

13 МАГНІТНЕ ПОЛЕ

13.1 ОСНОВНІ ТЕОРЕТИЧНІ ПОЛОЖЕННЯ

Магнітне поле нерозривно пов'язано з електричним струмом: якщо десь протікає струм, то обов'язково виникає магнітне поле; якщо є магнітне поле, то воно обов'язково створене струмом. Основною величиною, що характеризує магнітне поле, є вектор магнітної **індукції** \vec{B} , який визначається за силовою дією з боку магнітного поля на провідник із струмом. В розрахунках магнітних полів широко застосовується вектор **напруженості** \vec{H} . Два вказані вектори зв'язані між собою співвідношенням: $\vec{B} = \mu_a \vec{H}$, де $\mu_a = \mu_0 \cdot \mu$ – абсолютна магнітна проникність середовища, в якому створене поле; $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Гн/м}$ – абсолютна магнітна проникність вакууму (магнітна постійна); μ – відносна магнітна проникність середовища, в якому створене поле. Широке розповсюдження отримав також **магнітний потік** або потік вектора \vec{B} через деяку поверхню S :
$$\Phi = \int_S \vec{B} \cdot \vec{ds}.$$

Основним законом магнітного поля є **закон повного струму**. Його інтегральна і диференціальна форми запису:
$$\oint_L \vec{H} \cdot \vec{dl} = I, \quad \text{rot } \vec{H} = \vec{\delta},$$

де I – повний струм, зчеплений з контуром L ;

$\vec{\delta}$ – густина струму в даній точці поля.

Із закону повного струму в інтегральній формі легко отримати опорні формули, за якими можна обчислити напруженість поля, що створюється в однорідному середовищі циліндричним провідником (задача 13.5) або плоскою шиною (задача 13.6).

В областях, не зайнятих струмами ($\delta = 0$), магнітне поле є *потенціальним* і його можна розраховувати за допомогою **скалярного магнітного потенціалу** φ_M , причому $\vec{H} = -\text{grad } \varphi_M$. Визначають φ_M за допомогою рівняння Лапласа $\nabla^2 \varphi_M = 0$. Різниця скалярних магнітних потенціалів називається **магнітною напругою**

$$U_{M12} = \varphi_{M1} - \varphi_{M2} = \int_1^2 \vec{H} \cdot \vec{dl}.$$

Розрахунок магнітної напруги, яка створена окремим провідником в однорідному середовищі, детально розглянутий в задачі 13.17.

За допомогою **векторного магнітного потенціалу** \vec{A} можна розрахувати магнітне поле у будь-якій області, у тому числі і тій, що зайнята струмом. Визначається \vec{A} за рівнянням Пуассона $\nabla^2 \vec{A} = -\mu_a \vec{\delta}$, причому $\text{div } \vec{A} = 0$ і
$$\Phi = \oint_L \vec{A} \cdot \vec{dl}.$$

Граничні умови в магнітному полі: $H_{1t} = H_{2t}$, $B_{1n} = B_{2n}$, $\varphi_{M1} = \varphi_{M2}$.

Під час розрахунку магнітних полів в однорідних середовищах за наявності декількох джерел поля доцільним є **принцип накладання**. При цьому знайдені від окремих джерел величини підсумовуються: скалярні –

алгебрично ($\varphi_M = \Sigma \pm \varphi_{Mq}$, $U_M = \Sigma \pm U_{Mq}$, $\Phi = \Sigma \pm \Phi_q$ і т.д.), векторні – у векторний спосіб ($\vec{B} = \Sigma \vec{B}_q$, $\vec{H} = \Sigma \vec{H}_q$, $\vec{A} = \Sigma \vec{A}_q$).

Якщо магнітне поле створюється провідниками, які розташовані поблизу межі поділу різних середовищ, то його розрахунок спрощується застосуванням **методу дзеркальних зображень** аналогічно тому, як це робилося під час розрахунку електричних полів. Коефіцієнти неповного віддзеркалення (коефіцієнти фіктивних струмів) при цьому обчислюються як

$$k_1 = \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_1 + \mu_2}, \quad k_2 = \frac{2\mu_1}{\mu_1 + \mu_2}.$$

Індуктивність і взаємна індуктивність контурів:

$$L = \frac{\Psi}{I}; \quad M = \frac{\Psi_{12}}{I_1} = \frac{\Psi_{21}}{I_2}.$$

Енергія магнітного поля контура та її **об'ємна густина**, відповідно,

$$W_M = \frac{LI^2}{2} \quad \text{і} \quad w_M = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{W_M}{V} = \frac{BH}{2} = \frac{\mu_a H^2}{2}.$$

У багатьох випадках індуктивність простіше розраховувати через енергію магнітного поля $L = \frac{2W}{I^2}$, а не через поточозчеплення Ψ (задача 13.9).

13.2 ЗАСТОСУВАННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ СПІВВІДНОШЕНЬ ПРИ РОЗРАХУНКУ ПОЛЯ

ЗАДАЧА 13.1. По тонкому провіднику, що є колом радіусу $a = 1,2 \text{ см}$ і створює виток, тече струм $I = 5 \text{ А}$. Необхідно визначити магнітну індукцію на осі витка.

Розв'язання

Розташуємо виток у площині xOy декартової системи координат так, щоб початок координат співпадав з центром кола, а напрям осі z – з позитивним напрямом нормалі до площини кола, як це показано на рис. 13.1,а.

Розрахунок магнітної індукції виконаємо за допомогою закону Біо-

Савара-Лапласа
$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I [\vec{dl} \times \vec{R}_0]}{4\pi R^2}.$$

Між векторами \vec{dl} і \vec{R}_0 кут 90° (рис. 13.1,б), тому результат для векторного добутку $|\vec{dl} \times \vec{R}_0| = dl \cdot 1 \cdot \sin 90^\circ = dl$.

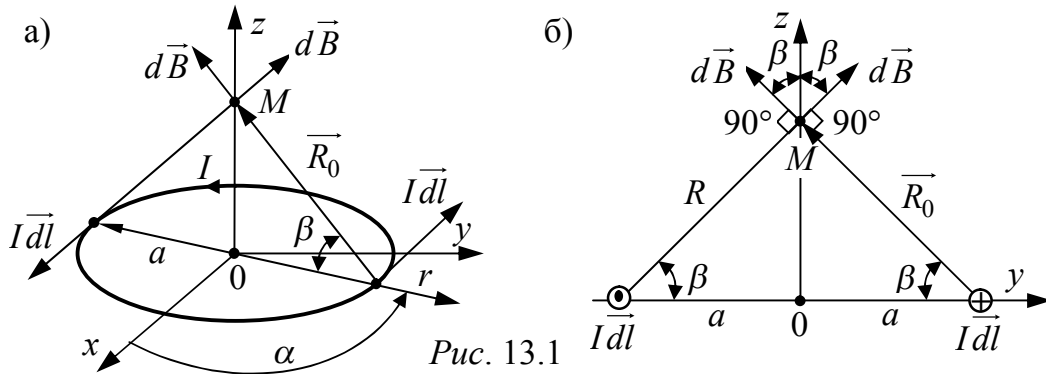


Рис. 13.1

Проекція вектора $d\vec{B}$ на вісь z відповідно до рис. 13.1,б

$$dB_z = dB \cdot \cos\beta, \quad R^2 = z^2 + a^2, \quad \cos\beta = \frac{a}{R} = \frac{a}{\sqrt{z^2 + a^2}}.$$

Елемент контуру $dl = a \cdot d\alpha$, де α – координата циліндричної системи координат (рис. 13.1,а).

З урахуванням отриманих виразів одержуємо

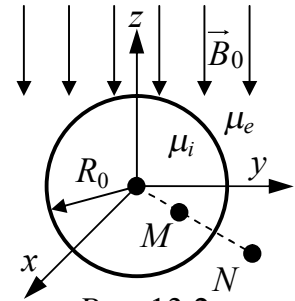
$$dB_z = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{a \cdot d\alpha}{z^2 + a^2} \cdot \frac{a}{\sqrt{z^2 + a^2}}.$$

Магнітна індукція на осі кругового струму

$$B = \int_0^{2\pi} dB_z = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{a^2}{(z^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot 2\pi = \frac{\mu_0 I \cdot a^2}{2\sqrt{(z^2 + a^2)^3}}.$$

У площині круга ($z = 0$) числове значення індукції

$$B = \frac{\mu_0 I \cdot a^2}{2 \cdot a^3} = \frac{\mu_0 I}{2a} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 5}{2 \cdot 1,2 \cdot 10^{-2}} = 26,2 \cdot 10^{-5} \text{ Тл.}$$



ЗАДАЧА 13.2. У повітрі ($\mu_e = 1$) створене рівномірне магнітне поле з індукцією $B_0 = 0,8 \text{ Тл}$. У це поле внесена куля радіусом $R_0 = 10 \text{ см}$, магнітна проникність якої $\mu_i = 4$ (рис. 13.2). Визначити магнітну індукцію в точці $M(5 \text{ см}; 120^\circ; 60^\circ)$ і напруженість магнітного поля в точці $N(15 \text{ см}; 120^\circ; 60^\circ)$.

Розв'язання

Скористаємося двічі відомим розв'язанням рівняння Лапласа в сферичній системі координат [3]: для внутрішньої області кулі і для зовнішньої.

Напруженість магнітного поля розрахуємо за формулою $\vec{H} = -\text{grad}\varphi_M$. В сферичній системі координат (див. табл. Д1)

$$\text{grad}\varphi_M = \vec{R}_0 \frac{\partial\varphi_M}{\partial R} + \vec{\theta}_0 \frac{\partial\varphi_M}{R\partial\theta} + \vec{\alpha}_0 \frac{\partial\varphi_M}{R\sin\theta\partial\alpha}.$$

У даному випадку

$$\vec{\alpha}_0 \frac{\partial\varphi_M}{R\sin\theta\partial\alpha} = 0, \quad \text{тому} \quad \vec{H} = -\vec{R}_0 \frac{\partial\varphi_M}{\partial R} - \vec{\theta}_0 \frac{\partial\varphi_M}{R\partial\theta} = \vec{R}_0 H_R + \vec{\theta}_0 H_\theta.$$

Відзначимо, що на межі поділу середовищ ($R=R_0$) радіальна складова H_R є нормальною до межі, а H_θ містить тільки тангенціальну складову. Магнітна індукція в кожній області $B = \mu_r \mu_0 H$.

Результат розв'язання занесемо до табл. 13.1.

Простежимо розв'язання для зовнішньої області, спрямувавши $R \rightarrow \infty$. На такій відстані впливом внесеної кулі можна знехтувати і згідно з рис. 13.3

$$B_R = -B_0 \cos\theta, \quad B_\theta = B_0 \sin\theta.$$

З іншого боку, $\lim_{R \rightarrow \infty} B_{Re} = -\mu_e \mu_0 C_4 \cos\theta$, $\lim_{R \rightarrow \infty} B_{\theta e} = \mu_e \mu_0 C_4 \sin\theta$.

Останні два співвідношення дозволяють визначити постійну інтегрування $C_4 = \frac{B_0}{\mu_e \mu_0} = \frac{0,8}{1 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7}} = 63,7$.

Дослідимо розв'язання для внутрішньої області, спрямувавши $R \rightarrow 0$. При цьому ні напруженості H_{Ri} і $H_{\theta i}$, ні індукції B_{Ri} і $B_{\theta i}$, ні потенціал φ_{Mi} не можуть бути нескінченно великими. Тому $C_2 = 0$.

Прийmemo, що в центрі внесеної кулі ($R=0$) $\varphi_{Mi} = 0$. Тоді $C_3 = 0$.

На цьому етапі розв'язання приймає вигляд табл. 13.2.

