdot r_2^2 \cdot 2} + \frac{Id^2 \cdot r_1 \cdot r_2^2 \cdot (r_1 + 2r_2)^2}{P \cdot r_2^2 \cdot 2(r_1 - r_2)^2} = 1.$$

$$\text{Каноническое уравнение эллипса } \frac{Un^2}{Un_m^2} + \frac{Id^2}{Id_m^2} = 1.$$

Если сопротивления неодинаковы –  $r_2 = k_1 \cdot r_1$ ,  $r_3 = k_2 \cdot r_1$ , то при  $k_2 > k_1 > 1$  получается эллипс с наклоном вправо (вершины в первой и третьей четвертях) (рис. 2.5, кривая 3), а при  $k_2 < k_1 < 1$  – с наклоном влево (вершины во второй и четвёртой четвертях) (рис. 2.5, кривая 4).

Выведем формулу для  $Id(0)$ .

$$Un = 0, I_2 = 0, I_3 = -I_1, (r_1 + r_3) \cdot I_1^2 = P, I_1 = \sqrt{\frac{P}{r_1 + r_3}},$$

$$Id(0) = \frac{r_1 \cdot \sqrt{P/r_1 + r_3}}{r_{12}} + \frac{r_3 \cdot \sqrt{P/r_1 + r_3}}{r_{23}} - \frac{(r_1 + r_3) \cdot \sqrt{P/r_1 + r_3}}{r_{31}} =$$

$$= \sqrt{P/r_1 + r_3} \cdot \left( \frac{r_1 \cdot r_3}{r_1 r_2 + r_2 r_3 + r_3 r_1} + \frac{r_1 \cdot r_3}{r_1 r_2 + r_2 r_3 + r_3 r_1} - \frac{(r_1 + r_3) \cdot r_2}{r_1 r_2 + r_2 r_3 + r_3 r_1} \right) =$$

$$= \sqrt{P/r_1 + r_3} \cdot \frac{2r_1 r_3 - r_1 r_2 - r_2 r_3}{r_1 r_2 + r_2 r_3 + r_3 r_1}.$$

Получим формулу для  $Un(Id=0)$ . Для этого приравняем числитель дроби  $Id(Un)$  к нулю:

$$(r_3 - r_1) \cdot (r_1 r_2 + r_2 r_3 + r_3 r_1) \cdot Un(Id=0) =$$



$$\begin{aligned}
&= (2 \cdot r_1 r_3 - r_1 r_2 - r_2 r_3) \sqrt{P \cdot r_2^2 (r_1 + r_3) - Un(Id=0)^2 \cdot (r_1 r_2 + r_2 r_3 + r_3 r_1)}, \\
Un(Id=0) &= \\
&= \sqrt{\frac{P \cdot (r_1 + r_3)}{(r_3 - r_1)^2 \cdot (r_1 r_2 + r_2 r_3 + r_3 r_1)^2 + (r_1 r_2 + r_2 r_3 + r_3 r_1) \cdot (2 \cdot r_1 r_3 - r_1 r_2 - r_2 r_3)^2}} \times \\
&\quad \times r_2 \cdot (2 \cdot r_1 r_3 - r_1 r_2 - r_2 r_3).
\end{aligned}$$

Координаты вершины эллипса находятся из условия  $D = 0$ .

$$D = b(Un_m)^2 - 4a \cdot c(Un_m) = \left( -2 \frac{r_3}{r_2} Un_m \right)^2 - 4 \cdot (r_1 + r_3) \cdot \left( \frac{r_2 + r_3}{r_2^2} Un_m^2 - P \right) = 0,$$

$$4 \cdot Un_m^2 \cdot \frac{r_3^2 - r_1 r_2 - r_2 r_3 - r_3 r_1 - r_3^2}{r_2^2} = -4 \cdot (r_1 + r_3) \cdot P,$$

$$Un_m = \sqrt{\frac{(r_1 + r_3) \cdot P}{r_1 r_2 + r_2 r_3 + r_3 r_1}} \cdot r_2,$$

$$\begin{aligned}
Id_m(Un_m) &= \frac{(r_3 - r_1) \cdot (r_1 r_2 + r_2 r_3 + r_3 r_1) \cdot Un_m}{(r_1 r_2 + r_2 r_3 + r_3 r_1) r_2 (r_1 + r_3)} = \\
&= \frac{r_3 - r_1}{r_2 (r_1 + r_3)} \cdot \sqrt{\frac{(r_1 + r_3) \cdot P}{r_1 r_2 + r_2 r_3 + r_3 r_1}} \cdot r_2 = \frac{r_3 - r_1}{r_1 + r_3} \cdot \sqrt{\frac{(r_1 + r_3) \cdot P}{r_1 r_2 + r_2 r_3 + r_3 r_1}}.
\end{aligned}$$

По трём точкам эллипса (вершина, точки пересечения с осями) можно вычислить значения сопротивлений звезды.

В общем, получается, что характеризовать одно и то же энергетическое состояние разных трёхполюсников можно одним графиком  $Id(Un)$  (рис. 2.4), а конкретный трёхполюсник в разных состояниях – другим графиком  $Id(Un)$  (рис. 2.5).

Таким образом, семейство зависимостей  $Id(Un)$ , построенных для разных значений мощности  $P$ , полностью характеризует любой линейный пассивный трёхполюсник.

### Исследуем зависимость $U_{23}(U_{12})$ .

В случае произвольного конкретного трёхполюсника (в виде трёхполюсного чёрного ящика) его режим работы однозначно определяется двумя величинами, например, двумя входными напряжениями  $U_{12}$  и  $U_{23}$ . Это означает, что разные энергетические состояния рассматриваемого трёхполюсника можно представить отдельными точками на координатной плоскости  $U_{12}-U_{23}$ . Выбор двух напряжений в качестве двух переменных,

задающих состояние трёхполюсника ещё выгоден и тем, что ввиду используемых двух однородных величин (двух напряжений) можно выбрать одинаковый масштаб по осям. Таким образом, можно изобразить зависимость  $U_{23}(U_{12})$  для определённой мощности в виде кривой. А разные энергетические состояния будут представлены в координатной плоскости  $U_{12}$ - $U_{23}$  в виде семейства кривых  $U_{23}(U_{12})$  для разных значений мощности. Каждую из кривых назовём **линией равной мощности** или **линией равного энергетического состояния трёхполюсника**.

Сначала получим указанные зависимости для линейного трёхполюсника. Известно, что линейный трёхполюсник всегда можно представить эквивалентной схемой с соединением звездой или треугольником (рис. 2.1а, б). Поэтому семейство кривых  $U_{23}(U_{12})$  в случае линейного трёхполюсника не зависит от схемы соединения.

Получим зависимость  $U_{23}(U_{12})$  для заданного значения мощности  $P$  при соединении трёхполюсника звездой с известными сопротивлениями  $r_1, r_2, r_3$ .

$$\text{Система уравнений} \quad \begin{cases} P = U_{12} \cdot I_1 - U_{23} \cdot I_3, & I_1 + I_2 + I_3 = 0, \\ r_1 \cdot I_1 - r_2 \cdot I_2 = U_{12}, & r_2 \cdot I_2 - r_3 \cdot I_3 = U_{23}. \end{cases}$$

Решение системы

$$I_1 = \frac{U_{12}(r_2 + r_3) + U_{23} \cdot r_2}{r_1 r_2 + r_2 r_3 + r_3 r_1}, \quad I_2 = \frac{U_{23} \cdot r_1 - U_{12} \cdot r_3}{r_1 r_2 + r_2 r_3 + r_3 r_1}, \quad I_3 = -\frac{U_{23}(r_1 + r_2) + U_{12} \cdot r_2}{r_1 r_2 + r_2 r_3 + r_3 r_1}.$$

$$P = \frac{U_{12}^2(r_2 + r_3) + U_{12} \cdot U_{23} \cdot r_2 + U_{23}^2(r_1 + r_2) + U_{12} \cdot U_{23} \cdot r_2}{r_1 r_2 + r_2 r_3 + r_3 r_1},$$

$$P \cdot (r_1 r_2 + r_2 r_3 + r_3 r_1) = U_{12}^2(r_2 + r_3) + 2 \cdot r_2 \cdot U_{12} \cdot U_{23} + U_{23}^2(r_1 + r_2).$$

$$U_{23} = \frac{-r_2 \cdot U_{12} \pm \sqrt{(r_2 \cdot U_{12})^2 - (r_1 + r_2)(U_{12}^2(r_2 + r_3) - P(r_1 r_2 + r_2 r_3 + r_3 r_1))}}{r_1 + r_2} =$$

$$= \frac{-r_2 \cdot U_{12} \pm \sqrt{P(r_1 + r_2) - U_{12}^2} \cdot \sqrt{r_1 r_2 + r_2 r_3 + r_3 r_1}}{r_1 + r_2}.$$

Данная зависимость имеет форму эллипса. Для примера эллипсы зависимости  $U_{23}(U_{12})$  для нескольких значений мощности представлены на рис. 2.6.

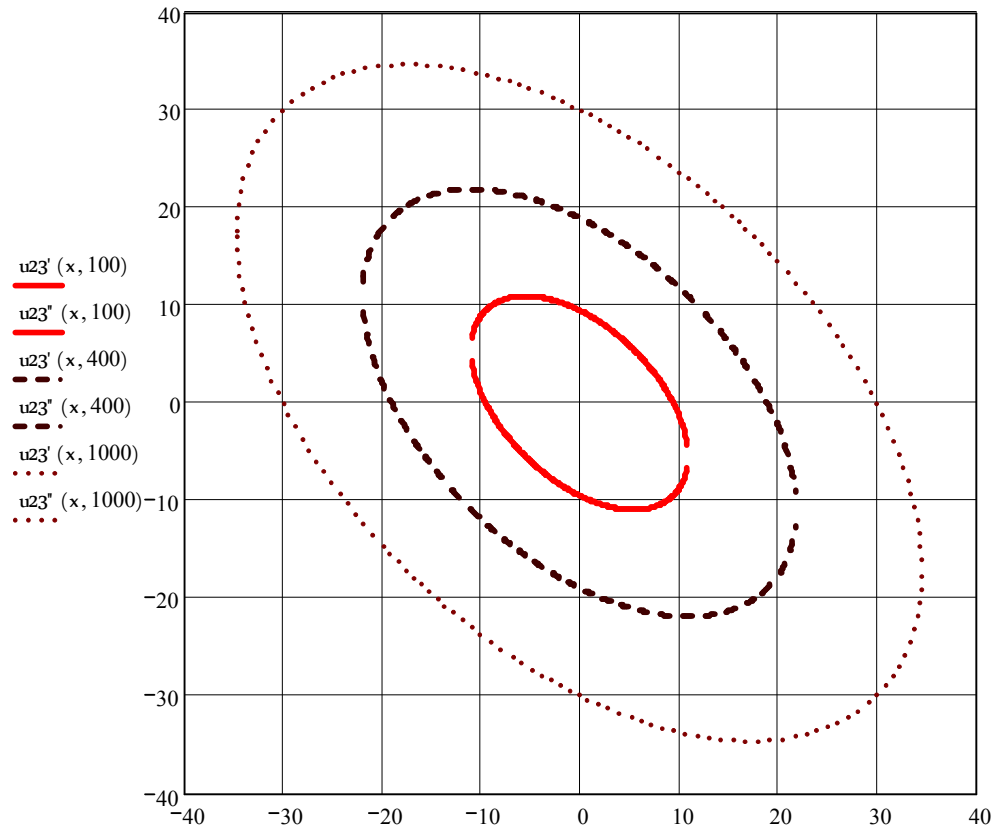


Рис. 2.6 – Примеры зависимостей  $U_{23}(U_{12})$  линейного трёхполюсника

### 2.1.2 Геометрия характеристик активных трёхполюсников

Произвольный линейный активный трёхполюсник может быть всегда представлен эквивалентной схемой при соединении звездой с двумя источниками [12] (рис. 2.7).

При заданных параметрах трёхполюсника  $r_1$ ,  $r_2$ ,  $r_3$ ,  $E_1$ ,  $E_2$  его электрическое состояние описывается следующей системой уравнений:

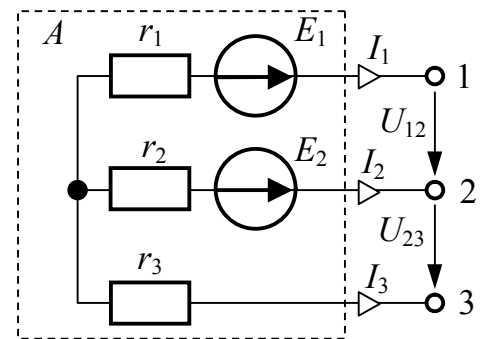


Рис. 2.7 – Схема замещения линейного активного трёхполюсника

$$\begin{cases} U_{12} + r_1 \cdot I_1 - r_2 \cdot I_2 = E_1 - E_2, & r_2 \cdot I_2 + U_{23} - r_3 \cdot I_3 = E_2, \\ I_1 + I_2 + I_3 = 0, & P = E_1 \cdot I_1 + E_2 \cdot I_2 - (r_1 \cdot I_1^2 + r_2 \cdot I_2^2 + r_3 \cdot I_3^2). \end{cases}$$

Здесь  $P$  – мощность, передаваемая в нагрузку, подсоединённую к выводам трёхполюсника 1-2-3. Она определяется как мощность, вырабатываемая источниками ЭДС  $E_1$  и  $E_2$  за вычетом потерь энергии внутри трёхполюсника. Если рассматривать равные энергетические состояния трёхполюсника (при  $P = const$ ) при разных значениях напряжений  $U_{12}$  и  $U_{23}$  на выходе трёхполюсника, что достигается изменением сопротивлений нагрузки  $r_4, r_5, r_6$  (рис. 2.8), то в приведенной системе уравнений имеются две переменные –  $U_{12}$  и  $U_{23}$ , в связи с чем можно получить зависимость  $U_{23}(U_{12})$  при  $P = const$ .

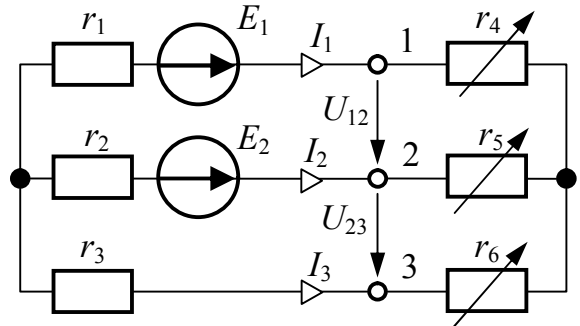


Рис. 2.8 – Работа активного трёхполюсника на нагрузку, соединённую звездой

Формулы для токов, полученные при решении системы уравнений трёхполюсника:

$$I_1 = \frac{E_1 \cdot (r_2 + r_3) - U_{12} \cdot (r_2 + r_3) - E_2 \cdot r_3 - r_2 \cdot U_{23}}{r_1 r_2 + r_2 r_3 + r_3 r_1},$$

$$I_2 = \frac{-E_1 \cdot r_3 + U_{12} \cdot r_3 + E_2 \cdot (r_1 + r_3) - r_1 \cdot U_{23}}{r_1 r_2 + r_2 r_3 + r_3 r_1},$$

$$I_3 = \frac{-E_1 \cdot r_2 + U_{12} \cdot r_2 - E_2 \cdot r_3 + (r_1 + r_2) \cdot U_{23}}{r_1 r_2 + r_2 r_3 + r_3 r_1}.$$

Формула для мощности с учётом полученных выражений для токов принимает вид:

$$\begin{aligned} P = & (r_1 r_2 + r_2 r_3 + r_3 r_1)^{-2} \cdot [-U_{12}^2 \cdot (r_1 r_2^2 + 2r_1 r_2 r_3 + r_1 r_3^2 + r_2 r_3^2 + r_3 r_2^2) - \\ & - U_{23}^2 \cdot (2r_1 r_2 r_3 + r_1 r_2^2 + r_2 r_1^2 + r_3 r_1^2 + r_3 r_2^2) + \\ & + E_1 \cdot U_{12} \cdot (r_1 r_2^2 + 2r_1 r_2 r_3 + r_1 r_3^2 + r_2 r_3^2 + r_3 r_2^2 + E_1 \cdot U_{23} \cdot (r_1 r_2^2 + r_1 r_2 r_3 + r_2^2 r_3) - \\ & - E_2 \cdot U_{12} \cdot (r_1 r_2 r_3 + r_2 r_3^2 + r_1 r_3^2) + E_2 \cdot U_{23} (r_1 r_2 r_3 + r_1 r_3^2 + r_1^2 r_2) - \\ & - U_{12} \cdot U_{23} \cdot (2r_1 r_2 r_3 + 2r_2^2 r_1 + 2r_2^2 r_3)]. \end{aligned}$$

Таким образом, уравнение относительно напряжения  $U_{23}$  является квадратным:  $a \cdot U_{23}^2 + b \cdot U_{23} + c = 0$ ,

где  $a = -r_1 r_2^2 - r_2 r_1^2 - r_3 r_1^2 - 2r_1 r_2 r_3 - r_3 r_2^2$ ,

$$b = E_1 \cdot (r_1 r_2^2 + r_1 r_2 r_3 + r_2^2 r_3) + E_2 \cdot (r_1 r_2 r_3 + r_1 r_3^2 + r_1^2 r_2) - U_{12} \cdot (2r_1 r_2 r_3 + 2r_2^2 r_1 + 2r_2^2 r_3),$$

$$c = -P \cdot (r_1 r_2 + r_2 r_3 + r_3 r_1)^2 - U_{12}^2 \cdot (r_1 r_2^2 + 2r_1 r_2 r_3 + r_1 r_3^2 + r_2 r_3^2 + r_3 r_2^2) +$$

$$+ E_1 \cdot U_{12} \cdot (r_1 r_2^2 + 2r_1 r_2 r_3 + r_1 r_3^2 + r_2 r_3^2 + r_3 r_2^2) - E_2 \cdot U_{12} \cdot (r_1 r_2 r_3 + r_2 r_3^2 + r_1 r_3^2).$$

Коэффициенты  $b$  и  $c$  являются функциями напряжения  $U_{12}$ .

Таким образом, напряжение  $U_{23}$  в функции напряжения  $U_{12}$  характеризуется двумя зависимостями:

$$U_{23}(U_{12}) = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}, \text{ где дискриминант } D = b^2 - 4ac.$$

Рабочий режим трёхполюсника (значения выходных токов, напряжений и мощности) зависит от сопротивлений нагрузки  $r_4, r_5, r_6$  (рис. 2.8). Определим диапазон изменения выходных величин.

