УДК 517.988

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ОДНОГО КЛАССА НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ С ПРИМЕНЕНИЕМ НЕЧЕТКОЙ ЛОГИКИ

А.С. Миненко

Донецкий национальный технический университет

Строится трехмерная математическая модель кристаллизации металла с учетом конвективного теплообмена. При управлении этим процессом используется нечеткая логика. Методом Ритца строится приближенные решения, сходящиеся к точному решению в W_2^1 *и* C.

1. Рассмотрим область $\Omega = \{(x_1, x_2, x_3 : r^2 < x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < R^2)\}$ и через Γ^- и Γ^+ обозначим следующие сферы:

$$\Gamma^- = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = r^2\}, \Gamma^+ = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = R^2\}.$$

Пусть Γ_0 – гладкая связная поверхность без самопересечений, лежащая внутри Ω, которая разбивает ее на две подобласти Ω^+ и Ω^-, т.е. $\Omega = \Omega^+ \bigcup \Omega^-$, причем сфера Γ^- лежит внутри ограниченной области, границей которой является Γ_0. Рассмотрим краевую задачу со свободной границей Γ_0. Требуется определить тройку $(u^\pm(x), \Gamma_0)$ по следующим условиям:

$$\begin{aligned} &\nabla^2 u^\pm(x) = 0, x \in \Omega^\pm; u^\pm(x)\Big|_{\Gamma^\pm} = B^\pm(x); \\ &u^\pm(x) = 1, \left|\nabla u^-(x)\right| - \left|\nabla u^+(x)\right| = 0, x \in \Gamma_0. \end{aligned} \tag{1}$$

При этом, $B^\pm(x) \in C^{3+\alpha}(\Gamma^\pm), u^\pm(x) \in C^{3+\alpha}(\overline{\Omega^\pm})$, а Γ_0 принадлежит классу C^∞[1].

Затем введем в рассмотрение функцию $u(x)$, заданную следующим образом $u = u^-(x)$ при $x \in \overline{\Omega^-}$ и $u = u^+(x)$ при $x \in \overline{\Omega^+}$. Тогда функцію $u(x)$ можно найти из условия минимума функционала $I(u, \Gamma_0) = \iint\limits_{\Omega} \left|\nabla u\right|^2 dx_1 dx_2 dx_3$ на соответствующем множестве R допустимых функций [2]. Это следует из формулы первой вариации интегрального функционала с неизвестной областью интегрирования [2].

Далее, удобно представить функционал Iв сферических координатах:

$$I(u,\Gamma_0)=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_r^R\left(u_\rho^2+\frac{1}{\rho^2}u_\theta^2+\frac{1}{\rho^2\sin^2\theta}u_\varphi^2\right)\rho^2\sin\theta d\varphi d\theta d\rho. \qquad (2)$$

Лемма 1. *Пусть тройка ($u^{\pm}(x),\Gamma_0$) является классическим решением задачи (1). Тогда эта тройка будет стационарной для функционала (2) на множестве R. Обратно, каждая стационарная тройка ($u^{\pm}(x),\Gamma_0$) функционала (2) на множестве R, где Γ_0 – достаточно гладкая связная поверхность, является решением задачи (1).*

Сформулированная задача (1) получается из задачи, изученной в [1] в случае $\vec{V}=0$, т.е. в случае бесконечно большой вязкости, Re = 0. Поэтому в дальнейшем под решением задачи (1) при Re = 0 будем понимать функции $\vec{V}(x)=0, u^+(x)$ и $u^-(x)$, заданные в $\Omega^{\pm}$. Из условий (1) следует, что Γ_0 – не что иное, как линия уровня функции $u(x)$, т.е:

$$\Gamma_0=\{x\in\Omega: u(x)=1\}.$$

Если предположить выполнение условия:

$$\pm(B^{\pm}(x)-1)\geq\varepsilon_0>0, x\in\Gamma^{\pm},$$

где ε_0 – некоторая постоянная, тогда поверхность Γ_0 лежит внутри области Ω и представляет собой поверхность класса $C^{4+\alpha}$, не имеющую самопересечений и располагающую относительно Γ^+ и Γ^-аналогично поверхности Γ_t (свободная поверхность), изученной в [1]. Следовательно, рассматривая функцию $u(x)$в одной из областей $\Omega^{\pm}$ и принимая во внимание лемму о нормальной производной, находим, что: $\frac{\partial u}{\partial n}=|\nabla u|\geq\varepsilon>0,\ x\in\Gamma_0,$

