

УДК 531.38

**КОМПЬЮТЕРНЫЙ АНАЛИЗ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ДВУХ
РАЗНОРОДНЫХ ГРАВИТИРУЮЩИХ ТЕЛ**

А.И. Андрюхин, С.Н. Судаков, Е.Т. Новиков

Кафедра ПМиИ ДонНТУ

Получены уравнения движения для задачи двух тел, одно из которых жидкий эллипсоид переменной вязкости, совершающий однородное вихревое движение, а другое – сферически симметричное твердое тело. Для решения уравнений использован численный метод Рунге-Кутты. В качестве примеров приведены расчеты движения системы с массово-геометрическими параметрами системы Земля-Луна и системы Юпитер-Солнце.

Динамике эллипсоидальных масс идеальной несжимаемой жидкости посвящена обширная литература [1, 2, 4 - 11]. В работе рассмотрена задача о движении двух тел, одно из которых представляет собой жидкий эллипсоид, а второе – сферически симметричное твердое тело (ССТТ). Частицы жидкости притягиваются друг к другу и к ССТТ по закону Ньютона. Жидкость считается несжимаемой и обладающей переменной вязкостью, допускающей ее однородное вихревое движение [7,8].

Системы координат, Обозначим через $O\xi_1\xi_2\xi_3$ неподвижную систему координат, начало которой совпадает с общим центром масс рассматриваемой механической системы. Через $O_1\eta_1\eta_2\eta_3$ обозначим подвижные прямоугольные оси, начало которых O_1 совпадает с центром масс жидкого эллипсоида, а оси параллельны соответствующим осям системы $O\xi_1\xi_2\xi_3$. Через $O_1x_1x_2x_3$ обозначим систему координат, оси которой являются главными осями жидкого эллипсоида.

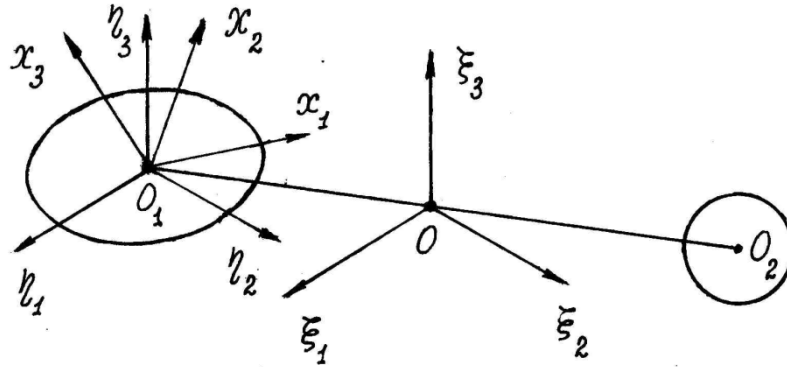


Рис. 1: Используемые системы координат

Координаты, скорости и ускорения центра масс жидкости.

Положение точки O_1 определим сферическими координатами r_1 , φ_1 , θ_1 , где θ_1 – угол между плоскостью $O\xi_1\xi_2$ и радиусом-вектором OO_1 ; φ_1 – угол между $O\xi_1$ и проекцией вектора OO_1 на плоскость $O\xi_1\xi_2$. Тогда координаты точки O_1 в осях $O\xi_1\xi_2\xi_3$ выразятся формулами

$$\xi_1 = r_1 \cos \varphi_1 \cos \theta_1, \quad \xi_2 = r_1 \sin \varphi_1 \cos \theta_1, \quad \xi_3 = r_1 \sin \theta_1. \quad (1)$$

Дифференцируя формулы (1) по времени t , находим проекции скорости центра масс жидкости (точки O_1) на оси $O\xi_1\xi_2\xi_3$

$$\begin{aligned} u_1 &= \dot{r}_1 \cos \varphi_1 \cos \theta_1 - \dot{\varphi}_1 r_1 \sin \varphi_1 \cos \theta_1 - \dot{\theta}_1 r_1 \cos \varphi_1 \sin \theta_1, \\ u_2 &= \dot{r}_1 \sin \varphi_1 \cos \theta_1 + \dot{\varphi}_1 r_1 \cos \varphi_1 \cos \theta_1 - \dot{\theta}_1 r_1 \sin \varphi_1 \sin \theta_1, \\ u_3 &= \dot{r}_1 \sin \theta_1 + \dot{\theta}_1 r_1 \cos \theta_1. \end{aligned} \quad (2)$$

