14.2.3 Найпростіші приймальні антени

ЗАДАЧА 14.23. Штирьова антена радіоприймача (кімнатна антена) є прямолінійним провідником завдовжки $l = 60$ *см*, що знаходиться у повітрі, частота сигналу $f = 1$ *Мгц* (діапазон середніх хвиль). Діюче значення напруженості електричного поля в місці розташування антени $E = 4$ *мВ/м*.

Розташувати антену так, щоб в ній наводилася найбільша ЕРС і розрахувати її діюче значення.

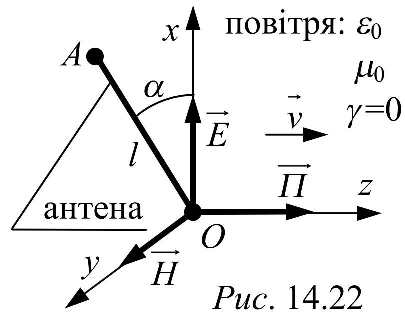

Рис. 14.22

Розв'язання

Виходимо з того, що приймальна антена знаходиться у дальній зоні випромінювача на відстані $R >> \lambda$, де λ – довжина електромагнітної хвилі

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{c}{f\sqrt{\varepsilon\mu}}.$$

Для повітряного середовища даного прикладу: $\lambda = \dfrac{3\cdot 10^8}{1\cdot 10^6} = 300$ *м*,

що значно більше лінійного розміру кімнатної антени завдовжки $l = 60$ *см*, у зв'язку з чим можна вважати, що сигнал уздовж антени має постійну фазу.

На рис. 14.22 показані напрями векторів електромагнітної хвилі, що поширюється у напрямі зростання координати z.

Розташуємо антену OA в площині однакового фазового стану і розрахуємо індуковану в ній ЕРС

$$\underline{e} = \int_O^A \vec{\underline{E}}\,\vec{dl} = \int_O^A \underline{E}dl\cdot cos\,\alpha\,.$$

Для отримання максимальної ЕРС необхідно виконати умову $\alpha = 0$, сумістивши антену OA з віссю OX декартової системи координат. Значення максимальної ЕРС:

$$e_{max} = E\cdot l = 4\cdot 0{,}6 = 2{,}4 \text{ мВ}.$$

ЗАДАЧА 14.24. Штирьова антена розташована у діелектрику з відносними проникностями $\varepsilon = 4$, $\mu = 1$. Довжина антени $l = 20$ *см*, частота сигналу $f = 2$ *Мгц*. Діюче значення напруженості магнітного поля в місці розташування антени $H = 12$ *мкА/м*.

Розрахувати максимальну ЕРС, індуковану в цій антені.

Відповідь: $45{,}2\cdot 10^{-5}$ *В*.

ЗАДАЧА 14.25. Приймальна антена є прямокутною рамкою розмірами $a = 30$ *см*, $b = 15$ *см*, що знаходиться у повітрі. Частота сигналу $f = 10^7$ *Гц* (діапазон коротких хвиль). Діюче значення напруженості магнітного поля в місці розташування рамки $H = 80$ *мкА/м*.

Знайти найбільшу ЕРС, індуковану в рамці.

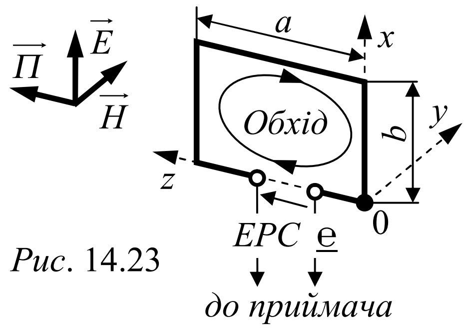

Рис. 14.23

Визначити якнайменшу частоту, при якій можна застосувати цю рамку як приймальну антену, якщо чутливість приймача складає 15 *мкВ*.

Розв'язання

Для отримання в рамці максимальної індукованої ЕРС розташуємо рамку так, щоб її площина була паралельна напряму поширення хвилі, а вектор H був перпендикулярний площині рамки (рис. 14.23).

Виберемо для опису процесу декартову систему координат і помістимо одну з вершин прямокутної рамки на початку координат, а одну із сторін рамки сумістимо з віссю 0*x* (рис. 14.23).

На підставі розв'язання хвильових рівнянь для плоскої хвилі маємо:

$$\underline{E} = \underline{E}_x = \underline{E}_0 e^{-j\beta z}, \quad \underline{H} = \underline{H}_y = \underline{H}_0 e^{-j\beta z}.$$

Приймемо, що при $z = 0$ $\underline{H} = \underline{H}_0 = 80$ *мкА/м*.

Хвильовий опір повітряного середовища:

$$\underline{Z}_C = \sqrt{\frac{\mu\mu_0}{\varepsilon\varepsilon_0}} = \sqrt{\frac{4\pi \cdot 10^{-7}}{8{,}86 \cdot 10^{-12}}} = 120\pi = 377 \text{ Ом}.$$

Значення напруженості електричного поля на початку координат

$$\underline{E}_0 = \underline{H}_0 Z_C = 80 \cdot 10^{-6} \cdot 377 = 30{,}16 \cdot 10^{-3} \text{ В/м}.$$

Коефіцієнт поширення хвилі $p = j\beta$, причому $\beta = 2\pi/\lambda$.

Швидкість поширення хвилі $v = \dfrac{1}{\sqrt{\mu\mu_0\varepsilon\varepsilon_0}} = \dfrac{c}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$ для повітря дорівнює швидкості світла $v = c = 3 \cdot 10^8$ *м/с*.

Довжина хвилі $\lambda = \dfrac{v}{f} = \dfrac{3 \cdot 10^8}{10^7} = 30$ *м*, $\beta = \dfrac{2\pi}{\lambda} = \dfrac{2\pi}{30} = 0{,}2094$ *рад/м*.

При русі хвилі уздовж сторони *a* рамки приймальної антени зміна фази коливання складає $\beta a = 0{,}2094 \cdot 0{,}3 = 0{,}0628$ *рад* $= 3{,}6°$,
якщо рамку повернути на 90°, то отримаємо

$$\beta b = 0{,}2094 \cdot 0{,}15 = 0{,}0314 \text{ рад} = 1{,}8°.$$

Індуковану ЕРС розрахуємо за допомогою відомого інтегрального виразу $\underline{e} = \oint_L \vec{\underline{E}}\, d\vec{l}$, де інтегрування проводиться по контуру рамки з напрямом обходу, як вказано на рис. 14.23 (узгоджено з напрямом вектора $\vec{H}$ правилом правоходового гвинта).

Якщо при $z = 0$ $\underline{E} = \underline{E}_0$, то при $z = a$ $\underline{E} = \underline{E}_0 e^{-j\beta a}$,
а індукована ЕРС $\underline{e} = b\underline{E}_0 e^{-j\beta a} - b\underline{E}_0 = b\underline{E}_0 (e^{-j\beta a} - 1)$.

В даному прикладі $\beta a = 0{,}0628 \ll 1$, а $\beta^{-1} = 4{,}77 \gg a = 0{,}3$ *м*.

Для обчислення експоненти і отримання зручної формули індукованої ЕРС скористаємося розкладанням експоненти в ряд $e^x = 1 + \dfrac{x}{1!} + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \ldots$

В нашому прикладі третій доданок складає малу частину другого:

$$\frac{x^2}{2!} : \frac{x}{1!} = \frac{x}{2} = \tfrac{1}{2}\beta a = 0{,}0314, \text{ тобто 3\% від другого.}$$

Тому з достатнім ступенем точності $e^{-j\beta a} = 1 - j\beta a$, а індукована в антені ЕРС

$$\underline{e} = -j\beta ab\underline{E}_0 = -j\omega\mu\mu_0 ab\frac{\underline{E}_0}{Z_C} = -j\omega\mu\mu_0 ab\underline{H}_0 = -j\omega ab\underline{B}_0 = -j\omega\underline{\Phi}_0,$$

де Φ_0 – магнітний потік рамки, якщо у її межах можна вважати магнітну індукцію незмінною і рівною $\underline{B}_0 = \mu\mu_0\underline{H}_0$, тобто розраховану через напруженість поля при $z = 0$.

Комплексне значення ЕРС

$$\underline{e} = -j0{,}0628\cdot 0{,}15\cdot 30{,}16 = -j0{,}284\ мВ.$$

Помітимо, що при повороті рамки навкруги осі $0y$ на 90° розрахункова наближена формула не зміниться, і як і раніше $\underline{e} = -j\beta ab\underline{E}_0$ – індукована ЕРС обернено пропорційна довжині хвилі, а отже, пропорційна частоті.

Тому мінімальна частота, при якій вказану рамку можна застосовувати як приймальну антену для приймача з чутливістю $e_{min} = 15\ мкВ$

$$f_{min} = e_{min}f/e = \frac{15\cdot 10^{-3}}{0{,}284}10^7 = 0{,}53\cdot 10^6\ Гц = 0{,}53\ МГц.$$

ЗАДАЧА 14.26. Прямокутний контур із сторонами $a = 10\ см$, $b = 20\ см$ розташований в полі біжучої синусоїдної хвилі так, що його площина перпендикулярна вектору $\vec{H}$, а дві сторони a співпадають за напрямом з вектором $\vec{E}$. Частота сигналу $f = 2\cdot 10^7\ Гц$, навколишнє середовище – немагнітний діелектрик з $\varepsilon = 4$.

Діюче значення напруженості магнітного поля в місці розташування рамки $H = 0{,}4\ мА/м$. Знайти ЕРС, індуковану в контурі, двома способами: а) $e = \oint_L \vec{E}d\vec{l}$, б) $e = -\dfrac{d\Phi}{dt}$.

Відповідь: $e = |Z_C\underline{H}b(e^{-j\beta a} - 1)| = 1{,}263\ мВ$.

ЗАДАЧА 14.27. Круглий виток діаметром $d = 20\ см$ знаходиться у повітрі з електромагнітним полем частоти $f = 1\ Мгц$.

Напруженість електричного поля (діюче значення) в центрі розташування витка $E_0 = 100\ мкВ/м$. Розташувати виток так, щоб індукована в ньому ЕРС була максимальною. Визначити діюче значення цієї ЕРС.

Розв'язання

Для отримання максимальної ЕРС у приймальній антені виток необхідно розташувати так, щоб його площина була перпендикулярна до вектору H плоскої електромагнітної хвилі (рис. 14.24).

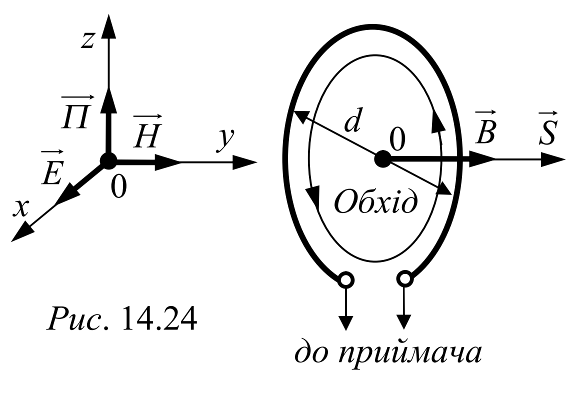

Рис. 14.24

Довжина електромагнітної хвилі у повітрі $\lambda = \dfrac{c}{f} = \dfrac{3\cdot 10^8}{1\cdot 10^6} = 300\ м.$

Комплекс напруженості магнітного поля біжучої хвилі:

$$\underline{H} = A\,e^{-j\cdot\frac{2\pi}{\lambda}z}.$$

При переміщенні хвилі уздовж площини витка на відстань d фаза хвилі змінюється на величину

$$\frac{2\pi}{\lambda}d = \frac{2\pi}{300}\cdot 0{,}2 = 0{,}0042\,рад = 0{,}24\,град.$$

Це дуже мала величина, тому вважатимемо, що комплекс напруженості магнітного поля за площею S приймальної антени постійний:

$$\underline{H}_0 = \frac{\underline{E}_0}{Z_C} = \frac{100}{377} = 0{,}265\ мкА/м.$$

Найбільше значення індукованої ЕРС

$$e = \omega\Phi = 2\pi f\mu_0 H_0 S = 2\pi f\mu_0 H_0\frac{\pi d^2}{4} = 2\pi\cdot 10^6\cdot 4\pi\cdot 10^{-7}\cdot 0{,}265\cdot\frac{\pi\cdot 0{,}2^2}{4} = 0{,}0656\ мкВ.$$

ЗАДАЧА 14.28. Площина контуру розташована:

а) перпендикулярно до напряму руху плоскої біжучої електромагнітної хвилі;

б) перпендикулярно до вектору E;

в) перпендикулярно до вектору H.