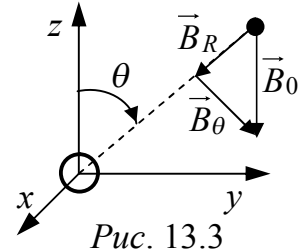


Рис. 13.3

Таблиця 13.1

Для внутрішньої області	Для зовнішньої області
$\varphi_{Mi} = (C_1 R + \frac{C_2}{R^2}) \cos \theta + C_3$	$\varphi_{Me} = (C_4 R + \frac{C_5}{R^2}) \cos \theta + C_6$
$H_{Ri} = -(C_1 - \frac{2C_2}{R^3}) \cos \theta$	$H_{Re} = -(C_4 - \frac{2C_5}{R^3}) \cos \theta$
$H_{\theta i} = (C_1 + \frac{C_2}{R^3}) \sin \theta$	$H_{\theta e} = (C_4 + \frac{C_5}{R^3}) \sin \theta$
$B_{Ri} = -\mu_i \mu_0 (C_1 - \frac{2C_2}{R^3}) \cos \theta$	$B_{Re} = -\mu_e \mu_0 (C_4 - \frac{2C_5}{R^3}) \cos \theta$
$B_{\theta i} = \mu_i \mu_0 (C_1 + \frac{C_2}{R^3}) \sin \theta$	$B_{\theta e} = \mu_e \mu_0 (C_4 + \frac{C_5}{R^3}) \sin \theta$

Таблиця 13.2

Для внутрішньої області	Для зовнішньої області
$\varphi_{Mi} = C_1 R \cos \theta$	$\varphi_{Me} = (\frac{B_0}{\mu_e \mu_0} R + \frac{C_5}{R^2}) \cos \theta + C_6$
$H_{Ri} = -C_1 \cos \theta$	$H_{Re} = -(\frac{B_0}{\mu_e \mu_0} - \frac{2C_5}{R^3}) \cos \theta$
$H_{\theta i} = C_1 \sin \theta$	$H_{\theta e} = (\frac{B_0}{\mu_e \mu_0} + \frac{C_5}{R^3}) \sin \theta$
$B_{Ri} = -\mu_i \mu_0 C_1 \cos \theta$	$B_{Re} = -\mu_e \mu_0 (\frac{B_0}{\mu_e \mu_0} - \frac{2C_5}{R^3}) \cos \theta$
$B_{\theta i} = \mu_i \mu_0 C_1 \sin \theta$	$B_{\theta e} = \mu_e \mu_0 (\frac{B_0}{\mu_e \mu_0} + \frac{C_5}{R^3}) \sin \theta$

Постійні інтегрування C_1 і C_5 визначимо з граничних умов при $R = R_0$: $H_{it} = H_{et}$ і $B_{in} = B_{en}$.

Рівняння приймають вигляд

$$\begin{cases} C_1 = \frac{B_0}{\mu_e \mu_0} + \frac{C_5}{R_0^3}; \\ \mu_i \mu_0 C_1 = \mu_e \mu_0 (\frac{B_0}{\mu_e \mu_0} - \frac{2C_5}{R_0^3}). \end{cases}$$

Розв'язання цієї системи дає наступний результат:

$$C_1 = \frac{B_0}{\mu_e \mu_0} \left(1 + \frac{\mu_e - \mu_i}{\mu_i + 2\mu_e}\right) = \frac{3B_0}{\mu_0(\mu_i + 2\mu_e)} = \frac{0,8 \cdot 3 \cdot 1}{1 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot (4 + 2 \cdot 1)} = 31,85 \cdot 10^4 \frac{A}{m},$$

$$C_5 = \frac{B_0(\mu_e - \mu_i)R_0^3}{\mu_e \mu_0(\mu_i + 2\mu_e)} = \frac{0,8 \cdot (1 - 4) \cdot 10^{-3}}{1 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot (4 + 2 \cdot 1)} = -318,5 A \cdot m^2.$$

Постійна інтегрування C_6 визначається з умови неперервності потенціалу на межі поділу середовищ, тобто при $R = R_0$ $\varphi_{Mi} = \varphi_{Me}$:

$$\frac{3B_0 \cdot R_0 \cdot \cos\theta}{\mu_0(\mu_i + 2\mu_e)} = \left(\frac{B_0}{\mu_e \mu_0} R_0 + \frac{B_0(\mu_e - \mu_i)R_0}{\mu_e \mu_0(\mu_i + 2\mu_e)} \right) \cos\theta + C_6, \text{ звідки } C_6 = 0.$$

Розрахуємо магнітну індукцію у точці M . Ця точка належить внутрішній області кулі, і тут

$$B_i = \sqrt{B_{Ri}^2 + B_{\theta i}^2} = \mu_0 \mu_i \cdot C_1 = \frac{3\mu_i \cdot B_0}{\mu_i + 2\mu_e} = \frac{3 \cdot 4 \cdot 0,8}{4 + 2} = 1,6 \text{ Тл.}$$

Відзначимо, що усередині кулі індукція B_i є сталою величиною і співпадає з B_0 за напрямом.

Визначимо напруженість магнітного поля у точці N , що знаходиться у зовнішній області:

$$H_R = -\left(C_4 - \frac{2C_5}{R^3}\right) \cos\theta = -\left(63,7 \cdot 10^4 + \frac{2 \cdot 318,5}{0,15^3}\right) \cos 120 = 41,29 \cdot 10^4 \frac{A}{m};$$

$$H_\theta = \left(C_4 + \frac{C_5}{R^3}\right) \sin\theta = \left(63,7 \cdot 10^4 - \frac{318,5}{0,15^3}\right) \sin 120 = 47,03 \cdot 10^4 \frac{A}{m};$$

$$H = \sqrt{H_R^2 + H_\theta^2} = \sqrt{41,29^2 + 47,03^2} \cdot 10^4 = 62,58 \cdot 10^4 \frac{A}{m}.$$

Ця напруженість однакова для всіх значень координати α .

ЗАДАЧА 13.3. По прямолінійному циліндричному провіднику ($\mu = 200$), що розташований у повітрі, протікає струм $I = 200 A$, радіус проводу $r_0 = 4 \text{ мм}$.

Визначити залежність магнітної індукції у функції відстані від осі провідника. Користуючись отриманою залежністю, упевнитися, що магнітне поле усередині провідника вихрове, а зовні – скалярне.

Відповідь: при $0 \leq r \leq r_0$ $B = 500r \text{ Тл, } r [m]$; $\text{rot}\vec{H} = \vec{\delta} \neq 0$, отже, поле вихрове; при $r_0 \leq r < \infty$ $B = 4 \cdot 10^{-5}/r \text{ Тл, } r [m]$; $\text{rot}\vec{H} = \vec{\delta} = 0$, отже, поле скалярне.

ЗАДАЧА 13.4. У створеному у повітрі рівномірному магнітному полі з напруженістю $H_0 = 120 A/cm$ знаходиться сферичний магнітний екран з внутрішнім радіусом $a = 6 \text{ см}$ і зовнішнім $b = 7 \text{ см}$. Тіло екрану виготовлене з матеріалу з відносною магнітною проникністю $\mu = 400$. Розрахувати коефіцієнт ослаблення поля $K_{осл} = H_1/H_0$, де H_1 – напруженість поля усередині екрану.

Розрахувати $K_{осл}$ для циліндричного екрану з тими ж розмірами a і b .

Відповідь: для сферичного екрану $K_{осл} = \frac{1}{1 + \frac{2}{9}\mu\left(1 - \frac{a^3}{b^3}\right)} = 0,029$;

для циліндричного екрану $K_{осл} = \frac{2qb^2}{\Delta} = 0,0365,$

де $q = \frac{2\mu}{(1+\mu)^2} = 0,004975;$ $\Delta = b^2 - \beta^2 \cdot a^2 = 13,358;$ $\beta = \frac{\mu-1}{\mu+1} = 0,9950.$

13.3 РОЗРАХУНОК ПОЛЯ ЗА ДОПОМОГОЮ ІНТЕГРАЛЬНИХ СПІВВІДНОШЕНЬ. ВИКОРИСТАННЯ СКАЛЯРНОГО МАГНІТНОГО ПОТЕНЦІАЛУ

ЗАДАЧА 13.5. Розрахувати напруженість магнітного поля, яке створено поодиноким циліндричним провідником із струмом I в однорідному середовищі у точці A на відстані r від осі провідника (рис. 13.4).

Розв'язання

Через точку A проведемо коло радіусом r і застосуємо закон повного струму в інтегральній формі

$$\oint_L \vec{H} \cdot \vec{dl} = I.$$

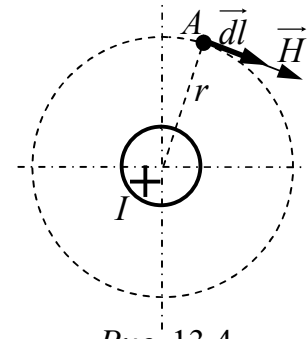


Рис. 13.4

Як видно з рис. 13.4, через симетрію напрями векторів \vec{H} і \vec{dl} у всіх точках кола співпадають, а значення напруженості H одне й те саме. Тоді скалярний добуток векторів \vec{H} і \vec{dl} замінюємо добутком їх модулів, а H виносимо за знак інтегралу як константу. Одержуємо:

$$\oint_L \vec{H} \cdot \vec{dl} = \oint_L H \cdot dl = H \oint_L dl = H \cdot L = H \cdot 2\pi r = I,$$

$$\text{звідки } H = \frac{I}{2\pi r}. \quad (13.1)$$

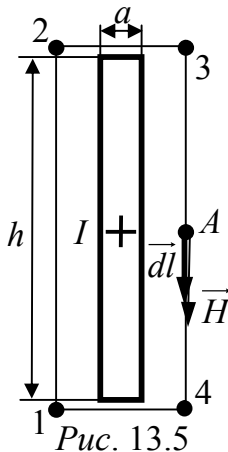


Рис. 13.5

ЗАДАЧА 13.6. Розрахувати напруженість магнітного поля, яке створено поодинокую плоскою шиною розмірами $a \times h$, $h \gg a$ із струмом I в однорідному середовищі у точці A поблизу шини (рис. 13.5).

Розв'язання

Через точку A навкруги шини побудуємо прямокутний контур 1-2-3-4-1 і застосуємо до нього закон повного струму в інтегральній формі: $\oint_L \vec{H} \cdot \vec{dl} = I.$

У точках сторін контуру 1-2 і 3-4 створюється однорідне магнітне поле, оскільки висота шини у багато разів більше її товщини, а результатом інтегрування уздовж сторін 1-4 і 2-3 можна знехтувати. В точках сторін 1-2 і 3-4 напрями векторів \vec{H} і \vec{dl} співпадають, а значення напруженості H одне й те саме. Тоді скалярний добуток векторів \vec{H} і \vec{dl} замінюємо добутком їх модулів, а H виносимо за знак інтегралу як константу. Одержуємо:

$$\oint_L \vec{H} \cdot \vec{dl} = H \cdot l_{12} + H \cdot l_{34} = H \cdot 2h = I; \quad H = \frac{I}{2h}. \quad (13.2)$$

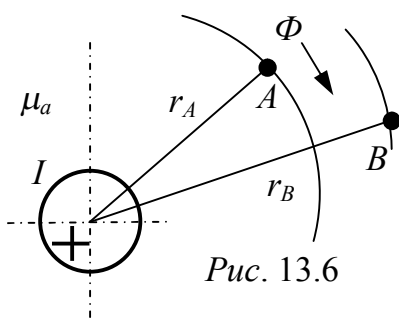


Рис. 13.6

ЗАДАЧА 13.7. Розрахувати магнітний потік, що створений поодиноким провідником в однорідному середовищі крізь прямокутну рамку AB завдовжки l , довгі сторони якої паралельні провіднику (рис. 13.6).

Розв'язання

Магнітний потік Φ через рамку AB визначається потоком по трубці, яка обмежена колами

$$\text{з радіусами } r_A \text{ і } r_B: \quad \Phi = \int_{r_A}^{r_B} B(r) \cdot l \cdot dr.$$

Але відповідно до (13.1) $H = \frac{I}{2\pi r}$; $B(r) = \mu_a \cdot H = \mu_a \cdot \frac{I}{2\pi r}$. Таким чином,

$$\Phi = \frac{\mu_a I \cdot l}{2\pi} \ln \frac{r_B}{r_A}. \quad (13.3)$$

Примітка. Якщо рамку повертати навкруги своєї осі, то найбільший потік проходить крізь рамку, коли вона розташована своєю площиною перпендикулярно до силових ліній (уздовж радіальних ліній).