Дифференцируя равенства (2) по t , находим проекции ускорения точки O_1 на оси $O\xi_1\xi_2\xi_3$

$$\begin{aligned} w_1 &= \ddot{r}_1 \cos \varphi_1 \cos \theta_1 - r_1 \ddot{\varphi}_1 \sin \varphi_1 \cos \theta_1 - r_1 \ddot{\theta}_1 \cos \varphi_1 \sin \theta_1 - \\ &- r_1 (\dot{\varphi}_1^2 + \dot{\theta}_1^2) \cos \varphi_1 \cos \theta_1 + 2r_1 \dot{\varphi}_1 \dot{\theta}_1 \sin \varphi_1 \sin \theta_1 - \\ &- 2\dot{r}_1 \dot{\varphi}_1 \sin \varphi_1 \cos \theta_1 - 2\dot{r}_1 \dot{\theta}_1 \cos \varphi_1 \sin \theta_1, \\ w_2 &= \ddot{r}_1 \sin \varphi_1 \cos \theta_1 + r_1 \ddot{\varphi}_1 \cos \varphi_1 \cos \theta_1 - r_1 \ddot{\theta}_1 \sin \varphi_1 \sin \theta_1 - \\ &- r_1 (\dot{\varphi}_1^2 + \dot{\theta}_1^2) \sin \varphi_1 \cos \theta_1 - 2r_1 \dot{\varphi}_1 \dot{\theta}_1 \cos \varphi_1 \sin \theta_1 + \\ &+ 2\dot{r}_1 \dot{\varphi}_1 \cos \varphi_1 \cos \theta_1 - 2\dot{r}_1 \dot{\theta}_1 \sin \varphi_1 \sin \theta_1, \\ w_3 &= \ddot{r}_1 \sin \theta_1 + r_1 \ddot{\theta}_1 \cos \theta_1 - r_1 \dot{\theta}_1^2 \sin \theta_1 + 2\dot{r}_1 \dot{\theta}_1 \cos \theta_1. \end{aligned} \quad (3)$$

Положение осей $O_1x_1x_2x_3$ относительно $O_1\eta_1\eta_2\eta_3$ определим углами Эйлера φ, ψ, θ . Матрица перехода $A=(a_{ij})$ от осей $O_1\eta_1\eta_2\eta_3$ к осям $O_1x_1x_2x_3$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} \cos\psi \cos\varphi - \sin\psi \cos\theta \sin\varphi & -\cos\psi \sin\varphi - \sin\psi \cos\theta \cos\varphi & \sin\psi \sin\theta \\ \sin\psi \cos\varphi + \cos\psi \cos\theta \sin\varphi & -\sin\psi \sin\varphi + \cos\psi \cos\theta \cos\varphi & -\cos\psi \sin\theta \\ \sin\theta \sin\varphi & \sin\theta \cos\varphi & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Используя матрицу перехода A , находим проекции ускорения точки O_1 на оси $O_1x_1x_2x_3$

$$w_{x_i} = \sum_{j=1}^3 \dot{a}_{ij} w_j, \quad i = 1, 2, 3. \quad (4)$$

Координаты центра масс ССТТ. Центр масс ССТТ обозначим O_2 .

Предполагая, что внешние силы на систему не действуют и центр масс системы неподвижен, получаем соотношение

$$m_1 r_1 = m_2 r_2, \quad (5)$$

где m_1 – масса жидкого эллипсоида, m_2 – масса ССТТ,

$r_i = |\overline{OO_i}|$, $i = 1, 2, 3$. При движении, точки O , O_1 , O_2 будут лежать на одной прямой. Используя (5), находим координаты точки O_2 в осях $O_1\eta_1\eta_2\eta_3$:

$$\begin{aligned} \eta_{21} &= -m^{-1} r_1 \cos\varphi_1 \cos\theta_1, \\ \eta_{22} &= -m^{-1} r_1 \sin\varphi_1 \cos\theta_1, \\ \eta_{23} &= -m^{-1} r_1 \sin\theta_1, \end{aligned} \quad (6)$$