Максимальные значения выходных напряжений определяются режимом холостого хода ( $r_4 = r_5 = r_6 = \infty$ ), а минимальные – режимом короткого замыкания ( $r_4 = r_5 = r_6 = 0$ ):

$$U_{12X} = E_1 - E_2, \quad U_{23X} = -E_2, \quad U_{12K} = U_{23K} = 0.$$

Напротив, токи максимальные в режиме короткого замыкания, а минимальны – в режиме холостого хода:  $I_{1X} = I_{2X} = I_{3X} = 0$ ,

$$I_{1K} = \frac{E_1 \cdot (r_2 + r_3) - E_2 \cdot r_3}{r_1 r_2 + r_2 r_3 + r_3 r_1}, \quad I_{2K} = \frac{E_2 \cdot (r_1 + r_3) - E_1 \cdot r_3}{r_1 r_2 + r_2 r_3 + r_3 r_1}, \quad I_{3K} = \frac{-E_1 \cdot r_2 - E_2 \cdot r_1}{r_1 r_2 + r_2 r_3 + r_3 r_1}.$$

В общем случае в соответствии с вышеприведенными формулами токи и мощность являются функциями двух напряжений  $U_{12}$  и  $U_{23}$ .

Передаваемая в нагрузку мощность  $P$  равна нулю в режимах холостого хода и короткого замыкания и достигает максимума при условии равенства нулю её частных производных:  $\frac{\partial P(U_{12}, U_{23})}{\partial U_{12}} = 0$  и  $\frac{\partial P(U_{12}, U_{23})}{\partial U_{23}} = 0$ . Расчёт

максимальной мощности в системе MathCAD выполняется следующим образом:

$$\text{Given} \quad \frac{d}{dU_{12}} P(U_{12}, U_{23}) = 0 \quad \frac{d}{dU_{23}} P(U_{12}, U_{23}) = 0$$

$$C := \text{Minerr}(U_{12}, U_{23}) \quad U_{12} := C_0 \quad U_{23} := C_1$$

$$P_{max} = P(U_{12}, U_{23})$$

Исследования показали, что в режиме передачи максимальной мощности в нагрузку мощность нагрузки равна мощности потерь внутри активного трёхполюсника:  $r_1 \cdot I_1^2 + r_2 \cdot I_2^2 + r_3 \cdot I_3^2 = r_4 \cdot I_1^2 + r_5 \cdot I_2^2 + r_6 \cdot I_3^2$ .

Мощность  $P$  трёхполюсника в режиме источника может принимать значения от 0 до  $P_{max}$ . Семейство зависимостей  $U_{23}(U_{12})$  трёхполюсника с параметрами  $E_1 = 10$ ,  $E_2 = -20$ ,  $r_1 = 1$ ,  $r_2 = 3$ ,  $r_3 = 5$  для разных значений мощности в диапазоне от 0 до  $P_{max}$  представлено на рис. 2.9. С увеличением мощности эллипсы уменьшаются, сжимаясь при  $P = P_{max}$  в точку. Точка в начале координат соответствует режиму короткого замыкания, причём эта точка не является вершиной эллипса. Здесь значение напряжения  $U_{12}$  минимально. Точка, симметричная ей относительно точки максимальной мощности, соответствует режиму холостого хода. Здесь значение напряжения  $U_{12}$  максимально.

Могут быть также построены эллипсы, соответствующие отрицательным значениям мощности  $P$ , которые будут шире показанных на рис. 2.9. Отрицательное значение мощности  $P$  может быть получено при подключении рассматриваемого активного трёхполюсника к трёхполюсному источнику с большими значениями напряжения холостого хода.

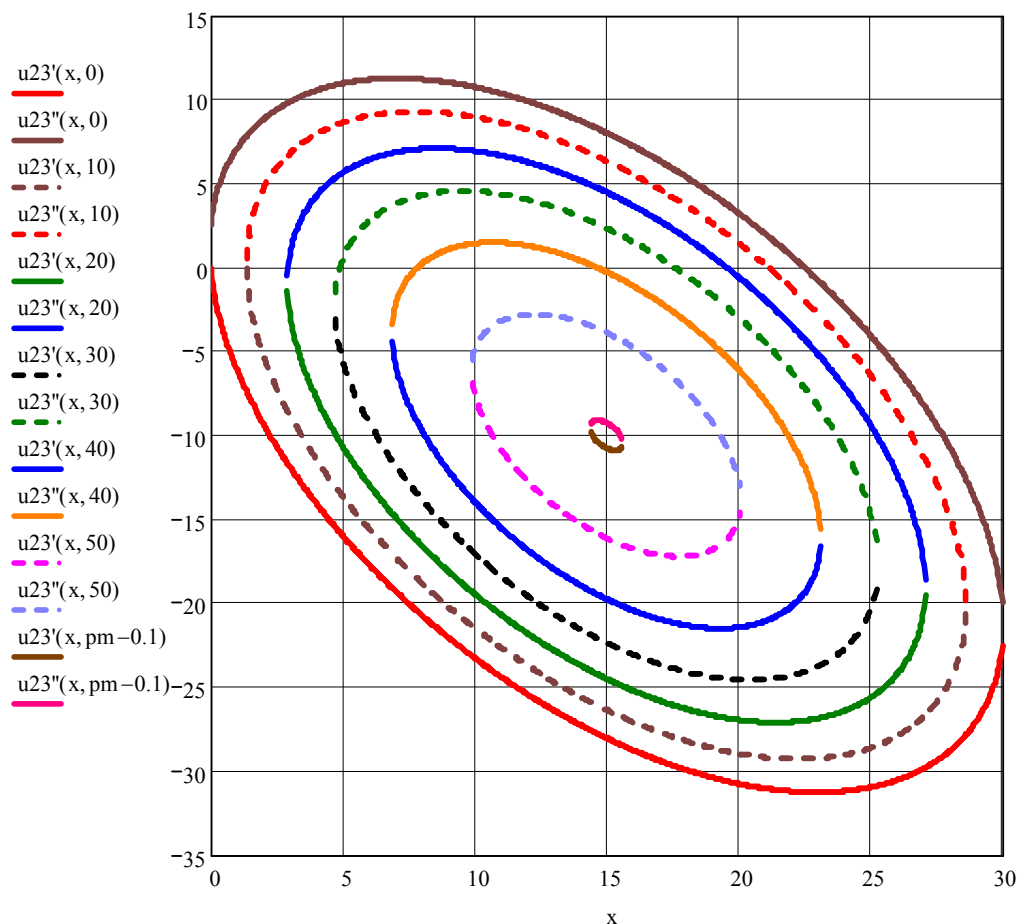


Рис. 2.9 – Семейство зависимостей  $U_{23}(U_{12})$  линейного активного трёхполюсника

Отдельные части эллипсов имеют реальный характер, то есть сопротивления нагрузки  $r_4-r_5-r_6$  в данных точках принимают положительные значения, а отдельные части могут быть получены только при отрицательных значениях одного или нескольких сопротивлений нагрузки.

В дальнейшем при работе с характеристиками  $U_{23}(U_{12})$  активного трёхполюсника в дополнение к напряжениям могут понадобиться значения токов. Вполне достаточно указать значения одного (например, первого) тока во всех точках характеристик. Остальные токи могут быть вычислены:

$$I_3 = \frac{U_{12} \cdot I_1 - P}{U_{23}}, \quad I_2 = -(I_1 + I_3).$$

Графики зависимости  $I_1(U_{12})$  приведены на рис. 2.10.

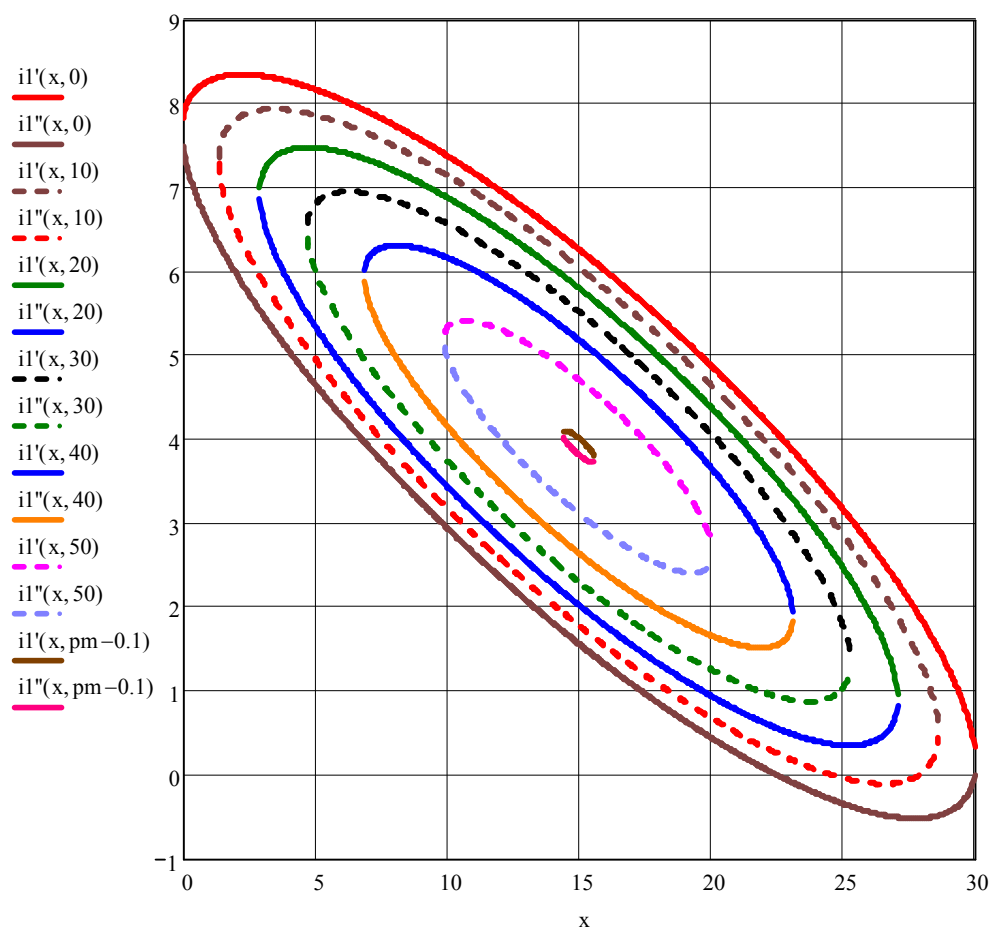


Рис. 2.10 – Семейство зависимостей  $I_1(U_{12})$  линейного активного трёхполюсника



2.2 Совершенствование теории электрических цепей постоянного тока, содержащих нелинейные двухполюсники

### 2.2.1 Цели и задачи эквивалентных преобразований

Преобразования электрических цепей применяются с целью упрощения расчётов. При этом преобразования должны быть эквивалентными, что означает что токи, напряжения, а также энергетическое состояние части цепи, не затронутой преобразованиями, не должны измениться. На основе эквивалентных преобразований могут быть разработаны методы расчёта, решены отдельные локальные задачи, не затрагивающие всю цепь. Применение эквивалентных преобразований позволяет решать также отдельные задачи синтеза электрических цепей, в частности, определение схемы и её параметров по заданным характеристикам, например, входным ВАХ анализируемого устройства.

### 2.2.2 Взаимные преобразования зависимостей $U(I)$ и $I(U)$

Рассмотрим алгоритм получения зависимости  $I(U)$  из заданной ВАХ  $U(I)$ , определённой на некотором рабочем участке тока  $I$  от  $I_{min}$  до  $I_{max}$ . Пусть количество точек аппроксимации равно  $n$ . Зададимся шагом изменения аргумента  $\Delta I = \frac{I_{max} - I_{min}}{n - 1}$ . Для массива значений тока  $I_q = I_{min} + (q - 1) \cdot \Delta I$ , где  $q = 1..n$ , определяется массив значений напряжения с помощью заданной ВАХ  $U(I)$ :  $U_q(I_q)$ . Для данного массива выполняем линейную интерполяцию в среде MathCAD:  $I(U) = \text{linterp}(U, I, U)$ . Аналогично получают зависимость  $U(I)$  из заданной  $I(U)$ .

Помимо ВАХ нелинейный резистор может быть полностью описан одной из зависимостей  $r(I)$ ,  $r(U)$ ,  $g(I)$ ,  $g(U)$ . Переход от одной из них к любой другой осуществляется посредством ВАХ. Например, алгоритмы перехода от  $r(I)$  к  $r(U)$  и от  $g(U)$  к  $g(I)$  следующие:

$$r(I) \rightarrow U(I) = r(I) \cdot I \rightarrow I(U) \rightarrow r(U) = U/I(U);$$

$$g(U) \rightarrow I(U) = g(U) \cdot U \rightarrow U(I) \rightarrow g(I) = I/U(I).$$

Из последних записей следуют соотношения:

$$g(I) = (r(I))^{-1} \text{ и } r(U) = (g(U))^{-1}.$$

Идея нелинейного активного двухполюсника (рис. 2.11,а) позволяет отрешиться от внутренних соединений участка цепи, имеющего два вывода, и анализировать цепь в целом, рассматривая её как набор двухполюсников, что позволяет упростить анализ и расчёт цепей, а также выработать методы расчёта.

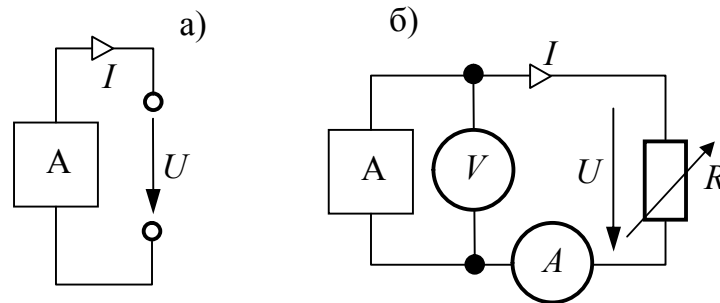


Рис. 2.11– Активный двухполюсник (а) и схемы снятия его ВАХ (б)

Если схема и параметры её нелинейных сопротивлений и источников известны, ВАХ активного двухполюсника может быть получена расчётным путём с применением эквивалентных преобразований пассивных цепей или с использованием методов расчёта сложных нелинейных цепей. Схема экспериментального получения ВАХ активного двухполюсника представлена на рис. 2.11,б. Изменяя сопротивление нагрузки  $R$  в широких пределах (теоретически от 0 до  $\infty$ ), можно получить массивы значений тока и напряжения (массивы координатных точек ВАХ), которые могут быть использованы для дальнейших расчетов.

Примерный вид ВАХ двухполюсника, которая может быть получена, показан на рис. 2.12 (кривая 1). Однако схема рис. 2.11,б позволяет получить ВАХ только между точками  $A$  и  $B$  (от режима холостого хода до режима короткого замыкания). При необходимости получения характеристики в области отрицательных токов или для токов больших  $I_{кз}$  переменное

сопротивление  $R$  схемы рис. 2.11,б заменяют регулируемым источником напряжения.

В общем случае нелинейный двухполюсник постоянного тока может быть представлен на основе теоремы об эквивалентном генераторе одной из двух эквивалентных схем рис. 2.13,а или б.

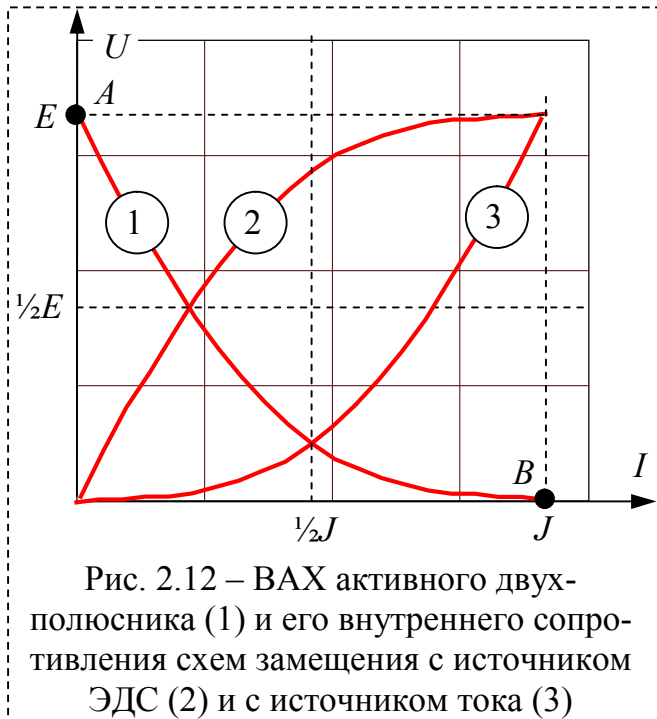


Рис. 2.12 – ВАХ активного двухполюсника (1) и его внутреннего сопротивления схем замещения с источником ЭДС (2) и с источником тока (3)

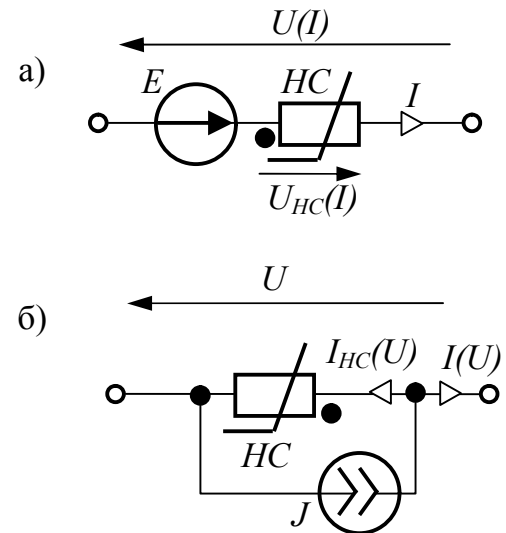


Рис. 2.13 – Эквивалентные схемы нелинейного двухполюсника постоянного тока  
а) – с источником ЭДС; б) – с источником тока

По ВАХ двухполюсника (рис. 2.12, кривая 1) можно получить ВАХ внутреннего сопротивления эквивалентной схемы двухполюсника (рис. 2.13,а)  $U_{HC}(I)$  (кривая 2 на рис. 2.12). Поскольку  $E=U_x$ , то  $U_{HC}(I)=E - U(I)$ . Кривые 1 и 2 симметричны относительно горизонтальной линии  $\frac{1}{2}E$ . Аналогично можно получить ВАХ внутреннего сопротивления схемы рис. 2.13,б  $I_{HC}(U)$  (кривая 3 на рис. 2.12):  $I_{HC}(U) = J - I(U)$ . Кривые 1 и 3 симметричны относительно вертикальной линии  $\frac{1}{2}J$ . Таким образом, в отличие от линейного активного двухполюсника ВАХ внутреннего сопротивления нелинейного двухполюсника по схеме рис. 2.13,а и схеме рис. 2.13,б неодинаковы. Путём графических преобразований из одной характеристики всегда можно получить вторую. Имея кривую 2, сначала отображаем её относительно горизонтальной оси  $\frac{1}{2}E$ , а затем относительно вертикальной оси  $\frac{1}{2}J$ , получая кривую 3.

