

### 3.5 КОЛА ІЗ ВЗАЄМНОЮ ІНДУКТИВНІСТЮ

#### 3.5.1 Типові приклади

**ЗАДАЧА 3.47.** Виконати розмітку однойменних (однополярних) затискачів у схемі рис. 3.44,а.

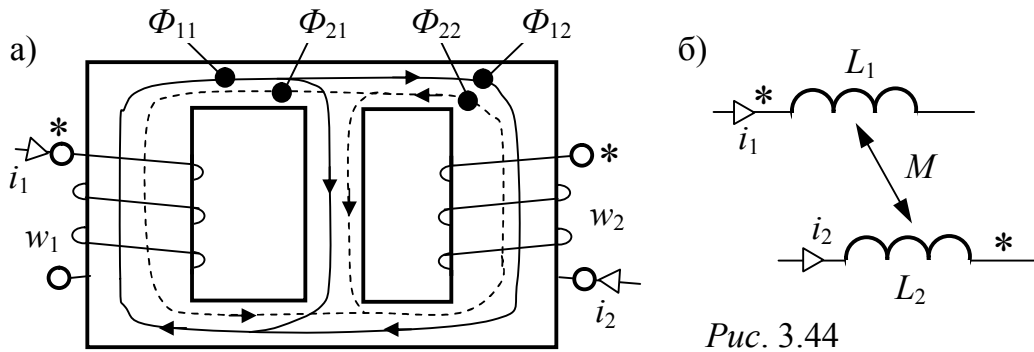


Рис. 3.44

Позначимо верхній затискач першої котушки, яка має число витків  $w_1$ , значком \*, залишивши нижній затискач без найменування. Вибираємо довільний напрям струму першої котушки  $i_1$  (на рисунку він направлений таким, що входить в затискач із зірочкою \*).

За правилом правої руки (або правилом правого свердлика), вкажемо напрям магнітного потоку  $\Phi_{11}$  самоіндукції першої котушки. Оскільки силові лінії магнітного поля замкнені, покажемо напрям магнітного потоку взаємної індукції  $\Phi_{12}$  (індекс «1» – з боку струму  $i_1$ , індекс «2» – дія на другу котушку).

Для того, щоб знайти однойменний затискач (\*) другої котушки, вибираємо довільний напрям струму відносно її затискачів. Наприклад,  $i_2$  входить в нижній затискач, і знаходимо напрями  $\Phi_{22}$  і  $\Phi_{21}$ .

На схемі рис. 3.42,а вийшло, що в кожній котушці магнітні потоки самоіндукції і взаємної індукції віднімаються (спрямовані протилежно). Отже, струми  $i_1$  та  $i_2$  по-різному орієнтовані відносно однополярних затискачів, і затискач (\*) біля другої котушки знаходиться угорі.

Відмітимо, що положення однополярних затискачів не залежить від вибраних напрямів струмів при їх розмітці, а визначається лише конструкцією магнітопровода і напрямками намотування проводів котушок.

При подальшій роботі із схемою рис. 3.44,а, в яку увімкнені котушки  $w_1$  і  $w_2$ , вона замінюється схемою рис. 3.44,б.

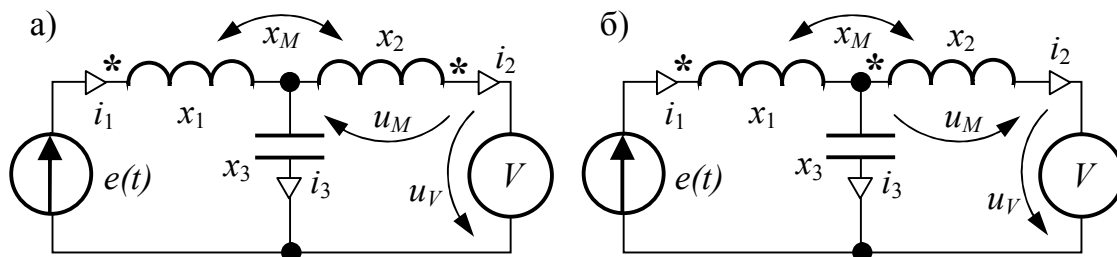


Рис. 3.45

**ЗАДАЧА 3.48.** На рис. 3.45,а індуктивно зв'язані котушки з'єднані у вузлі однополярними затискачами, на рис. 3.45,б ті ж котушки з'єднані у вузлі різнополярними затискачами. Визначити покази вольтметра в обох схемах,

якщо:  $x_1 = 20 \text{ Ом}$ ,  $x_2 = 10 \text{ Ом}$ , коефіцієнт зв'язку котушок  $k = 0,5$ , ємнісний опір  $x_3 = 10 \text{ Ом}$ , ЕРС  $e(t) = 100\sqrt{2} \sin(\omega t) \text{ В}$ .

### Розв'язання

Виконаємо розрахунки в комплексній формі. Комплексна ЕРС джерела живлення обох схем  $\underline{E} = E \cdot e^{j\psi_e} = 100 \text{ В}$ .

Опір вольтметра нескінченно великий, тому струм  $i_2 = 0$  в обох схемах, а комплекси струмів  $\underline{I}_1 = \underline{I}_3 = \frac{\underline{E}}{jx_1 - jx_3} = \frac{100}{j20 - j10} = -j10 \text{ А}$ .

Напряга  $\underline{U}_M = \underline{I}_1 \cdot jx_M$ , що наводиться змінним струмом  $\underline{I}_1$  у другій котушці, має той же напрям відносно однополярних затискачів, що і струм  $\underline{I}_1$ , що враховано на схемах рис. 3.45,а і 3.45,б. Опір взаємної індукції

$$x_M = k \cdot \sqrt{x_1 x_2} = 0,5 \sqrt{20 \cdot 10} = 5\sqrt{2} \text{ Ом}.$$

Напрягу на затискачах вольтметра розрахуємо за допомогою другого закону Кірхгофа. Для схеми рис. 3.45,а  $\underline{U}_V - \underline{I}_3 \cdot (-jx_3) - \underline{U}_M = 0$ , звідки

$$\underline{U}_V = (-j10) \cdot (-j10) + (-j10) \cdot j5\sqrt{2} = -100 + 10 \cdot 7,07 = -29,3 \text{ В},$$

а показ вольтметра  $U_V = 29,3 \text{ В}$ .

Для схеми рис. 3.45,б  $\underline{U}_V - \underline{I}_3 \cdot (-jx_3) + \underline{U}_M = 0$ , звідки

$$\underline{U}_V = (-j10) \cdot (-j10) - (-j10) \cdot j5\sqrt{2} = -100 - 10 \cdot 7,07 = -170,7 \text{ В},$$

а показ вольтметра  $U_V = 170,7 \text{ В}$ .

Відзначимо, що ця задача ілюструє спосіб практичної маркіровки однойменних затискачів обмоток трансформатора. Достатньо порівняти покази вольтметра для двох випадків увімкнення вторинної обмотки трансформатора і зробити відповідні висновки.

**ЗАДАЧА 3.49.** Параметри схеми рис. 3.46,а  $r_1 = 10 \text{ Ом}$ ,  $x_1 = 20 \text{ Ом}$ ,  $r_2 = 40 \text{ Ом}$ ,  $x_2 = 30 \text{ Ом}$ ,  $x_M = 20 \text{ Ом}$ , прикладена напруга  $U = 220 \text{ В}$ . Знайти покази приладів. Побудувати ВД кола. Записати рівняння балансу потужностей. Знайти активну потужність, що передається із однієї вітки в іншу.

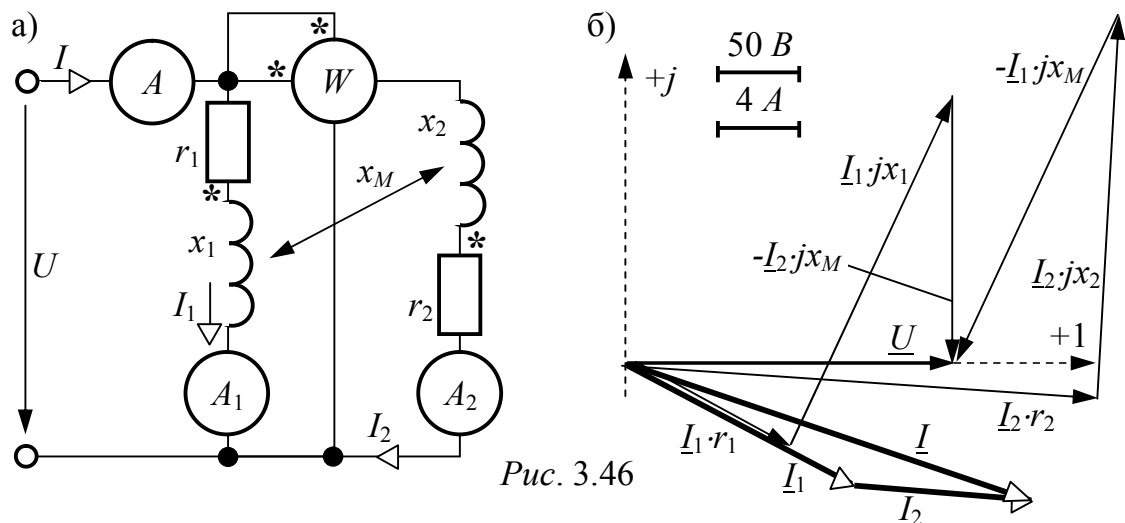


Рис. 3.46

### Розв'язання

Прийmemo  $\underline{U} = 220 \text{ В}$ .

Комплексні опори віток

$$\underline{Z}_1 = r_1 + jx_1 = 10 + j20 \text{ Ом}, \quad \underline{Z}_2 = r_2 + jx_2 = 40 + j30 \text{ Ом}, \quad \underline{Z}_M = jx_M = j20 \text{ Ом}.$$

Для розрахунку струмів скористаємося системою рівнянь Кірхгофа:

$$\underline{I} = \underline{I}_1 + \underline{I}_2; \quad \underline{I}_1 \cdot \underline{Z}_1 - \underline{I}_2 \cdot \underline{Z}_M = \underline{U}; \quad \underline{I}_2 \cdot \underline{Z}_2 - \underline{I}_1 \cdot \underline{Z}_M = \underline{U}.$$

Розв'язав систему двох останніх рівнянь методом Крамера, отримуємо:

$$\underline{I}_1 = \underline{U} \cdot \frac{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_M}{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 - \underline{Z}_M^2} = \frac{220 \cdot (40 + j30 + j20)}{(10 + j20)(40 + j30) - (j20)^2} = 12,6 \cdot e^{-j28,36^\circ} = 11,09 - j5,99 \text{ A};$$

$$\underline{I}_2 = \underline{U} \cdot \frac{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_M}{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 - \underline{Z}_M^2} = \frac{220 \cdot (10 + j20 + j20)}{(10 + j20)(40 + j30) - (j20)^2} = 8,11 \cdot e^{-j3,74^\circ} = 8,09 - j0,53 \text{ A};$$

$$\underline{I} = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 = 11,09 - j5,99 + 8,09 - j0,53 = 19,18 - j6,52 = 20,26 \cdot e^{-j18,77^\circ} \text{ A}.$$

Перевіримо баланси потужностей. Потужність джерела живлення

$$\underline{S}_T = P_T + jQ_T = \underline{U} \cdot \underline{I}^* = 220 \cdot (19,18 + j6,52) = 4220 + j1434 \text{ ВА}.$$

Сумарна активна потужність споживачів

$$\Sigma P_{II} = I_1^2 \cdot r_1 + I_2^2 \cdot r_2 = 12,6^2 \cdot 10 + 8,11^2 \cdot 40 = 4219 \text{ Вт},$$

сумарна реактивна потужність

$$\Sigma Q_{II} = I_1^2 \cdot x_1 + I_2^2 \cdot x_2 - 2 \cdot I_1 \cdot I_2 \cdot x_M \cdot \cos(\psi_{i1} - \psi_{i2}) = \\ = 12,6^2 \cdot 20 + 8,11^2 \cdot 30 - 2 \cdot 12,6 \cdot 8,11 \cdot 20 \cdot \cos(-28,36^\circ + 3,74^\circ) = 1433 \text{ вар}.$$

Оскільки обидва баланси потужностей виконуються, задача розрахунку струмів розв'язана вірно.