где n – нормаль кΓ_0, направленная в сторону Ω_0^+, а ε – некоторая постоянная. Отсюда, применяя теорему о неявной функции, следует, что Γ_0 принадлежит классу C^{∞}, так как этому классу в некоторой окрестности Γ_0 принадлежит гармоническая функция $u(x)$.

2. Минимум функционала (2) на множестве R будем искать при помощи сумм:

$$u_n=B^++\frac{R^2-\rho^2}{R^2-r^2}(B^--B^+)+(R^2-\rho^2)(\rho^2-r^2)\sum_{k=0}^{n}C_k\rho^k y_k(\varphi,\theta),$$

где $y_k(\varphi,\theta)-$сферические функции. Неизвестные коэффициенты C_k определяют при помощи метода Ритца. Тогда поверхность $\Gamma_0 : \rho = \rho_0(\varphi, \theta)$ определяется из уравнения $u_n(\varphi, \theta, \rho_0(\varphi, \theta)) = 1$. При этом необходимо учесть, что $|\nabla u(x)| \geq \varepsilon_0 > 0$ в $\overline{\Omega}$, где $\varepsilon_0 -$ некоторая постоянная [2].

Лемма 2. *При малых t справедливо представление*

$$\Gamma_t : \rho(\varphi, \theta, t) = \rho_0(\varphi, \theta) - \mathrm{Re} \frac{u_1^{\pm}(\varphi, \theta, t)}{|\nabla A^{\pm}(\varphi, \theta)|} + 0(\mathrm{Re}), (\varphi, \theta) \in \Gamma_0. \quad (3)$$

Здесь Re– число Рейнольдса, а $u_1^{\pm}(\varphi, \theta, t) -$ первое приближение исходной задачи, изученной в [1].

В частности, для нулевого приближения $u_0(\varphi, \theta)$ из уравнения

$$u_o = B^+ + \frac{R^2 - \rho^2}{R^2 - r^2}(B^- - B^+) + (\rho^2 - r^2)(R^2 - \rho^2)C_0 = 1$$

легко найти поверхность $\rho_0(\varphi, \theta)$.

Рассмотрим величину $\varepsilon_n = I(u_n, \Gamma_o) - I(u, \Gamma_0)$, где $u -$точное решение задачи (1). Тогда можно установить, что $\varepsilon_n \to 0$ при $n \to \infty$, если $C_k -$ коэффициенты Ритца. Используя затем результаты Канторовича Л.В. по минимизации квадратичных функционалов аналогично тому, как это сделано в [1], можно доказать следующее утверждение.

Теорема. *Последовательность приближений Ритца* u_n *сходится к решению задачи (1) и по норме в* W_2^1 *и* C, *причем* $\varepsilon_n = \mathrm{O}\left(\omega^{(3)}(u, \frac{1}{n}) \Big/ n^2\right)$, *и если* $\lim\limits_{n \to \infty} \omega^{(3)}(u, \frac{1}{n}) n^{-1} (\ln n)^{1+\varepsilon} = 0$, *то*

$$\|u - u_n\|_{C(\bar{\Omega})} \leq C_1 \omega^{(3)}(u, \frac{1}{n}) \cdot n^{-1} + C_2 \sum_{S=m}^{\infty} \omega^{(3)}(u, \frac{1}{2^s}) \cdot 2^{-s},$$

где C_1 *и* $C_2 -$ *некоторые постоянные;* $\omega^{(3)}(u, \frac{1}{n}) -$ *максимальный модуль непрерывности производных третьего порядка функции* $u(x)$ *и* $2^{m-1} \leq m < 2^m$.