В схеме рис. 2.13,а зависимость  $U(I)$  получают из ВАХ нелинейного сопротивления  $U_{НС}(I)$  вычитанием из значения ЭДС  $E$  массива значений  $U_{НС}$ :

$$U_q(I_q) = E - U_{НСq}(I_q). \quad (2.9)$$

В схеме рис. 2.13,б зависимость  $I(U)$  получают из зависимости  $I_{НС}(U)$  в соответствии с формулой:

$$I_q(U_q) = J - I_{НСq}(U_q). \quad (2.10)$$

На рис. 2.13 показаны рекомендуемые положительные направления токов и напряжений. В общем случае они могут быть любыми. Однако обязательным является требование, что направления тока и напряжения нелинейного сопротивления ввиду резистивного его характера должны совпадать. Формулы (2.9, 2.10) и вид графика ВАХ трансформируются соответствующим образом.

ВАХ внутренних сопротивлений эквивалентных схем рис. 2.13,а и б могут быть сняты опытным путём в соответствии со схемами рис. 2.14,а и б, соответственно. Здесь  $E_k$  и  $J_k$  – компенсационные источники, подобранные соответствующим образом,  $E_p$  рабочий регулируемый источник, вольтметр и амперметр – приборы для измерения тока и напряжения ВАХ искомого сопротивления.

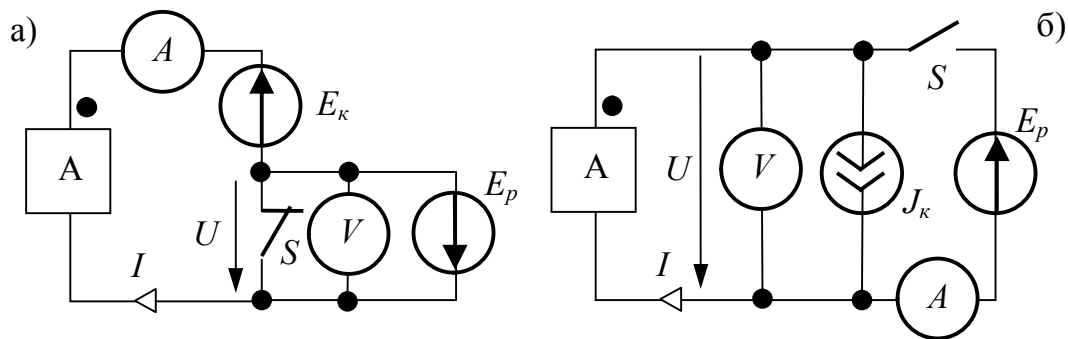


Рис. 2.14 – Схемы снятия ВАХ внутреннего сопротивления активного нелинейного двухполюсника

Используются схемы рис. 2.14 следующим образом. В схеме рис. 2.14,а при замкнутом ключе  $S$  подбирается такой компенсационный источник напряжения  $E_k$ , чтобы показание амперметра было равно нулю. ЭДС компенсационного источника равна напряжению холостого хода. Далее размыкается ключ  $S$ , и производится снятие требуемой ВАХ путём изменения

напряжения рабочего источника  $E_p$ . В схеме рис. 2.14,б при разомкнутом ключе  $S$  подбирается такой компенсационный источник тока  $J_k$ , чтобы показание вольтметра было равно нулю. Ток компенсационного источника равен току короткого замыкания двухполюсника. Далее замыкается ключ  $S$ , и производится снятие требуемой ВАХ путём изменения напряжения рабочего источника  $E_p$ .

Описанная методика проверена расчётным путём на примере схемы рис. 2.15. В качестве двухполюсника рассматривалась часть цепи, содержащая источники тока  $J$  и ЭДС  $E$  и нелинейные резисторы  $HC_1$ ,  $HC_2$  и  $HC_3$ . ВАХ  $HC$  заданы таблично с последующей линейной

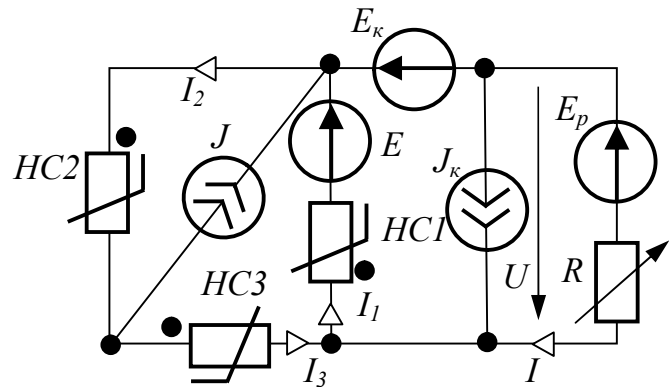


Рис. 2.15 – Схема проверки возможности снятия ВАХ внутреннего сопротивления активного двухполюсника

интерполяцией. Расчёт цепи выполнялся путём решения системы нелинейных алгебраических уравнений, составленных по законам Кирхгофа с проверкой расчётов по балансу мощностей. При отсутствии источников измерения ( $E_k = E_p = 0$ ,  $J_k = 0$ ) была получена нагрузочная ВАХ двухполюсника  $U(I)$  при различных значениях сопротивления  $R$  (кривая 1 на рис. 2.12). Затем была снята ВАХ сопротивления эквивалентной схемы рис. 2.14,а ( $R = 0$ ,  $J_k = 0$ ,  $E_k = U_{xx}$ ) (кривая 2 на рис. 2.12). Также была получена ВАХ сопротивления эквивалентной схемы рис. 2.14,б ( $R = 0$ ,  $E_k = 0$ ,  $J_k = I_{кз}$ ) (кривая 3 на рис. 2.12).

Дополнительно была рассчитана ВАХ двухполюсника при условии, что источники  $J$  и  $E$  не действуют ( $J = 0$ ,  $E = 0$ ). Эта ВАХ не совпала ни с одной из ранее полученных. Таким образом, нельзя получить ВАХ сопротивлений эквивалентных схем рис. 2.14 расчётом пассивного двухполюсника. Имеющиеся внутри двухполюсника источники оказывают влияние на ВАХ сопротивления эквивалентной схемы.

Следствием того, что источники оказывают влияние на ВАХ сопротивления эквивалентной схемы, является то, что ВАХ активного двухполюсника с *НС* с симметричными характеристиками оказывается несимметричной не только относительно начала координат, что естественно ввиду сдвига ВАХ за счёт действия источников, но и относительно любой точки, взятой на характеристике.

2.2.3 Обозначение нелинейного сопротивления с несимметричной ВАХ в схеме. Математическое и графическое представление его характеристик

Вид ВАХ, а также других характеристик нелинейного сопротивления с несимметричной ВАХ зависит от выбора положительного направления тока. Чтобы избежать путаницы в представлении подобных резисторов и в дальнейших расчётах, в тексте используются обозначения в соответствии с рис. 2.16. Примечание: положительное направление напряжения на нелинейном сопротивлении будем принимать совпадающим с положительным направлением тока.

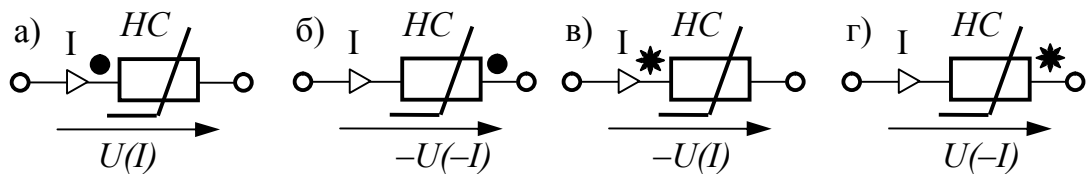
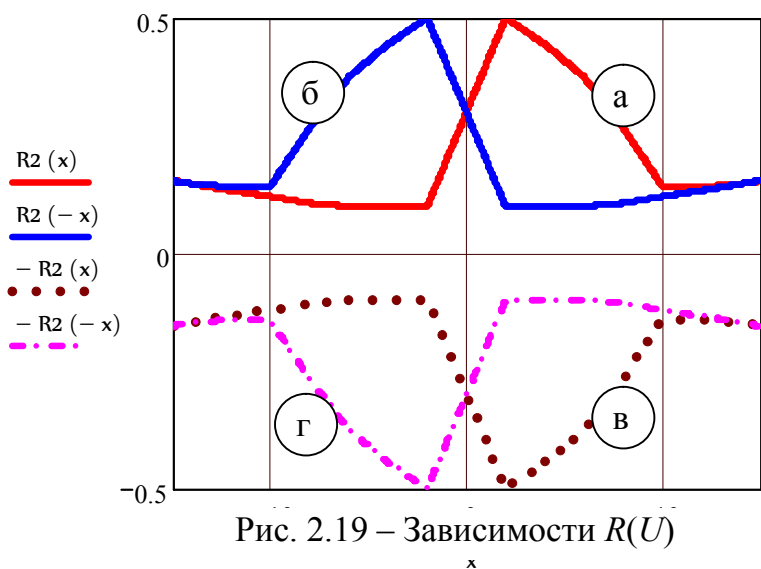
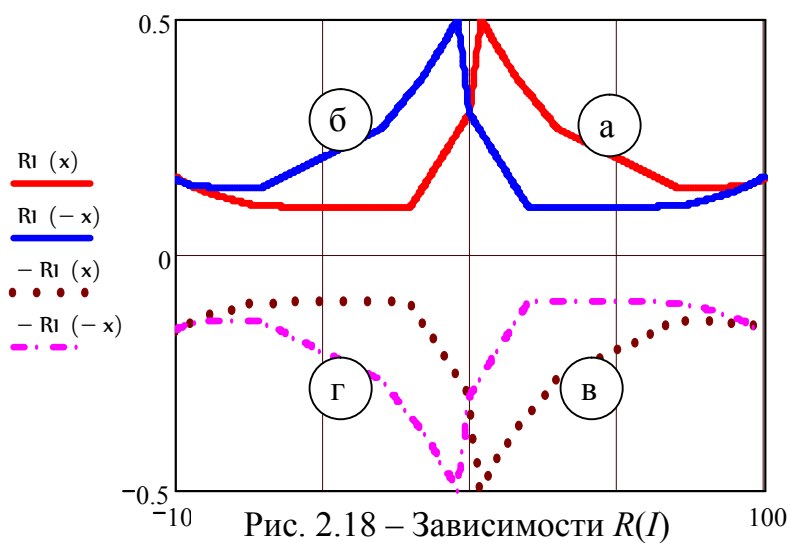
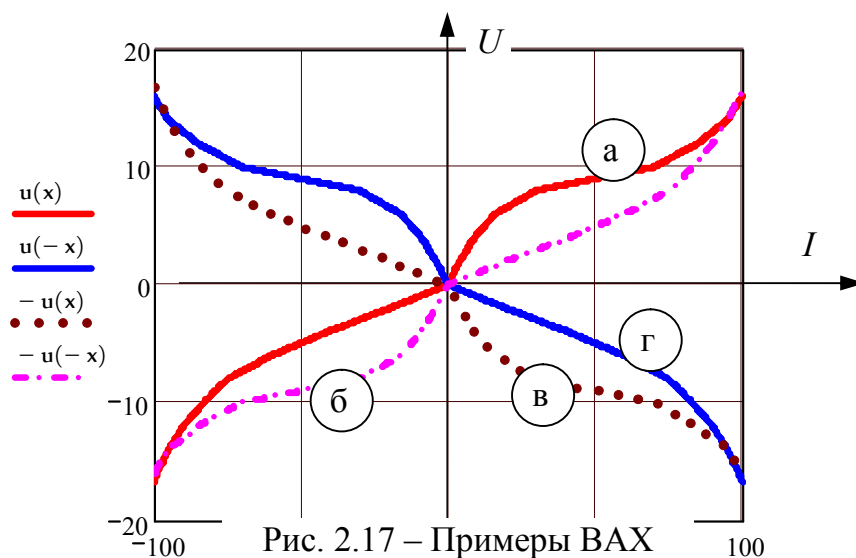


Рис. 2.16 – Примеры обозначения нелинейных сопротивлений с несимметричными ВАХ в схеме

Положительный зажим резистора на рис. 2.16,а помечен точкой. ВАХ резистора  $U(I)$ , зависимости  $R(I)$ ,  $R(U)$ , соответствующие рис. 2.16,а показаны кривыми а) на рис. 2.17, 2.18, 2.19, соответственно. В случае использования проводимости вместо сопротивления, она находится как обратная величина к сопротивлению:  $g(I)=1/R(I)$ ,  $g(U)=1/R(U)$ .

Изменение направления тока (а значит, и направления напряжения) в сопротивлении эквивалентно переносу точки (рис. 2.16,б). При этом ВАХ а) отражается центрально симметрично относительно начала координат в ВАХ б) (рис. 2.17). Зависимости  $R(I)$ ,  $R(U)$  отображаются симметрично относительно оси ординат (кривые б) по отношению к кривым а) на рис. 2.18 и 2.19.



Для удобства и упрощения анализа схем с *НС* введём в использование некие фиктивные резисторы с характеристикой  $-U(I)$  (рис. 2.16,в) и с характе-

ристикой  $U(-I)$  (рис. 2.16,г), у которых положительный зажим помечен звёздочкой. Соединение нелинейного сопротивления схемы рис. 2.16,в с резистором а) последовательно даёт нулевое сопротивление ввиду того, что при одном и том же токе равные по величине и противоположные по знаку напряжения компенсируют друг друга. Соответственно, соединение  $HC$  схемы рис. 2.16,г параллельно с резистором а) даёт нулевой ток (нулевую проводимость и бесконечное сопротивление). ВАХ схемы рис. 2.16,в получают из ВАХ рис. 2.16,а, зеркально симметричным отображением относительно оси тока (кривая в) рис. 2.17), ВАХ г) получают из ВАХ а) (рис. 2.17) отображением относительно оси напряжения. Аналогично кривым а) и б), кривые в) и г) (рис. 2.17) центрально симметричны друг другу относительно начала координат.

Зависимости в) и г) на рис. 2.18 ( $-R(I)$  и  $R(-I)$ ) и 2.19 ( $-R(U)$  и  $R(-U)$ ) соответствуют схемам рис. 2.16,в и г. Причём соблюдаются следующие симметрии:  $R(I)$  и  $-R(I)$  – относительно оси абсцисс;  $R(-I)$  и  $-R(-I)$  – относительно оси абсцисс;  $R(I)$  и  $-R(-I)$  – относительно начала координат,  $R(-I)$  и  $-R(I)$  – относительно начала координат. Такие же симметрии наблюдаются и на рис. 2.19.

При соединении сопротивлений а) и б) с произвольными несимметричными ВАХ (рис. 2.16) последовательно или параллельно получаем эквивалентное сопротивление с симметричной относительно начала координат вольтамперной характеристикой  $U(I) = -U(-I)$ . Соответственно, для суммарной характеристики зависимости  $R(I)$ ,  $R(U)$ ,  $g(I)$  и  $g(U)$  симметричны относительно оси ординат:  $R(I) = R(-I)$ ,  $R(U) = R(-U)$ ,  $g(I) = g(-I)$ ,  $g(U) = g(-U)$ .

Для наглядности составим дополнительно таблицу соответствия зависимостей (табл. 2.1).

Таблица 2.1. Таблица соответствия зависимостей рис. 2.17, 2.18, 2.19 друг другу

Кривые а)	Кривые б)	Кривые в)	Кривые г)
$U(I)$	$-U(-I)$	$-U(I)$	$U(-I)$
$R(I), g(I)$	$R(-I), g(-I)$	$-R(I), -g(I)$	$-R(-I), -g(-I)$
$R(U), g(U)$	$R(-U), g(-U)$	$-R(U), -g(U)$	$-R(-U), -g(-U)$



## 2.2.4 Работа с характеристиками в системе MathCAD. Решение схемных уравнений (задачи синтеза)

В Приложении приведена MathCAD-программа, иллюстрирующая следующие приёмы и положения:

§1 – получение по заданной ВАХ а) вольтамперных характеристик типа б), в), г) (рис. 2.17).

§2 – иллюстрация положения о том, что последовательное или параллельное соединений сопротивлений а) и б) (рис. 2.16) даёт элемент с симметричной относительно начала координат ВАХ.

§3 – иллюстрация тождества рис. 2.20,а справедливого при любом количестве сопротивлений. Более того, если имеется произвольная цепь с любым количеством сопротивлений и к ней подсоединить последовательно такую же цепь, но после замены сопротивлений а) на сопротивления в), то получается участок с нулевым напряжением (проводник, нулевое сопротивление).

§4 – иллюстрация тождества рис. 2.20,б справедливого при любом количестве сопротивлений. Более того, если имеется произвольная цепь с любым количеством сопротивлений и к ней подсоединить параллельно такую же цепь, но после замены сопротивлений а) на сопротивления г), то получается участок с нулевым током (обрыв, бесконечно большое сопротивление).

§5 – иллюстрация решения схемных уравнений (задачи синтеза).

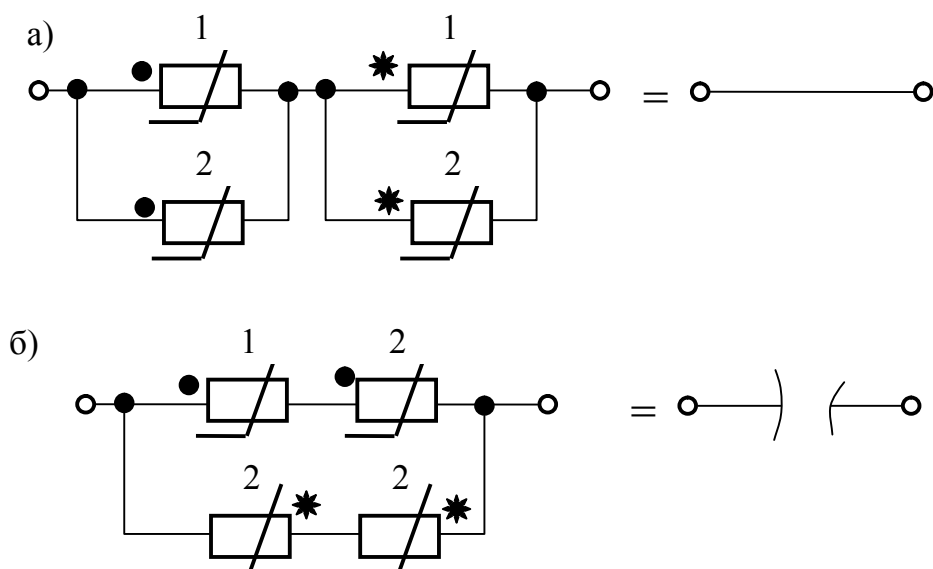


Рис. 2.20 – Тождества при работе с ВАХ

Рассмотрим схемные уравнения и их решение более подробно на следующих конкретных примерах.

Уравнение рис. 2.21 не имеет решения, поскольку все напряжения и токи положительны. В схеме должны быть и сопротивления со «звёздочками». Для получения нулевого сопротивления – прямые «звёздочки» (элементы типа в)), для обрыва – обратные «звёздочки» (элементы типа г)).