Відзначимо, що доданок реактивної потужності

$$-2 \cdot I_1 \cdot I_2 \cdot x_M \cdot \cos(\psi_{i1} - \psi_{i2}) = -3716 \text{ вар}$$

визначає витрату реактивної потужності на створення магнітного потоку передачі активної потужності, а знак «мінус» цієї потужності вказує на взаємне ослаблення (розмагнічення) потоками взаємної індукції потоків самоіндукції (див. рис. 3.44).

$$\text{Показ ватметра } P_W = \text{Re}(\underline{U} \cdot \underline{I}_2^*) = \text{Re}[220 \cdot (8,09 + j0,53)] = 1780 \text{ Вт}.$$

Ватметр вимірює активну потужність, що надходить «електричним шляхом» у другу вітку:  $P_{2\text{ноcm}} = \text{Re}(\underline{U} \cdot \underline{I}_2^*) = 1780 \text{ Вт}.$

Споживана активна потужність визначається законом Джоуля-Ленца

$$P_{2II} = I_2^2 \cdot r_2 = 8,11^2 \cdot 40 = 2631 \text{ Вт}.$$

Різниця цих потужностей передається магнітним полем у першу вітку

$$P_{2 \rightarrow 1} = P_{2\text{ноcm}} - P_{2II} = 1780 - 2631 = -851 \text{ Вт}.$$

Знак «мінус» в отриманому результаті вказує на те, що насправді має місце передача активної потужності із першої вітки у другу ( $P_{1 \rightarrow 2} = +851 \text{ Вт}$ ) на покриття дефіциту потужності (споживання більше надходження).

Відмітимо, що є інший спосіб розрахунку активної потужності, яка передається за допомогою магнітного поля із першої вітки в другу:

$$P_{1 \rightarrow 2} = -I_1 \cdot I_2 \cdot x_M \cdot \sin(\psi_{i1} - \psi_{i2}) = -12,6 \cdot 8,11 \cdot 20 \cdot \sin(-28,36^\circ + 3,74^\circ) = +851 \text{ Вт}.$$

Для побудови векторної діаграми спочатку на комплексній площині відкладаємо вектори (комплекси) струмів  $I_1$  і  $I_2$  (рис. 3.46,б). Потім розраховуємо падіння напруг

$$I_1 \cdot r_1 = 12,6 \cdot 10 = 126 \text{ В}, \quad I_1 \cdot x_1 = 12,6 \cdot 20 = 252 \text{ В}, \quad I_2 \cdot x_M = 8,11 \cdot 20 = 162,2 \text{ В},$$

$$I_2 \cdot r_2 = 8,11 \cdot 40 = 324,4 \text{ В}, \quad I_2 \cdot x_2 = 8,11 \cdot 30 = 243,3 \text{ В}, \quad I_1 \cdot x_M = 12,6 \cdot 20 = 252 \text{ В}.$$

Від початку координат виконуємо операції складання векторів (відповідних комплексних чисел) згідно з вихідною системою рівнянь Кірхгофа:

$$\underline{I} = \underline{I}_1 + \underline{I}_2; \quad \underline{I}_1 \cdot r_1 + \underline{I}_1 \cdot jx_1 - \underline{I}_2 \cdot jx_M = \underline{U}, \quad \underline{I}_2 \cdot r_2 + \underline{I}_2 \cdot jx_2 - \underline{I}_1 \cdot jx_M = \underline{U}.$$

Векторна діаграма наведена на рис. 3.46,б.

**ЗАДАЧА 3.50.** При розімкненому рубильнику  $P$  показ вольтметра в схемі рис. 3.47 становить 150 В. Параметри схеми  $r_1 = 12 \text{ Ом}$ ,  $x_{1L} = 10 \text{ Ом}$ ,  $x_{1C} = 26 \text{ Ом}$ ,  $r_2 = 4 \text{ Ом}$ ,  $x_2 = 20 \text{ Ом}$ ,  $r_H = 12 \text{ Ом}$ ,  $U = 300 \text{ В}$ .

Визначити струми в схемі при замкненому рубильнику, побудувати повну ВД кола.

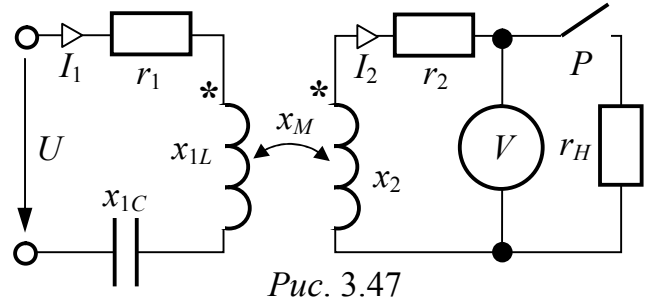


Рис. 3.47

### Розв'язання

Визначимо опір взаємної індукції  $x_M$  із умови, що при розімкненому рубильнику  $I_{2HX} = 0$  – неробочий хід однофазного трансформатора схеми.

$$\underline{I}_{1HX} = \frac{\underline{U}}{r_1 + jx_{1L} - jx_{1C}} = \frac{300}{12 + j(10 - 26)} = 15 \cdot e^{j53,13^\circ} \text{ А};$$

$$U_{2HX} = I_{1HX} \cdot x_M - \text{показ вольтметра, звідки } x_M = \frac{U_{2HX}}{I_{1HX}} = \frac{150}{15} = 10 \text{ Ом}.$$

Перевіримо співвідношення, що дає фізика явища взаємної індукції:

$$x_M \leq \sqrt{x_1 x_2}: \quad 10 < \sqrt{10 \cdot 20} - \text{виконується}.$$

При замкненому рубильнику відповідно до другого закону Кірхгофа для первинного і вторинного контурів трансформатора отримуємо

$$\underline{I}_1 \cdot \underline{Z}_1 - \underline{I}_2 \cdot \underline{Z}_M = \underline{U}; \quad \underline{I}_2 \cdot \underline{Z}_2 - \underline{I}_1 \cdot \underline{Z}_M = 0,$$

де комплексний опір первинного контура  $\underline{Z}_1 = r_1 + jx_{1L} - jx_{1C} = 12 - j16 \text{ Ом}$ ,

вторинного контура  $\underline{Z}_2 = r_2 + r_H + jx_2 = 16 + j20 \text{ Ом}$ ,

опір  $\underline{Z}_M = jx_M = j10 \text{ Ом}$ ,

комплексна напруга  $\underline{U} = 300 \text{ В}$ .

Розв'язав систему рівнянь, отримуємо:

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U} \cdot \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 - \underline{Z}_M^2} = \frac{300 \cdot (16 + j20)}{(12 - j16)(16 + j20) - (j10)^2} = 12,55 \cdot e^{j52,83^\circ} = 7,582 + j10 \text{ А};$$

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{U} \cdot \underline{Z}_M}{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 - \underline{Z}_M^2} = \frac{300 \cdot j10}{(12 - j16)(16 + j20) - (j10)^2} = 4,9 \cdot e^{j91,5^\circ} = -0,128 + j4,9 \text{ А}.$$

Перевіримо баланси потужностей за результатами розрахунку струмів.

$$\underline{S}_T = P_T + jQ_T = \underline{U} \cdot \underline{I}_1^* = 300 \cdot (7,582 - j10) = 2275 - j3000 \text{ ВА}.$$

Сумарна активна потужність споживачів

$$\Sigma P_{II} = I_1^2 \cdot r_1 + I_2^2 \cdot (r_2 + r_H) = 12,55^2 \cdot 10 + 4,9^2 \cdot 16 = 2274 \text{ Вт} \approx P_T.$$

Сумарна реактивна потужність

$$\begin{aligned}\Sigma Q_{II} &= I_1^2 \cdot (x_{1L} - x_{1C}) + I_2^2 \cdot x_2 - 2 \cdot \text{Im}(\underline{I}_2 \cdot jx_M \cdot \underline{I}_1^*) = \\ &= 12,55^2 \cdot (10 - 26) + 4,9^2 \cdot 20 - 2 \cdot \text{Im}(4,9 \cdot e^{j91,5^\circ} \cdot 10 \cdot e^{j90^\circ} \cdot 12,55 \cdot e^{-j52,83^\circ}) = \\ &= -2040 - 2 \cdot \text{Im}(615 \cdot e^{j128,67^\circ}) = -2040 - 960 = -3000 \text{ var} = Q_{II}.\end{aligned}$$

Відзначимо, що у трансформатора немає «електричного» каналу передачі енергії із первинної обмотки у вторинну, тому передача активної потужності здійснюється лише магнітним полем і повинна виконуватися рівність  $P_{1 \rightarrow 2} = -\text{Re}(\underline{I}_2 \cdot jx_M \cdot \underline{I}_1^*) = I_2^2 \cdot (r_2 + r_H)$ .

Перевіримо:

$$\begin{aligned}P_{1 \rightarrow 2} &= -\text{Re}(4,9 \cdot e^{j91,5^\circ} \cdot 10 \cdot e^{j90^\circ} \cdot 12,55 \cdot e^{-j52,83^\circ}) = -\text{Re}(615 \cdot e^{j128,67^\circ}) = 384,3 \text{ Вт} \approx \\ &\approx 4,9^2 \cdot 16 = 384,2 \text{ Вт}.\end{aligned}$$

Показ вольтметра при замкненому рубильнику

$$U_V = I_2 \cdot r_H = 4,9 \cdot 12 = 58,8 \text{ В}.$$

Для побудови векторної діаграми розрахуємо падіння напруг:

$$\begin{aligned}I_1 \cdot r_1 &= 12,55 \cdot 12 = 150,6 \text{ В}; & I_1 \cdot x_{1L} &= 12,55 \cdot 10 = 125,5 \text{ В}; \\ I_1 \cdot x_{1C} &= 12,55 \cdot 26 = 326,3 \text{ В}; & I_2 \cdot x_M &= 4,9 \cdot 10 = 49 \text{ В}; \\ I_2 \cdot r_2 &= 4,9 \cdot 4 = 19,6 \text{ В}; & I_2 \cdot x_2 &= 4,9 \cdot 20 = 98 \text{ В}; \\ I_2 \cdot r_H &= 4,9 \cdot 12 = 58,8 \text{ В}; & I_1 \cdot x_M &= 12,55 \cdot 10 = 125,5 \text{ В}.\end{aligned}$$

Побудову ВД починаємо з векторів струмів  $\underline{I}_1$  і  $\underline{I}_2$  на комплексній площині відповідно до розрахованих комплексів (рис. 3.48). Вектори падінь напруг відкладаються відповідно до другого закону Кірхгофа

$$\underline{I}_1 \cdot r_1 + \underline{I}_1 \cdot jx_{1L} - \underline{I}_2 \cdot jx_M + \underline{I}_1 \cdot (-jx_{1C}) = \underline{U};$$

$$\underline{I}_2 \cdot r_H + \underline{I}_2 \cdot r_2 + \underline{I}_2 \cdot jx_2 - \underline{I}_1 \cdot jx_M = 0.$$

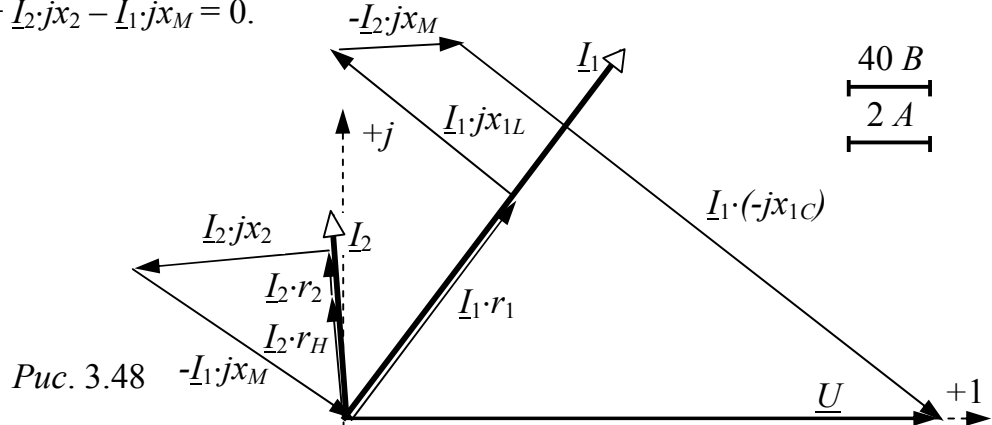


Рис. 3.48

**ЗАДАЧА 3.51.** Розрахувати стан кола з автотрансформатором (рис. 3.49,а), знайти активну потужність, що передається магнітним полем, побудувати повну ВД кола, якщо

$$x_1 = 40 \text{ Ом}, \quad x_2 = 80 \text{ Ом}, \quad x_M = 50 \text{ Ом}, \quad r_3 = 40 \text{ Ом}, \quad x_3 = 20 \text{ Ом}, \quad E = 220 \text{ В}.$$

#### Розв'язання

Після розмітки однополярних затискачів за допомогою потоків  $\Phi_{11}$  і  $\Phi_{22}$  розрахункова схема електричного кола набуває вигляду рис. 3.49,б На підставі законів Кірхгофа

$$\begin{cases} \underline{I}_1 = \underline{I}_2 + \underline{I}_3; \\ \underline{I}_1 \cdot jx_1 + \underline{I}_2 \cdot jx_M + \underline{I}_3 \cdot (-jx_3) + \underline{I}_3 \cdot r_3 = \underline{E}; \\ \underline{I}_2 \cdot jx_2 + \underline{I}_1 \cdot jx_M - \underline{I}_3 \cdot (-jx_3) - \underline{I}_3 \cdot r_3 = 0. \end{cases}$$

Відповідно до цієї системи рівнянь буде побудована ВД вихідного кола.