ЗАДАЧА 13.8. Розрахувати зовнішню індуктивність двопровідної лінії (рис. 13.7). Радіус проводів і відстань між ними $r_0 = 1 \text{ см}$, $d = 1 \text{ м}$.

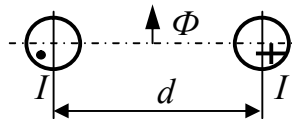


Рис. 13.7

Розв'язання

Зовнішня індуктивність лінії обумовлена магнітним потоком між проводами. Оскільки по них тече однаковий струм, то і створені ними магнітні потоки між проводами однакові. Потік від одного проводу у

відповідності до (13.3) – $\Phi = \frac{\mu_0 I \cdot l}{2\pi} \ln \frac{d - r_0}{r_0}$.

Шукана зовнішня індуктивність на 1 м довжини лінії:

$$L = \frac{2\Phi}{I} = \frac{\mu_0 l}{\pi} \ln \frac{d - r_0}{r_0} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 1}{\pi} \ln \frac{100 - 1}{1} = 1,84 \cdot 10^{-6} \text{ Гн} = 1,84 \text{ мкГн}.$$

Відмітимо, що якщо $r_0 \ll d$, то $L = \frac{\mu_0 l}{\pi} \ln \frac{d}{r_0}$.

ЗАДАЧА 13.9. Розрахувати поле і індуктивність коаксіального кабелю (рис. 13.8), по якому замикається струм I .

Розв'язання

Зовні кабелю поле відсутнє, оскільки $\Sigma I = 0$. Таким чином, можна виділити три різні області (позначені на рис. 13.8, а римськими цифрами) з магнітними проникністями μ_{a1} , μ_{a2} , μ_{a3} . Для розрахунку поля застосуємо

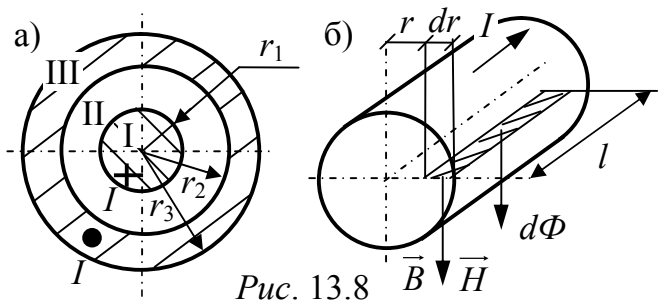


Рис. 13.8

закон повного струму: $\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = \Sigma I$.

1. Область I – $0 < r < r_1$ (рис. 13.8,б): $\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = H \cdot 2\pi r$;

$$\Sigma I = I \frac{\pi r^2}{\pi r_1^2}; \quad H = \frac{I}{2\pi r_1^2} \cdot r; \quad B = \mu_{a1} \cdot H = \frac{\mu_{a1} I}{2\pi r_1^2} \cdot r; \quad d\Phi = B \cdot dS = \frac{\mu_{a1} I}{2\pi r_1^2} \cdot r \cdot l \cdot dr.$$

Оскільки у внутрішньому провіднику магнітний потік $d\Phi$ зчеплений тільки з частиною струму I , яка пропорційна відношенню r^2/r_1^2 , то магнітне потокозчеплення $d\Psi = d\Phi \cdot \frac{r^2}{r_1^2}$.

Внутрішня індуктивність першої області обчислюється за формулою

$$L_1 = \frac{\Psi}{I} = \frac{1}{I} \int_0^{r_1} d\Psi(r) = \frac{\mu_{a1} l}{2\pi r_1^2} \cdot \frac{1}{r_1^2} \int_0^{r_1} r^3 dr = \frac{\mu_{a1} l}{2\pi r_1^4} \cdot \frac{r^4}{4} \Big|_0^{r_1} = \frac{\mu_{a1} l}{8\pi}$$

і, як бачимо, не залежить від радіусу жили.

2. Область II – $r_1 < r < r_2$.

$$\Sigma I = I; \quad H = \frac{I}{2\pi r}; \quad B = \frac{\mu_{a2} I}{2\pi r}; \quad d\Psi = d\Phi = B \cdot dS = \frac{\mu_{a2} I}{2\pi r} \cdot l \cdot dr.$$

$$\text{Зовнішня індуктивність} \quad L_2 = \frac{\int_{r_1}^{r_2} d\Psi(r)}{I} = \frac{\mu_{a2} l}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1}.$$

3. Область III – $r_2 < r < r_3$.

$$\Sigma I = I - I \frac{\pi(r^2 - r_2^2)}{\pi(r_3^2 - r_2^2)}; \quad H = \frac{I}{2\pi r} \frac{r_3^2 - r^2}{r_3^2 - r_2^2}; \quad B = \frac{\mu_{a3} I}{2\pi r} \frac{r_3^2 - r^2}{r_3^2 - r_2^2}; \quad d\Phi = \frac{\mu_{a3} I}{2\pi r} \frac{r_3^2 - r^2}{r_3^2 - r_2^2} \cdot l \cdot dr.$$

Цей потік зчеплений із струмом I і частиною зворотного струму $I \frac{r^2 - r_2^2}{r_3^2 - r_2^2}$.

$$\text{Тому елементарне потокозчеплення} \quad d\Psi = d\Phi \cdot \left(1 - \frac{r^2 - r_2^2}{r_3^2 - r_2^2}\right) = d\Phi \cdot \frac{r_3^2 - r^2}{r_3^2 - r_2^2}.$$

Внутрішня індуктивність третьої області:

$$\begin{aligned} L_3 &= \frac{\int_{r_2}^{r_3} d\Psi(r)}{I} = \frac{\mu_{a3} l}{2\pi(r_3^2 - r_2^2)^2} \int_{r_2}^{r_3} \frac{(r_3^2 - r^2)^2}{r} dr = \\ &= \frac{\mu_{a3} l}{2\pi(r_3^2 - r_2^2)^2} \cdot \left[\int_{r_2}^{r_3} \frac{r^4}{r} dr - 2r_3^2 \int_{r_2}^{r_3} r \cdot dr + \int_{r_2}^{r_3} r^3 \cdot dr \right] = \\ &= \frac{\mu_{a3} l}{2\pi(r_3^2 - r_2^2)^2} \cdot \left[r_3^4 \ln \frac{r_3}{r_2} - r_3^2(r_3^2 - r_2^2) + \frac{1}{4}(r_3^4 - r_2^4) \right] = \end{aligned}$$

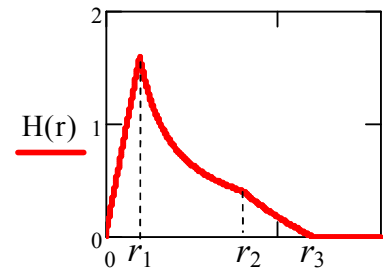


Рис. 13.9 r

$$= \frac{\mu_{a3} l}{2\pi} \left[\frac{r_3^4}{(r_3^2 - r_2^2)^2} \ln \frac{r_3}{r_2} - \frac{3r_3^2 - r_2^2}{4(r_3^2 - r_2^2)} \right].$$

Зовнішня індуктивність кабелю – $L_e = L_2$; внутрішня індуктивність – $L_i = L_1 + L_3$; вся індуктивність – $L = L_1 + L_2 + L_3$.

Графік залежності $H(r)$ наведений на рис. 13.9.

Другий спосіб розрахунку індуктивності коаксіального кабелю.

1. Область I – $0 < r < r_1$. $H = \frac{I}{2\pi r_1^2} \cdot r$.

Енергія елементарного шару dr (рис. 13.8,б) на відстані r від осі:

$$dW = \frac{B \cdot H}{2} dV = \mu_{a1} \frac{H^2}{2} \cdot 2\pi r l \cdot dr = \mu_{a1} \frac{I^2 l}{4\pi^2 r_1^4 \cdot 2} r^2 \cdot 2\pi r dr = \mu_{a1} \frac{I^2 l}{4\pi r_1^4} r^3 \cdot dr.$$

$$L_1 = \frac{2W_1}{I^2} = \frac{2}{I^2} \int_0^{r_1} dW = \frac{2}{I^2} \mu_{a1} \frac{I^2 l}{4\pi r_1^4} \int_0^{r_1} r^3 dr = \frac{\mu_{a1} l}{2\pi r_1^4} \frac{r_1^4 - 0^4}{4} = \frac{\mu_{a1} l}{8\pi}.$$

2. Область II – $r_1 < r < r_2$.

$$\Sigma I = I; \quad H = \frac{I}{2\pi r}; \quad dW = \mu_{a2} \frac{I^2 l}{4\pi^2 r^2 \cdot 2} 2\pi r \cdot dr = \mu_{a2} \frac{I^2 l}{4\pi} \frac{dr}{r}.$$

$$L_2 = \frac{2}{I^2} \mu_{a2} \frac{I^2 l}{4\pi} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r} = \frac{\mu_{a2} l}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1}.$$

3. Область III – $r_2 < r < r_3$. $H = \frac{I}{2\pi r} \frac{r_3^2 - r^2}{r_3^2 - r_2^2}$;

$$dW = \mu_{a3} \frac{I^2 l}{4\pi^2 r^2 \cdot 2} \frac{(r_3^2 - r^2)^2}{(r_3^2 - r_2^2)^2} 2\pi r \cdot dr = \mu_{a3} \frac{I^2 l}{4\pi (r_3^2 - r_2^2)^2} \frac{(r_3^2 - r^2)^2}{r} dr.$$

$$L_3 = \frac{2}{I^2} \mu_{a3} \frac{I^2 l}{4\pi (r_3^2 - r_2^2)^2} \left[\int_{r_2}^{r_3} \frac{r^4}{r} dr - 2r_3^2 \int_{r_2}^{r_3} r \cdot dr + \int_{r_2}^{r_3} r^3 \cdot dr \right] =$$

$$= \frac{\mu_{a3} l}{2\pi (r_3^2 - r_2^2)^2} \cdot \left[r_3^4 \ln \frac{r_3}{r_2} - r_3^2 (r_3^2 - r_2^2) + \frac{1}{4} (r_3^4 - r_2^4) \right].$$

ЗАДАЧА 13.10. Визначити внутрішню індуктивність прямокутної шини (рис. 13.10).

Розв'язання

Густина струму в шині – $\delta = I/(a \cdot h)$. Відповідно до закону повного струму $H \cdot 2h = \delta \cdot 2xh$, звідки $H = \delta x$, тобто напруженість H усередині шини залежить від x за лінійним законом. На поверхні шини

$$H = \delta \cdot \frac{1}{2} a = \frac{I}{ah} \frac{a}{2} = \frac{I}{2h}.$$

Індукція усередині шини $B = \mu_a H = \mu_0 \mu \delta x$.

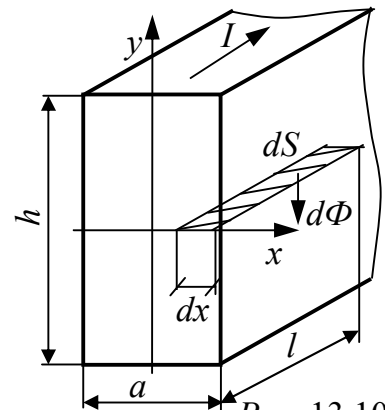


Рис. 13.10

Магнітний потік крізь переріз $dS = l \cdot dx$ $d\Phi = B \cdot dS = \mu_0 \mu \delta x l \cdot dx$. Цей магнітний потік зчеплений тільки з частиною струму I , яка пропорційна $\frac{hx}{ha/2} = \frac{2x}{a}$, тому магнітне потокозчеплення $d\Psi = d\Phi \frac{2x}{a}$. Внутрішня індуктивність

$$L_i = \frac{\Psi}{I} = \frac{\int_0^{a/2} d\Psi}{I} = \frac{\frac{2}{a} \mu_0 \mu \delta l \int_0^{a/2} x^2 dx}{\delta a h} = \frac{2 \mu_0 \mu l}{3 h a^2} x^3 \Big|_0^{a/2} = \frac{\mu_0 \mu l a}{12 h}.$$

Внутрішня індуктивність не залежить від розмірів шин, якщо пропорція h/a зберігається.