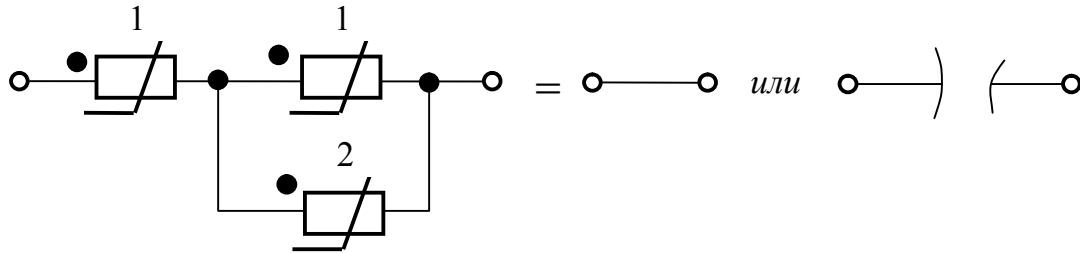


Рис. 2.21 – Уравнение, не имеющее решения

Для оценки возможности единственности или множественности решения схемного уравнения введём понятие степеней свободы. Имеется в виду возможность или отсутствие произвольного выбора тока или напряжения отдельного элемента. В уравнениях  $I=5$ ,  $R=3$ ,  $U(I)=10$  свобода выбора отсутствует, то есть налицо нулевое количество степеней свободы. В уравнении  $U_1(I)+U_2(I)=U_3(I)$  (рис. 2.22), где ВАХ первого и второго элементов заданы, а определить требуется ВАХ третьего элемента, имеется одна степень свободы: можно произвольно задаваться различными значениями тока и находить соответствующие значения напряжения  $U_3$ . При наличии одной степени свободы решение можно находить графическим методом в декартовой системе координат на плоскости. Уравнение имеет единственное решение в виде графика (кривой) в системе координат на плоскости.

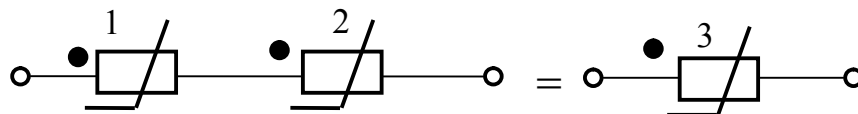


Рис. 2.22 – Уравнение, имеющее единственное решение в виде графика

Уравнение рис. 2.23 (характеристики сопротивлений 2 и 3 известны, требуется синтезировать ВАХ сопротивления 1. Дополнительное условие: все характеристики являются монотонными) решается однозначно, если известна

дополнительная зависимость тока (напряжения) третьего сопротивления от тока (напряжения) второго сопротивления. Тогда задача решается методом точек следующим образом.

Задаёмся произвольным значением напряжения  $U_{12}$  и по заданным зависимостям находим  $I_2$ ,  $I_v$ ,  $U_v$ . Производим расчёты и получаем две точки искомой ВАХ:  $I_1 = I_v - I_2$ ,  $U_1(I_1) = U_{12}$ ;  $I_1 = I_v$ ,  $U_1(I_1) = U_v - U_{12}$ . Описанные действия повторяются необходимое количество раз.

Если же в уравнении рис. 2.23 при известных ВАХ сопротивлений 2 и 3 их взаимная связь неизвестна (или отсутствует), задача имеет бесконечное множество решений.

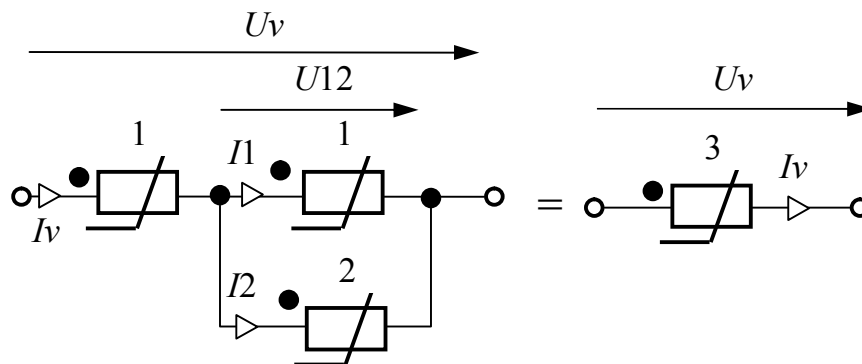


Рис. 2.23 – Уравнение, имеющее решение

Алгоритм получения одного из решений следующий. Произвольно задаёмся значением напряжения  $U_{12}$  (причём достаточно малым значением, равным примерно одной десятой или одной двадцатой рабочего диапазона напряжения  $U_{12}$ ) и находим  $I_2(U_{12})$ . Далее задаёмся значением тока третьего сопротивления  $I_v$  (одновременно это – ток на входе рассматриваемой цепи) и находим  $U_v(I_v)$ . Значение  $I_v$  следует брать таким, чтобы  $I_v > I_2$ ,  $U_v > 2 \cdot U_{12}$ . Последние условия вытекают из физики рассматриваемой цепи. Получаем две точки искомой характеристики:  $I_1 = I_v - I_2$ ,  $U_1(I_1) = U_{12}$ ;  $I_1 = I_v$ ,  $U_1(I_1) = U_v - U_{12}$ .

Затем задаёмся значением тока  $I_1$  равным входному току предыдущего этапа и находим  $U_{12} = U_1(I_1)$ ,  $I_2(U_{12})$ ,  $I_v = I_1 + I_2$ ,  $U_v(I_v)$ . В конце этапа получаем следующую точку искомой ВАХ:  $U_1(I_1) = (U_v - U_{12})(I_v)$ . И так далее.

Рассмотрим возможность наличия решений в рис. 2.23 с использованием понятия степеней свободы. Схема рис. 2.23 описывается следующей системой уравнений по законам Кирхгофа

$$\begin{cases} I_v = I_1 + I_2, \\ U_1(I_1) = U_2(I_2) = U_{12}, \\ U_1(I_v) + U_{12} = U_v(I_v). \end{cases}$$

Первое уравнение даёт две степени свободы, поскольку произвольно можно взять значения любых двух токов. Во втором уравнении зависимость  $U_1(I_1)$  неизвестна (требуется найти), поэтому уравнение не даёт ограничения по степеням свободы. В третьем уравнении та же картина ввиду неопределённости зависимости  $U_1(I_v)$ . В связи с наличием двух степеней свободы схемное уравнение рис. 2.23 имеет бесконечное число решений, отразить которое можно в трёхмерной системе координат  $I_1$ - $I_2$ - $I_v$ , где каждому значению тока  $I_v$  (в соответствующей плоскости) отвечает кривая  $I_1(I_2)$ , а в целом, решение можно представить в виде некоторой поверхности в указанном пространстве.

Если же добавляется ещё одно уравнение вида  $I_2 = f(I_v)$ , которое уменьшает число степеней свобод на единицу, решение становится единственным в виде кривой на плоскости.

По аналогичной методике синтезируется ВАХ первого сопротивления схемы рис. 2.24. Отличие в том, что при выборе значения  $I_v$  следует учесть, что ток  $I_1$  принимает отрицательные значения при положительных  $U_{12}$ . Таким

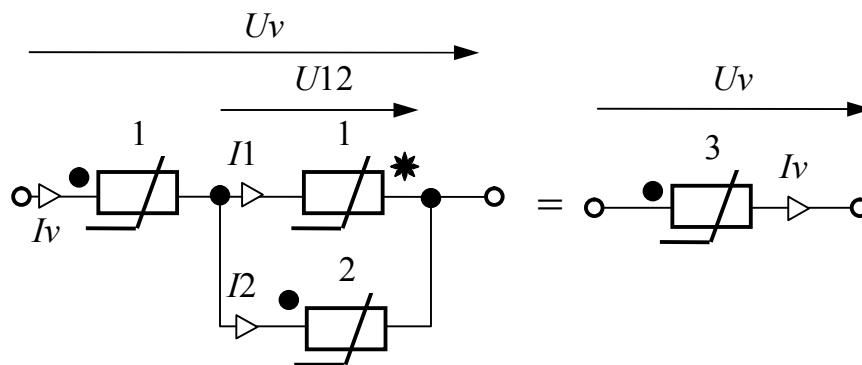


Рис. 2.24 – Уравнение, имеющее решение

образом,  $I_v < I_2$ ,  $U_v > 2 \cdot U_{12}$ .

В схеме рис. 2.25 требуется получить ВАХ первого  $НС$ , если известна ВАХ второго  $НС$ . Уравнение имеет множественное решение ввиду двух степеней свободы, которые даёт уравнение  $I = I_1 + I_2$ . Одно из решений можно получить следующим образом. Задаёмся произвольными достаточно малыми значениями тока  $I_1$  и напряжения  $U/2$  (например,  $1/20$  максимальных значений рабочего диапазона тока  $I$  и напряжения  $U$ ). Удваивая взятое напряжение по известной ВАХ второго  $НС$  определяет входной ток цепи, а затем вычисляем ток во второй ветви  $I_2$ . Получаем, таким образом, координаты второй точки ВАХ первого  $НС$ . Используя эти координаты, задаём ток и напряжение на одном сопротивлении первой ветви и по вышеуказанному алгоритму определяем координаты третьей точки искомой ВАХ. И так далее.

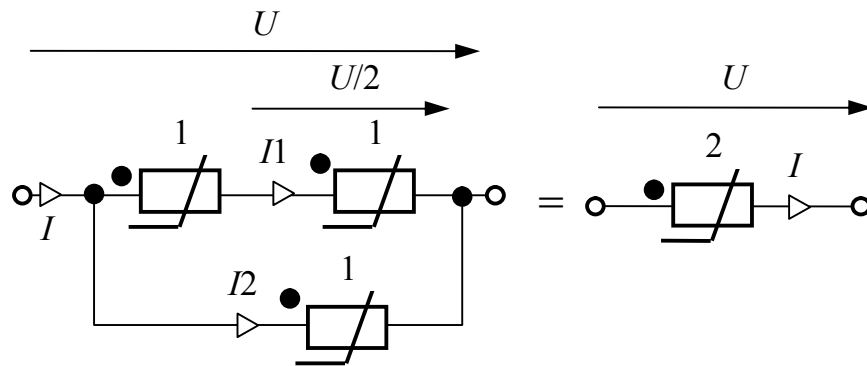


Рис. 2.25 – Уравнение с множественным решением

### 2.2.5 Последовательное соединение нелинейных двухполюсников

Последовательное соединение характеризуется тем, что по всем элементам протекает один и тот же ток, а напряжения на элементах складываются в соответствии со вторым законом Кирхгофа.

Пусть последовательно соединены  $n$  нелинейных двухполюсников (рис. 2.26), ВАХ которых  $U_q(I)$  известны.

Требуется получить результирующую ВАХ цепи. Процедура получения результирующей ВАХ

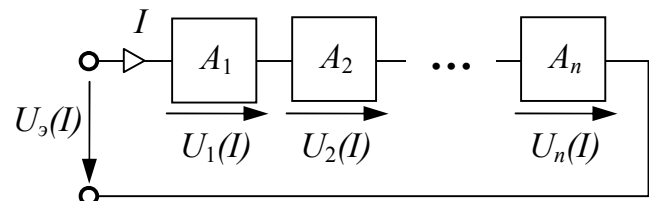


Рис. 2.26 – Последовательное соединение  $n$  нелинейных двухполюсников

Процедура получения результирующей ВАХ

следующая. В рабочем диапазоне изменения тока от  $I_{min}$  до  $I_{max}$  задаются массивом значений тока с шагом, например,  $\Delta I$ . Затем с помощью известных ВАХ двухполюсников  $U_q(I)$  создаются массивы напряжений отдельных двухполюсников, соответствующие одним и тем же значениям тока  $I$ . Затем напряжения на отдельных двухполюсниках складываются при одних и тех же значениях тока:

$$U_{\Sigma} = \sum_{q=1}^n U_q.$$

Далее выполняется линейная интерполяция зависимости  $U_{\Sigma}(I)$ . Описанная процедура иллюстрируется табл. 2.2 и рис. 2.27.

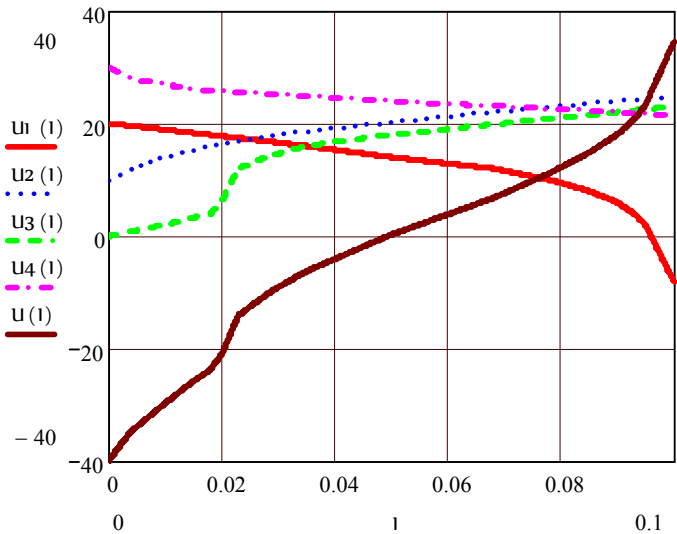


Рис. 2.27 – Суммирование ВАХ при последовательном соединении активных двухполюсников

Таблица 2.2 Алгоритм получения ВАХ последовательного соединения

$I$	$I_1$	$I_2 = I_1 + \Delta I$	...	$I_k = I_1 + (k-1) \cdot \Delta I$
$U_1$	$U_{11}$	$U_{12}$	...	$U_{1k}$
$U_2$	$U_{21}$	$U_{22}$	...	$U_{2k}$
...	...	...	...	...
$U_j$	$U_{j1}$	$U_{j2}$	...	$U_{jk}$
...	...	...	...	...
$U_n$	$U_{n1}$	$U_{n2}$	...	$U_{nk}$
$U_{\Sigma}$	$U_{\Sigma 1}$	$U_{\Sigma 2}$	...	$U_{\Sigma k}$

### 2.2.6 Параллельное соединение нелинейных двухполюсников

Параллельное соединение характеризуется тем, что напряжение на всех элементах одно и то же, а токи элементов складываются в соответствии с первым законом Кирхгофа.

Пусть параллельно соединены  $n$  нелинейных двухполюсников (рис. 2.28), ВАХ которых  $I_q(U)$  известны. Требуется получить результирующую ВАХ цепи.

Процедура получения результирующей ВАХ следующая. В рабочем диапазоне изменения напряжения от  $U_{min}$  до  $U_{max}$  задаются массивом значений напряжения с шагом, например,  $\Delta U$ . Затем с помощью известных ВАХ двухполюсников  $I_q(U)$  создаются массивы токов отдельных двухполюсников, соответствующие одним и тем же значениям напряжения  $U$ . Затем токи отдельных двухполюсников складываются при одних и тех же значениях напряжения:

$$I_3 = \sum_{q=1}^n I_q. \text{ Далее выполняется линейная интерполяция зависимости } I_3(U).$$

Описанная процедура иллюстрируется табл. 2.3 и рис. 2.29.

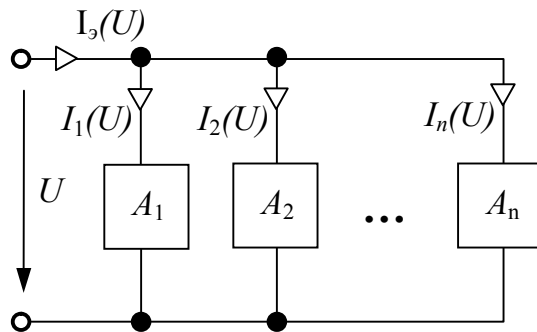


Рис. 2.28 – Параллельное соединение  $n$  нелинейных двухполюсников

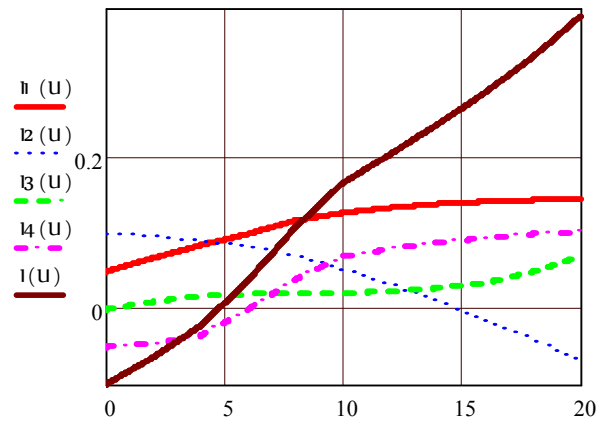


Рис. 2.29 – Суммирование ВАХ при параллельном соединении активных двухполюсников

Таблица 2.3 Алгоритм получения ВАХ параллельного соединения

$U$	$U_1$	$U_2=U_1+\Delta U$	...	$U_k=U_1+(k-1)\cdot\Delta U$
$I_1$	$I_{11}$	$I_{12}$	...	$I_{1k}$
$I_2$	$I_{21}$	$I_{22}$	...	$I_{2k}$
...	.....	.....	...	.....
$I_j$	$I_{j1}$	$I_{j2}$	...	$I_{jk}$
...	...	.....	...	.....
$I_n$	$I_{n1}$	$I_{n2}$	...	$I_{nk}$
$I_3$	$I_{31}$	$I_{32}$	...	$I_{3k}$

По описанной методике осуществляется замена нескольких последовательно соединённых двухполюсников (рис. 2.26) или параллельных

ветвей с нелинейными двухполюсниками (рис. 2.28) одной эквивалентной (рис. 2.30).

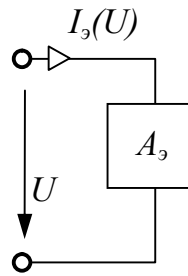


Рис. 2.30 – Эквивалентная ветвь с одним нелинейным элементом

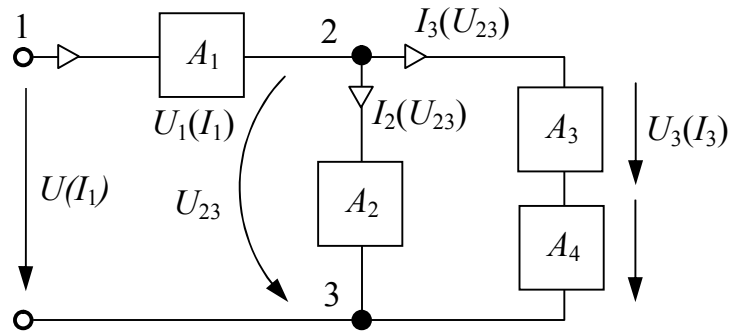


Рис. 2.31 – Смешанное соединение нелинейных двухполюсников

### 2.2.7 Смешанное соединение нелинейных двухполюсников

Пример цепи со смешанным соединением нелинейных двухполюсников приведен на рис. 2.31. Свёртывание цепи на основе эквивалентных преобразований, рассмотренных в подр. 2.2.5 и 2.2.6 ведётся в направлении от самой удалённой от источника ветви к источнику. Для последовательно соединённых двухполюсников  $A_3$  и  $A_4$  применяются их ВАХ в виде  $U_3(I_3)$  и  $U_4(I_3)$ . Они заменяются одним эквивалентным двухполюсником  $A_{34}$  с характеристикой  $U_{23}(I_3) = (U_3 + U_4)(I_3)$ , которая сразу трансформируется в характеристику  $I_3(U_{23})$ . Далее параллельно соединённые ветви с характеристиками  $I_2(U_{23})$  и  $I_3(U_{23})$  заменяются одной эквивалентной  $(I_2 + I_3)(U_{23}) = I_1(U_{23})$ , которая преобразуется в зависимость  $U_{23}(I_1)$ . В результате сложения характеристик  $U_1(I_1)$  и  $U_{23}(I_1)$  получаем ВАХ цепи  $U(I_1)$ , по которой находим значение тока  $I_1$  в цепи по заданному напряжению источника  $U$ . Двигаясь в обратном направлении и используя уже полученные ВАХ, находим остальные токи и напряжения цепи.