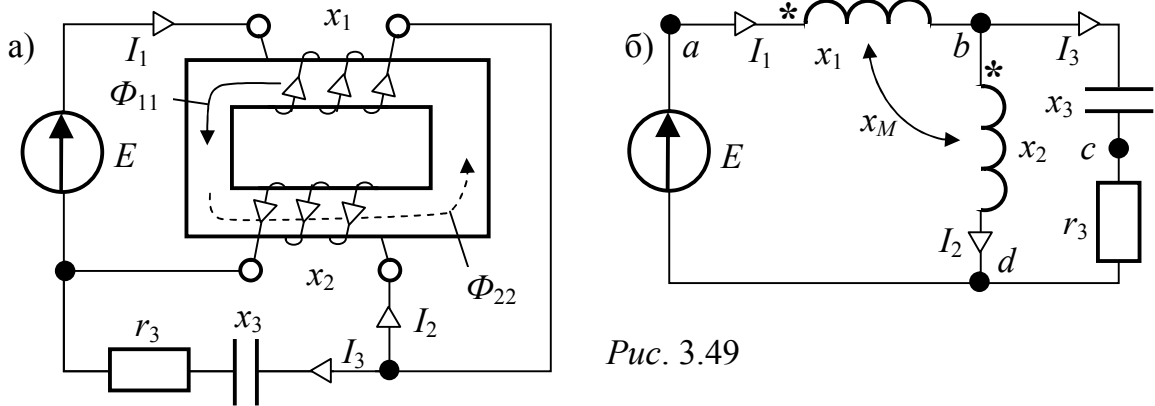


Рис. 3.49

Щоб уникнути розв'язання системи представлених рівнянь, усунемо взаємний індуктивний зв'язок, отримавши еквівалентну схему рис. 3.50,а і відповідну їй комплексну схему заміщення (рис. 3.50,б).

«Розв'язка» здійснюється наступним чином: оскільки індуктивно зв'язані елементи  $x_1$  і  $x_2$  сходяться у вузол  $b$  різнополярними затискачами, то послідовно до індуктивних елементів додаються позитивні розрахункові індуктивності  $+x_M = +\omega M$ , а в спільну для  $x_1$  і  $x_2$  частину схеми (у даному прикладі це вітка 3) вводиться негативний розрахунковий індуктивний опір  $-x_M = -\omega M$ .

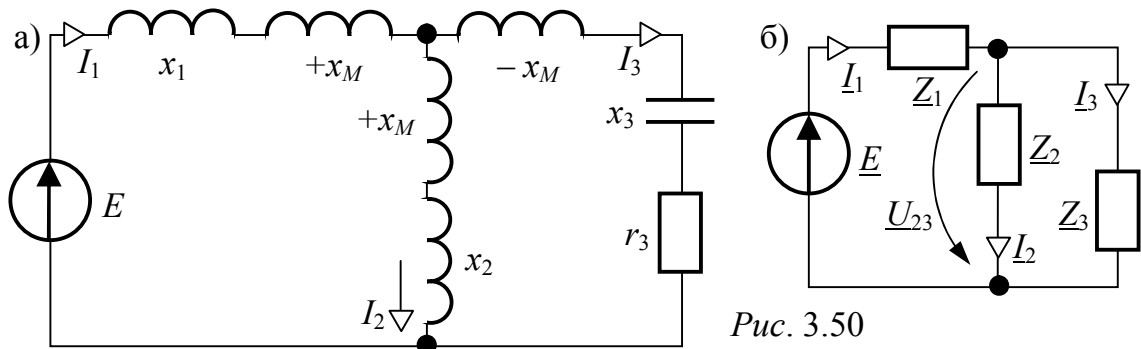


Рис. 3.50

Прийmemo комплексну ЕРС схеми рис. 3.50,б  $\underline{E} = E \cdot e^{j\psi_E} = 220 \text{ В}$ .

Комплексні опори мішано з'єднаних віток

$$\underline{Z}_1 = jx_1 + jx_M = j40 + j50 = j90 \text{ Ом},$$

$$\underline{Z}_2 = jx_2 + jx_M = j80 + j50 = j130 \text{ Ом},$$

$$\underline{Z}_3 = r_3 - jx_3 - jx_M = 40 - j20 - j50 = 40 - j70 = 80,62 \cdot e^{-j60,25^\circ} \text{ Ом}.$$

Вхідний опір кола

$$\underline{Z}_{\text{вх}} = \underline{Z}_1 + \frac{\underline{Z}_2 \cdot \underline{Z}_3}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} = j90 + \frac{j130 \cdot 80,62 e^{-j60,25}}{j130 + 40 - j70} = 132,4 \cdot e^{j10,89^\circ} \text{ Ом},$$

а опір розгалуження

$$\underline{Z}_{23} = \frac{\underline{Z}_2 \cdot \underline{Z}_3}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} = \frac{j130 \cdot 80,62 e^{-j60,25}}{j130 + 40 - j70} = 145,3 \cdot e^{-j26,56^\circ} \text{ Ом},$$

$$\text{Вхідний струм } \underline{I}_1 = \frac{\underline{E}}{\underline{Z}_{\text{ex}}} = \frac{220}{132,4e^{j10,89}} = 1,662 \cdot e^{-j10,89^\circ} \text{ A,}$$

напруга на розгалуженні

$$\underline{U}_{23} = \underline{I}_1 \cdot \underline{Z}_{23} = 1,662 \cdot e^{-j10,89^\circ} \cdot 145,3 \cdot e^{-j26,56^\circ} = 241,5 \cdot e^{-j37,45^\circ} \text{ B,}$$

$$\text{струми паралельних віток } \underline{I}_2 = \frac{\underline{U}_{23}}{\underline{Z}_2} = \frac{241,5e^{-j37,45^\circ}}{j130} = 1,858 \cdot e^{-j127,45^\circ} \text{ A,}$$

$$\underline{I}_3 = \frac{\underline{U}_{23}}{\underline{Z}_3} = \frac{241,5e^{-j37,45^\circ}}{82,62e^{-j60,25^\circ}} = 3,0 \cdot e^{j22,8^\circ} \text{ A.}$$

Щоб переконатися у правильності розрахунку струмів вихідної схеми рис. 3.47,а, перевіримо для неї баланси активних і реактивних потужностей:

- потужність генератора

$$\underline{S}_G = \underline{E} \cdot \underline{I}_1^* = 220 \cdot 1,662 \cdot e^{j10,89^\circ} = 359 + j69 \text{ VA} = P_G + jQ_G.$$

- активна потужність споживачів  $\Sigma P_{\Pi} = I_3^2 \cdot r_3 = 3^2 \cdot 40 = 360 \text{ Wm} \approx P_G,$

- реактивна потужність споживачів

$$\begin{aligned} \Sigma Q_{\Pi} &= I_1^2 \cdot x_1 + I_2^2 \cdot x_2 + 2 \cdot I_1 \cdot I_2 \cdot x_M \cdot \cos(\psi_{i1} - \psi_{i2}) - I_3^2 \cdot x_3 = \\ &= 1,662^2 \cdot 40 + 1,858^2 \cdot 80 + 2 \cdot 1,662 \cdot 1,858 \cdot 50 \cdot \cos(-10,89^\circ + 127,45^\circ) - 3^2 \cdot 20 = \\ &= 69 \text{ var} = Q_G. \end{aligned}$$

Активна потужність, що передається із першої вітки у другу

$$\begin{aligned} P_{1 \rightarrow 2} &= \text{Re}(\underline{I}_2 \cdot jx_M \cdot \underline{I}_1^*) = I_1 \cdot I_2 \cdot x_M \cdot \sin(\psi_{i1} - \psi_{i2}) = \\ &= 1,662 \cdot 1,858 \cdot 50 \cdot \sin(-10,89^\circ + 127,45^\circ) = 138,1 \text{ Wm}. \end{aligned}$$

Напруга на ділянці *ab* схеми рис. 3.49,б

$$\begin{aligned} \underline{U}_{ab} &= \underline{I}_1 \cdot jx_1 + \underline{I}_2 \cdot jx_M = 1,662 \cdot e^{-j10,89^\circ} \cdot 40 \cdot e^{j90^\circ} + 1,858 \cdot e^{-j127,45^\circ} \cdot 50 \cdot e^{j90^\circ} = \\ &= 86,76 \cdot e^{j5,83^\circ} \text{ B,} \end{aligned}$$

на ділянці *bd*

$$\underline{U}_{bd} = \underline{I}_2 \cdot jx_2 + \underline{I}_1 \cdot jx_M = \underline{I}_3 \cdot (r_3 - jx_3) = 3 \cdot e^{j22,8^\circ} \cdot (40 - j20) = 134,2 \cdot e^{-j3,77^\circ} \text{ B.}$$

Потужність, що надходить в першу обмотку (ділянка *ab*),

$$\underline{S}_1 = \underline{U}_{ab} \cdot \underline{I}_1^* = 86,76 \cdot e^{j5,83^\circ} \cdot 1,662 \cdot e^{j10,89^\circ} = 138,1 + j41,5 \text{ VA} = P_1 + jQ_1.$$

Оскільки теплові втрати на цій ділянці схеми відсутні ( $r_1 = 0$ ), то вся активна потужність  $P_1$  повинна передаватися у другу вітку

$$P_{1 \rightarrow 2} = P_1 - I_1^2 \cdot r_1 = 138,1 - 0 = 138,1 \text{ Wm,}$$

що перевіряється таким чином:

$$\underline{S}_2 = \underline{U}_{bd} \cdot \underline{I}_2^* = 134,2 \cdot e^{-j3,77^\circ} \cdot 1,858 \cdot e^{j127,45^\circ} = -138,1 + j207,5 \text{ VA} = P_2 + jQ_2,$$

активна потужність, що передається із другої вітки в першу

$$P_{2 \rightarrow 1} = P_2 - I_2^2 \cdot r_2 = -138,1 - 0 = -138,1 \text{ Wm,}$$

а сума  $P_{1 \rightarrow 2} + P_{2 \rightarrow 1} = 138,1 - 138,1 = 0$ .

Для побудови ВД корисно знайти усі падіння напруг у схемі:

$$I_1 \cdot x_1 = 1,662 \cdot 40 = 66,5 \text{ B; } I_2 \cdot x_M = 1,858 \cdot 50 = 92,9 \text{ B; } I_2 \cdot x_2 = 1,858 \cdot 80 = 150,6 \text{ B;}$$

$$I_1 \cdot x_M = 1,662 \cdot 50 = 83,1 \text{ B; } I_3 \cdot x_3 = 3 \cdot 20 = 60 \text{ B; } I_3 \cdot r_3 = 3 \cdot 40 = 19,6 \text{ B,}$$

а струми представити у алгебричній формі

$$\underline{I}_1 = 1,63 - j0,31 \text{ A; } \underline{I}_2 = -1,13 - j1,47 \text{ A; } \underline{I}_3 = 2,76 + j1,16 \text{ A.}$$

На комплексній площині (рис. 3.51) будуємо вектори струмів відповідно до першого закону Кірхгофа по вихідній системі рівнянь, а потім відкладаємо вектори падінь напруг відповідно до вихідних рівнянь, записаних за другим законом Кірхгофа.