где $m = \frac{m_2}{m_1 + m_2}$. Тогда в осях $O_1x_1x_2x_3$ точка O_2 будет иметь

координаты

$$x_{2i} = \sum_{j=1}^3 a_{ij} \eta_{2j}, \quad i = 1, 2, 3, \quad (7)$$

Гравитационные силы, действующие на жидкость со стороны ССТТ. Проекция на оси $O_1x_1x_2x_3$ силы, действующей на единичный объем жидкости со стороны ССТТ, определяются формулами

$$f_i = G\rho m_2 \frac{\tilde{x}_{2i} - \tilde{x}_i}{r^2 [(\tilde{x}_{21} - \tilde{x}_1)^2 + (\tilde{x}_{22} - \tilde{x}_1)^2 + (\tilde{x}_{23} - \tilde{x}_1)^2]^{3/2}}, \quad i = 1, 2, 3.$$

где G – гравитационная постоянная, ρ – плотность жидкости, $r^2 = x_{21}^2 + x_{22}^2 + x_{23}^2$, $\tilde{x}_{2i} = \tilde{x}_{2i}/r$, $\tilde{x}_i = x_i/r$, x_1, x_2, x_3 – координаты рассматриваемой частицы жидкости в осях $O_1x_1x_2x_3$.

Линеаризация. В дальнейшем будем рассматривать только те случаи, когда расстояние r между точками O_1 и O_2 настолько велико, что можно провести линеаризацию величин f_i по \tilde{x}_i , $i = 1, 2, 3$. Такая линеаризация необходима для существования однородного вихревого

движения жидкости и сохранения ее эллипсоидальной формы. После линеаризации будем иметь

$$f_i = \frac{G\rho m_2}{r^2} \left(\frac{x_{2i}}{r} + \left(\frac{3x_{2i}^2}{r^2} + 1 \right) \frac{x_i}{r} + \frac{3x_{2i}x_{22}x_2}{r^3} + \frac{3x_{2i}x_{23}x_3}{r^3} \right) \quad (123),$$

где символ циклической перестановки индексов (123) не применяется к величине m_2 и к первому индексу величин x_{21}, x_{22}, x_{23} .

Уравнения гидродинамики. Движение жидкости переменной вязкости описывается уравнениями [3]

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu(\mathbf{x}, \mathbf{c}) \Delta \mathbf{v} - \mathbf{w} - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x} - \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}) - 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} - \nabla \Phi + \frac{1}{\rho} \mathbf{f}, \quad (8)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0,$$

где $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ – скорость движения жидкости относительно осей $O_1x_1x_2x_3$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ – координатный вектор, ρ – плотность жидкости, p – давление, $\boldsymbol{\omega}$ – угловая скорость осей $O_1x_1x_2x_3$, $\mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3)$ – полудлины главных осей жидкого эллипсоида, $\mathbf{w} = (w_{x_1}, w_{x_2}, w_{x_3})$ – абсолютное ускорение точки O_1 , $\mathbf{f} = (f_1, f_2, f_3)$.

Кинематическая вязкость $\nu(x, c)$ определяется выражением

$$\nu = \nu_0 \left(1 - \frac{x_1^2}{c_1^2} - \frac{x_2^2}{c_2^2} - \frac{x_3^2}{c_3^2} \right),$$

где $\nu_0 = \text{const}$. Граница жидкости в осях $O_1x_1x_2x_3$ задается уравнением

$$\frac{x_1^2}{c_1^2} + \frac{x_2^2}{c_2^2} + \frac{x_3^2}{c_3^2} = 1$$

Следовательно, на границе жидкости $\nu = 0$.