Определившись с режимом работы отдельного двухполюсника, можем определить токи и напряжения внутри него.

### 2.2.8 Решение локальных задач на основе эквивалентных преобразований

2.2.8.1 Распределение напряжения на последовательно соединённых резисторах



Пусть известно приложенное к участку цепи с последовательно соединёнными нелинейными резисторами (рис. 2.32) напряжение  $U$  и известны ВАХ резисторов. Требуется определить напряжения на отдельных резисторах.

Сначала ВАХ резисторов представляются в виде  $U_j(I)$ . Суммированием характеристик (подр. 2.2.5) получают ВАХ рассматриваемого участка цепи, которая в соответствии с методикой подр. 2.2.2 представляется в виде  $I(U)$ , и по заданному напряжению  $U$  находят ток участка  $I$ . По ВАХ резисторов находят искомые напряжения  $U_j$ .

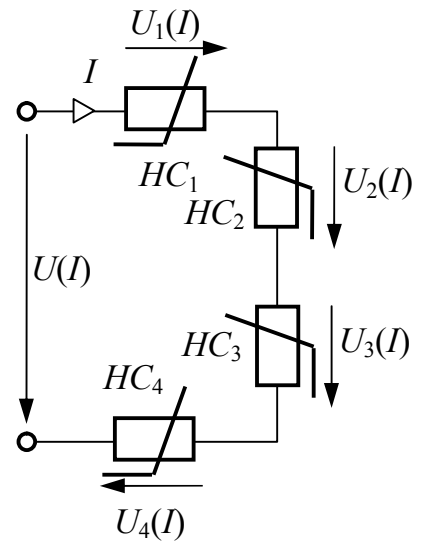


Рис. 2.32 – Пример последовательного соединения сопротивлений

### 2.2.8.2 Разброс тока в параллельные ветви

Пусть известен ток  $I$  на входе участка цепи в виде параллельно соединённых резисторов (рис. 2.33) с заданными ВАХ. Требуется определить ток каждого из резисторов.

Сначала ВАХ резисторов представляются в виде  $I_j(U)$ . Суммированием характеристик (подр. 2.2.6) получают ВАХ рассматриваемого участка цепи, которая в соответствии с методикой подр. 2.2.2 представляется в виде  $U(I)$ , и по заданному току  $I$  находят напряжение на участке  $U$ . По ВАХ резисторов находят искомые токи  $I_j$ .

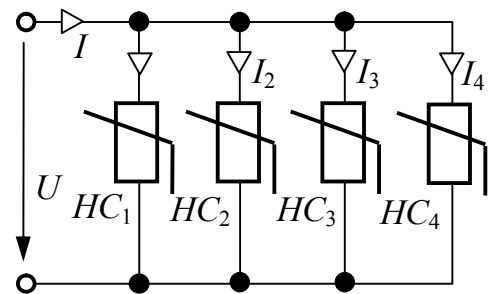


Рис. 2.33 – Пример параллельного соединения сопротивлений

2.2.8.3 Замена  $n$  последовательно соединённых сопротивлений  $n$  параллельно соединёнными сопротивлениями с сохранением мощности каждого из них

Пример MathCAD-программы такой замены выглядит следующим образом.

Заданные вольтамперные характеристики последовательно соединённых сопротивлений:  $ui_1(x)$ ,  $ui_2(x)$ ,  $ui_3(x) \dots ui_n(x)$ .

Входная ВАХ последовательной цепи:

$$u(x) = ui_1(x) + ui_2(x) + ui_3(x) + \dots + ui_n(x).$$

Работа в цикле:

$$q := 0..21 \quad I_q := -100 + q \cdot 10$$

$$U_q := u(I_q) \quad U_{1q} := ui_1(I_q) \quad U_{2q} := ui_2(I_q) \quad \dots \quad U_{nq} := ui_n(I_q)$$

$$P_q := u(I_q) \cdot I_q \quad P_{1q} := ui_1(I_q) \cdot I_q \quad P_{2q} := ui_2(I_q) \cdot I_q \quad \dots \quad P_{nq} := ui_n(I_q) \cdot I_q$$

$$I_{1q} := \frac{P_{1q}}{U_q} \quad I_{2q} := \frac{P_{2q}}{U_q} \quad \dots \quad I_{nq} := \frac{P_{nq}}{U_q}$$

$$i_1(x) := \text{linterp}(U, I_{1, x}) \quad i_2(x) := \text{linterp}(U, I_{2, x}) \quad \dots \quad i_n(x) := \text{linterp}(U, I_{n, x})$$

## 2.3 Совершенствование теории нелинейных трёхполосников

### 2.3.1 Исследуем зависимость $I_{31}(U_2)$ .

Процедура получения зависимости  $I_{31}(U_2)$  нелинейного трёхполосника, соединённого звездой, следующая. Подготавливаются ВАХ нелинейных сопротивлений в виде аналитических зависимостей после кусочно-линейной аппроксимации:  $U_1(I_1)$ ,  $U_2(I_2)$ ,  $U_3(I_3)$ ; задаются значения мощности  $P$  и узлового напряжения  $U_2$ ; относительно токов  $I_1$ ,  $I_2$ ,  $I_3$  решается система следующих нелинейных уравнений:

$$I_1 + I_2 + I_3 = 0, \quad U_1(I_1) \cdot I_1 + U_2(I_2) \cdot I_2 + U_3(I_3) \cdot I_3 = P, \quad U_2(I_2) = U_2.$$

Система указанных уравнений даёт два комплекса ответов  $(I_1', I_2', I_3')$  и  $(I_1'', I_2'', I_3'')$ . Для каждого из комплексов производятся следующие расчёты.

Используя значения статических сопротивлений, переходим к соединению треугольником:

$$\begin{aligned} r_1 &= U_1(I_1)/I_1, & r_2 &= U_2(I_2)/I_2, & r_3 &= U_3(I_3)/I_3, \\ U_{12} &= r_1 \cdot I_1 - U_2, & U_{23} &= U_2 - r_3 \cdot I_3, & U_{31} &= -(U_{12} + U_{23}), \\ r_{12} &= r_1 + r_2 + r_1 \cdot r_2 / r_3, & r_{23} &= r_2 + r_3 + r_2 \cdot r_3 / r_1, & r_{31} &= r_3 + r_1 + r_3 \cdot r_1 / r_2, \\ I_{12} &= U_{12} / r_{12}, & I_{23} &= U_{23} / r_{23}, & I_{31} &= U_{31} / r_{31}. \end{aligned}$$

Ввиду двух значений тока  $I_{31}$  получаются две зависимости  $I_{31}(U_2)$ , которые вместе образуют замкнутую кривую. В качестве примера на рис. 2.34,а приведены кривые для случая трёх одинаковых сопротивлений с симметричными характеристиками для двух значений мощности  $P$ . В отличие от линейных цепей здесь получается искажённый эллипс, так как сопротивления меняются от режима к режиму и не равны друг другу. Тем не менее, графики симметричны и относительно осей координат, и начала координат. На рис. 2.34,б приведены зависимости для случая разных сопротивлений, но с симметричными ВАХ. Возникающая фигура повернута относительно начала координат, однако обладает центральной симметрией. На рис. 2.34,в представлен случай с равными сопротивлениями, но с несимметричными ВАХ, а на рис. 2.34,г – разные сопротивления с несимметричными ВАХ.

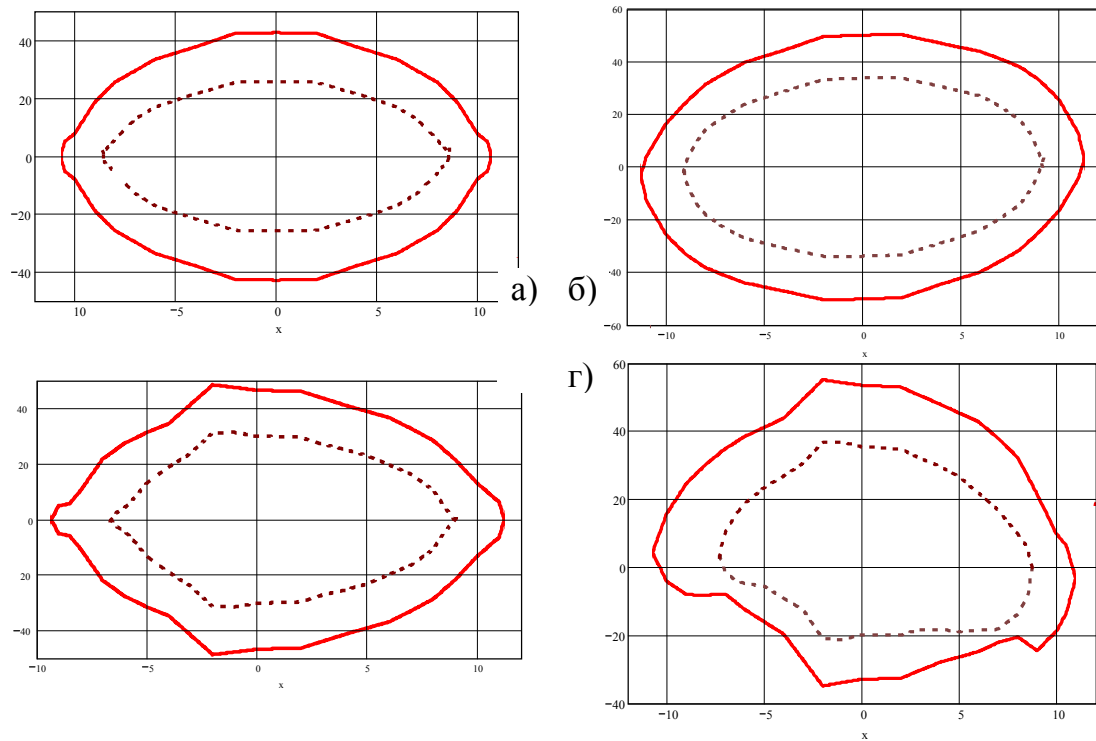


Рис. 2.34 – Примеры зависимостей  $I_{31}(U_2)$  нелинейного трёхполюсника, соединённого звездой: а) ВАХ сопротивлений одинаковы и симметричны, б) разные сопротивления с симметричными ВАХ, в) одинаковые сопротивления с несимметричными ВАХ, г) разные сопротивления с несимметричными ВАХ

Как было указано в разделе 2.1.1, семейство зависимостей  $I_{31}(U_2)$ , построенных для разных значений мощности  $P$ , полностью характеризует любой линейный пассивный трёхполюсник. Однако в случае нелинейного трёхполюсника это семейство зависимостей можно получить только при соединении сопротивлений трёхполюсника звездой. При соединении треугольником можно аналогичным образом получить семейство зависимостей  $U_2(I_{31})$ . Для произвольного нелинейного трёхполюсника зависимости  $I_{31}(U_2)$  или  $U_2(I_{31})$  не могут быть построены. В связи с этим следует рассмотреть другие возможные зависимости.

### 2.3.2 Исследуем зависимость $Id(Un)$ .

Процедура получения зависимости  $Id(Un)$  нелинейного трёхполюсника, соединённого звездой, следующая. Подготавливаются ВАХ нелинейных сопротивлений в виде аналитических зависимостей после кусочно-линейной аппроксимации:  $U_1(I_1)$ ,  $U_2(I_2)$ ,  $U_3(I_3)$ ; задаются значения мощности  $P$  и узлового

напряжения  $Un$ ; относительно токов  $I_1, I_2, I_3$  решается система следующих нелинейных уравнений:

$$I_1 + I_2 + I_3 = 0, \quad U_1(I_1) \cdot I_1 - Un \cdot I_2 + U_3(I_3) \cdot I_3 = P, \quad U_2(I_2) = -Un.$$

Система указанных уравнений даёт два комплекса ответов  $(I_1', I_2', I_3')$  и  $(I_1'', I_2'', I_3'')$ . Для каждого из комплексов производятся следующие расчёты.

Используя значения статических сопротивлений, переходим к соединению треугольником:

$$\begin{aligned} r_1 &= U_1(I_1)/I_1, & r_2 &= U_2(I_2)/I_2, & r_3 &= U_3(I_3)/I_3, \\ U_{12} &= r_1 \cdot I_1 + Un, & U_{23} &= -Un - r_3 \cdot I_3, & U_{31} &= -(U_{12} + U_{23}), \\ r_{12} &= r_1 + r_2 + r_1 \cdot r_2 / r_3, & r_{23} &= r_2 + r_3 + r_2 \cdot r_3 / r_1, & r_{31} &= r_3 + r_1 + r_3 \cdot r_1 / r_2, \\ I_{12} &= U_{12} / r_{12}, & I_{23} &= U_{23} / r_{23}, & I_{31} &= U_{31} / r_{31}, \\ Id &= I_{12} + I_{23} + I_{31}. \end{aligned}$$

Ввиду двух значений тока  $Id$  получаются две зависимости  $Id(Un)$ , которые вместе образуют замкнутую кривую. В качестве примера на рис. 2.35,а приведены кривые для случая трёх одинаковых сопротивлений с симметричными характеристиками для двух значений мощности  $P$ . На рис. 2.35,б приведены зависимости для случая разных сопротивлений, но с симметричными ВАХ. На рис. 2.35,в представлен случай с равными сопротивлениями, но с несимметричными ВАХ, а на рис. 2.35,г – разные сопротивления с несимметричными ВАХ.

Как было указано в разделе 2.1.1, семейство зависимостей  $Id(Un)$ , построенных для разных значений мощности  $P$ , полностью характеризует любой линейный пассивный трёхполюсник. Однако в случае нелинейного трёхполюсника это семейство зависимостей можно получить только при соединении сопротивлений трёхполюсника звездой. При соединении треугольником можно аналогичным образом получить семейство зависимостей  $Un(Id)$ . Для произвольного нелинейного трёхполюсника зависимости  $Id(Un)$  или  $Un(Id)$  не могут быть построены. В связи с этим следует рассмотреть другие возможные зависимости.

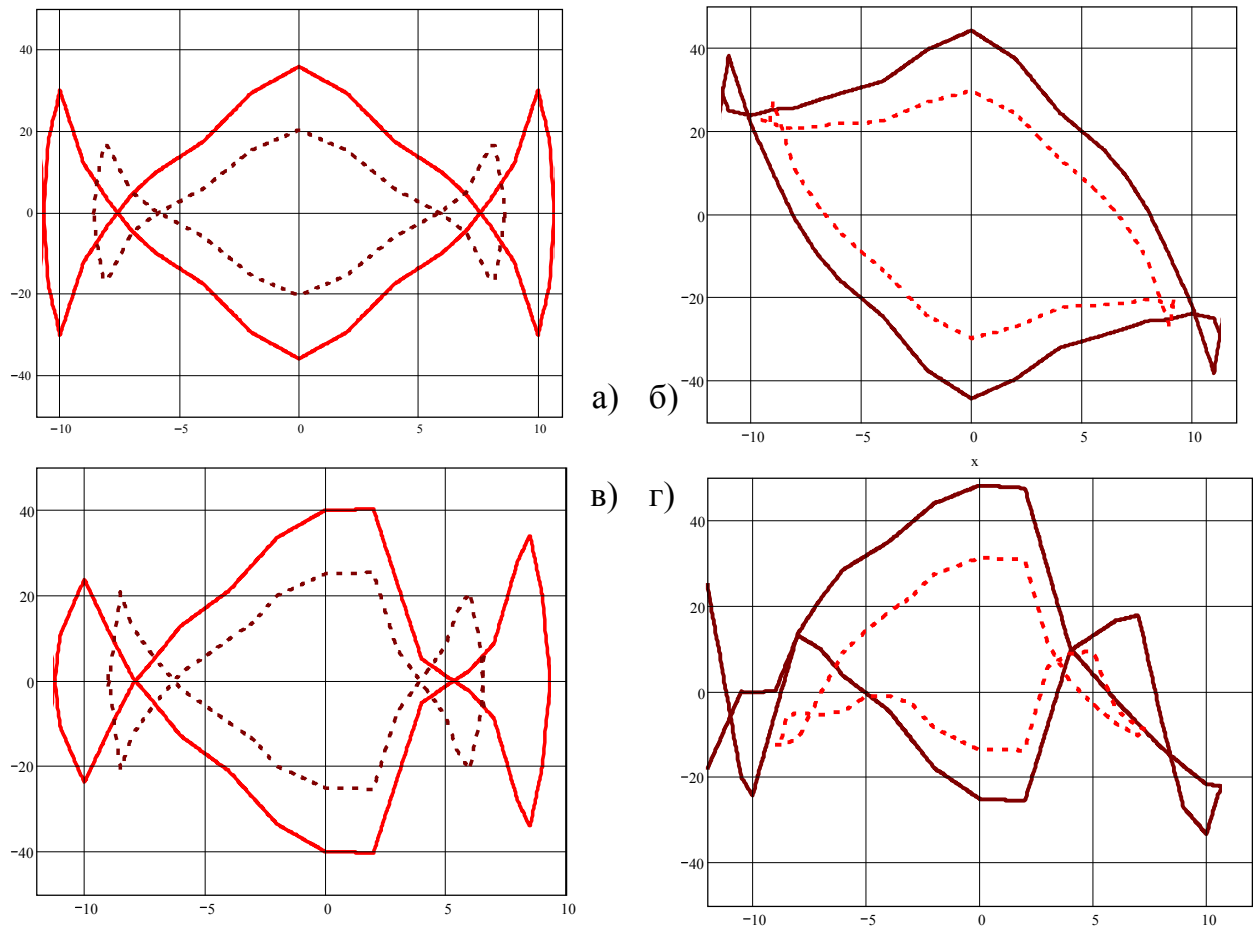


Рис. 2.35 – Примеры зависимостей  $I_d(U_n)$  нелинейного трёхполюсника, соединённого звездой: а) ВАХ сопротивлений одинаковы и симметричны, б) разные сопротивления с симметричными ВАХ, в) одинаковые сопротивления с несимметричными ВАХ, г) разные сопротивления с несимметричными ВАХ

### 2.3.3 Исследуем зависимость $U_{23}(U_{12})$ .

Получим зависимости  $U_{23}(U_{12})$  в случае нелинейного трёхполюсника. Сначала возьмём трёхполюсник соединённый звездой. Расчёт указанной зависимости выполняется следующим образом. Подготавливаются ВАХ нелинейных сопротивлений в виде аналитических зависимостей после кусочно-линейной аппроксимации  $U_1(I_1)$ ,  $U_2(I_2)$ ,  $U_3(I_3)$ ; задаются значения мощности  $P$  и напряжения  $U_{12}$ ; относительно токов  $I_1$ ,  $I_2$ ,  $I_3$  и напряжения  $U_{23}$  решается система следующих нелинейных уравнений:

$$\begin{cases} I_1 + I_2 + I_3 = 0, & U_1(I_1) - U_2(I_2) = U_{12}, & U_2(I_2) - U_3(I_3) = U_{23}, \\ P = U_{12} \cdot I_1 - U_{23} \cdot I_3. \end{cases}$$

Система указанных уравнений даёт два комплекса ответов  $(I_1', I_2', I_3', U_{23}')$  и  $(I_1'', I_2'', I_3'', U_{23}'')$ .