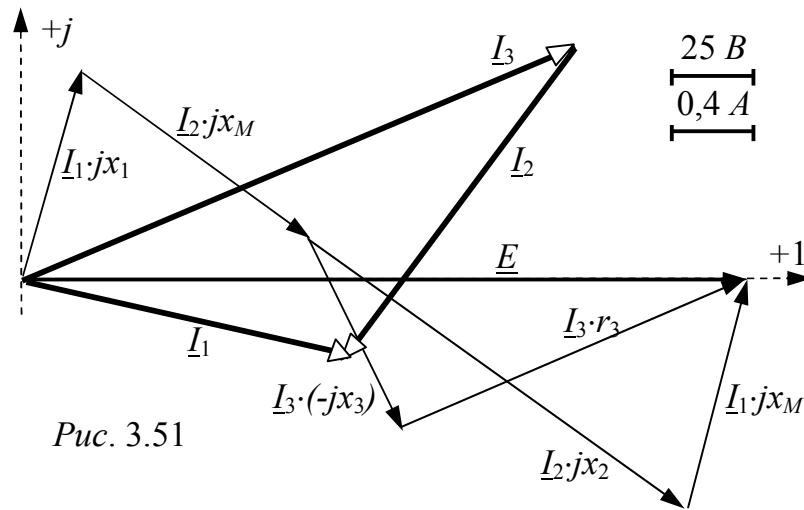


Рис. 3.51

**ЗАДАЧА 3.52.** У схемі рис. 3.52,а розрахувати струми, якщо  $U = 100 \text{ В}$ ,  $R_1 = 5 \text{ Ом}$ ,  $R_2 = 15 \text{ Ом}$ ,  $R_3 = 10 \text{ Ом}$ ,  $x_1 = 15 \text{ Ом}$ ,  $x_2 = 25 \text{ Ом}$ ,  $x_M = 10 \text{ Ом}$ .

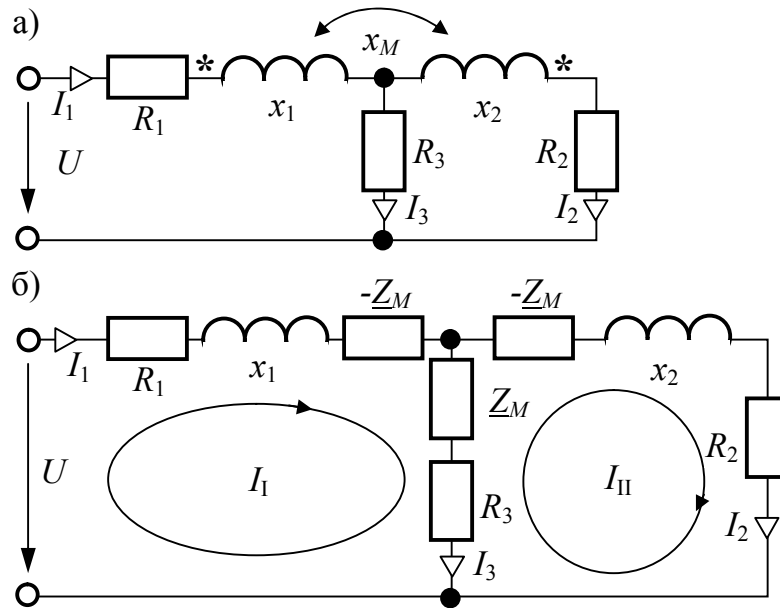


Рис. 3.52

**Розв'язання**

Задачу розв'яжемо методом контурних струмів, заздалегідь усунувши індуктивний зв'язок (рис. 3.52,б). Система рівнянь:

$$\begin{cases} \underline{I}_I \cdot (R_1 + jx_1 - jx_M + jx_M + R_3) - \underline{I}_{II} \cdot (R_3 + jx_M) = \underline{U}; \\ -\underline{I}_I \cdot (R_3 + jx_M) + \underline{I}_{II} \cdot (R_3 + jx_M - jx_M + jx_2 + R_2) = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \underline{I}_I \cdot (15 + j15) - \underline{I}_{II} \cdot (10 + j10) = 100; \\ -\underline{I}_I \cdot (10 + j10) + \underline{I}_{II} \cdot (25 + j25) = 0. \end{cases}$$



Розв'язання системи:  $\underline{I}_I = 6,43 \cdot e^{-j45^\circ} \text{ A}$ ;  $\underline{I}_{II} = 2,57 \cdot e^{-j45^\circ} \text{ A}$ .

Струми у вітках через контурні струми визначаються за принципом накладання:

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_I = 6,43 \cdot e^{-j45^\circ} \text{ A}; \quad \underline{I}_2 = \underline{I}_{II} = 2,57 \cdot e^{-j45^\circ} \text{ A}; \quad \underline{I}_3 = \underline{I}_I - \underline{I}_{II} = 3,87 \cdot e^{-j45^\circ} \text{ A}.$$

**ЗАДАЧА 3.53.** У схемі рис. 3.53,а розрахувати струми, побудувати ВД, визначити активну потужність, яка передається через взаємну індуктивність, показ вольметра. Визначити вхідний опір кола за законом Ома і шляхом усунення індуктивного зв'язку. Числові дані:

$$U = 100 \text{ В}, \quad x_C = x_1 = 20 \text{ Ом}, \quad x_2 = 10 \text{ Ом}, \quad r = 10 \text{ Ом}, \\ x_{M12} = x_{M23} = 10 \text{ Ом}, \quad x_{M13} = 5 \text{ Ом}.$$

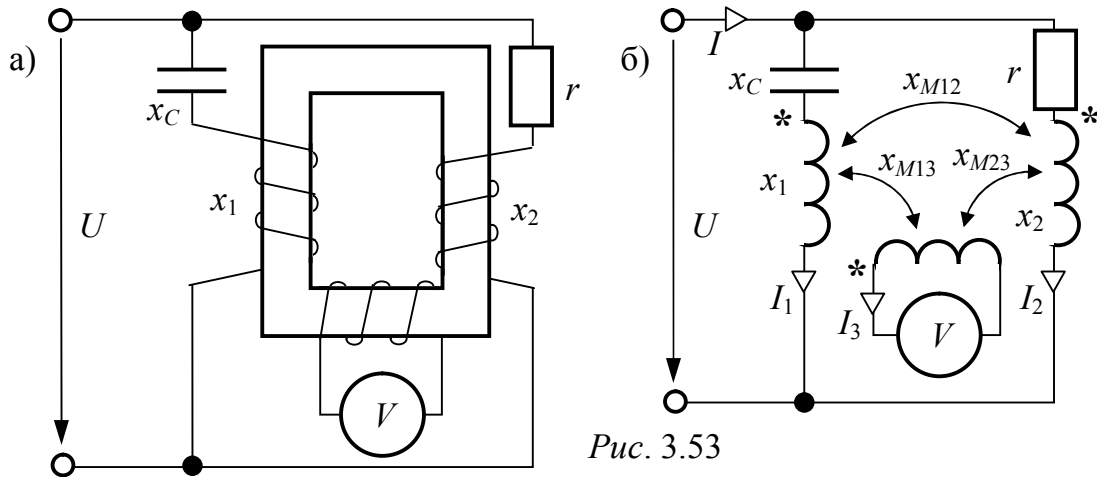


Рис. 3.53

### Розв'язання

Визначаємо однойменні затискачі обмоток і складаємо розрахункову схему (рис. 3.53,б). Задачу розв'язуємо методом рівнянь Кірхгофа. Враховуємо, що опір вольметра  $Z_V = \infty$ , тому струм у третій котушці  $I_3 = 0$ , і він в рівняннях не враховується. Система рівнянь має вигляд:

$$\begin{cases} \underline{I} = \underline{I}_1 + \underline{I}_2; & (3.1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \underline{I}_1 \cdot (-jx_C + jx_1) + \underline{I}_2 \cdot jx_{M12} = \underline{U}; & (3.2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \underline{I}_1 \cdot jx_{M12} + \underline{I}_2 \cdot (r + jx_2) = \underline{U}; & (3.3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \underline{I}_1 \cdot jx_{M13} + \underline{I}_2 \cdot jx_{M23} = \underline{U}_V. & (3.4) \end{cases}$$

Розв'язуємо рівняння (3.2) і (3.3) відносно  $\underline{I}_1$  і  $\underline{I}_2$ :

$$\begin{cases} \underline{I}_1 \cdot 0 + \underline{I}_2 \cdot j10 = 100; & \underline{I}_2 = 100/j10 = -j10 \text{ A}; \\ \underline{I}_1 \cdot j10 + \underline{I}_2 \cdot (10 + j10) = 100; & \underline{I}_1 = \frac{100 + j10(10 + j10)}{j10} = 10 \text{ A}. \end{cases}$$

Із (3.1)  $\underline{I} = 10 + (-j10) = 14,14 \cdot e^{-j45^\circ} \text{ A}$ .

Для побудови векторної діаграми (рис. 3.54,а) знайдемо падіння напруг на всіх елементах:

$$\underline{U}_C = \underline{I}_1 \cdot (-jx_C) = 10 \cdot (-j20) = -j200 \text{ В};$$

$$\underline{U}_r = \underline{I}_2 \cdot r = -j10 \cdot 10 = -j100 \text{ В};$$

$$\underline{U}_{x1} = \underline{I}_1 \cdot jx_1 = 10 \cdot j20 = j200 \text{ В};$$

$$\underline{U}_{x2} = \underline{I}_2 \cdot jx_2 = -j10 \cdot j10 = 100 \text{ В};$$

$$\underline{U}_{xM12} = \underline{I}_2 \cdot jx_{M12} = -j10 \cdot j10 = 100 \text{ В};$$

$$\underline{U}_{xM21} = \underline{I}_1 \cdot jx_{M12} = 10 \cdot j10 = j100 \text{ В};$$

$$\underline{U}_{xM13} = \underline{I}_1 \cdot jx_{M13} = 10 \cdot j5 = j50 \text{ В};$$

$$\underline{U}_{xM23} = \underline{I}_2 \cdot jx_{M23} = -j10 \cdot j10 = 100 \text{ В}.$$

Активна потужність, яка споживається першою віткою,

$$P_1 = \operatorname{Re}(\underline{U} \cdot \underline{I}_1^*) = \operatorname{Re}(100 \cdot 10) = 1000 \text{ Вт.}$$

Витрата активної потужності у першій вітці  $\Delta P_1 = r_1 \cdot I_1^2 = 0$ .

Активна потужність, що передається магнітним полем із однієї вітки в іншу  $P_{1 \rightarrow 2} = P_1 - \Delta P_1 = 1000 - 0 = 1000 \text{ Вт.}$

Напруга на вольтметрі за (3.4)

$$\underline{U}_V = 10 \cdot j5 + (-j10) \cdot j10 = j50 + 100 = 111,8 \cdot e^{j26,6^\circ} \text{ В.}$$

Показ вольтметра  $V \rightarrow U_V = 111,8 \text{ В.}$

Вхідний опір кола за законом Ома

$$\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{100}{14,14 \cdot e^{-j45^\circ}} = 7,07 \cdot e^{j45^\circ} \text{ Ом.}$$

Після усунення індуктивного зв'язку отримуємо схему рис. 3.54,б. Тут

$$\underline{Z}_M = jx_{M12} = j10 \text{ Ом.}$$

Вхідний опір схеми рис. 3.54,б

$$\begin{aligned} \underline{Z} &= \underline{Z}_M + \frac{(-jx_C + jx_1 - \underline{Z}_M)(r + jx_2 - \underline{Z}_M)}{-jx_C + jx_1 - \underline{Z}_M + r + jx_2 - \underline{Z}_M} = \\ &= j10 + \frac{-j10 \cdot 10}{10 - j10} = j10 + 5 - j5 = 7,07 \cdot e^{j45^\circ} \text{ Ом.} \end{aligned}$$

Відповідь та ж, що і при визначенні за законом Ома.