У випадку двох шин, якщо струми в них направлені в різні боки (рис. 13.11,а), шини виявляються з'єднаними послідовно, і їх внутрішня індуктивність

$$L_{i\Sigma} = 2 \cdot L_i = \frac{\mu_0 \mu l a}{6 h};$$

якщо струми направлені в одну сторону (рис. 13.11,б), шини з'єднані паралельно і тоді

$$L_{i\Sigma} = \frac{1}{2} \cdot L_i = \frac{\mu_0 \mu l a}{24 h}.$$

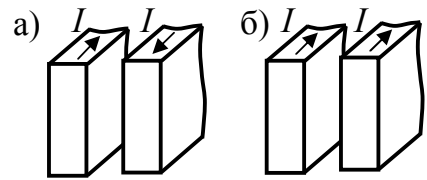


Рис. 13.11

ЗАДАЧА 13.11. По металевій трубі, магнітна проникність матеріалу якої μ і що знаходиться у повітрі, замикається струм I , як показано на рис. 13.12. Розрахувати магнітне поле всередині, зовні і в тілі труби.

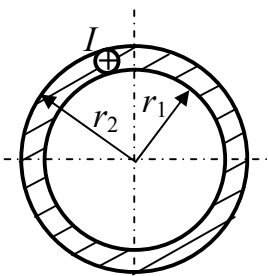


Рис. 13.12

Розв'язання

Розрахунок проведемо за допомогою закону повного струму в інтегральній формі. Контуром інтегрування візьмемо коло радіусу r , центр якого співпадає з віссю труби. Для області, що знаходиться всередині труби ($0 \leq r \leq r_1$), струм відсутній, тому тут напруженість H і індукція B рівні нулю.

В тілі труби ($r_1 \leq r \leq r_2$) $\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = \oint_L H \cdot dl = H \oint_L dl = H \cdot 2\pi r$, а повний струм дорівнює $\delta \cdot S$, де δ – густина струму в тілі труби, а S – площа кільця з радіусами r_1 і r . Оскільки $\delta = \frac{I}{\pi(r_2^2 - r_1^2)}$; $S = \pi(r^2 - r_1^2)$, то

$$H = \frac{\delta \cdot S}{2\pi r} = \frac{I(r^2 - r_1^2)}{2\pi r(r_2^2 - r_1^2)}, \quad \text{а} \quad B = \mu_0 \mu H = \frac{\mu_0 \mu I(r^2 - r_1^2)}{2\pi r(r_2^2 - r_1^2)}.$$

Зовні труби ($r_2 \leq r \leq \infty$) $\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = H \cdot 2\pi r$, а повний струм дорівнює I ,

отже, $H = \frac{I}{2\pi r}$ і $B = \frac{\mu_0 \mu I}{2\pi r}$.

ЗАДАЧА 13.12. Плоска трикутна рамка (рис. 13.13) має $w = 400$ витків і знаходиться в середовищі з проникністю $\mu = 10$ в одній площині з довгим круглим проводом радіусу r_0 . Розміри: $a = 10$ см, $b = 20$ см, $c = 15$ см. Визначити взаємну індуктивність проводу і рамки.

Розв'язання

За визначенням $M_{12} = \frac{\Psi_{12}}{I_1} = M_{21} = \frac{\Psi_{21}}{I_2} = M$.

У даному випадку зручніше задатися деяким струмом I в проводі і розрахувати магнітний потік крізь рамку.

На відстані r від проводу виділимо елементарний майданчик $Ds = y \cdot dr$ в трикутнику. Отримаємо формулу магнітного потоку крізь неї.

$$y = k \cdot r + d; \quad k = -\frac{c}{b}; \quad d = \frac{c}{b}(a + b);$$

$$H = \frac{I}{2\pi r}; \quad B = \frac{\mu\mu_0 I}{2\pi r}; \quad d\Phi = B \cdot dS = B \cdot y \cdot dr = \frac{\mu\mu_0 I}{2\pi r} \left(-\frac{c}{b}r + \frac{c}{b}(a + b)\right) dr.$$

$$\begin{aligned} \Phi &= \int_{r=a}^{r=a+b} d\Phi = \frac{\mu\mu_0 I c}{2\pi b} \int_a^{a+b} (-r + a + b) \frac{dr}{r} = \\ &= \frac{\mu\mu_0 I c}{2\pi b} [-r + (a + b)\ln(r)] \Big|_a^{a+b} = \frac{\mu\mu_0 I c}{2\pi b} [-b + (a + b)\ln \frac{a + b}{a}]; \\ \Psi &= w \cdot \Phi; \quad M = \frac{\Psi}{I} = \frac{\mu\mu_0 w c}{2\pi b} [-b + (a + b)\ln \frac{a + b}{a}] = 77,75 \text{ мкГн}. \end{aligned}$$

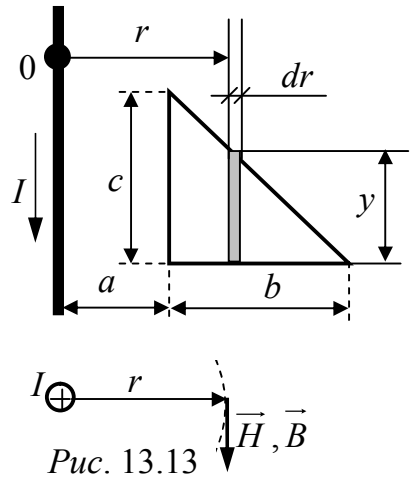


Рис. 13.13

ЗАДАЧА 13.13. Енергія магнітного поля між проводами двопровідної повітряної лінії ($r_0 = 3$ мм; $d = 40$ см) на одиницю її довжини (рис. 13.14,а) $W = 6 \cdot 10^{-3}$ Дж/м.

Потрібно: а) визначити струм в проводах лінії, побудувати графік зміни магнітної індукції між проводами; б) розрахувати взаємну індуктивність лінії і прямокутної рамки з числом витків $w = 200$, що знаходиться в одній площині з лінією, якщо $a = 10$ см; $b = 20$ см; $c = 30$ см.

Розв'язання

Енергія магнітного поля між проводами лінії $W = \frac{L_0 I^2}{2}$,

де L_0 – зовнішня індуктивність одиниці довжини лінії.

Припустимо, що по проводах лінії протікає струм I як показано на рис. 13.14,б. За законом повного струму з використанням методу накладання

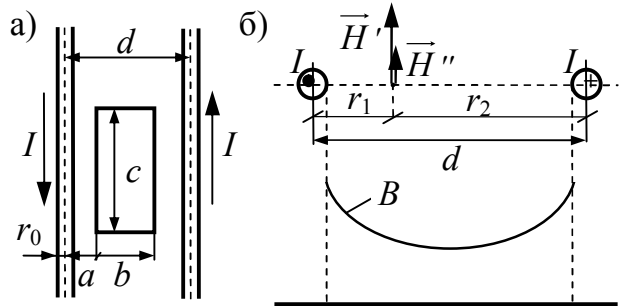


Рис. 13.14

визначимо складові напруженості поля H' і H'' , напрям яких визначається за правилом правоходового гвинта і які перпендикулярні площині двопровідної лінії, потім магнітну індукцію і магнітний потік між проводами (зовнішній по відношенню до проводів). Для цього відстань від осі лівого проводу позначимо r_1 , а від осі правого – r_2 . Тоді у відповідності до (13.1) і (13.3)

$$H' = \frac{I}{2\pi r_1}; \quad H'' = \frac{I}{2\pi r_2}; \quad B' = \frac{\mu_0 I}{2\pi r_1}; \quad B'' = \frac{\mu_0 I}{2\pi r_2} = \frac{\mu_0 I}{2\pi(d-r_1)};$$

$$\Phi' = \Phi'' = \frac{\mu_0 I \cdot l}{2\pi} \ln \frac{d-r_0}{r_0}; \quad \Phi = \Phi' + \Phi'' = \frac{\mu_0 I \cdot l}{\pi} \ln \frac{d-r_0}{r_0}.$$

Приблизний вид графіка зміни магнітної індукції між проводами $B = B' + B''$ показаний на рис. 13.14,б.

В даному випадку $d \gg r_0$, тому з достатньою точністю можна покласти, що $\Phi = \frac{\mu_0 I \cdot l}{\pi} \ln \frac{d}{r_0}$, а зовнішня індуктивність одиниці довжини лінії

$$L_0 = \frac{\Phi}{I \cdot l} = \frac{\mu_0}{\pi} \ln \frac{d}{r_0} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7}}{\pi} \ln \frac{0,4}{0,003} = 19,57 \cdot 10^{-7} \text{ Гн/м.}$$

Тоді струм у проводах лінії $I = \sqrt{\frac{2W}{L_0}} = 78,31 \text{ А.}$

Взаємна індуктивність лінії і рамки $M = \frac{w \cdot \Phi_{12}}{I}$, де Φ_{12} – магнітний потік, що зчеплений з витками рамки. Його визначимо згідно з формулою (14.3):

$$\Phi_{12}' = \frac{\mu_0 I \cdot c}{2\pi} \ln \frac{a+b}{a}; \quad \Phi_{12}'' = \frac{\mu_0 I \cdot c}{2\pi} \ln \frac{d-a}{d-a-b};$$

$$\Phi_{12} = \Phi_{12}' + \Phi_{12}'' = \frac{\mu_0 I \cdot c}{2\pi} \left(\ln \frac{a+b}{a} + \ln \frac{d-a}{d-a-b} \right) = \frac{\mu_0 I \cdot c}{2\pi} \ln \frac{(a+b)(d-a)}{a \cdot (d-a-b)}.$$

Тоді взаємна індуктивність

$$M = \frac{w \cdot \Phi_{12}}{I} = \frac{\mu_0 \cdot w \cdot c}{2\pi} \ln \frac{(a+b)(d-a)}{a \cdot (d-a-b)} = 2,637 \cdot 10^{-5} \text{ Гн.}$$

ЗАДАЧА 13.14. На рис. 13.15 схематично показаний якір електричної машини, що має тільки один виток. Активна довжина якоря $l = 60 \text{ см}$, зовнішній діаметр якоря $D = 25 \text{ см}$, діаметр кола, на якому розташований провід, $d = 20 \text{ см}$. Відносна магнітна проникність сталі $\mu = 600$. Струм у витку $I = 100 \text{ А}$. Вважаючи поле під полюсами однорідним з індукцією $B = 1,2 \text{ Тл}$, визначити обертаючий момент, який діє на якір; силу, яка діє на провід, і момент цієї сили.

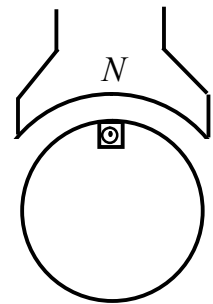


Рис. 13.15

Розв'язання

Позначимо індукцію в зазорі зліва від проводу B_n , а справа – B_n . Оскільки магнітна проникність сталі набагато більше проникності повітря, то

відповідно до закону повного струму можна вважати, що $(B_l - B_n)\delta = \mu_0 I$, де δ – зазор між статором і якорем.

Хай за відсутності струму в якорі індукція в зазорі становить B , тоді $B_l + B_n = 2B$. Енергія магнітного поля (в одиниці об'єму) в зазорі зліва від провідника $w_l = \frac{B_l^2}{2\mu_0}$, а справа – $w_n = \frac{B_n^2}{2\mu_0}$. Приріст енергії при повороті якоря на кут $\Delta\alpha$ за годинниковою стрілкою

$$\Delta W = \left(\frac{B_l^2}{2\mu_0} - \frac{B_n^2}{2\mu_0} \right) 2l\delta \frac{D}{2} \Delta\alpha = \left(\frac{I}{\delta} B \right) l\delta D \Delta\alpha = IBID \Delta\alpha.$$

Зміною енергії в сталі при повороті якоря на кут $\Delta\alpha$ можна знехтувати, оскільки $\mu \gg 1$.