В якому з цих трьох випадків в контурі індукуватиметься ЕРС?

Обґрунтуйте відповідь.

ЗАДАЧА 14.29. Антена виконана з феритового стрижня перерізом $S = 0{,}25\ см^2$ і має в середній частині котушку з числом витків $w = 50$. Середня магнітна проникність стрижня $\mu = 160$. Напруженість електричного поля в місці розташування антени $E_0 = 30\ мВ/м$.

Визначити найбільше значення ЕРС, що наводиться в котушці, якщо частота роботи передавальної станції $f = 600\ кГц$.

Відповідь: $e = \omega\mu\mu_0\dfrac{E_0}{Z_C}Sw = 75{,}3\ мкВ$, де $Z_C = \sqrt{\dfrac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = 377\ Ом$ – хвильовий опір повітря.

14.3 ЕЛЕКТРОДИНАМІЧНІ ПОТЕНЦІАЛИ ЕЛЕКТРОМАГНІТНОГО ПОЛЯ І ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ З НИМИ

Задача розрахунку стану електромагнітного поля в основному зводиться до визначення законів зміни векторів E і H цього поля як функцій часу і координат.

В простих випадках, розглянутих раніше, ці вектори визначалися на підставі безпосереднього розв’язання рівнянь Максвела, а в більш складних випадках розрахунки зручніше проводити за допомогою допоміжних функцій: векторного $\vec{A}$ або скалярного φ потенціалів поля.

Для однорідного ізотропного середовища, коли характеристики середовища γ, ε, μ незмінні по всіх напрямах і не залежать від часу, чотири рівняння Максвела зводяться до одного рівняння Даламбера

векторного $\nabla^2 \vec{A} - \dfrac{1}{v^2}\dfrac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu\mu_0\vec{\delta}$ або скалярного $\nabla^2 \varphi - \dfrac{1}{v^2}\dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\dfrac{\rho}{\varepsilon\varepsilon_0}$.

В цих рівняннях $v = \dfrac{1}{\sqrt{\mu\mu_0\varepsilon\varepsilon_0}} = \dfrac{c}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$, де $c = \dfrac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}} = 3\cdot 10^8$ *м/с* – електромагнітна постійна, яка збігається із швидкістю світла (швидкість поширення електромагнітних хвиль в пустці).

Основні вектори поля пов'язані з електродинамічними потенціалами співвідношеннями:

$$\vec{B} = rot\,\vec{A}, \quad \mu\mu_0\vec{H} = \vec{B}, \quad \vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - grad\,\varphi, \quad div\,\vec{A} = -\frac{1}{v^2}\frac{\partial \varphi}{\partial t}.$$

В комплексній формі одержуємо: $\underline{\vec{B}} = rot\,\underline{\vec{A}}$, $\mu\mu_0\underline{\vec{H}} = \underline{\vec{B}}$,

$$\underline{\vec{E}} = -j\omega\,\underline{\vec{A}} - grad\underline{\varphi}, \ div\,\underline{\vec{A}} = -\frac{j\omega}{v^2}\,\underline{\varphi}, \ \nabla^2\underline{\vec{A}} + \frac{\omega^2}{v^2}\,\underline{\vec{A}} = -\mu\mu_0\underline{\vec{\delta}}, \quad \nabla^2\underline{\varphi} + \frac{\omega^2}{v^2}\,\underline{\varphi} = -\frac{\underline{\rho}}{\varepsilon\varepsilon_0}.$$

Зовні провідного середовища $\gamma = 0$, $\delta = \gamma E = 0$, і за відсутності вільних зарядів $\rho = 0$ рівняння Даламбера перетворюються на хвильові рівняння

$$\nabla^2\underline{\vec{A}} + \frac{\omega^2}{v^2}\,\underline{\vec{A}} = 0, \quad \nabla^2\underline{\varphi} + \frac{\omega^2}{v^2}\,\underline{\varphi} = 0,$$

розв'язання яких у комплексній формі: $\underline{\vec{A}} = \displaystyle\int_V \frac{\mu\mu_0\underline{\vec{\delta}}e^{-j\frac{\omega}{v}R}}{4\pi R}dV$, $\underline{\varphi} = \displaystyle\int_V \frac{\underline{\rho}e^{-j\frac{\omega}{v}R}}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R}dV$.

Помітимо, що $k = \dfrac{\omega}{v} = \dfrac{2\pi}{\lambda}$ – *хвильове число*, а λ – *довжина хвилі*.

Оскільки $dV = S\cdot dl$, де S – поперечний переріз тонкого провідника, то елемент струму $i\,\vec{dl} = \underline{\vec{\delta}}\cdot\vec{S}\cdot\vec{dl} = \underline{\vec{\delta}}\,dV$.

Векторний потенціал елемента синусоїдного струму $\underline{\vec{A}} = \dfrac{\mu\mu_0\underline{I}e^{-j\frac{\omega}{v}R}}{4\pi R}\vec{dl}$.

Для однорідного ізотропного середовища при $\mu = const$

$$div\,\vec{B} = 0 \quad \text{і} \quad div\,\vec{H} = 0.$$

Маючи метою розрахунку визначення залежності $\vec{H}$, зручно залучати *магнітний векторний потенціал* $\vec{A}$ так, щоб $\vec{H} = rot\,\vec{A}$ (задачі 14.37 і 14.39). Цей векторний потенціал в $\mu\mu_0$ разів менший за раніше розглянутий і відрізняється від нього розмірністю (вимірюється в амперах).

Він задовольняє векторному рівнянню $\nabla^2\vec{A} - \dfrac{1}{v^2}\dfrac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = -\vec{\delta}$ або в комплексній формі $\nabla^2\underline{\vec{A}}+\dfrac{\omega^2}{v^2}\underline{\vec{A}}=-\underline{\vec{\delta}}$; відповідно, при $\vec{\delta}=0$ – хвильовому рівнянню $\nabla^2\vec{A}-\dfrac{1}{v^2}\dfrac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}=0$ або в комплексній формі $\nabla^2\underline{\vec{A}}+\dfrac{\omega^2}{v^2}\underline{\vec{A}}=0$.

Рівняння зв'язку: $div\,\vec{A}=-\varepsilon\varepsilon_0\dfrac{\partial\varphi}{\partial t}$ або $div\,\underline{\vec{A}}=-j\omega\varepsilon\varepsilon_0\underline{\varphi}_0$,

$$\vec{E}=-\mu\mu_0\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}-grad\,\varphi \quad \text{або} \quad \underline{\vec{E}}=-j\omega\mu\mu_0\underline{\vec{A}}-grad\,\underline{\varphi},$$

магнітний потенціал елемента синусоїдного струму $\underline{\vec{A}}=\dfrac{\underline{I}\,\vec{dl}\,e^{-j\frac{\omega}{v}R}}{4\pi R}$.

Відмітимо, що у вільному просторі за відсутності струмів провідності $(\delta=0)$ і вільних зарядів $(\rho=0)$ і однорідному ізотропному середовищу рівняння Максвела приймають вигляд, що наведений у табл. 14.5.

Таблиця 14.5

Для миттєвих значень	В комплексній формі
$rot\,\vec{H}=\varepsilon\varepsilon_0\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t}$, $rot\,\vec{E}=-\mu\mu_0\dfrac{\partial\vec{H}}{\partial t}$, $div\,\vec{H}=0$, $div\,\vec{E}=0$	$rot\,\underline{\vec{H}}=j\omega\varepsilon\varepsilon_0\underline{\vec{E}}$, $rot\,\underline{\vec{E}}=-j\omega\mu\mu_0\underline{\vec{H}}$, $div\,\underline{\vec{H}}=0$, $div\,\underline{\vec{E}}=0$

Відсутність витоків у вектора $\vec{E}$ в цій області указує на його соленоїдний характер, і для його розрахунку можна ввести електричний векторний потенціал поля $\vec{F}$ так, щоб $rot\,\vec{F}=\vec{E}$.

Одночасно вводиться скалярний потенціал магнітного поля φ_M.

Чотири рівняння Максвела при цьому зводяться до одного з двох хвильових рівнянь 1) $\nabla^2\vec{F}-\mu\mu_0\varepsilon\varepsilon_0\dfrac{\partial^2\vec{F}}{\partial t^2}=0$ або $\nabla^2\underline{\vec{F}}+\dfrac{\omega^2}{v^2}\underline{\vec{F}}=0$;

2) $\nabla^2\varphi_M-\mu\mu_0\varepsilon\varepsilon_0\dfrac{\partial^2\varphi_M}{\partial t^2}=0$ або $\nabla^2\underline{\varphi}_M+\dfrac{\omega^2}{v^2}\underline{\varphi}_M=0$;

а рівняння зв'язку приймають вигляд: $div\,\vec{F}=\mu\mu_0\dfrac{\partial\varphi_M}{\partial t}$ або $div\,\underline{\vec{F}}=-j\omega\mu\mu_0\underline{\varphi}_M$,

$$\vec{H}=-grad\,\varphi_M+\varepsilon\varepsilon_0\frac{\partial\vec{F}}{\partial t} \quad \text{або} \quad \underline{\vec{H}}=-grad\,\underline{\varphi}_M+j\omega\varepsilon\varepsilon_0\underline{\vec{F}}.$$

14.3.1 Випромінювання енергії електромагнітного поля найпростішими антенами

ЗАДАЧА 14.30. У випромінюючій антені проходить змінний струм частотою $f=5$ *МГц*. Розглядаючи антену як еквівалентний диполь завдовжки $l=10$ *м*, заряд якого в Кулонах $q=3\cdot10^{-7}sin\,\omega t$ (рис. 14.25), знайти напруженості магнітного і електричного полів у точках прямої, що проходить через центр диполя під кутом 40° до горизонту, на відстанях від центру диполя: а) 30 *м*; б) 5 *км*.

Розв'язання

Векторний потенціал для прямолінійного відрізка з синусоїдним струмом $\underline{A}=\frac{\mu\mu_0 \underline{I}l}{4\pi R}e^{-j\frac{\omega}{v}R}$.

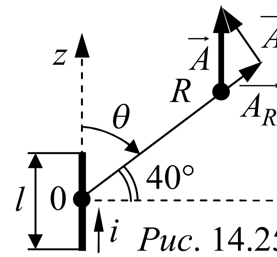

Рис. 14.25

Миттєве значення струму

$$i=\frac{dq}{dt}=3\cdot10^{-7}\cdot2\pi\cdot5\cdot10^{6}\cdot cos\ \omega t=9{,}425cos\ \omega t\ A,$$

комплекс струму $\underline{I}=\frac{9{,}425}{\sqrt{2}}e^{j90^\circ}=j6{,}67\ A$.