Компоненты тензора скоростей деформаций жидкости σ имеют вид

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial v_j} + \frac{\partial v_j}{\partial v_i} \right), \quad i, j = 1, 2, 3.$$

Потенциал Φ гравитационных сил, порождаемых жидкостью, вне внутренних точек описывается формулой [2]

$$\Phi = \pi \rho G (\alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2^2 + \alpha_3 x_3^2 - \chi_0),$$

где

$$\alpha_i = c_1 c_2 c_3 \int_0^\infty \frac{d\lambda}{(c_i^2 + \lambda) D}, \quad i = 1, 2, 3. \quad \chi_0 = c_1 c_2 c_3 \int_0^\infty \frac{d\lambda}{D},$$

$$D = [(c_1^2 + \lambda)(c_2^2 + \lambda)(c_3^2 + \lambda)]^{1/2}.$$

Уравнения движения. В случае однородного вихревого движения компоненты скорости жидкости v_1, v_2, v_3 и давление p ищем в виде

$$v_i = \frac{\dot{c}_i}{c_i} x_i - \frac{c_i}{c_2} \omega_3^* x_2 + \frac{c_i}{c_3} \omega_2^* x_3 \quad (123), \quad p = -p_0(t) \left(\frac{x_1^2}{c_1^2} + \frac{x_2^2}{c_2^2} + \frac{x_3^2}{c_3^2} - 1 \right), \quad (9)$$

где $\omega_1^*, \omega_2^*, \omega_3^*$ и $p_0(t)$ – неизвестные функции времени t .

Подставляя (9) в уравнения движения жидкости (8), получаем

$$k_{i0} + k_{i1}x_1 + k_{i2}x_2 + k_{i3}x_3 = 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad (10)$$

где

$$k_{i0} = w_{x_i} - Gm_2 \frac{x_{2i}}{r^3}, \quad i = 1, 2, 3,$$

$$k_{11} = \frac{\ddot{c}_1}{c_1} - \omega_3^{*2} - \omega_2^{*2} - \frac{2p_0}{\rho c_1^2} + 4v_0 \frac{\dot{c}_1}{c_1^3} - \omega_2^2 - \omega_3^2 - 2 \frac{c_3}{c_1} \omega_2^* \omega_2 - 2 \frac{c_2}{c_1} \omega_3^* \omega_3 +$$

$$+ 2\pi\rho G\alpha_1 - \frac{Gm_2}{r^5} (3x_{21}^2 - r^2) \quad (123),$$

$$k_{12} = -\frac{c_1}{c_2} \dot{\omega}_3^* - \frac{2\dot{c}_1}{c_2} \omega_3^* + \frac{c_1}{c_2} \omega_1^* \omega_2^* +$$

$$+ \frac{2v_0}{c_2^2} \frac{c_2^2 - c_1^2}{c_2 c_1} \omega_3^* - \dot{\omega}_3 + \omega_1 \omega_2 + 2 \frac{c_3}{c_2} \omega_1^* \omega_2 - 2 \frac{\dot{c}_2}{c_2} \omega_3 - 3Gm_2 \frac{x_{21}x_{22}}{r^5} \quad (123),$$

$$k_{12} = \frac{c_1}{c_3} \dot{\omega}_2^* + \frac{2\dot{c}_1}{c_3} \omega_2^* + \frac{c_1}{c_3} \omega_1^* \omega_3^* +$$

$$+ \frac{2v_0}{c_3^2} \frac{c_1^2 - c_3^2}{c_1 c_3} \omega_2^* + \dot{\omega}_2 + \omega_1 \omega_3 + \frac{2\dot{c}_3}{c_3} \omega_2 + \frac{2c_2}{c_3} \omega_1^* \omega_3 - 3Gm_2 \frac{x_{21}x_{23}}{r^5} \quad (123).$$

Равенства (10) должны выполняться при любых значениях координат x_1, x_2, x_3 из области, занимаемой жидкостью. Отсюда следуют уравнения

$$k_{ij} = 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad j = 0, 1, 2, 3, \quad (12)$$

где k_{ij} определены выражениями (11). Из условия несжимаемости следует

$$c_1 c_2 c_3 = R^3 = const. \quad (13)$$

Движение осей $O_1 x_1 x_2 x_3$ относительно $O_1 \eta_1 \eta_2 \eta_3$ описывается кинематическими уравнениями Эйлера, которые запишем в виде

$$\dot{\varphi} = \omega_3 - (\omega_1 \sin \varphi + \omega_2 \cos \varphi) \operatorname{ctg} \theta,$$

$$\dot{\psi} = (\omega_1 \sin \varphi + \omega_2 \cos \varphi) / \sin \theta, \quad (14)$$

$$\dot{\theta} = \omega_1 \cos \varphi - \omega_2 \sin \varphi,$$

где $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ – проекции угловой скорости осей $O_1 x_1 x_2 x_3$ на себя.