Обертаючий момент, що діє на якір,

$$M = \Delta W / \Delta\alpha = IBID = 18 \text{ Нм}.$$

Силу, яка діє на провід у пазу, можна оцінити, виходячи з таких міркувань. Якщо паз глибокий, то можна вважати, що напруженість магнітного поля в ньому приблизно рівна напруженості поля в сталі, а індукція в μ разів менша ніж в сталі. Отже, сила, що діє на провід у пазу, $F = BI/\mu = 0,12 \text{ Н}$, а момент цієї сили $M_0 = Fd = Md/(\mu D) = 0,024 \text{ Нм}$.

Таким чином, момент, що діє на провід у пазу, приблизно в μ разів менший за момент, що діє на якір.

ЗАДАЧА 13.15. Прямолінійний провід і дві рамки з числами витків $w = 300$ знаходяться у повітрі в одній площині (рис. 13.16).

Розміри: $r_0 = 3 \text{ мм}$, $a = 5 \text{ см}$, $b = 15 \text{ см}$, $c = 30 \text{ см}$.

1) Розрахувати взаємну індуктивність провідника і правої рамки.

2) Розрахувати взаємну індуктивність провідника і лівої рамки.

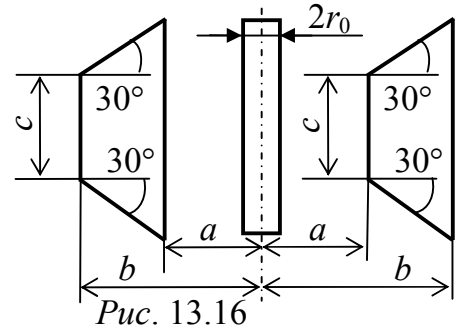
Відповіді: 1) $h(r) = 2 \cdot (0,577r + 0,1211) \text{ м}$,

$$dS = dr \cdot h(r), \quad B = \mu_0 I / (2\pi r), \quad d\Phi = B \cdot dS = I \cdot \frac{\mu_0}{\pi} \cdot (0,577r + 0,1211) \cdot \frac{dr}{r},$$

$$\Phi = \int_{r=a}^{r=b} d\Phi = I \cdot 7,63 \cdot 10^{-8} \text{ Вб}, \quad M = \frac{w \cdot \Phi}{I} = 22,89 \text{ мкГн}.$$

$$2) h(r) = 2 \cdot (-0,577r + 0,2366) \text{ м}, \quad d\Phi = B \cdot dS = I \cdot \frac{\mu_0}{\pi} \cdot (-0,577r + 0,2366) \cdot \frac{dr}{r},$$

$$\Phi = \int_{r=a}^{r=b} d\Phi = I \cdot 8,089 \cdot 10^{-8} \text{ Вб}, \quad M = \frac{w \cdot \Phi}{I} = 24,27 \text{ мкГн}.$$



ЗАДАЧА 13.16. По жилі двошарового коаксіального кабелю (рис. 13.17) замикається постійний струм $I = 80 \text{ А}$. $r_1 = 3 \text{ мм}$, $r_2 = 8 \text{ мм}$, $r_3 = 15 \text{ мм}$, $r_4 = 18 \text{ мм}$, $\mu_1 = 3$, $\mu_2 = 8$. Жила і оболонка виконані з немагнітного матеріалу.

Побудувати графік зміни магнітної індукції по перерізу кабелю. Розрахувати зовнішню індуктивність кабелю завдовжки $l = 25 \text{ м}$, знайти запасену енергію магнітного поля.

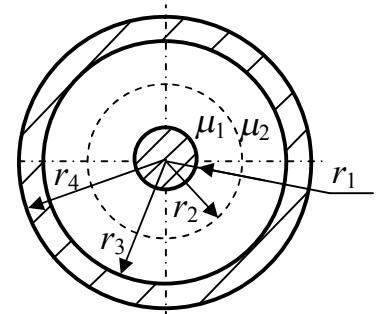


Рис. 13.17

$$\left[\begin{array}{l} \frac{\mu_0 I r}{2\pi r_1^2} = 1,778 \cdot r \text{ Тл} \quad \text{при } 0 \leq r \leq r_1, \\ \frac{\mu_1 \mu_0 I}{2\pi r} = \frac{4,8 \cdot 10^{-5}}{r} \text{ Тл} \quad \text{при } r_1 \leq r \leq r_2, \\ \frac{\mu_2 \mu_0 I}{2\pi r} = \frac{1,28 \cdot 10^{-4}}{r} \text{ Тл} \quad \text{при } r_2 \leq r \leq r_3, \\ \frac{\mu_0 I (r_4^2 - r^2)}{2\pi r (r_4^2 - r_3^2)} = \frac{0,162 \cdot (3,24 \cdot 10^{-4} - r^2)}{r} \text{ Тл} \quad \text{при } r_3 \leq r \leq r_4, \\ 0 \quad \text{при } r > r_4. \end{array} \right. \quad r \text{ [м];}$$

графік $B(r)$ представлений на рис. 13.18;
 $L_e = 4 \cdot 10^{-5} \text{ Гн}$;
 $W = 0,128 \text{ Дж}$.

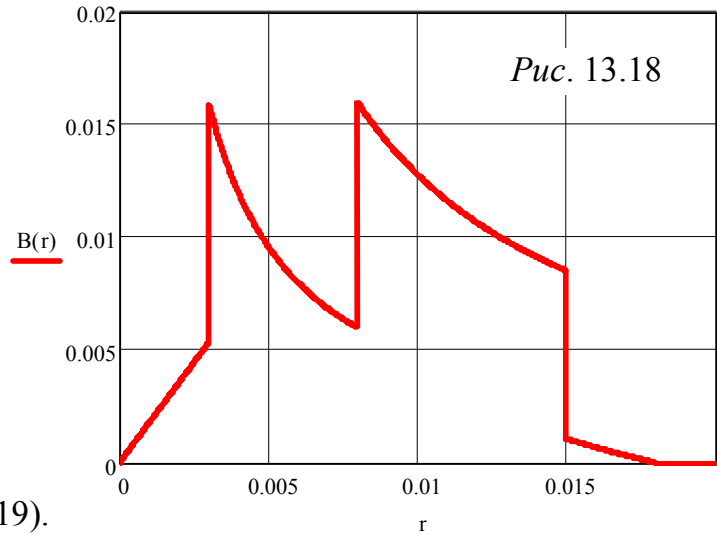


Рис. 13.18

ЗАДАЧА 13.17. Розрахувати магнітні напруги U_{MAB} , U_{MCD} , U_{MEG} поля поодинокого провідника із струмом I в однорідному середовищі з магнітною проникністю μ_a (рис. 13.19).

Розв'язання

Магнітна напруга між точками A і B , що знаходяться на радіальній лінії: $U_{MAB} = \int_A^{B \rightarrow} \vec{H} \cdot d\vec{l}$.

У всіх точках відрізка AB кут між векторами \vec{H} і $d\vec{l}$ складає 90° . Тому їх скалярний добуток дорівнює нулю, а також дорівнює нулю напруга $U_{MAB} = \varphi_A - \varphi_B = 0$. Скалярні магнітні потенціали φ_A і φ_B рівні, отже, радіальна лінія є екіпотенціальною лінією.

Магнітна напруга між точками C і D , що лежать на дузі кола: $U_{MCD} = \int_C^{D \rightarrow} \vec{H} \cdot d\vec{l}$. У всіх

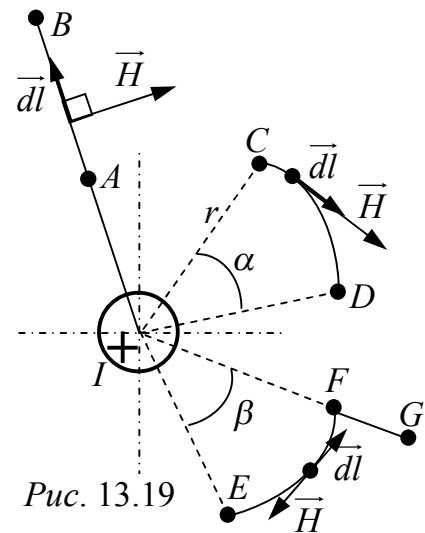


Рис. 13.19

точках дуги CD кут між векторами \vec{H} і $d\vec{l}$ складає 0° , скалярний добуток векторів можна замінити добутком їх модулів. Величина напруженості H

одна й та сама – $H = \frac{I}{2\pi r}$, тому напруженість можна винести за знак інтеграла, а інтеграл від dl дасть довжину дуги CD :

$$U_{MCD} = H \cdot \int_C^D dl = H \cdot l_{CD} = \frac{I}{2\pi r} \cdot r \cdot \alpha = \frac{I}{2\pi} \cdot \alpha, \quad \alpha [\text{рад}].$$

Магнітна напруга між довільними точками E і G : $U_{MEG} = \int_E^G \vec{H} \cdot \vec{dl}$. В

областях, не зайнятих провідниками, магнітне поле є потенціальним, отже, магнітна напруга не залежить від шляхів інтегрування, якщо вони не утворюють контурів таких, що зчеплені із струмами. Тому достатньо вибрати шлях інтегрування EG таким, щоб обчислення інтеграла було простим – уздовж радіальних ліній і по колу. Таким чином,

$$U_{MEG} = U_{MEF} + U_{MFG} = -\frac{I}{2\pi} \cdot \beta + 0 = -\frac{I}{2\pi} \cdot \beta.$$

Висновки. 1. Точки, що лежать на радіальній до провідника лінії, мають один і той же потенціал, тобто радіальна лінія є екіпотенціальною.

2. Магнітна напруга залежить від кута між точками і не залежить від відстані від них до провідника. Напруга для довільної кривої LN обчислюється за формулою $U_{MLN} = \pm \frac{I}{2\pi} \cdot \gamma$, (13.4)

де γ – виражений у радіанах кут, під яким дугу LN можна бачити з центру провідника.

3. Якщо інтегрування здійснюється уздовж силових ліній, магнітна напруга позитивна, якщо проти – негативна.

ЗАДАЧА 13.18. По жилі коаксіального кабелю (рис. 13.20) протікає струм $I = 360$ А. Визначити магнітну напругу між точками A і B , якщо $\alpha = 30^\circ$.

Розв'язання

Магнітну напругу між точками A і B визначимо за формулою $U_{MAB} = \int_A^B \vec{H} \cdot \vec{dl}$. Шлях руху виберемо

$A-C-D-B$ (рис. 13.20), враховуючи, що через різні магнітні проникності середовищ напруженості в них різні. Тоді

$$U_{MAB} = \int_A^B \vec{H} \cdot \vec{dl} = \int_A^C \vec{H} \cdot \vec{dl} + \int_C^D \vec{H} \cdot \vec{dl} + \int_D^B \vec{H} \cdot \vec{dl} = -H_1 \cdot l_{AC} - H_2 \cdot l_{CD},$$

де \vec{H}_1 і \vec{H}_2 – напруженості в областях з μ_0 і $9\mu_0$, відповідно;

$\int_D^B \vec{H} \cdot \vec{dl} = 0$ через перпендикулярність векторів \vec{H}_2 і \vec{dl} ;

напруги $H \cdot l$ узяті з мінусом, оскільки напрями векторів \vec{H} і \vec{dl} протилежні.