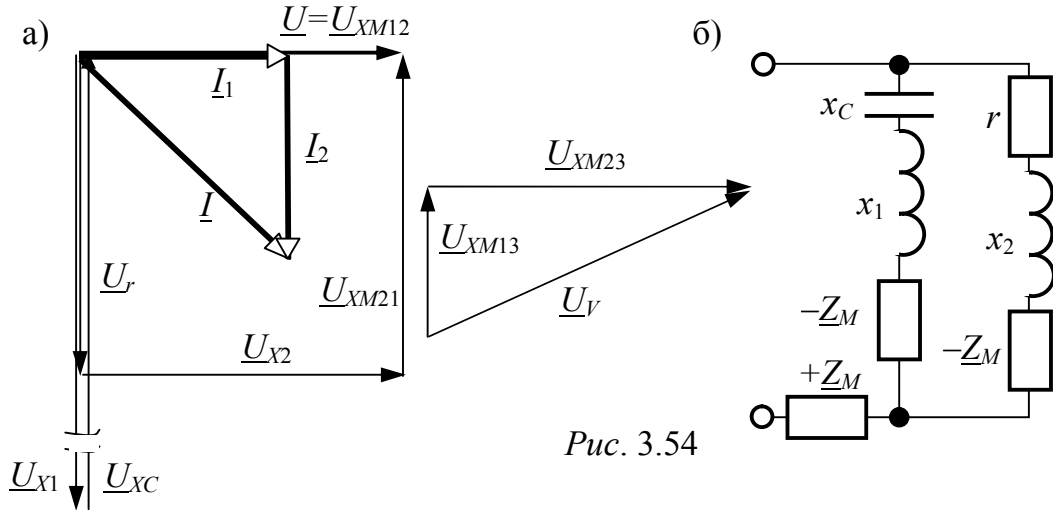


Рис. 3.54

**ЗАДАЧА 3.54.** У схемі рис. 3.55 скласти систему рівнянь методом законів Кірхгофа. Виконати розрахунок струмів шляхом усунення індуктивного зв'язку. Визначити струми методом контурних струмів. Визначити потужність, яка передається за допомогою магнітного поля із однієї котушки в іншу. Числові дані:

$$\begin{aligned} U &= 220 \text{ В,} & r_1 &= 6 \text{ Ом,} & x_1 &= 10 \text{ Ом,} \\ r_2 &= 12 \text{ Ом,} & x_2 &= 18 \text{ Ом,} & r_3 &= 18 \text{ Ом,} \\ x_3 &= 20 \text{ Ом,} & x_M &= 8 \text{ Ом.} \end{aligned}$$

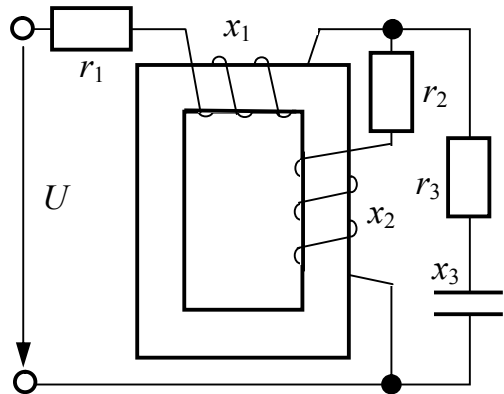


Рис. 3.55

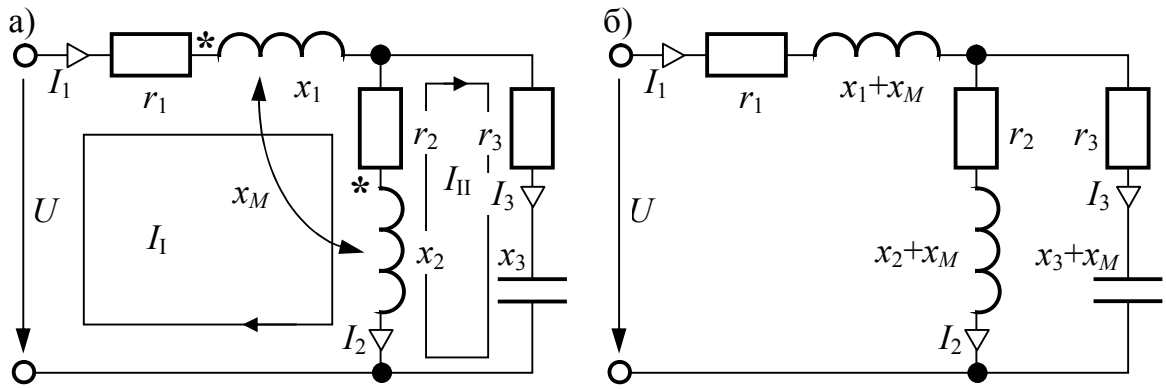


Рис. 3.56

### Розв'язання

1. Складемо розрахункову схему (рис. 3.56,а). Система рівнянь для струмів за законами Кірхгофа:

$$\begin{cases} \underline{I}_1 - \underline{I}_2 - \underline{I}_3 = 0; \\ r_1 \cdot \underline{I}_1 + jx_1 \cdot \underline{I}_1 + jx_M \cdot \underline{I}_2 + r_2 \cdot \underline{I}_2 + jx_2 \cdot \underline{I}_2 + jx_M \cdot \underline{I}_1 = \underline{U}; \\ -r_2 \cdot \underline{I}_2 - jx_2 \cdot \underline{I}_2 - jx_M \cdot \underline{I}_1 + r_3 \cdot \underline{I}_3 - jx_3 \cdot \underline{I}_3 = 0. \end{cases}$$

2. Система рівнянь за методом контурних струмів для схеми рис. 3.56,а:

$$\begin{cases} (r_1 + jx_1 + r_2 + jx_2 + j2x_M) \cdot \underline{I}_1 - (r_2 + jx_2 + jx_M) \cdot \underline{I}_2 = \underline{U}; \\ -(r_2 + jx_2 + jx_M) \cdot \underline{I}_1 + (r_2 + jx_2 + r_3 - jx_3) \cdot \underline{I}_2 = 0; \\ (18 + j44) \cdot \underline{I}_1 - (12 + j26) \cdot \underline{I}_2 = 220; \\ -(12 + j26) \cdot \underline{I}_1 + (30 - j2) \cdot \underline{I}_2 = 0. \end{cases}$$

$$\text{Її розв'язання } \underline{I}_1 = 4,96 \cdot e^{-j33,5^\circ} \text{ A}, \quad \underline{I}_2 = 4,72 \cdot e^{j35,6^\circ} \text{ A}.$$

$$\text{Струми у вітках: } \underline{I}_1 = \underline{I}_1 = 4,96 \cdot e^{-j33,5^\circ} \text{ A}, \quad \underline{I}_3 = \underline{I}_2 = 4,72 \cdot e^{j35,6^\circ} \text{ A},$$

$$\underline{I}_2 = \underline{I}_1 - \underline{I}_2 = 4,96 \cdot e^{-j33,5^\circ} - 4,72 \cdot e^{j35,6^\circ} = 5,49 \cdot e^{-j86,9^\circ} \text{ A}.$$

3. Виконаємо усунення індуктивного зв'язку (рис. 3.56,б) і розрахуємо отриману схему.

$$\underline{Z}_1 = r_1 + jx_1 + jx_M = 6 + j18 = 18,97 \cdot e^{j71,6^\circ} \text{ Ом},$$

$$\underline{Z}_2 = r_2 + jx_2 + jx_M = 12 + j26 = 28,64 \cdot e^{j65,2^\circ} \text{ Ом},$$

$$\underline{Z}_3 = r_3 - jx_3 - jx_M = 18 - j28 = 33,29 \cdot e^{-j57,3^\circ} \text{ Ом},$$

$$\underline{Z}_{23} = \frac{\underline{Z}_2 \cdot \underline{Z}_3}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} = \frac{28,64 \cdot e^{j65,2^\circ} \cdot 33,29 \cdot e^{-j57,3^\circ}}{12 + j26 + 18 - j28} = 31,70 \cdot e^{j11,8^\circ} = 31,04 + j6,47 \text{ Ом}.$$

Вхідний опір кола і струми:

$$\underline{Z}_{\text{вх}} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_{23} = 6 + j18 + 31,04 + j6,47 = 37,04 + j24,47 = 44,39 \cdot e^{j33,5^\circ} \text{ Ом},$$

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}_{\text{вх}}} = \frac{220}{44,39 e^{j33,5^\circ}} = 4,96 \cdot e^{-j33,5^\circ} \text{ A},$$

$$\underline{I}_2 = \underline{I}_1 \cdot \frac{\underline{Z}_{23}}{\underline{Z}_2} = 4,96 \cdot e^{-j33,5^\circ} \cdot \frac{31,7 \cdot e^{j11,8^\circ}}{28,64 \cdot e^{j65,2^\circ}} = 5,49 \cdot e^{-j86,9^\circ} \text{ A},$$

$$\underline{I}_3 = \underline{I}_1 \cdot \frac{\underline{Z}_{23}}{\underline{Z}_3} = 4,96 \cdot e^{-j33,5^\circ} \cdot \frac{31,7 \cdot e^{j11,8^\circ}}{33,29 \cdot e^{-j57,3^\circ}} = 4,72 \cdot e^{j35,6^\circ} \text{ A}.$$

4. Активна потужність, яка передається магнітним полем із першої котушки у другу:

$$P_{1 \rightarrow 2} = x_M \cdot I_1 \cdot I_2 \cdot \sin(\psi_{i1} - \psi_{i2}) = 8,496 \cdot 5,49 \cdot \sin(-33,5^\circ + 86,9^\circ) = 174,9 \text{ Вт.}$$

### 3.5.2 Задачі для самостійного розв'язання

**ЗАДАЧА 3.55.** Для схем рис. 3.57, а і б скласти систему рівнянь Кірхгофа і систему рівнянь для контурних струмів.

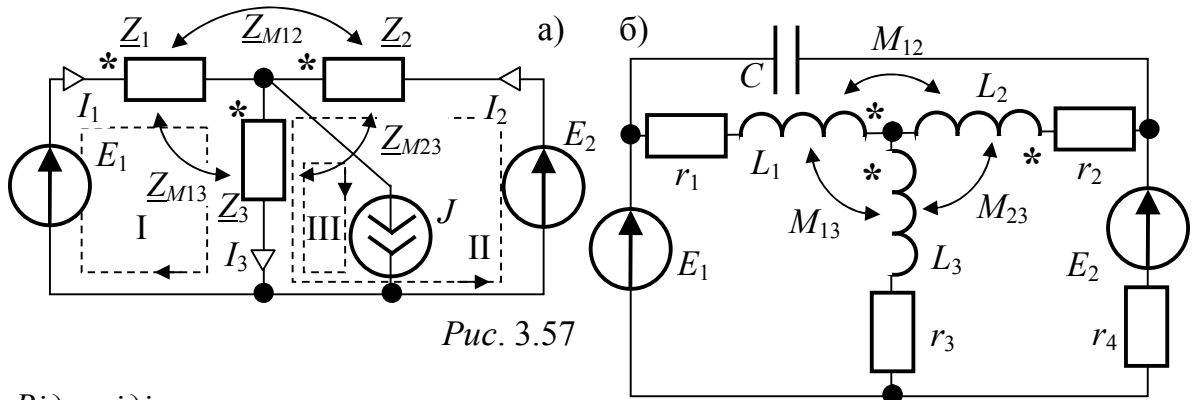


Рис. 3.57

Відповіді:

а) 
$$\begin{cases} I_1 + I_2 - I_3 - J = 0; \\ Z_1 \cdot I_1 + Z_3 \cdot I_3 - Z_{M12} \cdot I_2 + Z_{M13} \cdot I_3 + Z_{M13} \cdot I_1 - Z_{M23} \cdot I_2 = E_1; \\ Z_2 \cdot I_2 + Z_3 \cdot I_3 - Z_{M12} \cdot I_1 - Z_{M23} \cdot I_3 - Z_{M13} \cdot I_2 + Z_{M13} \cdot I_1 = E_2. \end{cases}$$

$$\begin{cases} I_{III} = J; \\ (Z_1 + Z_3 + 2Z_{M13}) \cdot I_I + (Z_3 - Z_{M12} - Z_{M23} + Z_{M13}) \cdot I_{II} + (-Z_3 - Z_{M13}) \cdot I_{III} = E_1; \\ (Z_3 - Z_{M12} - Z_{M23} + Z_{M13}) \cdot I_I + (Z_2 + Z_3 - 2Z_{M23}) \cdot I_{II} + (-Z_3 + Z_{M23}) \cdot I_{III} = E_2. \end{cases}$$

б) 
$$\begin{cases} I_1 + I_2 - I_3 = 0; & (r_1 + jx_1 - jx_{M13}) \cdot I_1 + (-jx_{M12}) \cdot I_2 + (r_3 + jx_3 - jx_{M13}) \cdot I_3 + jx_{M23} \cdot I_2 = E_1; \\ I_{E1} + I_C - I_1 = 0; & (-jx_{M12}) \cdot I_1 + (r_2 + jx_2 + jx_{M23}) \cdot I_2 + (r_3 + jx_3 + jx_{M23}) \cdot I_3 + r_4 \cdot I_{E2} - jx_{M13} \cdot I_3 = E_2; \\ I_{E2} - I_C - I_2 = 0; & -jx_C \cdot I_C + (r_1 + jx_1 + jx_{M12}) \cdot I_1 + (-r_2 - jx_2 - jx_{M12}) \cdot I_2 + (-jx_{M13} - jx_{M23}) \cdot I_3 = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} (r_1 + jx_1 + r_3 + jx_3 - j2x_{M13}) \cdot I_I + (r_3 + jx_3 - jx_{M12} + jx_{M23} - jx_{M13}) \cdot I_{II} + \\ \quad + (r_1 + jx_1 + jx_{M12} - jx_{M13} - jx_{M23}) \cdot I_{III} = E_1; \\ (r_3 + jx_3 - jx_{M12} + jx_{M23} - jx_{M13}) \cdot I_I + (r_2 + jx_2 + r_3 + jx_3 + j2x_{M23}) \cdot I_{II} + \\ \quad + (-r_2 - jx_2 - jx_{M12} - jx_{M13} - jx_{M23}) \cdot I_{III} = E_2; \\ (r_1 + jx_1 + jx_{M12} - jx_{M13} - jx_{M23}) \cdot I_I + (-r_2 - jx_2 - jx_{M12} - jx_{M13} - jx_{M23}) \cdot I_{II} + \\ \quad + (-jx_C + r_1 + jx_1 + r_2 + jx_2 + j2x_{M12}) \cdot I_{III} = 0. \end{cases}$$

**ЗАДАЧА 3.56.** Виконати розмітку однойменних (однополярних) затискачів котушок рис. 3.58.

Відповідь: пари однойменних затискачів: верхній затискач першої котушки і нижній – другої; верхній затискач другої котушки і нижній – третьої; верхній затискач першої котушки і нижній – третьої.