Векторний потенціал диполя збігається за напрямом з вектором густини струму і відповідно до рис. 14.25 має єдиний напрям на полюс сферичної системи координат, тобто тільки дві проекції по координатах:

$$\underline{A}_R=\underline{A}cos\theta=\frac{\mu\mu_0 \underline{I}l\,cos\theta}{4\pi R}e^{-j\frac{\omega}{v}R},\quad \underline{A}_\theta=-\underline{A}sin\theta=-\frac{\mu\mu_0 \underline{I}l\,sin\theta}{4\pi R}e^{-j\frac{\omega}{v}R}.$$

Фазова швидкість поширення хвилі у повітрі $v=c=3\cdot10^{8}$ *м/с*,

довжина хвилі $\lambda=\frac{v}{f}=\frac{3\cdot10^{8}}{5\cdot10^{6}}=60$ *м*.

Напруженість магнітного поля дипольної антени визначимо із формули

$$\vec{H}=\frac{1}{\mu\mu_0}rot\vec{A}.$$

В даній задачі

$$rot\underline{\vec{A}}=\begin{vmatrix}\frac{\vec{R_0}}{R^2\,sin\theta} & \frac{\vec{\theta_0}}{R\,sin\theta} & \frac{\vec{\alpha_0}}{R}\\ \frac{\partial}{\partial R} & \frac{\partial}{\partial\theta} & \frac{\partial}{\partial\alpha}\\ \underline{A}_R & R\underline{A}_\theta & R\,sin\theta\cdot\underline{A}_\alpha\end{vmatrix}=\frac{\mu\mu_0 \underline{I}l}{4\pi}\begin{vmatrix}\frac{\vec{R_0}}{R^2\,sin\theta} & \frac{\vec{\theta_0}}{R\,sin\theta} & \frac{\vec{\alpha_0}}{R}\\ \frac{\partial}{\partial R} & \frac{\partial}{\partial\theta} & \frac{\partial}{\partial\alpha}\\ \frac{cos\theta}{R}e^{-j\frac{\omega}{v}R} & -sin\theta\cdot e^{-j\frac{\omega}{v}R} & 0\end{vmatrix}=$$

$$=\vec{\alpha_0}\,\frac{\mu\mu_0 \underline{I}l}{4\pi}\cdot\frac{1}{R}e^{-j\frac{\omega}{v}R}sin\theta\cdot\left[\frac{j\omega}{v}+\frac{1}{R}\right].$$

Таким чином, вектор $\vec{H}$ має тільки одну проекцію:

$$\underline{H}=\underline{H}_\alpha=\frac{\underline{I}l\,sin\theta}{4\pi}e^{-j\frac{\omega}{v}R}\left[\frac{j\omega}{vR}+\frac{1}{R^2}\right].$$

На підставі першого рівняння Максвела $\underline{\vec{E}}=\frac{1}{j\omega\varepsilon\varepsilon_0}rot\underline{\vec{H}}$.

В нашій задачі

$$rot\,\underline{\vec{H}} = \begin{vmatrix} \dfrac{\vec{R_0}}{R^2\, sin\theta} & \dfrac{\vec{\theta_0}}{R\,sin\theta} & \dfrac{\vec{\alpha_0}}{R} \\ \dfrac{\partial}{\partial R} & \dfrac{\partial}{\partial\theta} & \dfrac{\partial}{\partial\alpha} \\ 0 & 0 & R\,sin\theta\cdot\underline{H}_\alpha \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{\vec{R_0}}{R^2\,sin\theta}\cdot\frac{\underline{I}l}{4\pi}\,e^{-j\frac{\omega}{v}R}\left[\frac{j\omega}{vR}+\frac{1}{R^2}\right]R\frac{\partial(sin^2\theta)}{\partial\theta} -$$

$$-\frac{\vec{\theta_0}}{R\,sin\theta}\,\frac{\underline{I}l\,sin^2\theta}{4\pi}\,\frac{\partial}{\partial R}\left[e^{-j\frac{\omega}{v}R}\left(\frac{j\omega}{v}+\frac{1}{R}\right)\right] =$$

$$= \vec{R_0}\,\frac{\underline{I}l\,2\,cos\theta}{4\pi}\,e^{-j\frac{\omega}{v}R}\left[\frac{j\omega}{v}\cdot\frac{1}{R^2}+\frac{1}{R^3}\right] -$$

$$-\vec{\theta_0}\,\frac{sin\theta}{R}\,\frac{\underline{I}l}{4\pi}\left[-\frac{j\omega}{v}e^{-\frac{j\omega}{v}R}\left(\frac{j\omega}{v}+\frac{1}{R}\right)+e^{-\frac{j\omega}{v}R}\left(-\frac{1}{R^2}\right)\right].$$

Таким чином, вектор напруженості електричного поля має дві проекції:

$$\underline{E}_R = \frac{\underline{I}l\,cos\theta}{2\pi j\omega\varepsilon\varepsilon_0}\,e^{-j\frac{\omega}{v}R}\left[\frac{j\omega}{vR^2}+\frac{1}{R^3}\right], \qquad \underline{E}_\theta = \frac{\underline{I}l\,sin\theta}{4\pi j\omega\varepsilon\varepsilon_0}\,e^{-j\frac{\omega}{v}R}\left[-\frac{\omega^2}{v^2R}+\frac{j\omega}{vR^2}+\frac{1}{R^3}\right].$$

Врахуємо, що $\dfrac{\omega}{v}=\dfrac{2\pi}{\lambda}$.

Тоді вирази для напруженостей можна представити у вигляді:

$$\underline{H} = \underline{H}_\alpha = \frac{\underline{I}l\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 sin\theta}{4\pi}\,e^{-j\frac{2\pi}{\lambda}R}\left[\frac{j}{\frac{2\pi}{\lambda}R}+\frac{1}{\left(\frac{2\pi}{\lambda}R\right)^2}\right], \tag{14.7}$$

$$\underline{E}_R = \frac{\underline{I}l\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^3 cos\theta}{2\pi j\omega\varepsilon\varepsilon_0}\,e^{-j\frac{2\pi}{\lambda}R}\left[\frac{j}{\left(\frac{2\pi}{\lambda}R\right)^2}+\frac{1}{\left(\frac{2\pi}{\lambda}R\right)^3}\right], \tag{14.8}$$

$$\underline{E}_\theta = \frac{\underline{I}l\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^3 sin\theta}{4\pi j\omega\varepsilon\varepsilon_0}\,e^{-j\frac{2\pi}{\lambda}R}\left[-\frac{1}{\frac{2\pi}{\lambda}R}+\frac{j}{\left(\frac{2\pi}{\lambda}R\right)^2}+\frac{1}{\left(\frac{2\pi}{\lambda}R\right)^3}\right]. \tag{14.9}$$

Звернемо увагу на добуток $\dfrac{2\pi}{\lambda}R$, що стоїть в знаменниках складових, узятих в квадратні дужки:

1) якщо $\frac{2\pi}{\lambda}R = 1$ або $R = \frac{\lambda}{2\pi}$ (в даному прикладі $\lambda = 60$ *м*, $R = \frac{\lambda}{2\pi} \approx 5$ *м* $\approx$ $\approx 0{,}1\lambda$), то всі доданки однакові за модулем; простір на такій відстані від випромінюючої антени називають зоною невпевненого прийому;

2) якщо $\frac{2\pi}{\lambda}R > 100$, то кожний наступний доданок у виразах для напруженостей в 100 разів менше попереднього, їх можна опустити, припустивши похибку розрахунку напруженостей близько 1% (в прикладі це $R \geq 500$ *м*). Це – *дальня зона* випромінювача;

3) якщо $\frac{2\pi}{\lambda}R < 0{,}01$ (в прикладі $R < 0{,}05$ *м*) – це *ближня зона* випромінювача, напруженості з похибкою $\approx 1\%$ визначаються тільки складовою $\frac{2\pi}{\lambda}R$ в старшому ступені.

Для кількісного визначення параметрів напруженостей відповідно до рис. 14.25 визначаємо координату $\theta = 90° - 40° = 50°$.

Для заданого випадку а) $R = 30$ *м* і $\lambda = 60$ *м* (зона невпевненого прийому) за (14.7)÷(14.9) з урахуванням

$\frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{60} = 0{,}1047$ *рад/м* = 6 *град/м* і $\frac{2\pi}{\lambda}R = 0{,}1047 \cdot 30 = 3{,}14$ визначаємо:

$$\underline{H} = \underline{H}_\alpha = \frac{j6{,}67 \cdot 10 \cdot 0{,}1047^2 \sin 50}{4\pi} e^{-j6° \cdot 30} \cdot \left[\frac{j}{3{,}14} + \frac{1}{3{,}14^2}\right] = 0{,}015 e^{-j17{,}5°}\ A/м,$$

$$\underline{E}_R = \frac{j6{,}67 \cdot 10 \cdot 0{,}1047^3 \cos 50}{2\pi j 2\pi \cdot 5 \cdot 10^6 \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12}} e^{-j180°} \cdot \left[\frac{j}{3{,}14^2} + \frac{1}{3{,}14^3}\right] =$$

$$= 28{,}2 e^{-j180°} \cdot (j0{,}101 + 0{,}032) = 2{,}995 e^{-j107{,}7°}\ В/м,$$

$$\underline{E}_\theta = \frac{j6{,}67 \cdot 10 \cdot 0{,}1047^3 \sin 50}{4\pi j 2\pi \cdot 5 \cdot 10^6 \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12}} e^{-j180°} \cdot \left[-\frac{1}{3{,}14} + \frac{j}{3{,}14^2} + \frac{1}{3{,}14^3}\right] =$$

$$= 16{,}79 e^{-j180°} \cdot (j0{,}101 - 0{,}286) = 5{,}094 e^{-j19{,}5°}\ В/м.$$

Для заданого випадку б) $R = 5000$ *м*

$$\frac{2\pi}{\lambda}R = 0{,}1047 \cdot 5000 = 83{,}33 \cdot 2\pi\ рад = 523{,}6\ рад = 30° \cdot 10^3.$$

Це – дальня зона випромінювача, і при розрахунку напруженостей враховуються тільки перші доданки виразів (14.7)÷(14.9). Відкинувши ціле число періодів (83), отримаємо $e^{-j\frac{2\pi}{\lambda}R} = e^{-j120°}$. Таким чином, для дальньої зони

$$\underline{H} = \underline{H}_\alpha = \frac{j6{,}67 \cdot 10 \cdot 0{,}1047^2 \sin 50}{4\pi} e^{-j120°} \cdot \frac{j}{523{,}6}\ A/м = -85{,}1 e^{-j120°}\ мкА/м,$$

$\underline{E}_R = 0$,

$$\underline{E}_\theta = 16{,}93 e^{-j120°} \cdot \left(-\frac{1}{523{,}6}\right) В/м = -32{,}3 e^{-j120°}\ мВ/м.$$

ЗАДАЧА 14.31. Для умов задачі 14.30 розрахувати скалярний електродинамічний потенціал $\underline{\varphi}$ електромагнітного поля.