Ввиду двух значений напряжения  $U_{23}$  получаются две зависимости  $U_{23}(U_{12})$ , которые вместе образуют замкнутую кривую. Кривые для случая трёх одинаковых сопротивлений с симметричными характеристиками для двух значений мощности  $P$  приведены на рис. 2.36,а. В отличие от линейных цепей здесь получается искажённый эллипс, так как сопротивления меняются от режима к режиму и не равны друг другу. Тем не менее, графики симметричны и относительно начала координат, и осей эллипса. На рис. 2.36,б приведены зависимости для случая разных сопротивлений, но с симметричными ВАХ. Возникающая фигура обладает центральной симметрией. На рис. 2.36,в

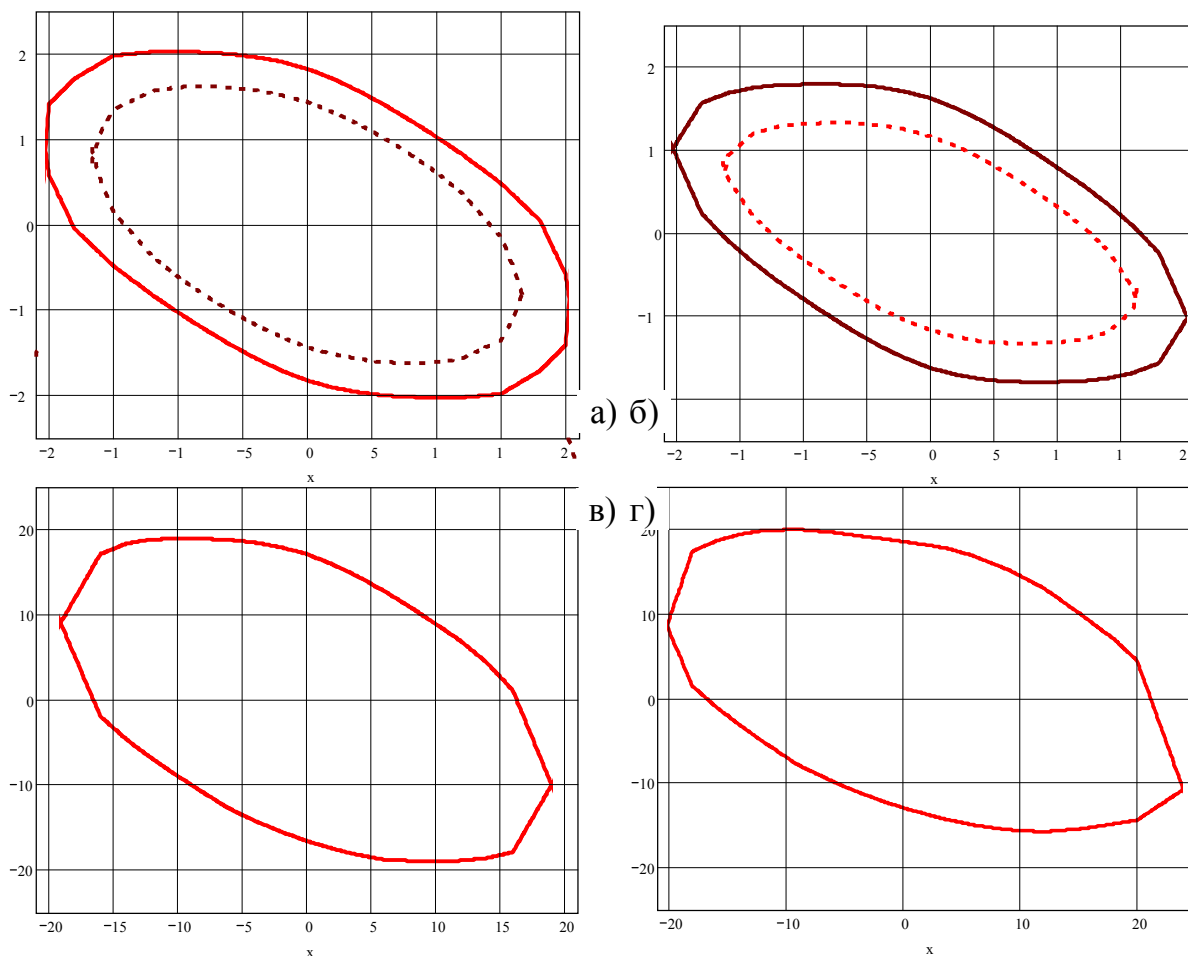


Рис. 2.36 – Примеры зависимостей  $U_{23}(U_{12})$  нелинейного трёхполюсника, соединённого звездой: а) ВАХ сопротивлений одинаковы и симметричны, б) разные сопротивления с симметричными ВАХ, в) одинаковые сопротивления с несимметричными ВАХ, г) разные сопротивления с несимметричными ВАХ

представлен случай с равными сопротивлениями, но с несимметричными ВАХ, а на рис. 2.36,г – разные сопротивления с несимметричными ВАХ.

Получим зависимости  $U_{23}(U_{12})$  в случае нелинейного трёхполюсника, соединённого треугольником. Расчёт указанной зависимости выполняется следующим образом. Подготавливаются ВАХ нелинейных сопротивлений в виде аналитических зависимостей после кусочно-линейной аппроксимации:  $U_{12}(I_{12})$ ,  $U_{23}(I_{23})$ ,  $U_{31}(I_{31})$ ; задаются значения мощности  $P$  и напряжения  $U_{12}$ ; относительно токов  $I_1$ ,  $I_3$ ,  $I_{12}$ ,  $I_{23}$ ,  $I_{31}$  и напряжения  $U_{23}$  решается система следующих нелинейных уравнений:

$$\begin{cases} U_{12}(I_{12}) = U_{12}, U_{23}(I_{23}) = U_{23}, & U_{31}(I_{31}) = -(U_{12} + U_{23}), \\ I_1 = I_{12} - I_{31}, & I_3 = I_{31} - I_{23}, & P = U_{12} \cdot I_1 - U_{23} \cdot I_3. \end{cases}$$

Кривые для случая трёх одинаковых сопротивлений с симметричными характеристиками приведены на рис. 2.37,а. Графики симметричны и относительно начала координат, и осей эллипса. На рис. 2.37,б приведены зависимости для случая разных сопротивлений, но с симметричными ВАХ. Возникающая фигура обладает центральной симметрией. На рис. 2.37,в представлен случай с равными сопротивлениями, но с несимметричными ВАХ, а на рис. 2.37,г – разные сопротивления с несимметричными ВАХ.

На рис. 2.38,а представлены зависимости в случае произвольного трёхполюсника с сопротивлениями с симметричными ВАХ, а на рис. 2.38,б – в случае несимметричного трёхполюсника.

Надо сказать, что семейство зависимостей  $U_{23}(U_{12})$ , не в полной мере характеризует состояние произвольного нелинейного трёхполюсника. Следует ещё указывать значение одного из токов, например,  $I_1$  в каждой точке кривых  $U_{23}(U_{12})$ . Это можно сделать, добавив к указанному семейству кривых ещё семейство  $I_1(U_{12})$  при тех же значениях мощности. При необходимости остальные токи можно вычислить по формулам:

$$I_3 = (U_{12} \cdot I_1 - P) / U_{23}, \quad I_2 = -(I_1 + I_3).$$



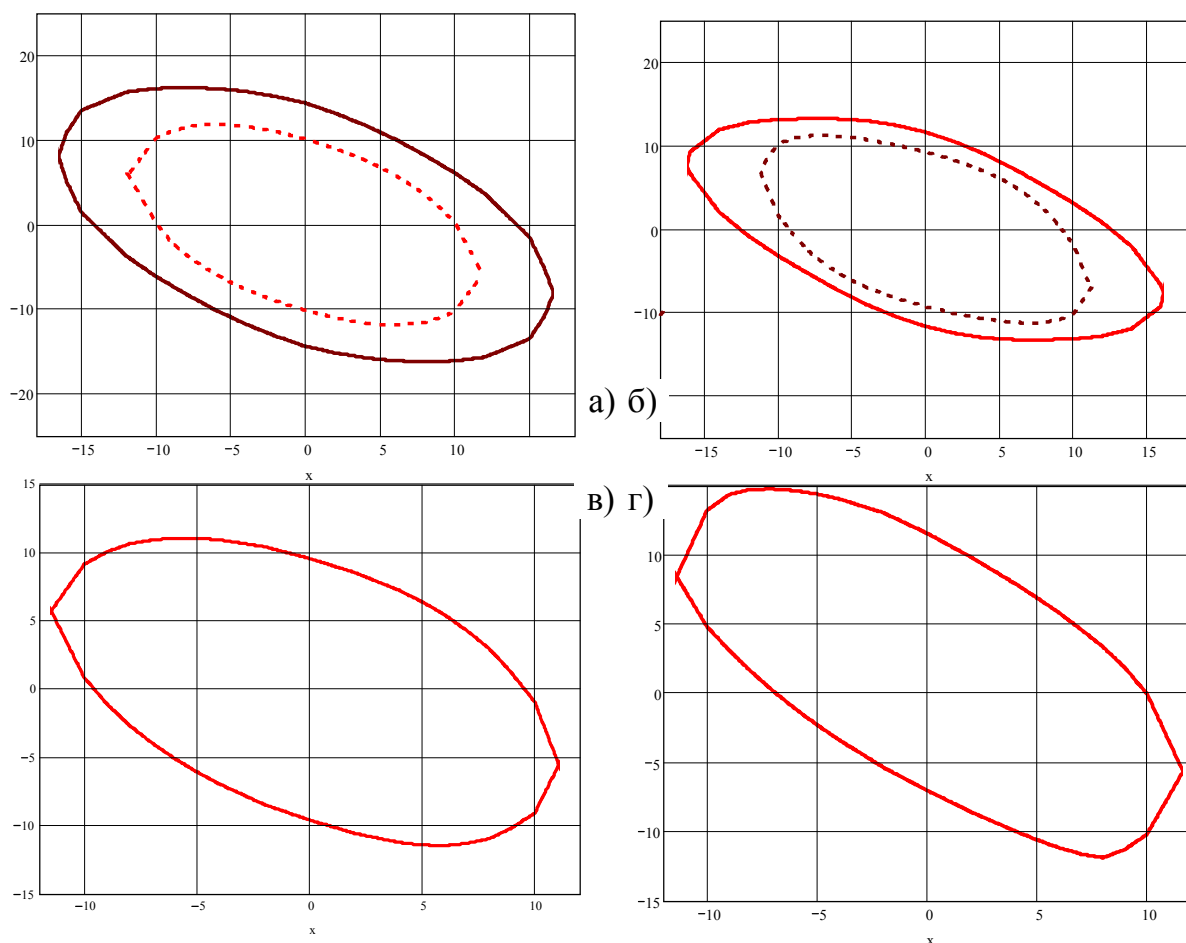


Рис. 2.37 – Примеры зависимостей  $U_{23}(U_{12})$  нелинейного трёхполосника, соединённого треугольником: а) ВАХ сопротивлений одинаковы и симметричны, б) разные сопротивления с симметричными ВАХ, в) одинаковые сопротивления с несимметричными ВАХ, г) разные сопротивления с несимметричными ВАХ

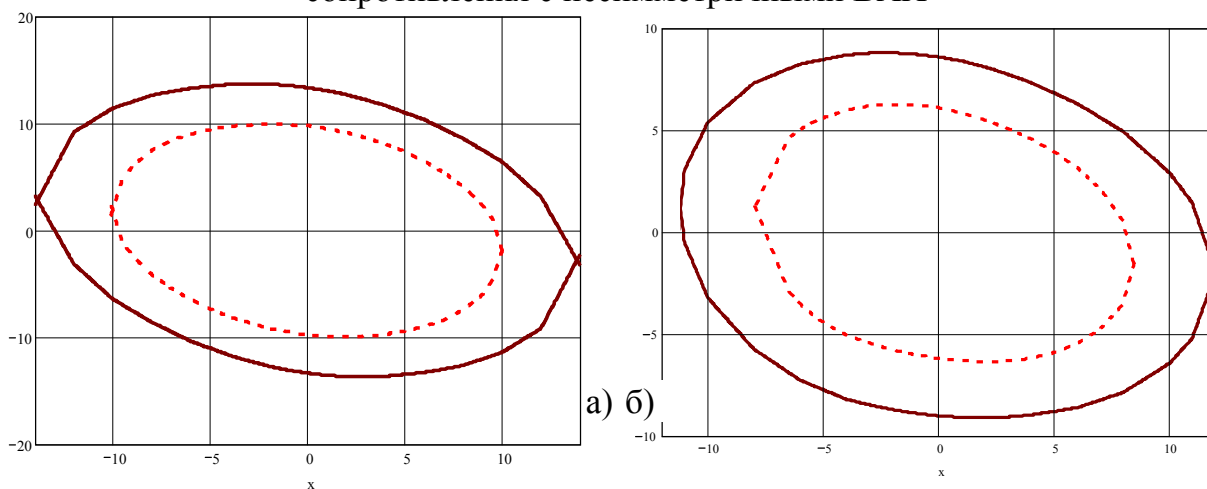


Рис. 2.38 – Примеры зависимостей  $U_{23}(U_{12})$  произвольного нелинейного трёхполосника: а) ВАХ сопротивлений симметричны, б) сопротивления с несимметричными ВАХ

Таким образом, совокупность двух семейств зависимостей  $U_{23}(U_{12})$  и  $I_1(U_{12})$ , полученных для значений мощности  $P$ , взятых с равным шагом  $\Delta P$ , полностью характеризует определённый трёхполюсник и является универсальным способом описания (задания) произвольного трёхполюсника.

#### 2.3.4 Область возможного использования геометрических характеристик трёхполюсников

Совокупность двух семейств зависимостей  $U_{23}(U_{12})$  и  $I_1(U_{12})$ , полученных для значений мощности  $P$ , взятых с равным шагом  $\Delta P$ , полностью характеризует определённый трёхполюсник, который может быть как пассивным, так и активным, как линейным, так и нелинейным. На основании этого можно сформулировать достаточный признак эквивалентности двух трёхполюсников: **если два семейства указанных зависимостей совпадают, то трёхполюсники являются эквивалентными.** В случае двух разных нелинейных трёхполюсников полного совпадения зависимостей во всём диапазоне изменения напряжения  $U_{12}$  быть не может. Однако совпадение или близкое расположение зависимостей может иметь место в отдельной части координатной плоскости  $U_{23}$ - $U_{12}$  или вдоль некоторой линии на этой координатной плоскости. Это означает, что при определённых условиях (в рамках отдельной части плоскости  $U_{23}$ - $U_{12}$  или вдоль некоторой линии на этой плоскости) можно выполнить эквивалентную (с расхождением не больше заданного) замену одного нелинейного трёхполюсника другим. Например, можно заменить произвольный трёхполюсник с неизвестным содержанием, характеристики которого получены экспериментальным путём, соответствующей звездой или треугольником нелинейных сопротивлений. Таким же образом можно подобрать (синтезировать) звезду или треугольник нелинейных сопротивлений с характеристиками близкими к заданным в определённом диапазоне изменения входных напряжений  $U_{12}$  и  $U_{23}$ .

Зачастую разветвлённую электрическую цепь можно разбить на две части, являющиеся активным линейным трёхполюсником и нелинейным пассивным трёхполюсником. Если наложить их зависимости друг на друга в одной системе

координат, то, получив координаты точек пересечения соответствующих графиков, можно графическим методом получить рабочий режим, то есть выполнить расчёт части токов и напряжений сложной цепи. Таким образом, геометрические характеристики трёхполюсников могут служить основой нового графического метода расчёта нелинейных цепей, содержащих трёхполюсники.

## 2.4 Совершенствование методов расчёта разветвлённых нелинейных цепей постоянного тока

### 2.4.1 Метод двух узлов

Цепь, содержащая два узла (рис. 2.39), рассчитывается методом двух узлов. Сначала для каждой ветви получают аналитические зависимости  $I_k(U)$  в функции одного и того же массива данных напряжения  $U$ . Результирующая

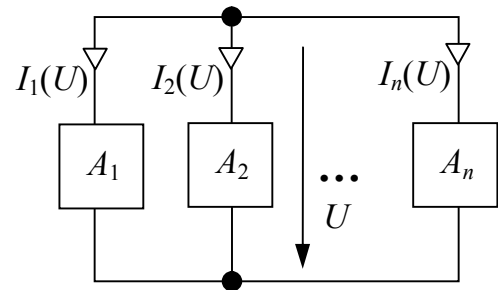


Рис. 2.39 – Нелинейная цепь с двумя узлами

зависимость  $I_3(U)$  получается суммированием массивов токов  $I_k$ . Поскольку в соответствии с первым законом Кирхгофа результирующий ток, равный сумме токов ветвей должен быть равен нулю, возникает уравнение  $I_3(U)=0$ , решением которого является значение узлового напряжения  $U$ . В системе MathCAD указанное уравнение решается с помощью встроенной функции Minerr. Из зависимостей  $I_k(U)$  для найденного значения напряжения  $U$  определяют токи всех ветвей.

### 2.4.2 Нелинейная цепь с одним нелинейным элементом. Применение метода эквивалентного генератора

Метод эквивалентного генератора применяется, как правило, при расчёте сложных цепей с одним нелинейным элементом. В этом случае линейную часть схемы на основе теоремы об активном двухполюснике можно представить в виде линейного активного двухполюсника  $A$  (рис. 2.40). ВАХ линейного активного двухполюсника описывается линейной формулой  $U(I) = E_0 - R_0 \cdot I$ , где  $E_0$  – ЭДС эквивалентного генератора, равная его напряжению холостого хода, а  $R_0$  – его внутреннее сопротивление.