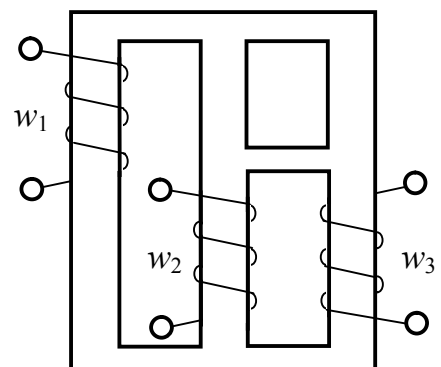


Рис. 3.58

**ЗАДАЧА 3.57.** У схемі рис. 3.59 визначити показ вольтметра, якщо  $U = 220 \text{ В}$ , активні опори і індуктивності обмоток 1, 2, 3, відповідно,

$$r_1 = 10 \text{ Ом}, L_1 = 0,3 \text{ Гн}, r_2 = 10 \text{ Ом},$$

$$L_2 = 0,4 \text{ Гн}, r_3 = 20 \text{ Ом}, L_3 = 0,6 \text{ Гн};$$

взаємні індуктивності

$$M_{12} = 0,318 \text{ Гн}, M_{13} = 0,4 \text{ Гн}, M_{23} = 0,559 \text{ Гн};$$

$$\text{Ємність } C = 20 \text{ мкФ}; \text{ частота } f = 50 \text{ Гц}.$$

*Відповідь:* вольтметр показує 565 В.

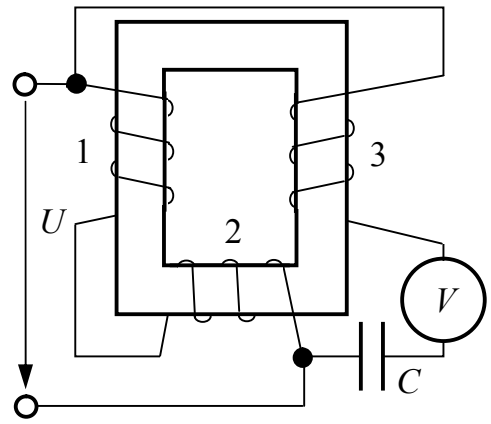


Рис. 3.59

**ЗАДАЧА 3.58.** Розрахувати струми у всіх вітках кола рис. 3.60, якщо  $U = 300 \text{ В}$ ,

$$\underline{Z}_1 = 10 + j10 \text{ Ом}, \underline{Z}_2 = 10 + j15 \text{ Ом}, x_M = 10 \text{ Ом}, x_C = 25 \text{ Ом}.$$

*Відповіді:*  $\underline{I} = 20 + j20 \text{ А}$ ,  $\underline{I}_1 = 10 \text{ А}$ ,  $\underline{I}_2 = 10 + j20 \text{ А}$ .

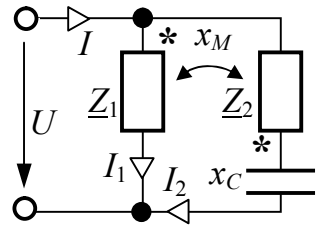


Рис. 3.60

**ЗАДАЧА 3.59.** У схемі рис. 3.61 визначити струми у всіх вітках, а також активну потужність, що передається через взаємну індуктивність, якщо:  $U = 300 \text{ В}$ ,

$$r_1 = r_2 = x_M = 25 \text{ Ом}, x_1 = x_2 = 50 \text{ Ом}.$$

*Відповіді:*  $\underline{I}_1 = 6 - j8 \text{ А}$ ,  $\underline{I}_2 = 2 - j2 \text{ А}$ ,

$$\underline{I}_3 = 4 - j6 \text{ А}, P_M = 99,6 \text{ Вт}.$$

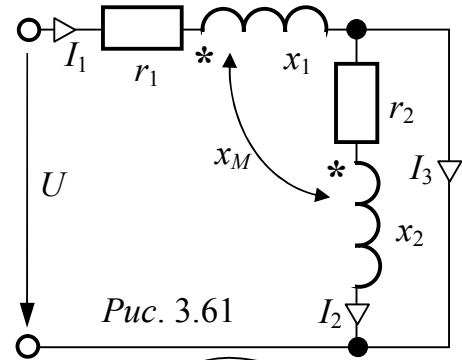


Рис. 3.61

### 3.5.3 Задачі підвищеної складності

**ЗАДАЧА 3.60.** Знайти показ ватметра схеми рис. 3.62, якщо  $J = 10 \text{ А}$ ,

$$r_1 = r_2 = 10 \text{ Ом}, x_1 = 20 \text{ Ом}, x_2 = 10 \text{ Ом},$$

$$x_M = 10 \text{ Ом}, x_3 = 20 \text{ Ом}, x_4 = 10 \text{ Ом}.$$

*Відповідь:*  $P_W = 2000 \text{ Вт}$ .

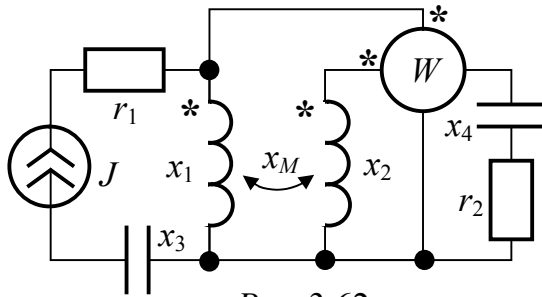


Рис. 3.62

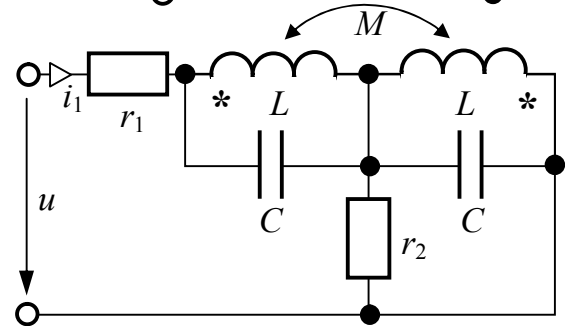


Рис. 3.63

**ЗАДАЧА 3.61.** В схемі рис. 3.63

$$u(t) = 120\sqrt{2} \sin(\omega t + 45^\circ) \text{ В}, r_1 = r_2 = x_C = 60 \text{ Ом}, x_L = 40 \text{ Ом}, x_M = 20 \text{ Ом}.$$

Визначити миттєве і діюче значення струму  $i_1$ .

*Відповідь:*  $i_1(t) = 2 \cdot \sin(\omega t) \text{ А}$ ,  $I_1 = \sqrt{2} \text{ А}$ .

**ЗАДАЧА 3.62.** Мостова схема рис. 3.64,а живиться від джерела синусоїдної напруги з діючим значенням  $E = 300 \text{ В}$ .

Параметри схеми:  $r_1 = 10 \text{ Ом}$ ,  $x_1 = 15 \text{ Ом}$ ,  $r_2 = 30 \text{ Ом}$ ,  $x_2 = 20 \text{ Ом}$ ,  
 $x_{M12} = 13 \text{ Ом}$ ,  $x_3 = 25 \text{ Ом}$ ,  $r_4 = 16 \text{ Ом}$ ,  $x_5 = 40 \text{ Ом}$ ,  $x_6 = 12 \text{ Ом}$ .

Сформувати систему розрахункових рівнянь для визначення струмів різними методами за допомогою топологічних матриць:

- 1) методом рівнянь Кірхгофа;
- 2) методом контурних струмів;
- 3) методом вузлових потенціалів.

Розрахувати струми і перевірити баланси потужностей.

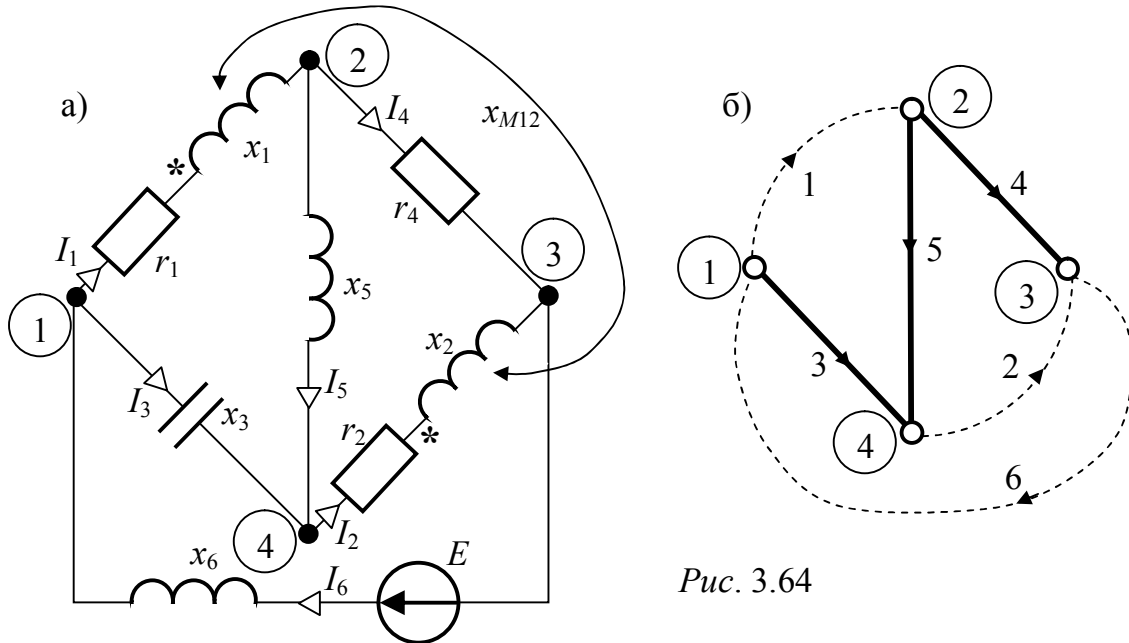


Рис. 3.64

### Розв'язання

Вибираємо довільні напрями струмів у вітках схеми (вказані на рис. 3.64,а) і будуємо граф електричного кола такий, щоб індуктивно зв'язані вітки (перша і друга) були вітками зв'язку. Такий граф наведений на рис. 3.64,б, в якому вітки № 3, 4, 5 є вітками дерева.

Прийmemo комплекс  $\underline{E} = E = 300 \text{ В}$ . Комплексні опори віток схеми:

$$\begin{aligned} \underline{Z}_1 &= r_1 + jx_1 = 10 + j15 \text{ Ом}, & \underline{Z}_2 &= r_2 + jx_2 = 30 + j20 \text{ Ом}, \\ \underline{Z}_{M12} &= jx_{M12} = j13 \text{ Ом}, & \underline{Z}_3 &= -jx_3 = j25 \text{ Ом}, \\ \underline{Z}_4 &= r_4 = 16 \text{ Ом}, & \underline{Z}_5 &= jx_5 = j40 \text{ Ом}, & \underline{Z}_6 &= jx_6 = j12 \text{ Ом}. \end{aligned}$$

Складемо матриці:

- вузлова матриця з'єднань при базисному вузлі №4 з потенціалом  $\varphi_4 = 0$ :

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

- матриця головних контурів:

$$[B] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix};$$

- матриця опорів віток: 
$$[\underline{Z}_6] = \begin{bmatrix} \underline{Z}_1 & \underline{Z}_{M12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \underline{Z}_{M12} & \underline{Z}_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \underline{Z}_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \underline{Z}_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \underline{Z}_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \underline{Z}_6 \end{bmatrix};$$

- матриця-стовпець ЕРС віток:  $[\underline{E}_6] = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ E]^T$ ;

- матриця-стовпець струмів джерел струмів віток:

$$[\underline{J}_6] = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T;$$

- матриця-стовпець невідомих струмів віток:

$$[\underline{I}_6] = [I_1 \ I_2 \ I_3 \ I_4 \ I_5 \ I_6]^T;$$

- матриця-стовпець напруг віток:  $[\underline{U}_6] = [U_1 \ U_2 \ U_3 \ U_4 \ U_5 \ U_6]^T$ ;

- матриця-стовпець контурних струмів (або струмів віток зв'язку)

$$[\underline{I}_k] = [\underline{I}_3] = [I_1 \ I_2 \ I_6]^T;$$

- матриця-стовпець потенціалів вузлів:  $[\underline{\varphi}] = [\varphi_1 \ \varphi_2 \ \varphi_3]^T$ .