Замечание. В случае двух геометрических переменных имеют место оценки:

$$\varepsilon_n = \mathrm{O}(\frac{1}{n^{2(2+\alpha)}}), \|u_n - u\|_{C(\bar{\Omega})} \leq C_1 \sqrt{\varepsilon_n \ln \frac{n}{\varepsilon_n}} + C_2 \sqrt{\varepsilon_n}, \quad (4)$$

В работе [1] изучены k-е приближения $(\vec{V}, u_k^{\pm}, \rho_k)$ исходной задачи, являющиеся функциями класса $H^{2+\alpha,(2+\alpha)/2}(\overline{\Omega^{\pm}})$, построены системы уравнений, решениями которых они являются. Формулы (3), (4) позволяют исследовать Γ_t в зависимости от Re.

3. Пусть T^*- температура, которую должна достичь поверхность $\partial\Omega$. Эта температура достигается за счет воздействия тепловых потоков мощности w_1, w_2, w_3, причем мощность одного из них w_3 равномерно распределена в центре $\partial\Omega$, а два других w_1 и w_2 сконцентрированы по краям $\partial\Omega$ [3]. Далее будет предложен метод нечеткого управления в данном классе задач, который имеет место в спецметаллургии [4].

Пусть $X_1, X_2, ..., X_n -$ факторы, влияющие на процессе кристаллизации, а $Y_1, Y_2, ..., Y_n -$ условия, при которых происходит появление нового слитка. Тогда нечеткое управление в нашей модели можно представить в виде функционального отображения $X = \{X_1, X_2, ..., X_n\} \to Y = \{Y_1, Y_2, ..., Y_n\}$.

Поверхность $\Gamma_0 : \rho = \rho_0(\varphi, \theta)$ можно найти из условия $u_0(\varphi, \theta, \rho_0(\varphi, \theta)) = 0$. Тогда для поверхности Γ_t можно воспользоваться уравнением [2]: $\Gamma_t = \rho(\varphi, \theta, t) = \rho_0(\varphi, \theta) - \mathrm{Re}\dfrac{u_1^{\pm}(\varphi, \theta, t)}{\left|\nabla A^{\pm}(\varphi, \theta)\right|} + o(\mathrm{Re})$.

Численная реализация задачи (1) была проведена при следующих значениях параметров: $t = 200$, $R = 6$, $r = 0{,}8$, $-\dfrac{\pi}{2} \le \theta \le \dfrac{\pi}{3}$, $-\dfrac{\pi}{2} \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2}$, $B^+ = 3\left[\cos^2\theta + \cos^2\varphi\right]$, $B = -0{,}35\left[\cos^2\theta + \cos^2\varphi\right] - 0{,}1$. Свободная поверхность Γ_t расположена между сферами радиусов R и r.

При численной реализации нечеткого управления использовались следующие значения параметров:

$$2500 MBm/м^2 \le W \le 5000 MBm/м^2, 600 мм \le L \le 6000 мм.$$

Численный расчет, позволяющий построить нечеткое управление, был осуществлен с помощью стандартного алгоритма Мамдани, а результаты получены в ходе эксперимента на объектах управления ЭШП [3].

Выводы

Построена новая математическая модель нелинейной проблемы, описывающая кристаллизацию металла. Предложен новый алгоритм построения поверхности кристаллизации. Предлагается вариант управления этим процессом при завершении выращивания слитка при кристаллизации основанный на нечеткой логике.

Список литературы

1. Шевченко А.И., Миненко А.С. Задача Стефана при наличии конвекции//Доп. НАН України. – 2012. – №1. – С.25-29.

2. Миненко А.С. Вариационные задачи со свободной границей. – Киев: Наук. думка, 2005. – 341 с.

3. Патон Б.Е. Избранные труды. – Киев: Институт электросварки им. Е.О. Патона НАН Украины, 2008. – 893 с.

4. Шевченко А.И., Миненко А.С. Методы исследования нелинейных математических моделей. – Киев: Национальная академия наук Украины, ИПИИ, 2012 – 130 с.