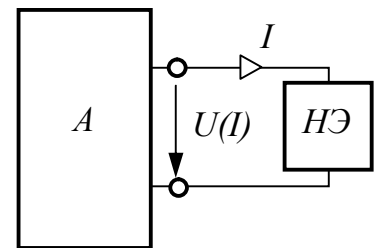


Рис. 2.40 – Цепь с одним нелинейным элементом

Нелинейный элемент характеризуется нелинейной ВАХ  $f(I)$ . В результате возникает нелинейное уравнение  $E_0 - R_0 \cdot I = f(I)$ , которое успешно решается в

системе MathCAD с использованием встроенной функции Minerr. Далее

нелинейный элемент заменяется линейной эквивалентной схемой замещения, соответствующей полученным значениям тока  $I$  и напряжения  $U$ , и выполняется расчёт остальных токов и напряжений цепи, теперь уже линейной.

Этот же подход можно использовать в случае, если в нелинейной цепи имеется только один элемент с ВАХ формы  $N$  или  $S$ . Часть нелинейной цепи, содержащая такой элемент, не подвергается преобразованиям типа сворачивания. В этом случае активный нелинейный двухполюсник (часть нелинейной цепи, не содержащая элементов с ВАХ формы  $N$  или  $S$ ) сворачивается до получения его нелинейной ВАХ  $U(I)$ , а выделенный нелинейный элемент представляется своей нелинейной ВАХ  $f(I)$ . Снова возникает нелинейное уравнение  $U(I) = f(I)$ , которое решается в системе MathCAD с использованием встроенной функции Minerr. Далее выделенный нелинейный элемент заменяется линейной эквивалентной схемой замещения, соответствующей полученным значениям тока  $I$  и напряжения  $U$ , и выполняется расчёт остальных токов и напряжений нелинейной цепи, но уже не содержащей элементов с ВАХ формы  $N$  или  $S$ .

#### 2.4.3 Цепь с двумя нелинейными элементами

Если в цепи имеются два произвольно расположенных в общем случае нелинейных активных двухполюсника  $A_1$  и  $A_2$  (рис. 2.41,а), то линейную часть

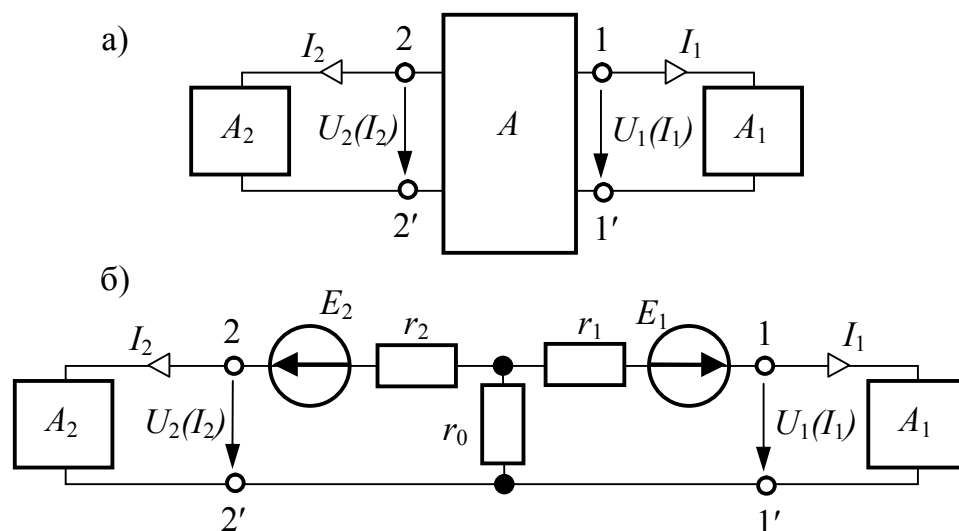


Рис. 2.41 – Исходная цепь с двумя нелинейными элементами (а) и цепь с  $T$ -образной эквивалентной схемой четырёхполюсника (б)

цепи, являющуюся активным четырёхполюсником, заменяют эквивалентной  $T$ -образной схемой (рис. 2.41,б), и полученная цепь далее рассчитывается методом двух узлов, рассмотренным выше.

После определения токов  $I_1$ ,  $I_2$  и напряжений  $U_1$ ,  $U_2$  выполняется расчёт внутренних токов и напряжений линейного активного четырёхполюсника  $A$ .

#### 2.4.4 Разветвлённые цепочные цепи

Рассмотренные принципы получения аналитических зависимостей между током и напряжением в эквивалентных схемах для последовательного и параллельного соединений положены в основу расчета разветвленных электрических цепей цепочного типа с источниками при произвольном количестве ветвей [13].

Разветвлённой цепью цепочного типа считается цепь, в которой ветви по отношению к двум крайним выводам или отдельному источнику соединены друг с другом последовательно и параллельно. В этом случае возможно использование метода преобразования (сворачивания) цепи. Сначала получают ВАХ ветвей, в которых элементы соединены последовательно, затем складываются ВАХ параллельных ветвей, снова отыскиваются последовательные соединения и так далее, пока не будет получена результирующая ВАХ цепи, то есть цепь будет свёрнута по отношению к одному рассматриваемому источнику. Зная напряжение (или ток) этого источника, по полученной результирующей ВАХ цепи можно найти его ток (или напряжение). Двигаясь по характеристикам участков цепи в обратном направлении, не производя дополнительных построений или расчётов, можно найти остальные токи и напряжения цепи.

На примере электрической цепи постоянного тока с резистивными  $НС$  (рис. 2.42) показан алгоритм расчета токов ветвей. Исходными данными для расчета токов схемы являются параметры активных элементов цепи (источников) и ВАХ нелинейных сопротивлений.

Для решения задачи расчета токов и напряжений в ветвях приведенной схемы необходимо сформировать результирующую ВАХ участка цепи  $U_{14}(I_1)$ , который подключен к источнику напряжения  $E_1$ .

На первом этапе решения этой задачи выполнена аппроксимация ВАХ  $HC$  и получены аналитические выражения, причем для элементов, которые образуют последовательное

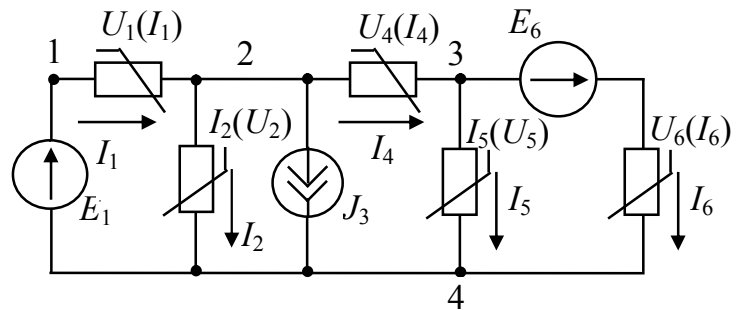


Рис. 2.42 Электрическая цепь постоянного тока с резистивными  $HC$

соединение в виде  $U(I)$ , а для элементов, которые образуют параллельное соединение в виде  $I(U)$ . Таким образом, в результате аппроксимации получены следующие аналитические выражения:  $U_1(I_1)$ ,  $I_2(U_2)$ ,  $U_4(I_4)$ ,  $I_5(U_5)$  и  $U_6(I_6)$ .

Дальнейший алгоритм получения результирующей (по отношению к источнику  $E_1$ ) ВАХ  $I_1(U_{14})$  имеет следующий вид.

1. Получено аналитическое выражение  $U_{34}(I_6) = U_6(I_6) - E_6$  (согласно второму закону Кирхгофа для последовательного соединения элементов ветви наиболее удаленной от источника). С помощью полученного выражения выполнено построение таблицы (для дискретных значений тока  $I_6$  рассчитаны значения  $U_{34}$ ), после обработки данных которой выполнена аппроксимация и получено аналитическое выражение для ВАХ  $I_6(U_{34})$ .

2. Для параллельного соединения 5-й и 6-й ветвей получено аналитическое выражение  $I_4(U_{34}) = I_5(U_5) + I_6(U_{34})$  (по первому закону Кирхгофа) и через построение массива координатных точек (таблицы дискретных величин) и последующей аппроксимации получено выражение для ВАХ  $U_{34}(I_4)$ .

3. Определены выражения для соединенных последовательно элементов  $U_{24}(I_4) = U_4(I_4) + U_{34}(I_4)$  и после обработки  $I_4(U_{24})$ .

4. Выполнен расчет выражения для параллельного соединения  $I_1(U_{24})=I_2(U_{24})+I_3+I_4(U_{24})$  и после преобразования  $U_{24}(I_1)$ .

5. Рассчитано выражение для последовательного соединения  $U_{14}(I_1)=U_1(I_1)+U_{24}(I_1)$  и после обработки получено аналитическое выражение для ВАХ эквивалентной схемы  $I_1(U_{14})$ .

Для окончательного расчета токов и напряжений рассматриваемой схемы используются сама результирующая ВАХ  $I_1(U_{14})$  и ВАХ отдельных участков цепи, полученные в результате ее формирования.

Алгоритм расчета токов и напряжений следующий.

1. Из аналитического выражения для ВАХ эквивалентной схемы  $I_1(U_{14})$  определяется величина тока  $I_1$  (поскольку  $U_{14} = E_1$ , то подстановка в  $I_1(U_{14})$  значения  $E_1$  дает  $I_1$ ).

2. По величине тока  $I_1$  из выражения  $U_{24}(I_1)$  определяется величина напряжения  $U_{24}$ .

3. По полученному напряжению  $U_{24}$  и известным выражениям  $I_2(U_2)=I_2(U_{24})$  и  $I_4(U_{24})$  получены  $I_2$  и  $I_4$ , соответственно.

4. Из выражения для ВАХ  $U_{34}(I_4)$  определено напряжение  $U_{34}$ .

5. По полученному напряжению  $U_{34}$  и известным выражениям  $I_5(U_5)=I_5(U_{34})$  и  $I_6(U_{34})$  получены  $I_5$  и  $I_6$ , соответственно.

#### 2.4.5 Итерационные методы расчёта [14]

Исходными данными для расчета являются схема цепи и ее параметры. Параметры нелинейных элементов в виде вольтамперных характеристик (ВАХ) задаются массивом координатных точек, по которым с помощью линейной интерполяции получают выражения вида  $U(I)$  и  $I(U)$ . Повышение точности достигается путём компьютеризации расчётов.

Разработанная программа использует метод пропорциональных величин [2]. Алгоритм расчёта указанным методом следующий. В самой удалённой от источника ЭДС ветви (исходной ветви) произвольно задаются некоторым током, например, 1 мА. Далее, продвигаясь к входным зажимам, находят токи в ветвях и напряжения на различных участках. В результате получают значение



ЭДС, необходимое для протекания в исходной ветви тока в  $1 \text{ мА}$ . Так как найденное (расчётное) значение ЭДС в общем случае не равно заданному, то ток в исходной ветви соответственно корректируется. Однако ввиду нелинейной зависимости между напряжением источника и током исходной ветви корректировку задаваемого тока приходится выполнять неоднократно, используя, таким образом, итерационный подход. Этот же подход используется и в случае наличия нескольких источников в цепи.

Блок-схема алгоритма расчёта представлена на рис. 2.43. Функциональное назначение блоков следующее: 1 – ввод данных; 2 – задание корректируемой входной величины; 3 – поэтапный расчёт токов и напряжений цепи по законам Кирхгофа и нахождение выходной величины; 4 – сравнение расчётного значения выходной величины с заданным; 5 – вывод результатов; 6 – останов; 7 – корректировка заданной величины; 8 и 9 – проверка условия (8 – точность ниже заданной, когда расхождение между расчётным и заданным значениями велико, 9 – достаточная точность).

Рассмотрим реализацию предложенной методики на примере рис. 2.44.

В случае цепи с одним источником (рис. 2.44 при  $E_4 = E_5 = 0$ ) задаваемым является значение тока удалённой ветви  $I_5$ . Для первой итерации значение тока может быть

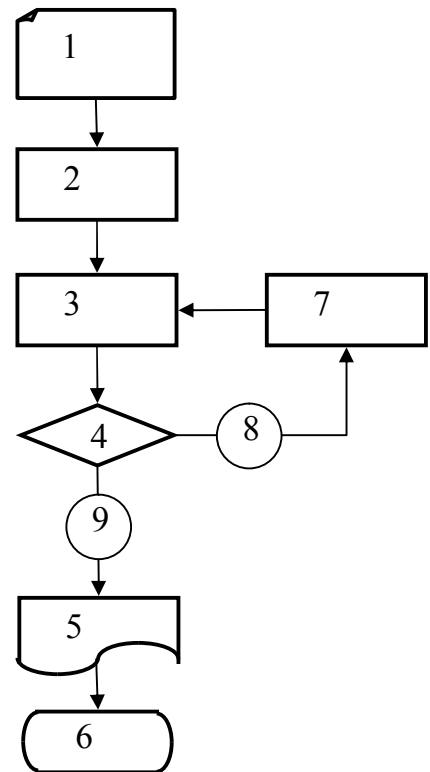


Рис. 2.43 – Блок схема алгоритма расчёта

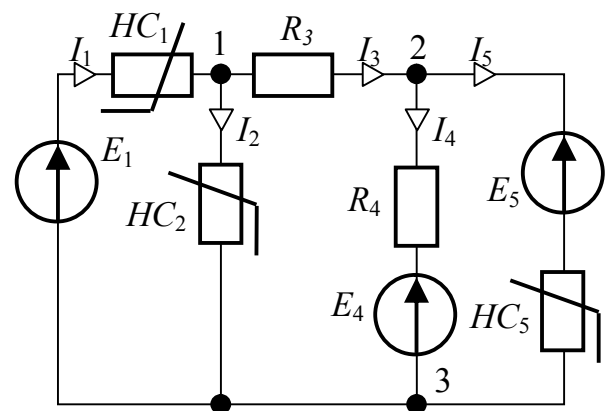


Рис. 2.44 – Цепочная схема постоянного тока с нелинейными сопротивлениями

взято любым, но не более допустимого для данного нелинейного сопротивления, например,  $I_5 = 1 \text{ мА}$ ; остальные токи и напряжения определяются по законам Кирхгофа с использованием аппроксимированных характеристик нелинейных сопротивлений  $U_1(I_1)$ ,  $I_2(U_2) = I_2(U_{13})$  и  $U_5(I_5)$  в следующем порядке:

$$\begin{aligned} 1) U_{23} &= U_5(I_5), & 2) I_4 &= U_{23}/R_4, & 3) I_3 &= I_4 + I_5, \\ 4) U_{13} &= U_{23} + R_3 \cdot I_3, & 5) I_2 &= I_2(U_{13}), & 6) I_1 &= I_2 + I_3, \\ 7) E_{1P} &= U_{13} + U_1(I_1); \end{aligned}$$

расчётное значение  $E_{1P}$  сравнивается с заданным  $E_1$ . В случае расхождения  $d$ , вычисляемого по формуле

$$d = \frac{E_1 - E_{1P}}{E_1},$$

больше заданной величины, например, 1%, расчёт повторяется при новом заданном значении тока  $I_5$ , которое вычисляется с учётом коррекционного коэффициента  $k$ :

$$I_5 = I_5 \cdot (1 + d \cdot k).$$

Для обеспечения сходимости коэффициент  $k$  должен быть меньше 1, например,  $k = 0,2$ . Большее значение коэффициента обеспечивает более быстрое схождение (меньшее число итераций), а меньшее значение позволяет получить более высокую точность. Ввиду высокого быстродействия компьютера и не слишком большого количества необходимых итераций (порядка 20-30) быстрое схождение не играет большой роли, и, как показывает практика, значение коэффициента  $k = 0,2$  является вполне удовлетворительным. Ввиду монотонности зависимости  $I_5(E_1)$  значение коэффициента  $k$  должно быть положительным.

Разработанная программа была проверена экспериментально при следующих числовых значениях:  $E_1 = 19,8 \text{ В}$ ,  $R_3 = 0,2 \text{ кОм}$ ,  $R_4 = 0,3 \text{ кОм}$ . Вольтамперные характеристики нелинейных сопротивлений (лампы накаливания), полученные экспериментально, приведены в табл. 2.4.

Таблица 2.4 – ВАХ нелинейных сопротивлений

$U, B$	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
$I_1, mA$	0	21	29,7	38	45	54	57,8	63	68	73	75
$I_2, mA$	0	7,5	11	14,1	16,8	19,3	24,5	23,7	25,6	27,5	29,2
$I_5, mA$	0	21	29	36	43	49	54	60	65	69	74

Результаты эксперимента и расчёта после 30 итераций при начальном значении тока  $I_5 = 1 mA$  сведены в табл. 2.5.

Таблица 2.5 – Сравнение результатов расчёта и эксперимента при одном источнике в цепи постоянного тока

	$I_1, mA$	$I_2, mA$	$I_3, mA$	$I_4, mA$	$I_5, mA$	$U_{12}, B$	$U_{23}, B$	$U_{13}, B$
Расчёт	51,85	18,57	33,28	9,10	24,22	6,66	2,73	9,39
Эксперимент	51,7	18,6	32,9	9,1	23,5	6,46	2,6	9,2
Расхождение	0,3%	0,2%	1,1%	0%	3%	3%	4,7%	2%

В целом, расхождение в результатах не превышает 3%. Наибольшая погрешность наблюдается при определении напряжения  $U_{23}$ .

Дополнительная проверка расчёта производилась составлением баланса мощностей ( $P_{ист} = P_{ном}$ ), который для данной схемы выглядит следующим образом:

$$P_{ист} = E_1 \cdot I_1 = 841,8 \text{ мВт},$$

$$P_{ном} = U_1(I_1) \cdot I_1 + U_{13} \cdot I_2 + R_3 \cdot I_3^2 + R_4 \cdot I_4^2 + U_{23} \cdot I_5 = 841,9 \text{ мВт}.$$

Из равенства в балансе мощностей источника и потребителя следует, что программа позволяет выполнять расчёты практически с любой заданной точностью. Погрешность метода определяется точностью задания вольтамперных характеристик нелинейных сопротивлений.

При расчёте цепи постоянного тока рис. 2.44 с несколькими источниками ( $E_4 \neq 0$  и  $E_5 \neq 0$ ) расчётные формулы принимают вид:

$$\begin{aligned} 1) U_{23} &= U_5(I_5) + E_5, & 2) I_4 &= (U_{23} - E_4)/R_4, & 3) I_3 &= I_4 + I_5, \\ 4) U_{13} &= U_{23} + R_3 \cdot I_3, & 5) I_2 &= I_2(U_{13}), & 6) I_1 &= I_2 + I_3, \\ 7) E_{1P} &= U_{13} + U_1(I_1). \end{aligned}$$

При этом зависимость  $I_5(E_1)$  может быть как с положительной динамикой (с ростом  $E_1$  ток  $I_5$  увеличивается), так и с отрицательной (с ростом  $E_1$  ток  $I_5$  убывает). Поэтому для схождения расчётов нужно взять коэффициент  $k$  либо с

положительным значением, либо с отрицательным. Это легко определить подбором. Если при первоначальном положительном значении коэффициента расчётное значение  $E_{1P}$  не стремится к заданному  $E_1$  даже при значительном числе итераций (несколько десятков), то следует взять отрицательное значение. Необходимый эффект гарантируется незамедлительно.