Розв'язання

Скалярний електродинамічний потенціал розрахуємо за рівнянням зв'язку між векторним і скалярним потенціалами в комплексній формі:

$$div\underline{\vec{A}} = -\frac{j\omega}{v^2}\underline{\varphi}.$$

Оскільки в даному випадку $\underline{\vec{A}}$ не залежить від координати α, то в сферичній системі координат

$$div\underline{\vec{A}} = \frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial R}(R^2\underline{A}_R) + \frac{1}{R\,sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(sin\theta\cdot\underline{A}_\theta).$$

Підставимо отримані при розв'язанні задачі 14.30 вирази для проекцій векторного електродинамічного потенціалу прямолінійної антени і виконаємо операції диференціювання. Тоді

$$div\underline{\vec{A}} = \frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial R}\left(R^2\frac{\mu\mu_0\underline{I}l\,cos\theta}{4\pi R}e^{-j\frac{\omega}{v}R}\right) + \frac{1}{R\,sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(-\frac{\mu\mu_0\underline{I}l\,sin^2\theta}{4\pi R}e^{-j\frac{\omega}{v}R}\right) =$$

$$= \frac{\mu\mu_0\underline{I}l\,cos\theta}{4\pi R^2}\frac{\partial}{\partial R}\left(Re^{-j\frac{\omega}{v}R}\right) - \frac{\mu\mu_0\underline{I}l}{4\pi R^2\,sin\theta}e^{-j\frac{\omega}{v}R}\frac{\partial}{\partial\theta}(sin^2\theta) =$$

$$= \frac{\mu\mu_0\underline{I}l\,cos\theta}{4\pi}e^{-j\frac{\omega}{v}R}\left(-j\frac{\omega}{vR} - \frac{1}{R^2}\right).$$

Підставимо цей вираз у рівняння зв'язку і отримаємо

$$\underline{\varphi} = -\frac{v^2}{j\omega}div\underline{\vec{A}} = \frac{\mu\mu_0\underline{I}l\,cos\theta}{4\pi}e^{-j\frac{\omega}{v}R}\left(\frac{v}{R} + \frac{v^2}{j\omega R^2}\right) =$$

$$= \frac{\mu\mu_0\underline{I}l\,cos\theta}{4\pi}e^{-j\frac{2\pi}{\lambda}R}\omega\left(\frac{1}{\frac{2\pi}{\lambda}R} - j\frac{1}{\left(\frac{2\pi}{\lambda}R\right)^2}\right).$$

Для випадку а) $R = 30\ м$ і $\lambda = 60\ м$ одержуємо

$$\underline{\varphi} = \frac{4\pi\cdot 10^{-7}\,j6{,}67\cdot 10\,cos\,50\;\;e^{-j6\;\cdot 30}2\pi\cdot 5\cdot 10^6}{4\pi}\left(\frac{1}{3{,}14} - j\frac{1}{3{,}14^2}\right) =$$

$$= 134{,}7e^{-j90^\circ}\cdot(0{,}318 - j0{,}101) = 44{,}99e^{-j107{,}7^\circ}\ B.$$

Для випадку б) $R = 5000\ м$ одержуємо (виключаючи ціле число періодів)

$$\underline{\varphi} = \frac{134{,}7e^{-j30}}{523{,}6} = 0{,}257e^{-j30^\circ}\ B.$$

ЗАДАЧА 14.32. Розрахувати потужність і опір випромінювання антени задачі 14.30.

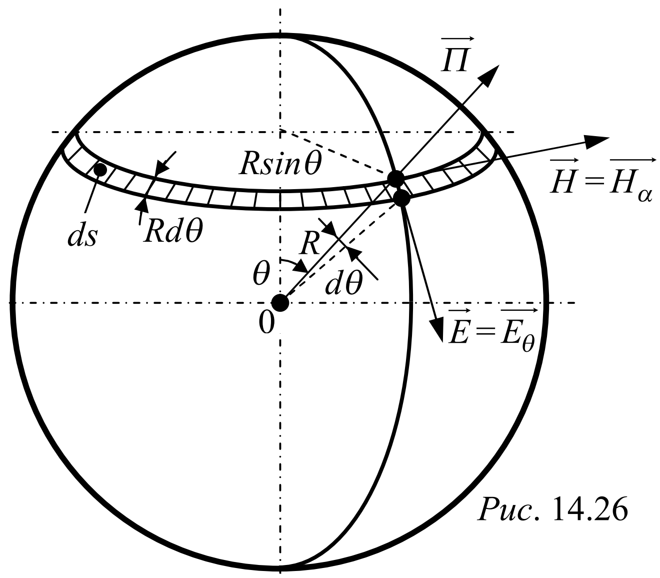

Рис. 14.26

Розв'язання

Для визначення потужності випромінювання прямолінійної антени у дальній зоні випромінювання проведемо сферичну поверхню радіусом R, в центрі якої знаходиться випромінювач (рис. 14.26) і обчислимо потік комплексного вектора Пойнтінга через цю сферу. На поверхні сфери в дальній зоні

$$\underline{H}=\underline{H}_\alpha=\frac{\underline{I}l\left(2\pi/\lambda\right)^2 sin\theta}{4\pi}\frac{j}{2\pi/\lambda\, R}e^{-j\frac{2\pi}{\lambda}R},$$

$$\underline{E}_R=0,\quad \text{тоді}\quad \underline{E}=\underline{E}_\theta=\frac{\underline{I}l\left(2\pi/\lambda\right)^3 sin\theta}{4\pi j\omega\varepsilon\varepsilon_0}\frac{-1}{2\pi/\lambda\, R}e^{-j\frac{2\pi}{\lambda}R},$$

комплексний вектора Пойнтінга

$$\underline{\Pi}=\underline{\Pi}_R=\underline{E}_\theta\overset{*}{\underline{H}}_\alpha=\frac{I^2l^2\left(2\pi/\lambda\right)^3 sin^2\theta}{16\pi^2\omega\varepsilon\varepsilon_0R^2}=\frac{I^2l^2\omega^2 sin^2\theta}{16\pi^2\varepsilon\varepsilon_0v^3R^2}\ \text{– дійсне число.}$$

Потік потужності випромінювання через поверхню S $\oint\limits_S\vec{\underline{\Pi}}\vec{ds}$, де $ds=$ $=2\pi\cdot Rsin\theta\cdot Rd\theta=2\pi\cdot R^2sin\theta\cdot d\theta$, а вектори $\vec{\underline{\Pi}}$ і $\vec{ds}$ співпадають за напрямом.

Оскільки $\underline{\Pi}$ – дійсне число, то випромінюється активна потужність

$$P=\oint\limits_S\vec{\underline{\Pi}}\vec{ds}=\frac{I^2l^2\omega^2}{16\pi^2\varepsilon\varepsilon_0v^3}\cdot 2\pi\int\limits_0^\pi sin^3\theta d\theta .$$

Представимо $sin^3\theta=\tfrac{3}{4}sin\theta-\tfrac{1}{4}sin3\theta$, тоді

$$\int\limits_0^\pi sin^3\theta d\theta=-\frac{3}{4}cos\theta\Big|_0^\pi+\frac{1}{12}cos3\theta\Big|_0^\pi=\frac{3}{4}+\frac{3}{4}-\frac{1}{12}-\frac{1}{12}=\frac{4}{3},\ \text{а}\ P=\frac{I^2l^2\omega^2}{6\pi\varepsilon\varepsilon_0v^3}. \quad (14.10)$$

Для розрахунку потужності випромінювання перепишемо формулу (14.10) у інший спосіб, придатний для будь-якого середовища:

$$P=\frac{I^2l^2\omega^2}{6\pi\varepsilon\varepsilon_0v^3}=\frac{I^2l^2\omega^2\sqrt{\mu\mu_0\varepsilon\varepsilon_0}}{6\pi\varepsilon\varepsilon_0v^2}=\frac{I^2l^2}{6\pi}\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2\cdot Z_C=\frac{2\pi}{3}\cdot\frac{I^2l^2}{\lambda^2}\cdot Z_C.$$

Для повітря $Z_C=\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}=120\pi=377\ Ом$, тоді $P=80\pi^2\cdot I^2\frac{l^2}{\lambda^2}$.

Опір випромінювача чисто активний

$$r = \frac{P}{I^2} = \frac{2\pi}{3}\left(\frac{l}{\lambda}\right)^2 Z_C, \quad \text{а для повітря} \quad r = 80\pi^2\left(\frac{l}{\lambda}\right)^2.$$

Для умов задачі 14.30 – $l = 10\ м$, $\lambda = 60\ м$, $I = 6{,}67\ A$ –

$$P = 80\pi^2 \cdot 6{,}67^2\left(\frac{10}{60}\right)^2 = 976\ Вт, \quad r = 80\pi^2\left(\frac{10}{60}\right)^2 = 21{,}93\ Ом.$$

ЗАДАЧА 14.33. Уздовж вертикальної антени завдовжки $l = 10\ см$ тече синусоїдний струм частоти $f = 3\cdot 10^7\ Гц$. Відомо, що в точці A, сферичні координати якої $R_A = 100\ м$ $\theta_A = 90°$, $\alpha_A = 30°$, вектор Пойнтінга змінюється за законом

$$\Pi_A = 5\cdot 10^{-3} cos^2(\omega t - 30°)\ Вт/м^2.$$

Отримати вираз миттєвого значення струму в антені, що випромінює.
Відповідь: $i = 73 sin(\omega t - 30°)\ A$.

ЗАДАЧА 14.34. У радіостанції потужністю $500\ кВт$, що працює на хвилі $1744\ м$, передавальна антена розташована вертикально і має висоту $150\ м$.

Вважаючи, що антена із своїм дзеркальним зображенням може розглядатися як електричний диполь, визначити струм в антені.

Відповідь: $I = \sqrt{2P/80}\cdot\frac{\lambda}{2\pi l} = \sqrt{10^6/80}\cdot\frac{1744}{2\pi\cdot 150} = 207\ A.$

ЗАДАЧА 14.35. Випромінювач (рамкова антена радіусом $a = 2\ см$) є круглим витком проводу; він розташований у повітрі. Вздовж витка тече синусоїдний струм $i = 2\sqrt{2}\, sin(\omega t + 60°)\ A$ частоти $f = 2\cdot 10^8\ Гц$. Виток розташований в екваторіальній площині сферичної системи координат, його центр лежить на початку координат.

Визначити комплекси векторів напруженостей електричного і магнітного полів в точці $M(10\ м;\ 30°;\ 90°)$.

Розв'язання

Представимо картину розташування витка рамкової антени і точки спостереження M на рис. 14.27, де R – відстань від центру антени до точки спостереження, ρ – відстань від довільного елемента струму $I\,\overrightarrow{dl}$

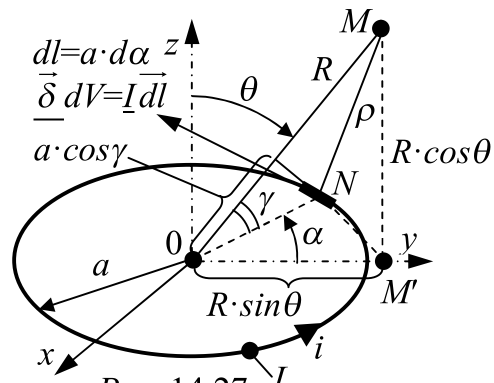

Рис. 14.27

до точки спостереження. Координати елемента струму $N(a;\ ½\pi;\ \alpha)$, за початок відліку координати α приймемо напрям осі y, тоді координати точки спостереження стануть $M(R;\ \theta;\ 0)$, оскільки вона розташована у площині $z0y$.