### Рівняння Кірхгофа

За першим законом Кірхгофа  $[A] \cdot [\underline{I}_6] = [0]$ . Після перемножування матриць отримуємо систему рівнянь у розгорненому вигляді

$$\begin{cases} I_1 + I_3 - I_6 = 0; \\ -I_1 + I_4 + I_5 = 0; \\ -I_2 - I_4 + I_6 = 0. \end{cases} \quad (3.5)$$

Для запису системи рівнянь за другим законом Кірхгофа використовуємо наступну редакцію цього закону:

$$[\underline{B}] \cdot [\underline{Z}_6] \cdot [\underline{I}_6] = [\underline{B}] \cdot \{[\underline{E}_6] - [\underline{Z}_6] \cdot [\underline{J}_6]\}.$$

Після перемножування матриць отримуємо розгорнену систему рівнянь, складену для досліджуваної схеми за другим законом Кірхгофа:

$$\begin{cases} Z_1 \cdot I_1 + Z_{M12} \cdot I_2 - Z_3 \cdot I_3 + Z_5 \cdot I_5 = 0; \\ Z_{M12} \cdot I_1 + Z_2 \cdot I_2 - Z_4 \cdot I_4 + Z_5 \cdot I_5 = 0; \\ Z_3 \cdot I_3 + Z_4 \cdot I_4 - Z_5 \cdot I_5 + Z_6 \cdot I_6 = E. \end{cases} \quad (3.6)$$

Відзначимо, що система шести рівнянь (система (3.5) + система (3.6)) може бути складена за схемою без вживання матриць.

### Контурні рівняння

У матричній формі контурне рівняння має вигляд  $[\underline{Z}_k] \cdot [\underline{I}_k] = [\underline{E}_k]$ , де контурні ЕРС  $[\underline{E}_k] = [\underline{B}] \cdot \{[\underline{E}_6] - [\underline{Z}_6] \cdot [\underline{J}_6]\}$  представляють ту ж матрицю-стовпець, яка наведена в системі рівнянь (3.6), записаних за другим законом Кірхгофа.

Розрахуємо матрицю контурних опорів  $[\underline{Z}_k] = [\underline{B}] \cdot [\underline{Z}_6] \cdot [\underline{B}]^T$  шляхом перемножування матриць. Отримуємо симетричну відносно головної діагоналі матрицю

$$[\underline{Z}_k] = \begin{bmatrix} \underline{Z}_1 + \underline{Z}_3 + \underline{Z}_5 & \underline{Z}_{M12} + \underline{Z}_5 & -\underline{Z}_3 - \underline{Z}_5 \\ \underline{Z}_{M12} + \underline{Z}_5 & \underline{Z}_2 + \underline{Z}_4 + \underline{Z}_5 & -\underline{Z}_4 - \underline{Z}_5 \\ -\underline{Z}_3 - \underline{Z}_5 & -\underline{Z}_4 - \underline{Z}_5 & \underline{Z}_3 + \underline{Z}_4 + \underline{Z}_5 + \underline{Z}_6 \end{bmatrix}.$$

Система контурних рівнянь у розгорненому вигляді представляється системою (3.7):

$$\begin{cases} (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_3 + \underline{Z}_5) \cdot I_1 + (\underline{Z}_{M12} + \underline{Z}_5) \cdot I_2 - (\underline{Z}_3 + \underline{Z}_5) \cdot I_6 = 0; \\ (\underline{Z}_{M12} + \underline{Z}_5) \cdot I_1 + (\underline{Z}_2 + \underline{Z}_4 + \underline{Z}_5) \cdot I_2 - (\underline{Z}_4 + \underline{Z}_5) \cdot I_6 = 0; \\ -(\underline{Z}_3 + \underline{Z}_5) \cdot I_1 - (\underline{Z}_4 + \underline{Z}_5) \cdot I_2 + (\underline{Z}_3 + \underline{Z}_4 + \underline{Z}_5 + \underline{Z}_6) \cdot I_6 = \underline{E}. \end{cases} \quad (3.7)$$

Відзначимо, що ця система також може бути складена за вихідною схемою без вживання матриць.

### Вузлові рівняння

У матричній формі вузлові рівняння представляються співвідношенням

$$[\underline{Y}_v] \cdot [\underline{\Phi}] = [\underline{J}_v],$$

матриця вузлових струмів  $[\underline{J}_v] = [\underline{A}] \cdot \{[\underline{J}_s] - [\underline{Y}_s] \cdot [\underline{E}_s]\},$

матриця провідностей віток  $[\underline{Y}_s] = [\underline{Z}_s]^{-1},$

матриця вузлових провідностей  $[\underline{Y}_v] = [\underline{A}] \cdot [\underline{Y}_s] \cdot [\underline{A}]^T.$

Розрахуємо матрицю провідностей віток для даного прикладу і зворотну матрицю опорів віток, при цьому головний визначник матриці опорів віток  $\Delta = (\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_2 - \underline{Z}_{M12}^2) \underline{Z}_3 \underline{Z}_4 \underline{Z}_5 \underline{Z}_6,$  а матриця

$$[\underline{Y}_s] = \frac{1}{\Delta} \cdot \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} & A_{41} & A_{51} & A_{61} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} & A_{42} & A_{52} & A_{62} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} & A_{43} & A_{53} & A_{63} \\ A_{14} & A_{24} & A_{34} & A_{44} & A_{54} & A_{64} \\ A_{15} & A_{25} & A_{35} & A_{45} & A_{55} & A_{65} \\ A_{16} & A_{26} & A_{36} & A_{46} & A_{56} & A_{66} \end{bmatrix},$$

де  $A_{ij}$  –алгебричне доповнення матриці  $[\underline{Z}_s].$  В результаті отримуємо

$$[\underline{Y}_s] = \begin{bmatrix} \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 - \underline{Z}_{M12}^2} & \frac{\underline{Z}_{M12}}{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 - \underline{Z}_{M12}^2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\underline{Z}_{M12}}{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 - \underline{Z}_{M12}^2} & \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 - \underline{Z}_{M12}^2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\underline{Z}_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\underline{Z}_4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\underline{Z}_5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\underline{Z}_6} \end{bmatrix}.$$



Знаходимо матрицю вузлових струмів  $[\underline{J}_y] = -[A] \cdot [\underline{Y}_6] \cdot [\underline{E}_6] = \begin{bmatrix} \frac{E}{Z_6} \\ 0 \\ \frac{E}{Z_6} \\ -\frac{E}{Z_6} \end{bmatrix}$ .

Розрахуємо матрицю вузлових провідностей (позначимо  $Z_{M12} = Z_M$ ):

$$[\underline{Y}_y] = [A] \cdot [\underline{Y}_6] \cdot [A]^T = \begin{bmatrix} \frac{Z_2}{Z_1 Z_2 - Z_M^2} + \frac{1}{Z_3} + \frac{1}{Z_6} & -\frac{Z_2}{Z_1 Z_2 - Z_M^2} & -\frac{Z_M}{Z_1 Z_2 - Z_M^2} - \frac{1}{Z_6} \\ -\frac{Z_2}{Z_1 Z_2 - Z_M^2} & \frac{Z_2}{Z_1 Z_2 - Z_M^2} + \frac{1}{Z_4} + \frac{1}{Z_5} & \frac{Z_M}{Z_1 Z_2 - Z_M^2} - \frac{1}{Z_4} \\ -\frac{Z_M}{Z_1 Z_2 - Z_M^2} - \frac{1}{Z_6} & \frac{Z_M}{Z_1 Z_2 - Z_M^2} - \frac{1}{Z_4} & \frac{Z_1}{Z_1 Z_2 - Z_M^2} + \frac{1}{Z_4} + \frac{1}{Z_6} \end{bmatrix}$$

У розгорненому вигляді система вузлових рівнянь представляє систему (3.8):

$$\begin{cases} \varphi_1 \cdot \left( \frac{Z_2}{Z_1 Z_2 - Z_M^2} + \frac{1}{Z_3} + \frac{1}{Z_6} \right) - \varphi_2 \cdot \left( \frac{Z_2}{Z_1 Z_2 - Z_M^2} \right) - \varphi_3 \cdot \left( \frac{Z_M}{Z_1 Z_2 - Z_M^2} + \frac{1}{Z_6} \right) = \frac{E_6}{Z_6}; \\ -\varphi_1 \cdot \left( \frac{Z_2}{Z_1 Z_2 - Z_M^2} \right) + \varphi_2 \cdot \left( \frac{Z_2}{Z_1 Z_2 - Z_M^2} + \frac{1}{Z_4} + \frac{1}{Z_5} \right) - \varphi_3 \cdot \left( \frac{-Z_M}{Z_1 Z_2 - Z_M^2} + \frac{1}{Z_4} \right) = 0; \\ -\varphi_1 \cdot \left( \frac{Z_M}{Z_1 Z_2 - Z_M^2} + \frac{1}{Z_6} \right) - \varphi_2 \cdot \left( \frac{-Z_M}{Z_1 Z_2 - Z_M^2} + \frac{1}{Z_4} \right) + \\ + \varphi_3 \cdot \left( \frac{Z_1}{Z_1 Z_2 - Z_M^2} + \frac{1}{Z_4} + \frac{1}{Z_6} \right) = -\frac{E_6}{Z_6}. \end{cases} \quad (3.8)$$

Очевидно, що цю систему рівнянь власноруч (без матриць) за вихідною схемою скласти неможливо.

Для наведеної мостової схеми контурні рівняння (3.7) і вузлові рівняння (3.8) включають по три рівняння і вимагають однакового обсягу роботи для їх розв'язання.

Розв'язання контурних рівнянь (3.7), які після підстановки чисел представляються системою (3.9)

$$\begin{cases} (10+j30) \cdot I_1 + j53 \cdot I_2 - j15 \cdot I_6 = 0; \\ j53 \cdot I_1 + (46+j60) \cdot I_2 - (16+j40) \cdot I_6 = 0; \\ -j15 \cdot I_1 - (16+j40) \cdot I_2 + (16+j27) \cdot I_6 = 300, \end{cases} \quad (3.9)$$

наступне  $I_1 = 0,072 - j7,496 A$ ,  $I_2 = 5,105 + j2,219 A$ ,  $I_6 = 13,185 - j7,201 A$ .

Струми віток розраховуємо по одержаних контурних:

$$I_1 = 0,072 - j7,496 = 7,496 \cdot e^{-j89,45^\circ} A,$$

$$I_2 = 5,105 + j2,219 = 5,566 \cdot e^{j23,49^\circ} A,$$

$$I_3 = I_6 - I_1 = 13,112 + j0,295 = 13,116 \cdot e^{j1,29^\circ} A,$$

$$I_4 = I_6 - I_2 = 8,08 - j9,419 = 12,41 \cdot e^{-j49,38^\circ} A,$$

$$\underline{I}_5 = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 - \underline{I}_6 = -8,007 + j1,924 = 8,235 \cdot e^{j166,49^\circ} \text{ A,}$$

$$\underline{I}_6 = 13,185 - j7,201 = 15,023 \cdot e^{-j28,64^\circ} \text{ A.}$$

Перевіримо баланси потужностей.

Потужність джерела живлення

$$\underline{S} = \underline{E} \cdot \underline{I}_6^* = P_\Gamma + jQ_\Gamma = 300 \cdot (13,185 + j7,201) = 3955 + j2160 \text{ ВА.}$$

Активна потужність приймачів

$$\Sigma P_\Pi = I_1^2 \cdot r_1 + I_2^2 \cdot r_2 + I_4^2 \cdot r_4 = 7,496^2 \cdot 10 + 5,566^2 \cdot 30 + 12,41^2 \cdot 16 = 3955 \text{ Вт.}$$

Реактивна потужність приймачів

$$\begin{aligned} \Sigma Q_\Pi &= I_1^2 \cdot x_1 + I_2^2 \cdot x_2 - I_3^2 \cdot x_3 + I_5^2 \cdot x_5 + I_6^2 \cdot x_6 + 2 \cdot \text{Im}(\underline{I}_1 \cdot \underline{I}_2^* \cdot jx_M) = \\ &= 7,496^2 \cdot 15 + 5,566^2 \cdot 20 - 13,116^2 \cdot 25 + 8,235^2 \cdot 40 + 15,023^2 \cdot 12 + \\ &\quad + 2 \cdot 7,496 \cdot 5,566 \cdot 13 \cdot \sin(-89,45^\circ - 23,49^\circ + 90^\circ) = 2160 \text{ вар.} \end{aligned}$$

Баланс потужностей  $\underline{S} = \Sigma P_\Pi + \Sigma Q_\Pi$  збігається.