Результаты эксперимента и расчёта после 20 итераций при начальном значении тока  $I_5 = 2 \text{ мА}$  при наличии только двух источников  $E_1 = 19,6 \text{ В}$ ,  $E_4 = 15 \text{ В}$  и тех же параметрах сопротивлений, что и в первом случае, сведены в табл. 2.6. Здесь же представлены результаты расчёта цепи с тремя источниками  $E_1 = 19,6 \text{ В}$ ,  $E_4 = 15 \text{ В}$ ,  $E_5 = 10 \text{ В}$ , при начальном значении тока  $I_5 = 2 \text{ мА}$  после 36 итераций.

Таблица 2.6 – Сравнение результатов расчёта и эксперимента при двух источниках в цепи постоянного тока и результаты расчёта цепи с тремя источниками

	$I_1, \text{ мА}$	$I_2, \text{ мА}$	$I_3, \text{ мА}$	$I_4, \text{ мА}$	$I_5, \text{ мА}$	$U_{12}, \text{ В}$	$U_{23}, \text{ В}$	$U_{13}, \text{ В}$
Расчёт	42,52	21,82	20,69	-22,82	43,55	4,14	8,15	12,29
Эксперимент	42,4	22,2	19,8	-22,4	42,2	-	-	-
Расхождение	0,3%	1,7%	4,3%	1,8%	3,0%	-	-	-
Три источника	34,91	23,91	11,01	-10,0	21,04	2,20	12,00	14,20

Балансы мощностей следующие.

С двумя источниками:

$$P_{ист} = E_1 \cdot I_1 - E_4 \cdot I_4 = 491 \text{ мВт},$$

$$P_{номр} = U_1(I_1) \cdot I_1 + U_{13} \cdot I_2 + R_3 \cdot I_3^2 + R_4 \cdot I_4^2 + U_{23} \cdot I_5 = 491 \text{ мВт}.$$

С тремя источниками:

$$P_{ист} = E_1 \cdot I_1 - E_4 \cdot I_4 - E_5 \cdot I_5 = 55,6 \text{ мВт},$$

$$P_{номр} = U_1(I_1) \cdot I_1 + U_{13} \cdot I_2 + R_3 \cdot I_3^2 + R_4 \cdot I_4^2 + U_{23} \cdot I_5 = 55,7 \text{ мВт}.$$

#### 2.4.6 Метод непосредственного применения законов Кирхгофа

Для применения указанного метода предварительно следует определить рабочий диапазон нелинейных сопротивлений и подготовить массивы данных по их вольтамперным характеристикам. Используя линейную интерполяцию

системы MathCAD, готовим ВАХ нелинейных сопротивлений в аналитической форме  $U_q(I_q)$ .

Далее записываем систему уравнений по законам Кирхгофа. Уравнения по первому закону Кирхгофа имеют вид:  $\sum I_q = 0$ . Уравнения по второму закону Кирхгофа записываются в виде:  $\sum U_q(I_q) = \sum E_s$ . Полученная система нелинейных уравнений решается с использованием встроенной в MathCAD функции Minerr.

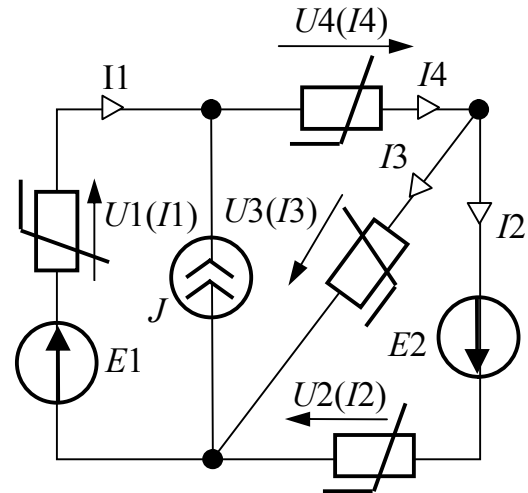


Рис. 2.45 – Расчёт нелинейной цепи постоянного тока МЗК

Рассмотрим реализацию метода на примере схемы рис. 2.45. Система нелинейных уравнений по законам Кирхгофа имеет следующий вид:

$$\begin{cases} I1 - I4 + J = 0, \\ I2 + I3 - I4 = 0, \\ U1(I1) + U3(I3) + U4(I4) = E1, \\ U2(I2) - U3(I3) = E2. \end{cases}$$

Программа в системе MathCAD выглядит следующим образом.

$$E1:=10 \quad E2:=5 \quad J:=40 \quad I1:=0 \quad I2:=0 \quad I3:=0 \quad I4:=0$$

*Given*

$$I1 - I4 + J = 0 \quad I2 + I3 - I4 = 0$$

$$U1(I1) + U3(I3) + U4(I4) = E1 \quad U2(I2) - U3(I3) = E2$$

$$I := \text{Minerr}(I1, I2, I3, I4)$$

$$I = \begin{pmatrix} 11.139 \\ 34.759 \\ 16.38 \\ 51.139 \end{pmatrix}$$

Данный метод решения следует отнести к численным итерационным методам, так как система нелинейных уравнений программой MathCAD решается методом последовательных приближений.

### 2.4.7 Применение метода контурных токов

В общем случае метод контурных токов неприменим при расчёте нелинейных цепей ввиду того, что он основан на принципе наложения (токи в ветвях определяются через контурные токи по принципу наложения). Однако, если удастся выбрать дерево графа и, соответственно, контурные токи таким образом, чтобы нелинейные сопротивления оказались только в ветвях связи, то есть принцип наложения будет применяться только для линейных ветвей дерева графа, то метод контурных токов становится применимым. Рассмотрим его применение на примере схемы рис. 2.46.

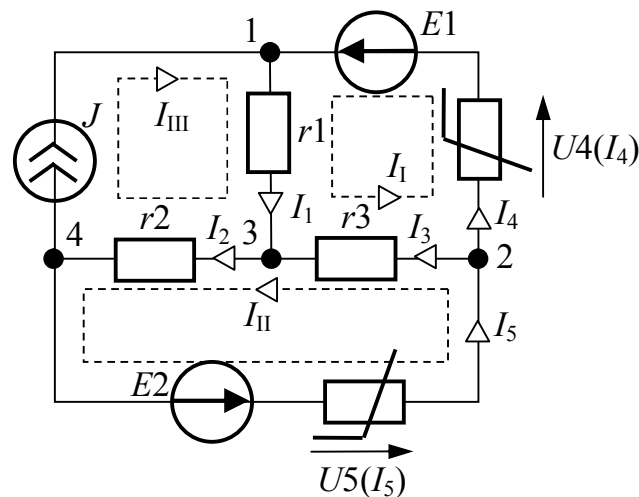


Рис. 2.46 – Расчёт нелинейной цепи постоянного тока МКТ

Система уравнений для контурных токов выглядит следующим образом:

$$\begin{cases} I_{III} = J, \\ I_I(r_1 + r_3) + U_4(I_1) - I_{II}r_3 + Jr_1 = E_1, \\ -I_Ir_3 + I_{II}(r_2 + r_3) + Jr_2 = E_2. \end{cases}$$

Токи в ветвях записываются через контурные токи:

$$I_1 = I_I + I_{III}, \quad I_2 = I_{II} + I_{III}, \quad I_3 = I_{II} - I_I, \quad I_4 = I_I, \quad I_5 = I_{II}.$$

Далее представлена MathCAD-программа расчёта токов МКТ с проверкой результатов составлением баланса мощностей (размерности величин в программе следующие: напряжения – В, токи – мА, сопротивления – кОм, мощности – мВт). В программе использованы ранее полученные после линейной интерполяции ВАХ нелинейных сопротивлений  $U_4(I_4)$  и  $U_5(I_5)$ .

$$E1:=40 \quad E2:=15 \quad J:=40 \quad r1:=0.2 \quad r2:=0.4 \quad r3:=0.5$$

$$I_1:=0 \quad I_{II}:=0$$

$$\text{Given } I_1 \cdot (r1 + r3) + U4(I_1) - I_{II} \cdot r3 + J \cdot r1 = E1$$

$$- I_1 \cdot r3 + I_{II} \cdot (r2 + r3) + J \cdot r2 = E2$$

$$Ik:=\text{Minerr}(I_1, I_{II})$$

$$I_1:=Ik_0 \quad I_{II}:=Ik_1 \quad I_1 = 51.28 \quad I_{II} = 20.218$$

$$I_1 = I_1 + J \quad I_2 = I_{II} + J \quad I_3 = I_{II} - I_1 \quad I_4 = I_1 \quad I_5 = I_{II}$$

Power balance

$$Pi:= E1 \cdot I_4 + E2 \cdot I_5 + J \cdot (r1 \cdot I_1 + r2 \cdot I_2) \quad Pi = 4.048 \times 10^3$$

$$Pp:= U4(I_4) \cdot I_4 + U5(I_5) \cdot I_5 + r1 \cdot I_1^2 + r2 \cdot I_2^2 + r3 \cdot I_3^2 \quad Pp = 4.048 \times 10^3$$

#### 2.4.8 Применение метода узловых потенциалов

Возможность и особенности применения метода узловых потенциалов рассмотрим на примере схемы рис. 2.46.

Потенциал одного из узлов принимается равным нулю. Пусть  $\varphi_4=0$ . Для нахождения значений потенциалов остальных узлов составляются уравнения по первому закону Кирхгофа. Система уравнений по первому закону Кирхгофа для узлов 1-3 имеет следующий вид:

$$\begin{cases} I_1 - I_4 - J = 0, \\ I_4 - I_3 - I_5 = 0, \\ -I_1 + I_2 + I_3 = 0. \end{cases}$$

Токи линейных сопротивлений записываются через потенциалы в соответствии с законом Ома:

$$I_1 = r1^{-1} \cdot (\varphi_1 - \varphi_3), \quad I_2 = r2^{-1} \cdot (\varphi_3 - \varphi_4), \quad I_3 = r3^{-1} \cdot (\varphi_2 - \varphi_3).$$

Токи нелинейных сопротивлений представляются в функции напряжений на них:  $I_4(U4)$ ,  $I_5(U5)$ , где

$$U4 = E1 + \varphi_2 - \varphi_1, \quad U5 = E2 + \varphi_4 - \varphi_2.$$

Система уравнений, таким образом, принимает вид:

$$\begin{cases} r1^{-1} \cdot \varphi_1 - r1^{-1} \cdot \varphi_3 - I_4(U4) = J, \\ I_4(U4) - r3^{-1} \cdot \varphi_3 + r3^{-1} \cdot \varphi_2 - I_5(U5) = 0, \\ (r1^{-1} + r2^{-1} + r3^{-1}) \cdot \varphi_3 - r1^{-1} \cdot \varphi_1 - r3^{-1} \cdot \varphi_2 = 0, \\ U4 = E1 + \varphi_2 - \varphi_1, \\ U5 = E2 + \varphi_4 - \varphi_2. \end{cases}$$

Как видим, общее число уравнений определяется как число узлов минус 1 плюс число нелинейных сопротивлений. Полученная нелинейная система уравнений относительно потенциалов  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$  и напряжений  $U4, U5$  может быть решена с помощью встроенной в MathCAD функции Minerr. По результатам решения системы уравнений вычисляются искомые токи ветвей.



## 2.5 Выводы

1. При работе с нелинейными двухполюсниками с помощью системы MathCAD возможны следующие эквивалентные преобразования:
  - взаимные преобразования зависимостей  $U(I)$  и  $I(U)$ ;
  - представление произвольного нелинейного активного двухполюсника эквивалентной схемой с источников ЭДС или с источником тока, причём ВАХ нелинейных сопротивлений этих разных схем не будут одинаковыми;
  - замена любого количества двухполюсников, соединённых последовательно или параллельно, одним эквивалентным;
  - решение некоторых локальных задач.
2. Для наглядности представления характеристик трёхполюсников, они могут быть геометрически интерпретированы в нескольких системах координат:  $I_{31}(U_2)$ ,  $I_d(U_n)$ ,  $U_{23}(U_{12})$ . Однако универсальным, приемлемым как для линейных, так и нелинейных трёхполюсников, в которых элементы соединены произвольным образом и имеют ВАХ произвольной формы, является семейство зависимостей  $U_{23}(U_{12})$ .
3. Сформулирован достаточный признак эквивалентности двух произвольных трёхполюсников, основанный на использовании семейства зависимостей  $U_{23}(U_{12})$ .
4. Предложены возможные пути практического применения рассмотренной совокупности зависимостей  $U_{23}(U_{12})$  и  $I_1(U_{12})$ , которые используются для характеристики отдельного произвольного трёхполюсника.
5. С помощью системы MathCAD возможно совершенствование всех методов расчёта разветвлённых нелинейных цепей постоянного тока.

## ВЫВОДЫ

В результате выполнения пяти этапов НИР НЗ-13 выполнено следующее.

1. Обнаружены недостатки в теории линейных и нелинейных как пассивных, так и активных многополюсников постоянного тока, сформулированы актуальные задачи при анализе нелинейных цепей переменного тока.

2. Установлено, что наиболее универсальной и дающей приемлемую точность можно считать методику линейной интерполяции, встроенную в математическом редакторе системы MathCAD.

3. В системе MathCAD разработаны программы, позволяющие следующие эквивалентные преобразования при работе с нелинейными двухполюсниками

- взаимные преобразования зависимостей  $U(I)$  и  $I(U)$ ;
- представление произвольного нелинейного активного двухполюсника эквивалентной схемой с источников ЭДС или с источником тока, причём ВАХ нелинейных сопротивлений этих разных схем не будут одинаковыми;
- замена любого количества двухполюсников, соединённых последовательно или параллельно, одним эквивалентным;
- решение некоторых локальных задач.

4. Показано, что универсальным, приемлемым как для линейных, так и нелинейных трёхполюсников, в которых элементы соединены произвольным образом и имеют ВАХ произвольной формы, является семейство зависимостей  $U_{23}(U_{12})$ . Предложены возможные пути практического применения рассмотренной совокупности зависимостей  $U_{23}(U_{12})$  и  $I_1(U_{12})$ , которые используются для характеристики отдельного произвольного трёхполюсника.

5. С помощью системы MathCAD выполнено совершенствование основных методов расчёта разветвлённых нелинейных цепей постоянного тока.

## ПЕРЕЧЕНЬ ИСТОЧНИКОВ

1. М.П. Рибалко, В.О. Есауленко, В.І. Костенко. Теоретичні основи електротехніки: лінійні електричні кола: Підручник. – Донецьк: Новий світ, 2003. – 513с.
2. Теоретические основы электротехники. Электрические цепи / Л.А. Бессонов. – 10-е изд. – М.: Гардарики, 2002. – 638 с.
3. Теоретичні основи електротехніки: Підручник: У 3т. / В.С.Бойко, В.В.Бойко, Ю.В.Видолоб та ін.: За аг. ред.. І.М.Чиженка, В.С.Бойка. – К.: ІВЦ “Видавництво «Політехніка»”, 2004. – Т.1: Усталені режими лінійних електричних кіл із зосередженими параметрами. – 272 с.: іл.
4. Теоретичні основи електротехніки: Підручник: У 3т. / В.С.Бойко, В.В.Бойко, Ю.В.Видолоб та ін.: За аг. ред.. І.М.Чиженка, В.С.Бойка. – К.: НТУУ «КПІ», 2008. – Т.2: Перехідні процеси у лінійних електричних колах із зосередженими параметрами. Нелінійні та магнітні кола. – 224 с.: іл.
5. Нелінійні електричні та магнітні кола в усталених і перехідних режимах: Навч. Посібник / М.П.Рибалко, В.О.Есауленко. – К.: ІСДО, 1994. – 196с.
6. Филиппов Е. Нелинейная электротехника. Пер. с нем. Под ред. А.Б.Тимофеева. Изд. 2-е, перераб. и доп. М., «Энергия», 1976.
7. Белецкий А.Ф., Дмитриков В.Ф., Лыпарь Ю.И. Анализ нелинейных резистивных электрических цепей: Учебн. Пособие для студентов специальностей 2305, 2306, 2307/ ЛЭИС. – Л., 1990.
8. Кушнир В.Ф., Ферсман Б.А. Теория нелинейных электрических цепей. – М.: Связь, 1974. – 384 с.
9. Корощенко А.В., Хохлова А.В. Анализ способов аналитического описания ВАХ // Вісник кафедри „Електротехніка” за підсумками наукової діяльності студентів. – Донецьк, ДонНТУ, 2012. С. 134-135.  
<http://ea.donntu.org/handle/123456789/28609>
10. Хохлова А.В. Геометрия характеристик трёхполюсников // Студенческая научная работа на Всеукраинский конкурс, Секция «Загальні

питання та елементи електротехнічних комплексів та систем», раздел «Електротехніка та електромеханіка», Днепродзержинск, 2013. <http://elm-dstu-edu.org.ua/old/docs/zbirnik2013/proceedings2013.pdf>.

11. Корощенко А.В., Хохлова А.В. Геометрия характеристик линейных активных трёхполюсников // Вісник кафедри „Електротехніка” за підсумками наукової діяльності студентів. – Донецьк, ДонНТУ, 2013. С. 145-146. <http://ea.donntu.org/handle/123456789/28610>

12. Федоров М.М., Корощенко А.В., Михайлов В.Е. Эквивалентные схемы замещения активных трёхполюсников // Взрывозащищённое электрооборудование сб.научн.тр. УкрНИИВЭ. – Донецк: ООО «АИР», 2011. – 302с. С. 55-62. <http://ea.donntu.org/handle/123456789/9095>.

13. Федоров М.М., Михайлов В.Е., Корощенко А.В. Методы расчета и анализа разветвленных цепей цепочного типа с нелинейными резистивными элементами // Електромеханічні і енергозберігаючі системи. Щоквартальний науково-виробничий журнал. – Кременчук: КНУ, 2011. – Вип. 1/2011(13). – С. 39-43. <http://ea.donntu.org/handle/123456789/9139>.

14. Корощенко А.В., Хохлова А.В. Компьютеризация расчётов нелинейных цепочных схем // Вісник кафедри „Електротехніка” за підсумками наукової діяльності студентів. – Донецьк, ДонНТУ, 2012. – 175с. С. 136-137. <http://ea.donntu.org/handle/123456789/28608>

15. Федоров М.М., Корощенко А.В. Эквивалентные схемы замещения нелинейных активных трёхполюсников // Взрывозащищённое электрооборудование: сб.научн.тр. УкрНИИВЭ. – Донецк: ООО «АИР», 2012. – 207с. С. 68-74.