Розрахуємо векторний електродинамічний потенціал рамкової антени для точки спостереження:

$$\underline{\vec{A}} = \int_V \frac{\mu\mu_0 \underline{\vec{\delta}} e^{-j\frac{\omega}{v}\rho}}{4\pi\rho} dV = \oint_L \frac{\mu\mu_0 \underline{I} e^{-j\frac{\omega}{v}\rho}}{4\pi\rho}\vec{dl}.$$

Довільний елемент струму $\underline{I}\overrightarrow{dl}=\underline{I}ad\alpha$ визначає елементарний доданок векторного потенціалу

$$d\,\underline{\overrightarrow{A}}=\frac{\mu\mu_0\underline{I}e^{-j\frac{\omega}{v}\rho}}{4\pi\rho}a\cdot cos\alpha\, d\alpha\cdot\overrightarrow{\alpha_0},$$

який має тільки один напрям – уздовж координати α прийнятої сферичної системи координат. Цю ж проекцію має і вектор $\underline{\overrightarrow{A}}=\overrightarrow{\alpha_0}\,\underline{A}$, і ця проекція

$$\underline{A}=\frac{\mu\mu_0\underline{I}a}{4\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{-j\frac{\omega}{v}\rho}}{\rho}cos\,\alpha d\alpha\,.$$

Припустимо, що точка спостереження M, для якої визначається векторний електродинамічний потенціал, знаходиться на дуже великій відстані від антени так, що $a << R$. В цьому випадку для знаменника можна прийняти $\rho = R$. Проте, для показника експоненти відмінність ρ від R може привести до помітної помилки при визначенні фази хвилі.

В даному випадку

$$\rho\approx R-a\cdot cos\gamma=R-a\cdot sin\theta cos\alpha,^{*)}\qquad e^{-j\frac{\omega}{v}\rho}\approx e^{-j\frac{\omega}{v}R}\,e^{j\frac{\omega}{v}a\,sin\,\theta\,cos\,\alpha}\,.$$

Відмітимо, що $\frac{\omega}{v}=\frac{2\pi}{\lambda}$, тоді $\frac{\omega}{v}a=\frac{2\pi}{\lambda}a$; це при співвідношенні $\frac{\lambda}{2\pi}>>a$ приводить до $\frac{2\pi}{\lambda}a<<1$ і при розкладанні експоненти в ряд достатньо врахувати два перших члени розкладання $e^{j\frac{\omega}{v}a\,sin\,\theta\,cos\,\alpha}\approx 1+j\frac{\omega}{v}a\cdot sin\theta cos\alpha$;

векторний потенціал $\underline{A}=\frac{\mu\mu_0\underline{I}a}{4\pi R}e^{-j\frac{\omega}{v}R}\int_0^{2\pi}(cos\,\alpha+j\frac{\omega}{v}a\,sin\,\theta\,cos^2\alpha\,)d\alpha\,.$

Оскільки $\int_0^{2\pi}cos\,\alpha d\alpha=0$, а $\int_0^{2\pi}cos^2\alpha d\alpha=\int_0^{2\pi}\frac{1+cos\,2\alpha}{2}d\alpha=\pi$, то остаточний вираз для векторного потенціалу набуває вигляду

$$\underline{A}=\frac{\mu\mu_0(\underline{I}\pi a^2)\,sin\,\theta}{4\pi R}j\frac{\omega}{v}e^{-j\frac{\omega}{v}R}\,.$$

Врахуємо, що добуток струму $\underline{I}$ на площу πa^2, охоплену контуром із струмом є *магнітний момент* контуру $\underline{m}=\underline{I}S=\underline{I}\pi a^2$.

Тоді формулу для розрахунку векторного потенціалу можна представити у векторній формі $\quad\underline{\overrightarrow{A}}=\frac{\mu\mu_0}{4\pi R}j\frac{\omega}{v}e^{-j\frac{\omega}{v}R}\left[\underline{\overrightarrow{m}}\times\overrightarrow{R_0}\right].$

---

*) Можна показати, що $cos\gamma = sin\theta cos\alpha$. Хай M' – проекція точки M на площину $x0y$. З $\Delta N0M'$: $M'N^2=a^2+(Rsin\theta)^2-2aRsin\theta cos\alpha$. У трикутниках MNM' і $MN0$ $\rho^2=a^2+$ $+R^2-2aRcos\gamma$ і $\rho^2=M'N^2+(Rcos\theta)^2=a^2+R^2-2aRsin\theta cos\alpha$. Із зіставлення двох останніх рівностей виходить шукане.

Вектор напруженості магнітного поля обчислимо за допомогою співвідношення $\underline{\vec{H}} = \frac{1}{\mu\mu_0} rot\,\underline{\vec{A}}$.

В сферичній системі координат з урахуванням $\underline{\vec{A}} = \vec{\alpha_0}\,\underline{A}$ і $\underline{A} = f(R, \theta)$

$$rot\,\underline{\vec{A}} = \begin{vmatrix} \vec{R_0}/R^2\sin\theta & \vec{\theta_0}/R\sin\theta & \vec{\alpha_0}/R \\ \partial/\partial R & \partial/\partial\theta & \partial/\partial\alpha \\ 0 & 0 & R\sin\theta\cdot\underline{A} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{\vec{R_0}}{R^2\sin\theta}\frac{\partial(R\sin\theta\,\underline{A})}{\partial\theta} - \frac{\vec{\theta_0}}{R\sin\theta}\frac{\partial(R\sin\theta\,\underline{A})}{\partial R} = \frac{\mu\mu_0(\underline{I}\pi a^2)}{4\pi} j\frac{\omega}{v}\times$$

$$\times\left[\frac{\vec{R_0}}{R^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(R\sin\theta\frac{\sin\theta}{R}e^{-j\frac{\omega}{v}R}\right) - \frac{\vec{\theta_0}}{R\sin\theta}\frac{\partial}{\partial R}\left(R\sin\theta\frac{\sin\theta}{R}e^{-j\frac{\omega}{v}R}\right)\right] =$$

$$= \frac{\mu\mu_0(\underline{I}\pi a^2)}{4\pi} j\frac{\omega}{v} e^{-j\frac{\omega}{v}R}\left(\vec{R_0}\frac{2\cos\theta}{R^2} + \vec{\theta_0}\frac{\sin\theta}{R} j\frac{\omega}{v}\right).$$

Таким чином, вектор напруженості магнітного поля має дві проекції:

$$\underline{H}_R = \frac{(\underline{I}\pi a^2)\cos\theta}{2\pi R^2} j\frac{\omega}{v} e^{-j\frac{\omega}{v}R} = j\frac{\underline{I}S\cos\theta}{\lambda R^2} e^{-j\frac{2\pi}{\lambda}R}, \qquad (14.11)$$

$$\underline{H}_\theta = \frac{(\underline{I}\pi a^2)\sin\theta}{4\pi R}\left(j\frac{\omega}{v}\right)^2 e^{-j\frac{\omega}{v}R} = -\frac{\pi\underline{I}S\sin\theta}{\lambda^2 R} e^{-j\frac{2\pi}{\lambda}R}. \qquad (14.12)$$

Вектор напруженості електричного поля обчислимо за допомогою співвідношення: $\underline{\vec{E}} = \frac{1}{j\omega\varepsilon\varepsilon_0} rot\,\underline{\vec{H}}$, де

$$rot\,\underline{\vec{H}} = \begin{vmatrix} \frac{\vec{R_0}}{R^2\sin\theta} & \frac{\vec{\theta_0}}{R\sin\theta} & \frac{\vec{\alpha_0}}{R} \\ \frac{\partial}{\partial R} & \frac{\partial}{\partial\theta} & \frac{\partial}{\partial\alpha} \\ j\frac{\underline{I}S\cos\theta}{\lambda R^2}e^{-j\frac{2\pi}{\lambda}R} & R\left(\frac{-\pi\underline{I}S\sin\theta}{\lambda^2 R}e^{-j\frac{2\pi}{\lambda}R}\right) & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{\vec{\alpha_0}}{R}\left[j\frac{2\pi^2\underline{I}S\sin\theta}{\lambda^3}e^{-j\frac{2\pi}{\lambda}R} + j\frac{\underline{I}S\sin\theta}{\lambda R^2}e^{-j\frac{2\pi}{\lambda}R}\right].$$

Таким чином, $\underline{\vec{E}} = \vec{\alpha_0}\frac{\underline{I}S\sin\theta}{\omega\varepsilon\varepsilon_0} e^{-j\frac{2\pi}{\lambda}R}\left(\frac{2\pi^2}{\lambda^3 R} + \frac{1}{\lambda R^3}\right)$ –

вектор напруженості електричного поля має одну проекцію в сферичній системі координат. Останньому виразу можна надати іншу редакцію:

$$\underline{E}=\underline{E}_\alpha=\frac{\pi \underline{I}S\,sin\theta}{\lambda^2 R}Z_C\left(1+\frac{\lambda^2}{2\pi^2R^2}\right)e^{-j\frac{2\pi}{\lambda}R}, \qquad \text{де} \quad Z_C=\sqrt{\frac{\mu\mu_0}{\varepsilon\varepsilon_0}}.$$

Для дальньої зони випромінювача одержуємо: $\underline{H}_R=0$,

$$\underline{H}=\underline{H}_\theta=-\frac{\pi \underline{I}S\,sin\theta}{\lambda^2 R}e^{-j\frac{2\pi}{\lambda}R}, \quad \underline{E}=\underline{E}_\alpha=\frac{\pi \underline{I}S\,sin\theta}{\lambda^2 R}Z_C\,e^{-j\frac{2\pi}{\lambda}R}, \qquad (14.13)$$

а відношення $\frac{\underline{E}}{-\underline{H}}=Z_C$ (знак «мінус» у виразі для $\underline{H}$ відповідає принципу випромінювання).

Для даної задачі

$$\lambda=\frac{c}{f}=\frac{3\cdot10^8}{2\cdot10^8}=1{,}5\ м;\quad \underline{I}=\frac{I_m}{\sqrt{2}}e^{j\psi_i}=2e^{j60^\circ}A;\quad S=\pi a^2=\pi\cdot(2\cdot10^{-2})^2=12{,}56\cdot10^{-4}\ м^2.$$

Початок відліку координати α сумістимо з позитивним напрямом осі x декартової системи координат. Для точки $M(10\ м;\ 30°;\ 90°)$ одержуємо у відповідності до (14.11)÷(14.12):

$$\underline{H}_R=j\frac{2e^{j60}\cdot12{,}56\cdot10^{-4}\cos30}{1{,}5\cdot10^2}e^{+j120^\circ}=14{,}5\cdot10^{-6}e^{-j90^\circ}\ А/м,$$

де $\quad \frac{2\pi}{\lambda}R=\frac{2\pi}{1{,}5}\cdot10=2\pi\cdot6{,}67=41{,}9\ рад,\quad e^{-j41{,}9рад}=e^{+j120^\circ};$

$$\underline{H}_\theta=-\frac{\pi\cdot2e^{j60}\cdot12{,}56\cdot10^{-4}\sin30}{1{,}5^2\cdot10}e^{+j120^\circ}=1{,}754\cdot10^{-4}\ А/м.$$

За модулем $H=\sqrt{H_R^2+H_\theta^2}=1{,}76\cdot10^{-4}\ А/м$, що практично відповідає дальній зоні випромінювання.

При розрахунку напруженості електричного поля $\frac{\lambda^2}{2\pi^2R^2}=\frac{1{,}5^2}{2\pi^2\cdot10^2}=$ $=0{,}00114$, що також відповідає дальній зоні випромінювання. Тоді за формулами (14.13) маємо: $\underline{E}=\underline{E}_\alpha=Z_C(-\underline{H}_\theta)=377\cdot(-1{,}754\cdot10^{-4})=-0{,}0651\ В/м$.

ЗАДАЧА 14.36. Вивести формули для розрахунку потужності випромінювання P і опору випромінювання r рамкової антени. Обчислити P і r для умов задачі 14.35.