Соотношения (12) – (14) представляют собой систему шестнадцати обыкновенных дифференциальных уравнений

относительно шестнадцати неизвестных $\omega_i^*, \omega_i, c_i, i = 1, 2, 3, p_0, \varphi, \psi, \theta, r_1, \varphi_1, \theta_1$ и после задания начальных условий, полностью описывают движение системы.

Для решения уравнений был использован численный метод Рунге-Кутты 4-5. Единица времени – земные сутки. На рис.2а представлен один из результатов расчетов для системы Земля-Луна. На рис.2б представлен один из результатов расчетов для системы Юпитер-Солнце. Расчеты производились в пакетах Maple и Mathematica и сравнивались.

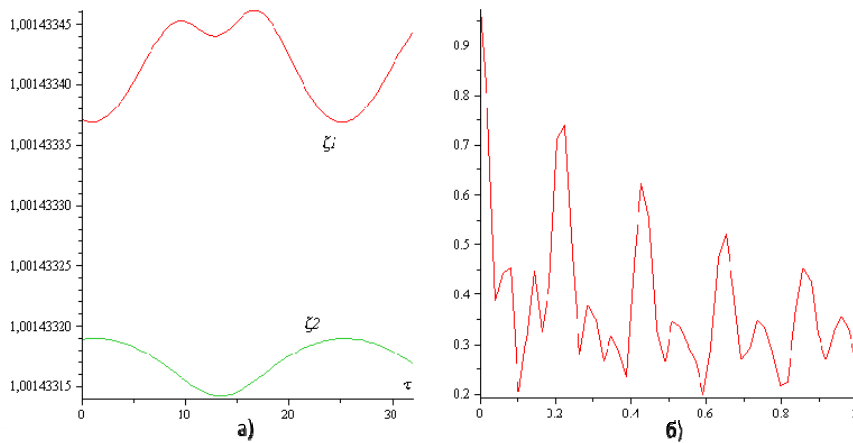


Рис. 2: а) изменение полуосей $\zeta_1(t)$ и $\zeta_2(t)$,
 б) изменение $\zeta_1(t) - \zeta_2(t)$ (в м.).

Список литературы

1. Борисов А.В., Мамаев И.С. (ред.) Динамика жидких и газовых эллипсоидов. – М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2010. – 364 с.
2. Ламб Г. Гидродинамика. – М.-Л.: Гостехиздат, 1947. – 928 с.
3. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. – М.: Наука, 1973. – 848 с.
4. Петкевич Е.В. Задача двух жидких тел // Письма в Астрономический журнал. – 1977.–3. – № 9. – С. 424 – 428.
5. Петкевич Е.В. Уравнения внешней задачи двух тел // Письма в Астрономический журнал. – 1977. – 3.– № 11. – С. 522 – 525.
6. Стеклов В.А. Работы по механике. – М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2011. – 492 с.
7. Субботин М.Ф. Курс небесной механики. – Т. 3. – М.: Гостехиздат, 1949. – 280 с.
8. Судаков С.Н. Об уравнениях движения твердого тела с эллипсоидальной полостью, целиком заполненной жидкостью переменной вязкости // Труды ИПММ НАН Украины. – 2000. –5. – С. 141 – 144.
9. Судаков С.Н. О колебаниях вращающихся жидких гравитирующих эллипсоидов переменной вязкости //Механика твердого тела.–2002.–Вып.32.–С. 217 – 226.
10. Chandrasekhar S. Ellipsoidal figures of equilibrium.– New Havenand London: Yale university press, 1969. Имеется перевод: Чандрасекхар С. Эллипсоидальные фигуры равновесия. – М.: Мир, 1973.– 288 с.
11. Ядрицкий В.С. Теория фигур небесных тел. – М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2011. – 300 с.