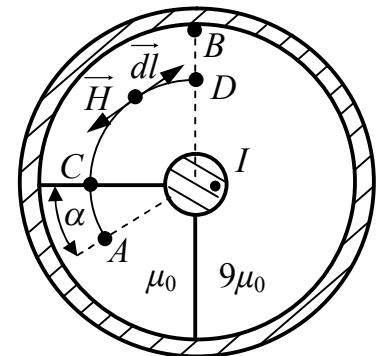


Рис. 13.20

Величини H_1 і H_2 визначимо за допомогою закону повного струму

$$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = H_1 \cdot \frac{\pi \cdot r_A}{2} + H_2 \cdot \frac{3\pi \cdot r_A}{2} = \frac{\pi \cdot r_A}{2} (H_1 + 3H_2) = I.$$

Внаслідок того, що нормальна складова вектора \vec{B} на межі поділу двох середовищ безперервна, маємо $\mu_0 H_1 = 9\mu_0 H_2$.

Вирішуючи спільно два останні рівняння, одержуємо

$$H_1 = \frac{3I}{2\pi r_A}; \quad H_2 = \frac{I}{6\pi r_A}.$$

Враховуючи, що $l_{AC} = r_A \cdot \alpha$, де кут α виражений у радіанах, і $l_{CD} = \frac{1}{2}\pi \cdot r_A$, одержуємо

$$U_{MAB} = -H_1 \cdot l_{AC} - H_2 \cdot l_{CD} = -\frac{3I}{2\pi r_A} \cdot r_A \cdot \frac{\pi}{6} - \frac{I}{6\pi r_A} \cdot r_A \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{-I}{3} = -120 \text{ А}.$$

ЗАДАЧА 13.19. Поодинокий провід із струмом $I = 10 \text{ А}$ знаходиться на межі поділу середовищ (рис. 13.21): $\mu_1 = 2$, $\mu_2 = 4$, $\mu_3 = 6$. Координати точок $x_A = y_A = 10 \text{ см}$, $x_B = -5 \text{ см}$, $y_B = -15 \text{ см}$. Виконати наступне:

1. Розрахувати напруженості магнітного поля у точках A і B , а також магнітну напругу між ними.

2. Вважаючи, що A і B є точками перетину довгих сторін прямокутної рамки завдовжки $l = 1 \text{ м}$ і з числом витків $w = 100$, знайти магнітний потік рамки і взаємну індуктивність проводу і рамки.

Розв'язання

Обчислимо відстані від центру проводу до точок A і B :

$$r_A = 10\sqrt{2} = 14,14 \text{ см}, \quad r_B = \sqrt{5^2 + 15^2} = 15,81 \text{ см}.$$

Для розрахунку напруженості магнітного поля в точці A проведемо через неї коло з центром, співпадаючим з віссю проводу. На підставі закону повного струму можна записати:

$$H_1 \cdot \frac{\pi}{3} r_A + H_2 \cdot \frac{2\pi}{3} r_A + H_3 \cdot \pi \cdot r_A = I,$$

де H_1 , H_2 , H_3 – напруженість поля в середовищах з проникністю μ_1 , μ_2 , μ_3 , відповідно.

Межі розташовані радіально, тому вектори \vec{B} і \vec{H} на межі мають тільки нормальну складову. Гранична умова $B_{1n} = B_{2n} = B_{3n}$, звідки

$$\mu_1 \cdot H_1 = \mu_2 \cdot H_2 = \mu_3 \cdot H_3.$$

Таким чином, $H_1 \cdot \left(\frac{\pi}{3} r_A + \frac{\mu_1}{\mu_2} \cdot \frac{2\pi}{3} r_A + \frac{\mu_1}{\mu_3} \cdot \pi r_A \right) = I$, звідки

$$\begin{aligned} H_A = H_1 &= I / \left(\frac{\pi}{3} r_A + \frac{\mu_1}{\mu_2} \cdot \frac{2\pi}{3} r_A + \frac{\mu_1}{\mu_3} \cdot \pi r_A \right) = \\ &= 10 \cdot 3 / ((1 + 0,5 \cdot 2 + 1/3 \cdot 3) \cdot \pi \cdot 0,1414) = 22,51 \text{ А/м}. \end{aligned}$$

Аналогічно, напруженість в точці B :

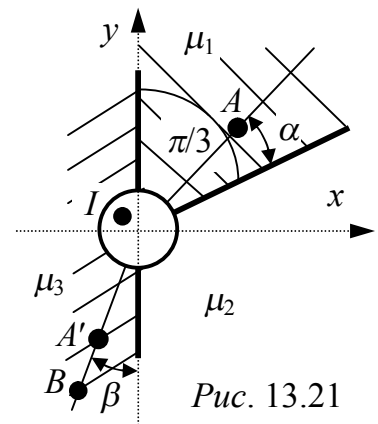


Рис. 13.21

$$H_B = H_3 = \frac{\mu_1}{\mu_3} H_1 = \frac{\mu_1}{\mu_3} I / \left(\frac{\pi}{3} r_B + \frac{\mu_1}{\mu_2} \cdot \frac{2\pi}{3} r_B + \frac{\mu_1}{\mu_3} \cdot \pi r_B \right) =$$

$$= 10 / ((1 + 0,5 \cdot 2 + 1/3 \cdot 3) \cdot \pi \cdot 0,1581) = 6,71 \text{ А/м.}$$

Магнітну напругу між точками A і B при русі за годинниковою стрілкою (проти силових ліній) можна обчислити за формулою (див. зад. 13.18):

$$U_{MAB} = -H_1 \cdot r_A \cdot \alpha - H_2 \cdot r_A \cdot \frac{2\pi}{3} - H_3 \cdot r_A \cdot \beta;$$

$$H_1 \cdot r_A = 30/(3\pi), \quad H_2 \cdot r_A = 15/(3\pi), \quad H_3 \cdot r_A = 10/(3\pi),$$

$$\alpha = \frac{\pi}{3} - \arctg \frac{x_A}{y_A} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12} \text{ рад}, \quad \beta = \arctg \frac{x_B}{y_B} = \arctg \frac{5}{15} = 0,3218 \text{ рад.}$$

$$\text{Таким чином, } U_{MAB} = -\frac{30}{3\pi} \frac{\pi}{12} - \frac{15}{3\pi} \frac{2\pi}{3} - \frac{10}{3\pi} \cdot 0,3218 = -5,24 \text{ А.}$$

Трубки магнітного потоку мають вид кілець навкруги провідника, тому магнітний потік крізь переріз AB буде дорівнювати магнітному потоку крізь переріз $A'B$, де A' – точка, яка віддалена від центру провідника на відстань r_A , але знаходиться в середовищі з μ_3 . Величина магнітного потоку згідно з

$$(13.3): \quad \Phi = \frac{\mu_a I_3 \cdot l}{2\pi} \ln \frac{r_B}{r_A}, \quad \text{де } I_3 = H_3 \cdot r_A \cdot 2\pi, \quad \mu_a = \mu_3 \cdot \mu_0.$$

Таким чином,

$$\Phi = \mu_3 \cdot \mu_0 \cdot H_3 \cdot r_A \cdot l \cdot \ln \frac{r_B}{r_A} = 6 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot \frac{10}{3\pi} \cdot 1 \cdot \ln \frac{15,81}{14,14} = 0,893 \cdot 10^{-6} \text{ Вб.}$$

Взаємна індуктивність

$$M = \frac{w \cdot \Phi}{I} = \frac{100 \cdot 0,893 \cdot 10^{-6}}{10} = 8,93 \cdot 10^{-6} \text{ Гн} = 8,93 \text{ мкГн.}$$

ЗАДАЧА 13.20. Постійний струм $I = 80 \text{ А}$ замикається по повітряній двопровідній лінії (рис. 13.22): $r_0 = 2 \text{ мм}$, $d = 30 \text{ см}$.

Розрахувати магнітне поле лінії, знайти енергію, що запасена лінією завдовжки $l = 1,5 \text{ м}$. Знайти магнітну напругу між точками $A[40 \text{ см}; -10 \text{ см}]$ і $B[10 \text{ см}; 10 \text{ см}]$.

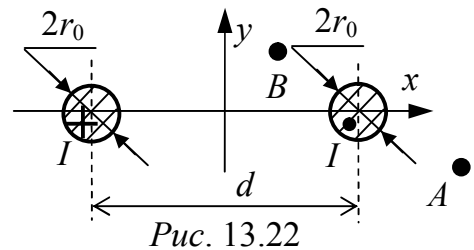


Рис. 13.22

Розв'язання

Розрахунок поля лінії проведемо методом накладання: напруженість магнітного поля у будь-якій точці визначається як $\vec{H} = \vec{H}' + \vec{H}''$, де \vec{H}' – складова напруженості, що створена лівим проводом, а \vec{H}'' – правим.

У точках, що лежать на осі x , напруженість поля визначається найбільш просто, оскільки складові \vec{H}' і \vec{H}'' мають однаковий напрям (рис. 13.23,а), а кожна з них може бути розрахована за допомогою закону повного струму. У

$$\text{просторі між проводами } H' = \frac{I}{2\pi(0,5d + x)}; \quad H'' = \frac{I}{2\pi(0,5d - x)};$$

$$H = H' + H'' = \frac{I}{2\pi} \left(\frac{1}{0,5d + x} + \frac{1}{0,5d - x} \right) = \frac{I}{\pi} \cdot \frac{2d}{d^2 - 4x^2}.$$

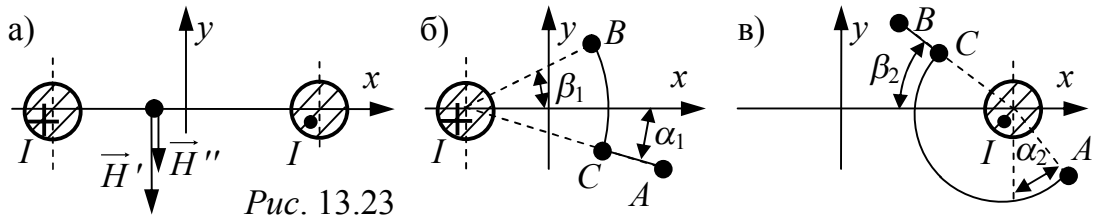


Рис. 13.23

Енергія магнітного поля між проводами лінії $W = \frac{1}{2}LI^2$, де L – зовнішня індуктивність лінії, яка дорівнює (див. задачу 13.8):

$$L = \frac{\mu_0 \cdot l}{\pi} \ln \frac{d - r_0}{r_0};$$

$$W = \frac{\mu_0 I^2 \cdot l}{2\pi} \ln \frac{d - r_0}{r_0} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 80^2 \cdot 1,5}{2\pi} \ln \frac{30 - 0,2}{0,2} = 9,608 \cdot 10^{-3} \text{ Дж.}$$

Магнітну напругу між точками A і B також визначимо за допомогою методу накладання $U_{MAB} = U_{MAB}' + U_{MAB}''$, де U_{MAB}' – складова, що створюється лівим проводом, а U_{MAB}'' – правим. У відповідності до (13.4) і рис. 13.23,б

$$U_{MAB}' = \frac{-I}{2\pi} (\alpha_1 + \beta_1),$$

$$\alpha_1 = \arctg \frac{|y_A|}{0,5d + x_A} = 0,180 \text{ рад}; \quad \beta_1 = \arctg \frac{|y_B|}{0,5d + x_B} = 0,381 \text{ рад};$$

$$U_{MAB}' = \frac{-80}{2\pi} (0,18 + 0,381) = -7,14 \text{ А.}$$

Аналогічно, складова U_{MAB}'' , що створена струмом правого проводу (рис. 13.23,в)

$$U_{MAB}'' = \frac{-I}{2\pi} (\alpha_2 + \frac{1}{2}\pi + \beta_2),$$

$$\alpha_2 = \arctg \frac{|0,5d - x_A|}{|y_A|} = 1,190 \text{ рад}; \quad \beta_2 = \arctg \frac{y_B}{0,5d - x_B} = 1,107 \text{ рад};$$

$$U_{MAB}'' = \frac{-80}{2\pi} (1,190 + 1,571 + 1,107) = -49,25 \text{ А.}$$

$$\text{Тоді } U_{MAB} = U_{MAB}' + U_{MAB}'' = -7,14 - 49,25 = -56,39 \text{ А.}$$

13.4 РОЗРАХУНОК ВЕКТОРНОГО МАГНІТНОГО ПОТЕНЦІАЛУ ТА ЙОГО ВИКОРИСТАННЯ

ЗАДАЧА 13.21. Постійний струм $I = 100 \text{ А}$ замикається по біметалевій шині (рис. 13.24,а), яка виготовлена з матеріалу з відносною магнітною проникністю $\mu = 6$ і знаходиться у повітрі. Питома провідність шарів шини 3γ і γ . Розмір $a = 2 \text{ мм}$. Побудувати графіки залежності векторного магнітного потенціалу і напруженості магнітного поля у функції координат. Розрахувати за допомогою векторного магнітного потенціалу магнітний потік, що замикається по лівій половині шини на одиницю довжини.