Розв'язання

Потік потужності випромінювання для рамкової антени розрахуємо за теоремою Умова-Пойнтінга $P+jQ=\oint_S\left[\vec{\underline{E}}\times\vec{\underline{H}}^*\right]\overrightarrow{dS}$, де елемент сферичної поверхні $dS=2\pi R^2 sin\theta d\theta$ (див. задачу 14.32), а $-\underline{E}_\alpha\underline{H}_\theta^*=\underline{\Pi}_R$ – радіальна складова вектора Пойнтінга, що співпадає за напрямом з елементом поверхні $\overrightarrow{dS}$. Для дальньої зони випромінювання одержуємо $Q=0$, активна потужність випромінювання

$$P=\oint_S \underline{\Pi}_R dS=\frac{\pi^2(IS)^2 Z_C}{\lambda^4 R^2}\cdot 2\pi R^2\int_0^{\pi} sin^3\,\theta d\theta=\frac{8\pi^3(IS)^2 Z_C}{3\lambda^4},$$

опір випромінювання чисто активний $\quad r=\dfrac{P}{I^2}=\dfrac{8\pi^3 S^2 Z_C}{3\lambda^4}$.

За умовами задачі середовище повітряне, $S=\pi a^2$, $Z_C=120\pi=377$ *Ом*,

тоді $\quad P=320\pi^6\left(\dfrac{a}{\lambda}\right)^4 I^2, \quad r=320\pi^6\left(\dfrac{a}{\lambda}\right)^4.$

Підставивши $a=2\cdot10^{-2}$ *м*; $\lambda=1{,}5$ *м*; $I=4$ *А*, одержуємо

$$r=320\pi^6\left(\frac{2\cdot10^{-2}}{1{,}5}\right)^4=0{,}00972\ Ом, \quad P=320\pi^6\left(\frac{2\cdot10^{-2}}{1{,}5}\right)^4\cdot 4^2=0{,}156\ Вт.$$

14.3.2 Електромагнітне поле в направляючих середовищах. Хвилеводи

Сучасна техніка надвисоких частот, що працює в області дециметрових і сантиметрових хвиль, застосовує замість звичайних ліній передачі (повітряних або кабельних) *хвилеводи*, які є порожнистою металевою трубою (прямокутного, круглого або еліптичного перерізу), порожнина якої служить для передачі електромагнітних хвиль.

Вивчаючи особливості поширення хвиль в хвилеводі, необхідно аналізувати розв’язання векторних хвильових рівнянь загального вигляду, до яких зводяться рівняння Максвела, а останні для діелектрика в комплексній формі представляють систему:

$$rot\,\underline{\vec{H}}=j\omega\varepsilon\varepsilon_0\underline{\vec{E}}; \quad div\,\underline{\vec{H}}=0; \quad rot\,\underline{\vec{E}}=-j\omega\mu\mu_0\underline{\vec{H}}; \quad div\,\underline{\vec{E}}=0.$$

Відносно $\underline{\vec{E}}$ ця система зводиться до наступного векторного хвильового рівняння $\quad \nabla^2\underline{\vec{E}}+k^2\underline{\vec{E}}=0;$

а відносно $\underline{\vec{H}}$ маємо $\quad \nabla^2\underline{\vec{H}}+k^2\underline{\vec{H}}=0;$

при використанні векторного магнітного потенціалу, коли $\underline{\vec{H}}=rot\,\underline{\vec{A}}$ або векторного електричного потенціалу $\underline{\vec{F}}$, коли $\underline{\vec{E}}=rot\,\underline{\vec{F}}$, одержуємо аналогічні хвильові векторні рівняння:

$$\nabla^2\underline{\vec{A}}+k^2\underline{\vec{A}}=0 \qquad \text{або} \qquad \nabla^2\underline{\vec{F}}+k^2\underline{\vec{F}}=0.$$

В цих рівняннях хвильове число $k=\omega\sqrt{\mu\mu_0\varepsilon\varepsilon_0}=\dfrac{\omega}{v}=\dfrac{2\pi}{\lambda}$ є дійсним.

В декартовій системі координат одне векторне хвильове рівняння зводиться до трьох скалярних хвильових рівнянь щодо проекцій вектора, наприклад,

$$\nabla^2\underline{\vec{E}}+k^2\underline{\vec{E}}=0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases}\nabla^2\underline{E}_x+k^2\underline{E}_x=0,\\ \nabla^2\underline{E}_y+k^2\underline{E}_y=0,\\ \nabla^2\underline{E}_z+k^2\underline{E}_z=0.\end{cases}$$

У довільній ортогональній системі координат розв’язання в загальному вигляді можливо тільки у випадку, якщо вектор має один напрям – вздовж координати, для якої метричний коефіцієнт Ламе $h_1 = 1$:

- для циліндричної – вектор направлений вздовж осі циліндра;
- для сферичної – вектор направлений вздовж радіусу R.

Знайдемо розв’язання скалярного хвильового рівняння в декартовій системі координат для однієї з проекцій вектора, наприклад, $\nabla^2\underline{E}_x + k^2\underline{E}_x = 0$.

Після розкриття $\nabla^2\underline{E}_x$, де $\underline{E}_x = f(x,y,z)$, отримаємо рівняння

$$\frac{\partial^2 \underline{E}_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \underline{E}_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \underline{E}_x}{\partial z^2} + k^2\underline{E}_x = 0.$$

Це рівняння можна розв’язати відомим способом розділення змінних, якщо покласти $\underline{E}_x = X(x)Y(y)Z(z)$. Після підстановки у попереднє рівняння і скорочення на добуток XYZ отримаємо

$$\frac{1}{X}\,\frac{d^2X}{dx^2} + \frac{1}{Y}\,\frac{d^2Y}{dy^2} + \frac{1}{Z}\,\frac{d^2Z}{dz^2} + k^2 = 0.$$

Отже, маємо систему
$$\begin{cases} \dfrac{1}{X}\dfrac{d^2X}{dx^2} + k_x^2 = 0, \\ \dfrac{1}{Y}\dfrac{d^2Y}{dy^2} + k_y^2 = 0, \\ \dfrac{1}{Z}\dfrac{d^2Z}{dz^2} + k_z^2 = 0. \end{cases}$$

В цій системі k_x, k_y, k_z – сталі розділення; вони задовольняють умові $k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = k^2 = \omega^2\mu\mu_0\varepsilon\varepsilon_0$, яке можна записати у наступний спосіб

$$\frac{k_x^2}{k^2} + \frac{k_y^2}{k^2} + \frac{k_z^2}{k^2} = n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 1.$$

Для ідеального діелектрика k^2 позитивне число, отже, k – дійсне число, n_x, n_y, n_z – також дійсні числа. Якщо три числа n_x, n_y, n_z розглядати як складові одиничного вектора $\vec{n}$, то вони є напрямними косинусами, і через сферичні координати θ і α, коли вектор $\vec{n}$ направлений уздовж координати R одержуємо $n_x = sin\theta cos\alpha$, $n_y = sin\theta sin\alpha$, $n_z = cos\theta$.

Таким чином, розв’язання має вигляд

$$X = D_1 e^{-jk_x x} + D_2 e^{jk_x x}, \quad Y = D_3 e^{-jk_y y} + D_4 e^{jk_y y}, \quad Z = D_5 e^{-jk_z z} + D_6 e^{jk_z z}.$$

ЗАДАЧА 14.37. У прямокутному хвилеводі з розмірами поперечного перерізу a і b (рис. 14.28) і з необмеженою довжиною вздовж осі z збуджуються хвилі штирьовим вібратором, який розташований на початку хвилеводу вздовж його осі. Вивести загальні вирази для складових електромагнітного поля в хвилеводі.

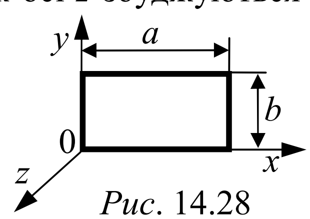

Рис. 14.28

Визначити тип хвиль.

Скласти формули для критичної довжини хвилі, фазової швидкості і характеристичного опору.

Розв'язання

Для розв'язання задачі скористаємося декартовою системою координат з початком, розташованим в одній з вершин прямокутника (рис. 14.28) на стінці, де знаходиться випромінювальний вібратор.

Прямолінійний дріт вібратора, по якому протікає синусоїдний струм, розташований вздовж осі хвилеводу. Якщо для розрахунку стану хвилеводу скористатися векторним магнітним потенціалом, то він в даних умовах матиме тільки одну проекцію, тобто $\underline{\vec{A}} = \vec{z_0}\,\underline{A}$ при $\underline{A}_x = 0$, $\underline{A}_y = 0$, а векторний потенціал визначиться розв'язанням скалярного хвильового рівняння

$$\nabla^2 \underline{A} + k^2 \underline{A} = 0,$$

де $k = \omega\sqrt{\mu\mu_0\varepsilon\varepsilon_0} = \dfrac{\omega}{v} = \dfrac{2\pi}{\lambda}$,

$v = \dfrac{1}{\sqrt{\mu\mu_0\varepsilon\varepsilon_0}}$ – швидкість поширення електромагнітної хвилі в необмеженому (вільному) просторі , заповненому ідеальним діелектриком,

$\lambda = v/f$ – довжина хвилі в цьому середовищі.

Розв'язання цього хвильового рівняння отримане вище:

$$\underline{A} = (D_1 e^{-jk_x x} + D_2 e^{jk_x x})\cdot(D_3 e^{-jk_y y} + D_4 e^{jk_y y})\cdot D_5 e^{-jk_z z}.$$

Складова $D_6 e^{jk_z z} = 0$, це зворотна хвиля, якої в хвилеводі, необмеженому в розмірі вздовж осі z, не може бути.

Сталі поділу задовольняють умові $k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = k^2 = \omega^2\mu\mu_0\varepsilon\varepsilon_0$.

Для ідеального діелектрика k_x, k_y, k_z – дійсні числа, що є коефіцієнтами фази прямих і зворотних хвиль, які поширюються вздовж відповідних осей координат з фазовими швидкостями

$$v_x = \frac{\omega}{k_x}; \quad v_y = \frac{\omega}{k_y}; \quad v_z = \frac{\omega}{k_z}.$$

Якщо врахувати, що при русі хвиль у напрямах осей x і y спостерігається повне віддзеркалення від стінок ідеального провідника, коли амплітуди прямих і зворотних хвиль однакові, то

$$\underline{X} = D_1 e^{-jk_x x} + D_2 e^{jk_x x} = D_7 sin(k_x x + \psi_x),$$
$$\underline{Y} = D_3 e^{-jk_y y} + D_4 e^{jk_y y} = D_8 sin(k_y y + \psi_y).$$

Одержуємо остаточний вид розв'язання хвильового рівняння для векторного магнітного потенціалу в даних умовах роботи хвилеводу

$$\underline{A} = \underline{A}_z = D sin(k_x x + \psi_x) sin(k_y y + \psi_y)\, e^{-jk_z z},$$

де $D = D_5 D_7 D_8$.

Напруженість магнітного поля знайдемо із формули $\underline{\vec{H}} = rot\,\underline{\vec{A}}$.

З першого рівняння Максвела

$$j\omega\varepsilon\varepsilon_0\underline{\vec{E}} = rot\,\underline{\vec{H}} = rot(rot\,\underline{\vec{A}}) = grad(div\,\underline{\vec{A}}) - \nabla^2\underline{\vec{A}}.$$

Але хвильове рівняння дає $\nabla^2\underline{\vec{A}} = -k^2\underline{\vec{A}}$, тоді

$$\underline{\vec{E}} = \frac{1}{j\omega\varepsilon\varepsilon_0}(grad(div\underline{\vec{A}}) + k^2\underline{\vec{A}}),$$

причому $k^2\underline{\vec{A}} = \overrightarrow{z_0}\,k^2\underline{A}$ – доданок, що має тільки одну проекцію на вісь z.