### 3.5.4 Застосування ПЕОМ при розрахунку кіл із взаємною індуктивністю

**ЗАДАЧА 3.63.** У схемі рис. 3.57,а розрахувати струми у всіх вітках кола, якщо  $\underline{E}_1 = 220 \text{ В}$ ,  $\underline{E}_2 = 220 \cdot e^{j120^\circ} \text{ В}$ ,  $\underline{J} = -j5 \text{ А}$ ,  $\underline{Z}_1 = 10 + j10 \text{ Ом}$ ,  $\underline{Z}_2 = 20 + j30 \text{ Ом}$ ,  $\underline{Z}_3 = 40 - j15 \text{ Ом}$ ,  $M_{12} = 31 \text{ мГн}$ ,  $M_{13} = 50 \text{ мГн}$ ,  $M_{23} = 70 \text{ мГн}$ . Частота  $50 \text{ Гц}$ . Скласти баланс потужностей.

#### Програма розв'язання задачі в системі MathCAD

Вихідні дані

$$\begin{aligned} j &:= \sqrt{-1} & E1 &:= 220 & E2 &:= 220 \cdot e^{j \cdot 120 \cdot \text{deg}} & J &:= -j \cdot 5 & \text{ORIGIN} &:= 1 \\ Z1 &:= 10 + j \cdot 10 & Z2 &:= 20 + j \cdot 30 & Z3 &:= 40 - j \cdot 15 \\ M12 &:= 0.031 & M13 &:= 0.05 & M23 &:= 0.07 \end{aligned}$$

Визначимо величини опорів взаємної індукції

$$\omega := 100 \cdot \pi \quad ZM12 := j \cdot \omega \cdot M12 \quad ZM13 := j \cdot \omega \cdot M13 \quad ZM23 := j \cdot \omega \cdot M23.$$

Розрахунок струмів проведемо методом контурних струмів (див. рис. 3.57,а) з урахуванням того, що третій контурний струм дорівнює струму джерела  $J$ .

Матриці контурних опорів і контурних ЕРС

$$\begin{aligned} Z_k &:= \begin{pmatrix} Z1 + Z3 + 2 \cdot ZM13 & Z3 - ZM12 + ZM13 - ZM23 \\ Z3 - ZM12 + ZM13 - ZM23 & Z2 + Z3 - 2 \cdot ZM23 \end{pmatrix} \\ E_k &:= \begin{bmatrix} E1 + J \cdot (Z3 + ZM13) \\ E2 + J \cdot (Z3 - ZM23) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\text{Контурні струми} \quad I_k := Z_k^{-1} \cdot E_k \quad I_k = \begin{pmatrix} -0.582 - 8.225i \\ -2.191 + 3.966i \end{pmatrix}$$

$$\text{Струми віток} \quad I1 := I_{k1} \quad I2 := I_{k2} \quad I3 := -J + I_{k1} + I_{k2}$$

$$I1 = -0.582 - 8.225i \quad I2 = -2.191 + 3.966i \quad I3 = -2.773 + 0.741i$$

$$\text{Потужність джерел} \quad S := E1 \cdot \overline{I1} + E2 \cdot \overline{I2} + J \cdot (-I3 \cdot Z3 - I1 \cdot ZM13 + I2 \cdot ZM23)$$

$$S = 1.42 \times 10^3 + 1.245i \times 10^3$$

Напруга взаємоіндукції на індуктивно зв'язаних елементах

$$UM1 := -I2 \cdot ZM12 + I3 \cdot ZM13 \quad UM2 := -I1 \cdot ZM12 - I3 \cdot ZM23$$

$$UM3 := I1 \cdot ZM13 - I2 \cdot ZM23$$

Реактивна потужність взаємоіндукції

$$QM := UM1 \cdot \bar{I1} + UM2 \cdot \bar{I2} + UM3 \cdot \bar{I3} \quad QM = 73.123i$$

Потужність приймачів

$$SPI := (|I1|)^2 \cdot Z1 + (|I2|)^2 \cdot Z2 + (|I3|)^2 \cdot Z3 + QM \quad SPI = 1.42 \times 10^3 + 1.245i \times 10^3$$

Баланс потужностей  $S = SPI$  виконується.

**ЗАДАЧА 3.64.** Розрахувати струми в схемі рис. 3.65,а, якщо

$$e_2(t) = 200\sqrt{2} \sin(\omega t - 30^\circ) \text{ В}, \quad e_3(t) = 100\sqrt{2} \sin(\omega t - 90^\circ) \text{ В}, \quad e_4(t) = 150\sqrt{2} \sin \omega t \text{ В}, \\ e_5(t) = 250\sqrt{2} \cdot \sin(\omega t + 45^\circ) \text{ В}, \quad j_{k4}(t) = 8\sqrt{2} \cdot \sin(\omega t + 90^\circ) \text{ А}, \quad r_1 = 10 \text{ Ом}, \quad x_1 = \\ = 15 \text{ Ом}, \quad r_2 = 30 \text{ Ом}, \quad x_2 = 20 \text{ Ом}, \quad x_{M12} = 12 \text{ Ом}, \quad r_3 = 25 \text{ Ом}, \quad r_4 = 16 \text{ Ом}, \quad x_4 = \\ = 12 \text{ Ом}, \quad x_5 = 40 \text{ Ом}, \quad r_6 = 14 \text{ Ом}, \quad x_6 = 18 \text{ Ом}, \quad r_7 = 24 \text{ Ом}, \quad x_7 = 16 \text{ Ом}, \quad x_{M67} = 13 \text{ Ом}.$$

### Розв'язання

Вибираємо довільні напрями струмів у вітках (вказані на рис. 3.65,а) і будуємо граф схеми (рис. 3.65,б).

Звернімо увагу на те, що в наведеній схемі є одна узагальнена вітка №4 із струмом вітки  $i_4$  і струмом опору вітки  $i_{r4}$ .

Прийmemo за базисний вузол №4 з комплексним потенціалом  $\varphi_4 = 0$ . У наведеній схемі три вузли з невідомими потенціалами і чотири головні контури. У цьому випадку більш раціонально розв'язувати задачу розрахунку струмів методом вузлових потенціалів.

Застосовуємо ПЕОМ для формування і розв'язання розрахункових рівнянь.

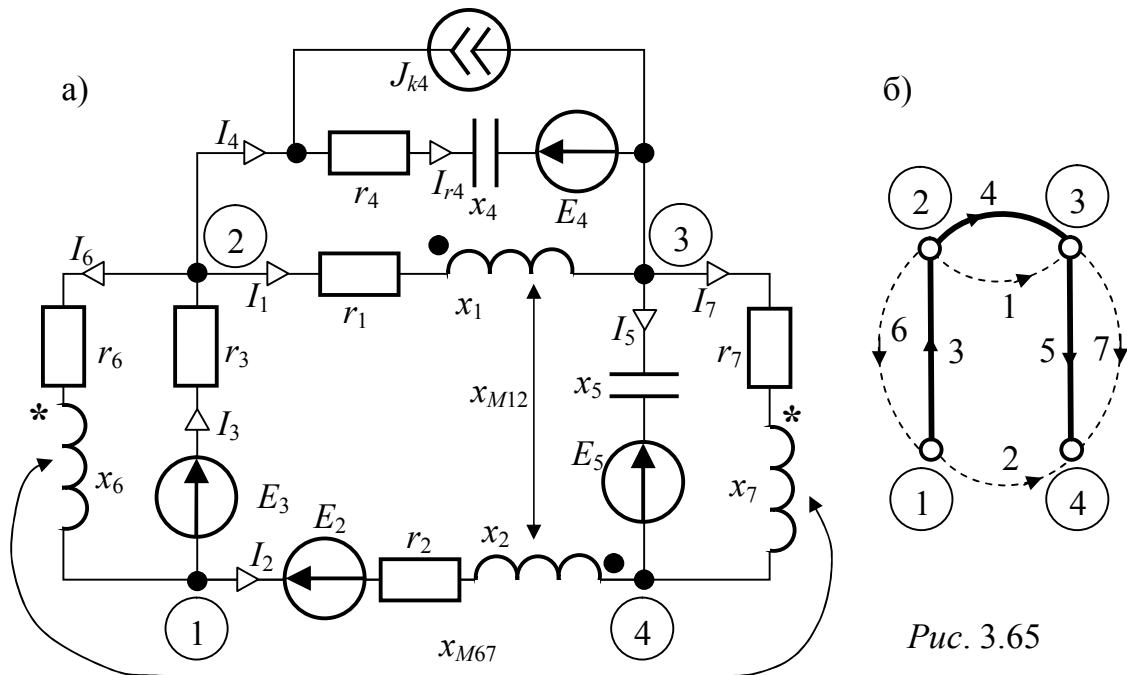


Рис. 3.65

### Програма розв'язання задачі в системі MathCAD

$$\text{ORIGIN} := 1 \quad j := \sqrt{-1}$$

Опори

$$Z1 := 10 + j \cdot 15 \quad Z2 := 30 + j \cdot 20 \quad Z3 := 25 \quad Z4 := 16 - j \cdot 12 \quad Z5 := -j \cdot 40 \\ Z6 := 14 + j \cdot 18 \quad Z7 := 24 + j \cdot 16 \quad ZM12 := j \cdot 12 \quad ZM67 := j \cdot 13$$

Джерела

$$E2 := 200 \cdot e^{-j \cdot 30 \cdot \text{deg}} \quad E3 := 100 \cdot e^{-j \cdot 90 \cdot \text{deg}} \quad E4 := 150 \quad E5 := 250 \cdot e^{j \cdot 45 \cdot \text{deg}} \quad J4 := j \cdot 8$$

Матриці ЕРС і джерел струму віток

$$E := (0 \quad -E2 \quad E3 \quad -E4 \quad -E5 \quad 0 \quad 0) \quad J := (0 \quad 0 \quad 0 \quad J4 \quad 0 \quad 0 \quad 0)$$

Матриці з'єднань (A) і опорів віток (Z)

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$Z := \begin{pmatrix} Z1 & -ZM12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -ZM12 & Z2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Z3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Z4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Z5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Z6 & ZM67 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ZM67 & Z7 \end{pmatrix}$$

Матриці провідностей, сумарних вузлових струмів і потенціалів вузлів

$$Y := A \cdot Z^{-1} \cdot A^T \quad Jc := A \cdot J^T - A \cdot Z^{-1} \cdot E^T \quad \varphi := Y^{-1} \cdot Jc$$

$$\varphi = \begin{pmatrix} 15.279 + 44.058i \\ -32.669 + 49.246i \\ -153.695 - 11.089i \end{pmatrix} \quad I = \begin{pmatrix} 3.651 - 0.261i \\ -0.682 + 6.717i \\ 1.918 - 4.208i \\ -2.969 - 6.456i \\ 4.697 - 8.262i \\ 1.236 + 2.509i \\ -4.015 + 1.545i \end{pmatrix}$$

$$\text{Струми віток} \quad I := -J^T + Z^{-1} \cdot (A^T \cdot \varphi + E^T)$$

Перевірка балансу потужностей

Потужності джерел

$$S := -E2 \cdot \bar{I}_2 + E3 \cdot \bar{I}_3 - E4 \cdot (I_4 + (J^T)_4) - E5 \cdot \bar{I}_5 + (\varphi_2 - \varphi_3) \cdot (J^T)_4 \\ S = 2.769 \cdot 10^3 - 2.124i \cdot 10^3$$

Активні потужності приймачів

$$P := \sum_{q=1}^3 [ (|I_q|^2) \cdot \text{Re}(Z_{q,q}) ] + \sum_{q=5}^7 [ (|I_q|^2) \cdot \text{Re}(Z_{q,q}) ] + (|I_4 + (J^T)_4|^2) \cdot \text{Re}(Z_{4,4}) \\ P = 2.769 \cdot 10^3$$

Реактивні потужності приймачів

$$Q := \sum_{q=1}^3 [ (|I_q|^2) \cdot \text{Im}(Z_{q,q}) ] + \sum_{q=5}^7 [ (|I_q|^2) \cdot \text{Im}(Z_{q,q}) ] + (|I_4 + (J^T)_4|^2) \cdot \text{Im}(Z_{4,4}) + \\ + 2 \cdot \text{Im}(I_1 \cdot \bar{I}_2 \cdot \text{Im}(Z_{1,2})) + 2 \cdot \text{Im}(I_6 \cdot \bar{I}_7 \cdot \text{Im}(Z_{6,7})) \\ Q = -2.124 \cdot 10^3$$