Розв'язання

Визначимо густину струму (δ_1 – в лівій половині шини, δ_2 – в правій).

З одного боку, струм в шині дорівнює $I = \delta_1 \cdot 50a^2 + \delta_2 \cdot 50a^2$.

З іншого боку, помітивши, що вектор густини струму має тільки тангенціальну складову щодо межі поділу середовищ, на підставі граничної умови $E_{1t} = E_{2t}$ і закону Ома в диференціальній формі $\delta = \gamma \cdot E$ одержуємо додаткове рівняння

$$\delta_1 / (3\gamma) = \delta_2 / \gamma \quad \text{або} \quad \delta_1 = 3\delta_2. \quad \text{Таким чином,}$$

$$4\delta_2 \cdot 50a^2 = I; \quad \delta_2 = I / (200a^2) = 100 / (200 \cdot 4 \cdot 10^{-6}) = 125000 \text{ A/m}^2; \quad \delta_1 = 375000 \text{ A/m}^2.$$

Розрахунок поля виконаємо за допомогою рівняння Пуассона:

$$\nabla^2 \vec{A} = -\mu_a \vec{\delta}.$$

Напрями осей декартової системи координат виберемо так, як показано на рис. 13.24,б. Оскільки вектор густини струму напрямлений вздовж осі z , то і векторний магнітний потенціал має тільки одну складову – вздовж осі z . Крім того, оскільки висота шини значно більше її товщини, всі величини залежать тільки від однієї координати x . Таким чином, $A_x = A_y = 0$,

$$\frac{\partial A}{\partial y} = \frac{\partial A}{\partial z} = 0. \quad \text{Остаточно (див. табл. Д1):} \quad \nabla^2 A = \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 A}{\partial x^2}.$$

Після двократного інтегрування цього рівняння для чотирьох областей

$$\begin{aligned} \text{поля отримаємо:} \quad x < -a, \quad \frac{\partial^2 A_1}{\partial x^2} &= 0, \quad A_1 = C_1 \cdot x + C_2, \\ -a \leq x \leq 0, \quad \frac{\partial^2 A_2}{\partial x^2} &= -\mu_a \cdot \delta_1, \quad A_2 = -\frac{\mu_a}{2} \delta_1 \cdot x^2 + C_3 \cdot x + C_4, \\ 0 \leq x \leq a, \quad \frac{\partial^2 A_3}{\partial x^2} &= -\mu_a \cdot \delta_2, \quad A_3 = -\frac{\mu_a}{2} \delta_2 \cdot x^2 + C_5 \cdot x + C_6, \\ x > a, \quad \frac{\partial^2 A_4}{\partial x^2} &= 0, \quad A_4 = C_7 \cdot x + C_8. \end{aligned}$$

Отриманих рівнянь недостатньо для визначення постійних інтегрування $C_1 \div C_8$, тому використаємо формули для напруженості магнітного поля. Векторний потенціал і напруженість зв'язані наступним чином:

$$\text{rot } \vec{A} = \vec{B} = \mu_a \vec{H}.$$

$$\text{Але згідно з табл. Д1} \quad \text{rot } \vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_z \end{vmatrix} = -\vec{j} \frac{\partial A}{\partial x}.$$

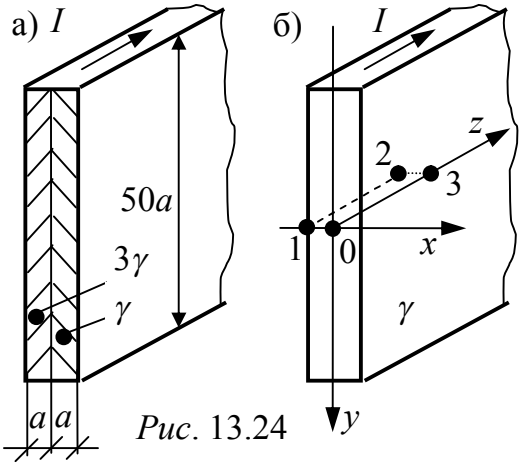


Рис. 13.24

$$\text{Тоді } \vec{H} = -\vec{j} \frac{1}{\mu_a} \frac{\partial A}{\partial x} \quad \text{і} \quad H = -\frac{1}{\mu_a} \frac{\partial A}{\partial x}.$$

Таким чином,

$$H_1 = -\frac{C_1}{\mu_0}; \quad H_2 = \delta_1 \cdot x - \frac{C_3}{\mu \cdot \mu_0}; \quad H_3 = \delta_2 \cdot x - \frac{C_5}{\mu \cdot \mu_0}; \quad H_4 = -\frac{C_7}{\mu_0}.$$

Складемо і розв'яжемо систему рівнянь для знаходження постійних інтегрування.

При $x = -a$ відповідно до закону повного струму ($H_a \cdot 2 \cdot 50a = -I$ – знак «мінус», оскільки з лівого боку шини напруженість напрямлена проти осі y):

$$H_1(x = -a) = -I/(100a) = -\frac{C_1}{\mu_0}, \quad \text{звідки} \quad C_1 = \frac{\mu_0 I}{100a} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 100}{100 \cdot 0,002} = 6,283 \cdot 10^{-4}.$$

При $x = -a$ відповідно до граничної умови $H_{1t} = H_{2t}$

$$H_1(x = -a) = H_2(x = -a) \quad \text{або} \quad -C_1/\mu_0 = \delta_1 \cdot (-a) - C_3/(\mu\mu_0); \quad \text{звідки} \\ C_3 = \delta_1 \cdot (-a) \cdot \mu\mu_0 + C_1 \cdot \mu = -375000 \cdot 0,002 \cdot 6 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} + 6,283 \cdot 10^{-4} \cdot 6 = -1,885 \cdot 10^{-3}.$$

При $x = 0$ $H_2(x = 0) = H_3(x = 0)$ або $C_3 = C_5$.

$$\text{При } x = a \quad H_3(x = a) = H_4(x = a) \quad \text{або} \quad \delta_2 \cdot a - C_5/(\mu\mu_0) = -C_7/\mu_0; \quad \text{звідки} \\ C_7 = -\delta_2 \cdot a \cdot \mu_0 + C_5/\mu = -125000 \cdot 0,002 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} + (-1,885 \cdot 10^{-3})/6 = -6,283 \cdot 10^{-4}.$$

Приймемо, що при $x = 0$ $A_2(x = 0) = A_3(x = 0) = 0$, тоді $C_4 = C_6 = 0$.

При $x = -a$ $A_1(x = -a) = A_2(x = -a)$ або

$$C_1 \cdot (-a) + C_2 = -\frac{1}{2} \mu_a \delta_1 \cdot (-a)^2 + C_3 \cdot (-a) + C_4, \quad \text{звідки} \\ C_2 = -\frac{1}{2} \mu_a \delta_1 \cdot (-a)^2 + C_3 \cdot (-a) + C_4 - C_1 \cdot (-a) = -\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 375000 \cdot 0,002^2 + \\ + 1,885 \cdot 10^{-3} \cdot 0,002 + 0 + 6,283 \cdot 10^{-4} \cdot 0,002 = -6,283 \cdot 10^{-7}.$$

$$\text{При } x = a \quad A_3(x = a) = A_4(x = a) \quad \text{або} \quad -\frac{1}{2} \mu_a \delta_2 \cdot a^2 + C_5 \cdot a + C_6 = C_7 \cdot a + C_8, \\ \text{звідки} \quad C_8 = -\frac{1}{2} \mu_a \delta_2 \cdot a^2 + C_5 \cdot a + C_6 - C_7 \cdot a = -\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 125000 \cdot 0,002^2 - \\ - 1,885 \cdot 10^{-3} \cdot 0,002 + 0 + 6,283 \cdot 10^{-4} \cdot 0,002 = -4,398 \cdot 10^{-6}.$$

Остаточню одержуємо:

$$A(x) = \begin{cases} 6,283 \cdot 10^{-4} \cdot x - 6,283 \cdot 10^{-7} \text{ Вб/м} & \text{при } x < -a \\ -1,414 \cdot x^2 - 1,885 \cdot 10^{-3} \cdot x \text{ Вб/м} & \text{при } -a < x < 0 \\ 0,471 \cdot x^2 - 1,885 \cdot 10^{-3} \cdot x \text{ Вб/м} & \text{при } 0 < x < a \\ -6,283 \cdot 10^{-4} \cdot x - 4,398 \cdot 10^{-6} \text{ Вб/м} & \text{при } x > a \end{cases},$$

$$H(x) = \begin{cases} -500 \text{ А/м} & \text{при } x < -a \\ 375000 \cdot x + 250 \text{ А/м} & \text{при } -a < x < 0 \\ 125000 \cdot x + 250 \text{ А/м} & \text{при } 0 < x < a \\ 500 \text{ А/м} & \text{при } x > a \end{cases}.$$

Побудовані за цими формулами графіки $A(x)$ і $H(x)$ подані на рис. 13.25.

Для визначення магнітного потоку, що замикається по лівій половині

шини на одиницю довжини, застосуємо формулу $\Phi = \oint_L \vec{A} \cdot d\vec{l}$. Як контур ін-

тегрування візьмемо прямокутник 0-1-2-3-0 завдовжки 1 м (рис. 13.24,б). Причому уздовж сторін 0-1 і 2-3 інтегрування дає нуль, оскільки на цих ділянках

кут між \vec{A} і \vec{dl} складає 90° (вектор \vec{A} напрямлений по осі z , а вектор \vec{dl} – паралельно осі x). Вздовж сторони 3-0 значення $A = 0$. Таким чином,

$$\Phi = \int_1^2 \vec{A} \cdot \vec{dl} = A(x = -a) \cdot 1\text{м} = -1,885 \cdot 10^{-6} \text{ Вб.}$$

Знак «мінус» у відповіді для магнітного потоку вказує на те, що магнітний потік напрямлений проти позитивної нормалі до контуру^{*)}, тобто знизу уверх.

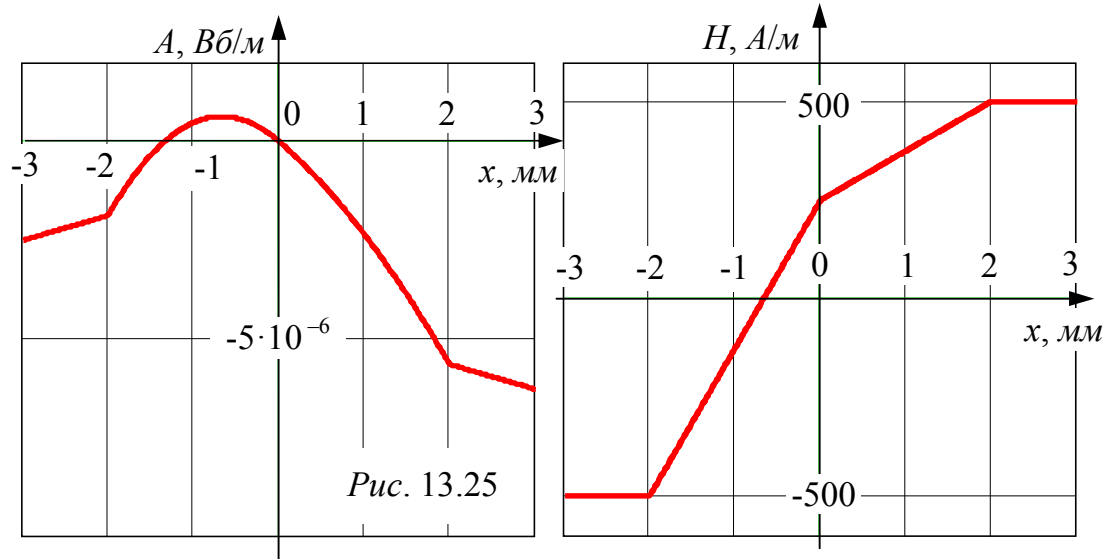


Рис. 13.25

ЗАДАЧА 13.22. Постійний струм $I = 350 \text{ А}$ замикається по металевій циліндричній шині радіусом $a = 20 \text{ см}$ (рис. 13.26). Шина виготовлена з матеріалу з відносною магнітною проникністю $\mu = 4$ і знаходиться у повітрі. Побудувати графіки залежності векторного магнітного потенціалу і напруженості магнітного поля у функції координат.