Розрахуємо проекції вектора $\underline{\vec{H}}$ шляхом розкриття $rot\underline{\vec{A}}$:

$$\underline{\vec{H}} = rot\underline{\vec{A}} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & \underline{A} \end{vmatrix}, \text{ звідки } \underline{H}_x = \frac{\partial\underline{A}}{\partial y}, \quad \underline{H}_y = -\frac{\partial\underline{A}}{\partial x}, \quad \underline{H}_z = 0 \text{ –}$$

тобто у вектора $\underline{\vec{H}}$ відсутня подовжня складова, а є лише $\underline{H}_x$ і $\underline{H}_y$ – поперечні складові вектора. Така хвиля називається *поперечною магнітною хвилею ТМ*.

Проекції вектора напруженості електричного поля з урахуванням $div\underline{\vec{A}} = \frac{\partial\underline{A}}{\partial z} = -jk_z\underline{A}$: $\quad \underline{E}_x = \frac{1}{j\omega\varepsilon\varepsilon_0}grad_x div\underline{\vec{A}} = -\frac{k_z}{\omega\varepsilon\varepsilon_0}\frac{\partial\underline{A}}{\partial x} = \frac{k_z}{\omega\varepsilon\varepsilon_0}\underline{H}_y,$

$$\underline{E}_y = \frac{1}{j\omega\varepsilon\varepsilon_0}grad_y div\underline{\vec{A}} = -\frac{k_z}{\omega\varepsilon\varepsilon_0}\frac{\partial\underline{A}}{\partial y} = -\frac{k_z}{\omega\varepsilon\varepsilon_0}\underline{H}_x,$$

$$\underline{E}_z = \frac{1}{j\omega\varepsilon\varepsilon_0}(grad_z div\underline{\vec{A}} + k^2\underline{\vec{A}}) = \frac{k^2 - k_z^2}{j\omega\varepsilon\varepsilon_0}\underline{A}$$ – електричне поле на відмінність від магнітного має і подовжню складову.

З останньої рівності виходить, що $\underline{E}_z$ і $\underline{A}$ взаємно зв'язані. На стінках ідеального провідного середовища хвилеводу $\underline{E}_z = 0$ при $x = 0$ і $x = a$ і $z = 0$, а також при $y = 0$ і $y = b$ і $z = 0$, тому $\underline{A} = 0$ за тих же умов.

Ці граничні умови дозволяють визначити k_x, k_y, ψ_x, ψ_y у формулі для векторного магнітного потенціалу

$$\underline{A} = \underline{A}_z = D\sin(k_x x + \psi_x)\sin(k_y y + \psi_y)\,e^{-jk_z z}.$$

Із умови $\underline{A} = 0$ у залежності від x одержуємо $\sin(k_x x + \psi_x) = 0$, звідки при $x = 0$ і $\sin\psi_x = 0$, $\psi_x = 0$, тоді

при $x = a$ і $\sin k_x a = 0$, $k_x a = m\pi$ і коефіцієнт $k_x = \frac{m\pi}{a}$, де $m = 0, 1, 2, 3 \ldots$

Із умови $\underline{A} = 0$ у залежності від y одержуємо $\sin(k_y y + \psi_y) = 0$, звідки при $y = 0$ і $\sin\psi_y = 0$, $\psi_y = 0$, тоді

при $y = b$ і $\sin k_y b = 0$, $k_y b = n\pi$ і коефіцієнт $k_y = \frac{n\pi}{b}$, де $n = 0, 1, 2, 3 \ldots$

Тепер можемо визначити

$$k_z^2 = k^2 - k_x^2 - k_y^2 = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 - \frac{m^2\pi^2}{a^2} - \frac{n^2\pi^2}{b^2}.$$

Якщо k_z дійсне число, то це число є коефіцієнтом фази хвилі в хвилеводі $(\omega t - k_z z)$, фазова швидкість цієї хвилі

$$v_ф = \frac{\omega}{k_z} = \frac{\omega}{k}\cdot\frac{k}{k_z} = v\frac{k}{k_z},$$

де $v = \dfrac{1}{\sqrt{\mu\mu_0\varepsilon\varepsilon_0}}$ – швидкість поширення хвилі у діелектрику необмежених розмірів.

Оскільки $k/k_z > 1$, то $v_ф > v$.

Довжина хвилі в хвилеводі $\Lambda = \dfrac{2\pi}{k_z} = \dfrac{2\pi}{k} \cdot \dfrac{k}{k_z} = \lambda \dfrac{k}{k_z} > \lambda$,

де λ – довжина хвилі у вільному просторі.

Якщо k_z – величина уявна, то це означає, що хвиля уздовж хвилеводу не поширюється, а електромагнітне поле, змінюючись гармонійно в кожній точці хвилеводу, затухає експоненціально уздовж хвилеводу без перенесення енергії.

Для існування хвильового процесу необхідно, щоб $k_z^2 > 0$, тобто

$$\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 - \frac{m^2\pi^2}{a^2} - \frac{n^2\pi^2}{b^2} > 0.$$

Звідси одержуємо граничну (критичну) довжину хвилі

$$\lambda_{кр} = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}},$$

а передача енергії по хвилеводу можлива при $\lambda < \lambda_{кр}$.

Остаточно формула для векторного магнітного потенціалу TM_{mn} хвилі

$$\underline{A} = \underline{A}_z = D sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{-jk_z z}.$$

Відмітимо, що при $m = 0$ або $n = 0$ $\underline{A} = 0$ і всі проекції векторів $\underline{H}$ і $\underline{E}$ дорівнюють нулю. Тому якнайменшими значеннями є $m = 1$, $n = 1$, а найпростіша ТМ хвиля позначається як $TM_{1,1}$.

Формулу для розрахунку коефіцієнта поширення хвилі вздовж хвилеводу можна подати в іншому вигляді, маючи співвідношення для $\lambda_{кр}$:

$$k_z^2 = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 - \pi^2\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right), \quad \text{звідки} \quad k_z = \frac{2\pi}{\lambda}\sqrt{1 - \left(\lambda/\lambda_{кр}\right)^2},$$

довжина хвилі в цьому хвилеводі $\Lambda = \dfrac{2\pi}{k_z} = \dfrac{\lambda}{\sqrt{1 - \left(\lambda/\lambda_{кр}\right)^2}} > \lambda$,

а фазова швидкість $v_ф = \Lambda f = \dfrac{\lambda f}{\sqrt{1 - \left(\lambda/\lambda_{кр}\right)^2}} = \dfrac{v}{\sqrt{1 - \left(\lambda/\lambda_{кр}\right)^2}}$.

Для повітря $v = c = 3 \cdot 10^8$ *м/с* і $v_ф > c$.

Хвильовий опір хвилеводу визначається складовими напруженостей в поперечному напрямі хвилеводу. Вони різні для хвиль ТМ і ТЕ.

Для хвилі ТМ

$$\underline{Z}_{CTM} = \frac{\underline{E}_x}{\underline{H}_y} = \frac{k_z}{\omega\varepsilon\varepsilon_0} = \frac{\omega\sqrt{\mu\mu_0\varepsilon\varepsilon_0}\sqrt{1-\left(\lambda/\lambda_{кр}\right)^2}}{\omega\varepsilon\varepsilon_0} = \underline{Z}_{CП}\sqrt{1-\left(\lambda/\lambda_{кр}\right)^2},$$

де $\underline{Z}_{CП} = \sqrt{\dfrac{\mu\mu_0}{\varepsilon\varepsilon_0}}$ – хвильовий опір вільного простору (повітря).

ЗАДАЧА 14.38. Якого типу поперечні магнітні хвилі можна створити в прямокутному хвилеводі, заповненому повітрям, з розмірами $a = 2{,}5\ см$; $b = 5\ см$ при частоті $f = 7{,}5{\cdot}10^9\ Гц$?

Знайти значення критичної довжини хвилі і довжини хвилі в хвилеводі у кожному випадку.

Відповідь: $TM_{1,1}$; $\lambda_{кр} = 4{,}47\ см$, $\Lambda = 8{,}95\ см$.

ЗАДАЧА 14.39. Діюче значення подовжньої складової напруженості електричного поля в центрі перерізу хвилеводу задачі 14.38 складає $10^5\ В/м$.

Визначити діючі значення поперечних складових електричного і магнітного полів хвилеводу в цьому перерізі.

Розрахувати потужність, що передається по хвилеводу.

Розв'язання

Під час розв'язання задачі 14.37 отримано $\underline{E}_z = \dfrac{k^2 - k_z^2}{j\omega\varepsilon\varepsilon_0}\underline{A}$, звідки осьове значення векторного магнітного потенціалу хвилеводу

$$\underline{A} = \frac{j\omega\varepsilon\varepsilon_0\underline{E}_z}{k^2 - k_z^2} = j\frac{2\pi\cdot 7{,}5\cdot 10^9\cdot 10^5\cdot 8{,}85\cdot 10^{-12}}{(50\pi)^2 - 70{,}2^2} = j2{,}11\ A,$$

де $k = \omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0} = \dfrac{\omega}{c} = \dfrac{2\pi\cdot 10^9}{3\cdot 10^8} = 50\pi\ рад/м,$

$$k_z = \frac{2\pi}{\lambda}\sqrt{1-\left(\frac{\lambda}{\lambda_{кр}}\right)^2} = \frac{2\pi}{0{,}04}\sqrt{1-\left(\frac{0{,}04}{0{,}0447}\right)^2} = 70{,}2\ рад/м,$$

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3\cdot 10^8}{7{,}5\cdot 10^9} = 0{,}04\ м.$$

Якщо початок відліку вибрати відповідно до рис. 14.28, то розраховане числове значення потенціалу відповідає точці з координатами

$$x_0 = ½a = 0{,}0125\ м,\ \ y_0 = ½b = 0{,}025\ м,\ \ z_0 = 0,$$

а векторний потенціал визначається за формулою

$$\underline{A} = \underline{A}_z(x, y, z) = D\sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)e^{-jk_z z}.$$

В нашому прикладі $m = 1$, $n = 1$, $\dfrac{m\pi}{a}x_0 = ½\pi\ рад$, $\dfrac{n\pi}{b}y_0 = ½\pi\ рад$, а отримане числове значення $\underline{A}$

$$\underline{A} = D sin(½\pi) sin(½\pi) = D = j2{,}11\ A.$$

Поперечні складові магнітного поля прямокутного хвилеводу з хвилею типу TM_{mn}

$$\underline{H}_x = \frac{\partial \underline{A}}{\partial y} = D\,\frac{n\pi}{b} sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{-jk_z z},$$

$$\underline{H}_y = -\frac{\partial \underline{A}}{\partial x} = -D\,\frac{m\pi}{a} cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{-jk_z z},$$

поперечні складові електричного поля

$$\underline{E}_x = \frac{k_z}{\omega\varepsilon\varepsilon_0}\underline{H}_y = -D\,\frac{m\pi}{a}\,\frac{k_z}{\omega\varepsilon\varepsilon_0} cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{-jk_z z},$$

$$\underline{E}_y = -\frac{k_z}{\omega\varepsilon\varepsilon_0}\underline{H}_x = -D\,\frac{n\pi}{b}\,\frac{k_z}{\omega\varepsilon\varepsilon_0} sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{-jk_z z}.$$

Підставляючи числа, одержуємо

$$\underline{H}_x = j132{,}6 sin(40\pi x)\cdot cos(20\pi y) e^{-j70{,}2z}\ А/м,$$
$$\underline{H}_y = -j265 cos(40\pi x)\cdot sin(20\pi y) e^{-j70{,}2z}\ А/м,$$
$$\underline{E}_x = -j44{,}6\cdot 10^3 cos(40\pi x)\cdot sin(20\pi y) e^{-j70{,}2z}\ В/м,$$
$$\underline{E}_y = -j22{,}32\cdot 10^3 sin(40\pi x)\cdot cos(20\pi y) e^{-j70{,}2z}\ В/м.$$

Активна потужність, що передається по хвилеводу

$$P = \mathrm{Im}\left(\int_S \left(\underline{E}_x \underline{H}_y^* - \underline{E}_y \underline{H}_x^*\right) dS\right) = \mathrm{Im}\int_0^a\int_0^b \left(\underline{E}_x \underline{H}_y^* - \underline{E}_y \underline{H}_x^*\right) dxdy.$$

Під час обчисленні врахуємо, що при цілих числах m і n

$$\int_0^a cos^2\frac{m\pi}{a}xdx = ½a,\quad \int_0^b sin^2\frac{n\pi}{b}ydy = ½b,\quad \int_0^b cos^2\frac{n\pi}{b}ydy = ½b,\quad \int_0^a sin^2\frac{m\pi}{a}xdx = ½a.$$

Отримаємо

$$P = (265\cdot 44{,}6\cdot 10^3 + 22{,}32\cdot 10^3\cdot 132{,}6)\frac{0{,}025\cdot 0{,}05}{4} = 4{,}62\cdot 10^3\ Вт = 4{,}62\ кВт.$$

ЗАДАЧА 14.40. Амплітудне значення подовжньої складової напруженості електричного поля в центрі перерізу прямокутного хвилеводу розмірами $2{,}5\times 5$ *см*^{2} складає 10^5 *В*/*м*. Частота $9\cdot 10^9$ *Гц*. Тип хвилі $TM_{1,2}$. Діелектрик – повітря. Визначити потужність, що передається по хвилеводу.
Відповідь: $P = 1{,}56$ *кВт*.

ЗАДАЧА 14.41. В прямокутному хвилеводі з розмірами поперечного перерізу a і b і з необмеженим подовжнім розміром поле збуджується рамкою із струмом, магнітний момент якої співпадає з напрямом осі хвилеводу.

Вивести загальні вирази для складових електромагнітного поля в хвилеводі. Визначити тип хвилі. Скласти формули для критичної довжини хвилі, фазової швидкості, характеристичного опору і потужності, що передається.

При аналізі прийняти, що стінки хвилеводу виконані ідеальним провідним матеріалом.

Розв'язання

Оскільки площина рамки із струмом перпендикулярна осі хвилеводу, то векторний електричний потенціал поля має тільки осьову складову $\underline{\vec{F}} = \vec{z_0}\,\underline{F}$, а решта проекцій відсутня: $\underline{F}_x = 0$, $\underline{F}_y = 0$.

Початок координат декартової системи координат виберемо в одній з вершин прямокутного хвилеводу відповідно до рис. 14.28.

Враховуючи необмежену осьову протяжність хвилеводу, помічаємо, що вздовж цього напряму відсутня зворотна хвиля. Тоді розв'язання хвильового рівняння щодо векторного електричного потенціалу має вигляд:

$$\underline{F} = (D_1 e^{-jk_x x} + D_2 e^{jk_x x}) \cdot (D_3 e^{-jk_y y} + D_4 e^{jk_y y}) \cdot D_5 e^{-jk_z z}.$$

Щоб електромагнітна хвиля поширювалася вздовж хвилеводу з ідеальним діелектриком при ідеальному провідному матеріалі стінок, повинна виконуватися умова – коефіцієнти розділення k_x, k_y, k_z повинні бути дійсними числами, а з розв'язання хвильового рівняння виходить співвідношення

$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = k^2 = \omega^2 \mu\mu_0 \varepsilon\varepsilon_0 = \frac{\omega^2}{v^2},$$

де $v = \dfrac{1}{\sqrt{\mu\mu_0\varepsilon\varepsilon_0}} = \dfrac{c}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$ – швидкість поширення електромагнітної хвилі в необмеженому по всіх напрямах просторі (такий простір називають *вільним*).

Враховуючи, що в напрямах осей x і y при віддзеркаленні хвиль від стінок ідеального провідного середовища мають місце стоячі хвилі, одержуємо наступний вид розв'язання

$$\underline{F} = \underline{F}_z = D \sin(k_x x + \psi_x) \sin(k_y y + \psi_y)\, e^{-jk_z z}.$$

Напруженість електричного поля

$$\underline{\vec{E}} = rot\,\underline{\vec{F}} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & \underline{F} \end{vmatrix} = \vec{i}\,\frac{\partial \underline{F}}{\partial y} + \vec{j}\left(-\frac{\partial \underline{F}}{\partial x}\right) + \vec{k}\cdot 0.$$

Проекції вектора напруженості електричного поля

$$\underline{E}_x = \frac{\partial \underline{F}}{\partial y} = D k_y \sin(k_x x + \psi_x) \cos(k_y y + \psi_y)\, e^{-jk_z z},$$

$$\underline{E}_y = -\frac{\partial \underline{F}}{\partial x} = -D k_x \cos(k_x x + \psi_x) \sin(k_y y + \psi_y)\, e^{-jk_z z},$$

$\underline{E}_z = 0$ – у вектора $\underline{\vec{E}}$ відсутня осьова складова, а є тільки поперечні для хвилеводу складові.

Така хвиля називається поперечною електричною і позначається як TE_{mn}.

При будь-якому $x(0\ ...\ a)$ і $y = 0$ $\underline{E}_x = 0$, звідки

$$\cos(k_y y + \psi_y) = \cos(0 + \psi_y) = 0, \quad \psi_y = ½\pi.$$

При будь-якому $x(0\ ...\ a)$ і $y = b$ $\underline{E}_x = 0$, отже,

$$\cos(k_y b + ½\pi) = 0, \quad k_y b = n\pi \quad \text{і коефіцієнт розділення} \quad k_y = \frac{n\pi}{b}.$$

При будь-якому $y(0 \ldots b)$ і $x = 0$ $\underline{E}_y = 0$, звідки

$$cos(k_x x + \psi_x) = cos(0 + \psi_x) = 0, \quad \psi_x = ½\pi.$$

При будь-якому $y(0 \ldots b)$ і $x = a$ $\underline{E}_y = 0$, отже,

$cos(k_x a + ½\pi) = 0$, $k_x a = m\pi$ і коефіцієнт розділення $k_x = \dfrac{m\pi}{a}$.

Коефіцієнт розділення $k_z^2 = k^2 - k_x^2 - k_y^2 = k^2 - \pi^2\left(\dfrac{m^2}{a^2} + \dfrac{n^2}{b^2}\right)$.

Проекції вектора напруженості електричного поля

$$\underline{E}_x = -D\,\frac{n\pi}{b} cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{-jk_z z},$$

$$\underline{E}_y = D\,\frac{m\pi}{a} sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{-jk_z z},$$

$\underline{E}_z = 0$.

Напруженість магнітного поля згідно з другим рівнянням Максвела

$$\underline{\vec{H}} = \frac{1}{-j\omega\mu\mu_0} rot\,\underline{\vec{E}}, \quad \text{але} \quad rot\,\underline{\vec{E}} = rot\,rot\,\underline{\vec{F}} = grad\,div\,\underline{\vec{F}} - \nabla^2\underline{\vec{F}}.$$

З хвильового рівняння $\nabla^2\underline{\vec{F}} + k^2\underline{\vec{F}} = 0$ визначаємо $\nabla^2\underline{\vec{F}} = -k^2\underline{\vec{F}}$. Тоді

$\underline{\vec{H}} = \dfrac{1}{-j\omega\mu\mu_0}(grad\,div\,\underline{\vec{F}} + k^2\underline{\vec{F}})$, а оскільки $\underline{\vec{F}} = \vec{z_0}\,\underline{F}$, то

$$div\,\underline{\vec{F}} = \frac{\partial \underline{F}_z}{dz} = -jk_z\underline{F}.$$

Проекції вектора напруженості магнітного поля хвилеводу за наявності TE_{mn} хвилі

$$\underline{H}_x = \frac{1}{-j\omega\mu\mu_0} grad_x div\,\underline{\vec{F}} = \frac{k_z}{\omega\mu\mu_0}\,\frac{\partial \underline{F}}{\partial x} = -\frac{k_z}{\omega\mu\mu_0}\underline{E}_y,$$

$$\underline{H}_y = \frac{1}{-j\omega\mu\mu_0} grad_y div\,\underline{\vec{F}} = \frac{k_z}{\omega\mu\mu_0}\,\frac{\partial \underline{F}}{\partial y} = \frac{k_z}{\omega\mu\mu_0}\underline{E}_x,$$

$$\underline{H}_z = \frac{1}{-j\omega\mu\mu_0}(grad_z div\,\underline{\vec{F}} + k^2\underline{\vec{F}}) = \frac{k^2 - k_z^2}{-j\omega\mu\mu_0}\underline{F}.$$

В наведених виразах

$$k_z = \sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2} = \sqrt{\frac{4\pi^2}{\lambda^2} - \pi^2\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)}.$$

Для забезпечення хвильового процесу необхідно, щоб $k_z > 0$.

Критична довжина хвилі в хвилеводі $\lambda_{кр} = \dfrac{2}{\sqrt{\left(\dfrac{m}{a}\right)^2 + \left(\dfrac{n}{b}\right)^2}}$, довжина хвилі в хвилеводі $\Lambda = \dfrac{2\pi}{k_z} = \dfrac{\lambda}{\sqrt{1-\left(\dfrac{\lambda}{\lambda_{кр}}\right)^2}} > \lambda.$

Відмітимо, що хвилі TE_{mn} допускають значення $m = 0$ або $n = 0$, чого немає для хвиль TM_{mn}.

Фазова швидкість поширення хвилі $v_z = \dfrac{\omega}{k_z} = \Lambda f = \dfrac{\lambda f}{\sqrt{1-\left(\dfrac{\lambda}{\lambda_{кр}}\right)^2}}$,

хвильовий опір TE хвилі $\underline{Z}_{CTE} = \dfrac{\underline{E}_x}{\underline{H}_y} = \dfrac{\underline{E}_x}{\dfrac{k_z}{\omega\mu\mu_0}\underline{E}_x} = \dfrac{\omega\mu\mu_0}{k_z} = \dfrac{Z_{СП}}{\sqrt{1-\left(\lambda/\lambda_{кр}\right)^2}}$,

де $\underline{Z}_{СП} = \sqrt{\dfrac{\mu\mu_0}{\varepsilon\varepsilon_0}}$ – хвильовий опір вільного простору.

ЗАДАЧА 14.42. Визначити, які типи хвиль можуть поширюватися в заповненому повітрям прямокутному хвилеводі розмірами $a \times b = 2{,}5 \times 5\ см^2$ при частоті $7{,}5 \cdot 10^9\ Гц$.
Відповідь: $TE_{0,1}$; $TE_{0,2}$; $TE_{1,0}$; $TE_{1,1}$; $TM_{1,1}$.

ЗАДАЧА 14.43. Визначити потужність, що переноситься електромагнітною хвилею типу $TE_{0,1}$ в прямокутному хвилеводі задачі 14.42, якщо найбільше амплітудне значення напруженості електричного поля в хвилеводі складає величину $E_m = 10^5\ В/м$.
Відповідь: $P = 7{,}55\ кВт$.