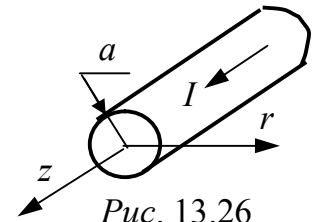


Рис. 13.26

Розв'язання

Порядок дій той же, що і під час розв'язання задачі 13.21.

Густина струму в шині $\delta = I/(\pi a^2) = 2785 \text{ А/м}^2$.

Векторний магнітний потенціал має тільки одну складову, яка напрямлена паралельно осі z , і залежить тільки від координати r . За цих умов рівняння Пуассона в циліндричній системі координат приймає вигляд:

$$\nabla^2 A = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial A}{\partial r} \right) = \begin{cases} -\mu\mu_0\delta & \text{при } r \leq a, \\ 0 & \text{при } r > a. \end{cases}$$

Його розв'язання $A_1 = -\frac{1}{4}\mu\mu_0\delta r^2 + C_1 \ln(r) + C_2$, $A_2 = C_3 \ln(r) + C_4$.

Щоб при $r = 0$ A_1 не приймало нескінченних значень, складова $C_1 \ln(r)$ повинна бути відсутня, тобто $C_1 = 0$. Крім того, хай $A_1 = 0$ при $r = 0$, тоді $C_2 = 0$ і $A_1 = -\frac{1}{4}\mu\mu_0\delta r^2$.

^{*)} Напрямок нормалі з обходом контура пов'язаний правилом буравчика: якщо дивитися з кінця вектора нормалі, то обхід контура здійснюється проти годинникової стрілки.

Напруженість магнітного поля $\vec{H} = \text{rot } \vec{A} / \mu_a = - \frac{1}{\mu_a} \frac{dA}{dr}$.

Таким чином, $H_1 = \frac{1}{2} \delta r - \frac{C_1}{\mu \mu_0 r} = \frac{1}{2} \delta r$; $H_2 = - \frac{C_3}{\mu_0 r}$.

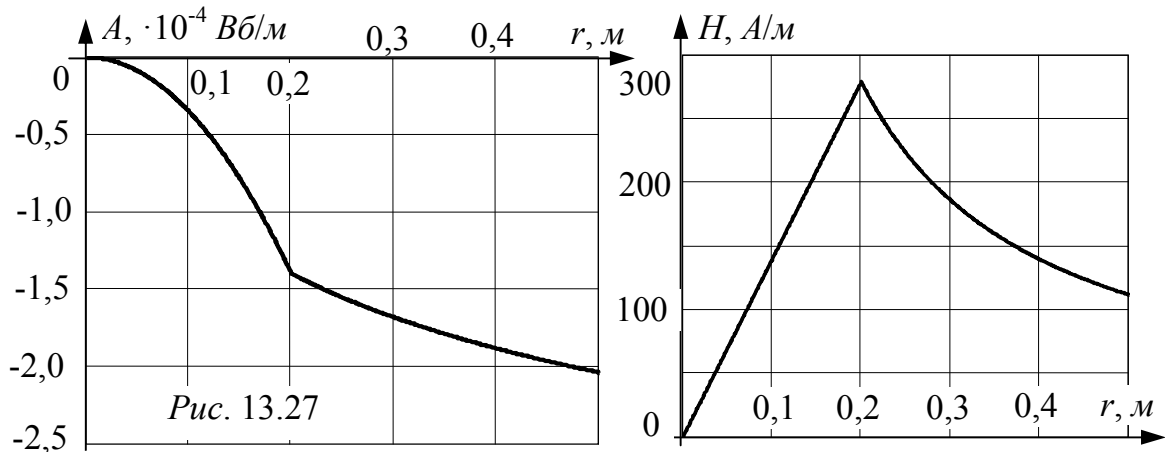
При $r = a$ $H_1 = H_2$, звідки $C_3 = - \frac{1}{2} \mu_0 \delta a^2 = - 7 \cdot 10^{-5}$,
 $A_1 = A_2$, звідки $C_4 = - \frac{1}{4} \mu \mu_0 \delta a^2 - C_3 \ln(a) = - 25,26 \cdot 10^{-5}$.

Остаточно одержуємо

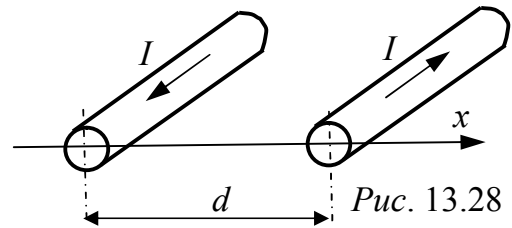
$$A(r) = \begin{cases} - 3,498 \cdot 10^{-3} r^2 \text{ Вб/м} & \text{при } r \leq a, \\ - 7 \cdot 10^{-5} \ln(r) - 25,26 \cdot 10^{-5} \text{ Вб/м} & \text{при } r > a, \end{cases}$$

$$H(r) = \begin{cases} 1393r \text{ А/м} & \text{при } r \leq a, \\ \frac{55,70}{r} \text{ А/м} & \text{при } r > a. \end{cases}$$

Побудовані за цими формулами графіки $A(r)$ і $H(r)$ подані на рис. 13.27.



ЗАДАЧА 13.23. Постійний струм $I = 35 \text{ А}$ замикається по двопровідній лінії. Радіус проводів $a = 2 \text{ мм}$, відстань між ними $d = 50 \text{ см}$ (рис. 13.28). Проводи виготовлені з матеріалу з відносною магнітною проникністю $\mu = 4$ і знаходяться у повітрі.



Побудувати графіки залежності векторного магнітного потенціалу і напруженості магнітного поля у функції координати x .

Розв'язання

При розв'язанні задачі застосуємо принцип накладання. Спочатку розрахуємо векторний магнітний потенціал і напруженість магнітного поля, які створені кожним проводом окремо, а потім підсумуємо отримані результати.

При розрахунку поля від одного, наприклад, лівого, проводу скористаємося результатами, отриманими в задачі 13.22. Густина струму у проводах $\delta = I / (\pi a^2) = 2785000 \text{ А/м}^2$. Хай початок координат знаходиться на осі лівого проводу. Тоді

$$A_1 = - \frac{1}{4} \mu \mu_0 \delta x^2 = - 3,498 \cdot x^2 \text{ Вб/м}, \quad H_1 = \frac{1}{2} \delta x = 1,393 \cdot 10^6 \cdot x \text{ А/м};$$

$$C_3 = - \frac{1}{2} \mu_0 \delta a^2 = - 7 \cdot 10^{-6}, \quad C_4 = - \frac{1}{4} \mu \mu_0 \delta a^2 - C_3 \ln(a) = - 57,50 \cdot 10^{-6}.$$

$$\text{Таким чином, } A'(x) = \begin{cases} -3,498 \cdot x^2 \text{ Вб/м} & \text{при } x \leq a, \\ -7 \cdot 10^{-6} \ln(x) - 57,50 \cdot 10^{-6} \text{ Вб/м} & \text{при } x > a, \end{cases}$$

$$H'(x) = \begin{cases} 1,393 \cdot 10^6 x \text{ А/м} & \text{при } x \leq a, \\ \frac{5,57}{x} \text{ А/м} & \text{при } x > a. \end{cases}$$

Причому слід пам'ятати, що оскільки провід із струмом є конструкцією, симетричною відносно площини yoZ , то функція $A'(x)$ є парною, а $H'(x)$ – непарною.*)

Прийmemo, що початок координат знаходиться посередині між проводами. В цьому випадку формули $A'(x)$ і $H'(x)$ трансформуються таким чином (враховується зсув початку координат на $d/2$):

$$A'(x) = \begin{cases} -7 \cdot 10^{-6} \ln(-x - d/2) - 57,5 \cdot 10^{-6} \text{ Вб/м} & \text{при } x < -a - d/2, \\ -3,498 \cdot (x + d/2)^2 \text{ Вб/м} & \text{при } -a - d/2 \leq x \leq a - d/2, \\ -7 \cdot 10^{-6} \ln(x + d/2) - 57,5 \cdot 10^{-6} \text{ Вб/м} & \text{при } x > a - d/2, \end{cases}$$

$$H'(x) = \begin{cases} \frac{5,57}{x + d/2} \text{ А/м} & \text{при } x < -a - d/2, \\ 1,393 \cdot 10^6 \cdot (x + d/2) \text{ А/м} & \text{при } -a - d/2 \leq x \leq a - d/2, \\ \frac{5,57}{x + d/2} \text{ А/м} & \text{при } x > a - d/2. \end{cases}$$

Струм правого проводу напрямлений у протилежний бік, тому знак у функцій змінюється на протилежний; зсув початку координат тепер складає $-d/2$. Тому

$$A''(x) = \begin{cases} 7 \cdot 10^{-6} \ln(-x + d/2) + 57,5 \cdot 10^{-6} \text{ Вб/м} & \text{при } x < -a + d/2, \\ 3,498 \cdot (x - d/2)^2 \text{ Вб/м} & \text{при } -a + d/2 \leq x \leq a + d/2, \\ 7 \cdot 10^{-6} \ln(x - d/2) + 57,5 \cdot 10^{-6} \text{ Вб/м} & \text{при } x > a + d/2, \end{cases}$$

$$H''(x) = \begin{cases} \frac{-5,57}{x - d/2} \text{ А/м} & \text{при } x < -a + d/2, \\ -1,393 \cdot 10^6 \cdot (x - d/2) \text{ А/м} & \text{при } -a + d/2 \leq x \leq a + d/2, \\ \frac{-5,57}{x - d/2} \text{ А/м} & \text{при } x > a + d/2. \end{cases}$$

Дійсне поле визначається накладанням полів окремих проводів. Як правило, складати потенціальні функції слід за умови, що вони мають нульове

*) Під час побудови графіків $A(x)$ і $H(x)$ слід звертати увагу на наявність симетричності у аналізованого пристрою. Якщо він симетричний відносно осьової площини (наприклад, плоска шина) або має центральну симетрію (наприклад, двопровідна лінія), графік $A(x)$ буде також симетричний, відповідно, відносно осі ординат або початку координат. Функція $H(x)$ знаходиться в диференціальному зв'язку з $A(x)$, тому вони мають різні симетрії: якщо графік $A(x)$ симетричний відносно осі ординат, графік $H(x)$ – відносно початку координат, і навпаки.

значення в деякій спільній точці. Хай значення векторного магнітного потенціалу дорівнює нулеві на початку координат. Тоді $A'(x)$ слід змінити скрізь на сталу величину

$$N = -A'(0) = 7 \cdot 10^{-6} \ln(d/2) + 57,5 \cdot 10^{-6} = \text{const},$$

а функцію $A''(x)$ – на величину $A''(0) = -N$, тобто сума $A(x) = A'(x) + A''(x)$ залишиться незмінною, оскільки константи N і $-N$ при підсумовуванні взаємно знищуються. Остаточо одержуємо:

$$A(x) = \begin{cases} 7 \cdot 10^{-6} \cdot \ln \frac{-x+d/2}{-x-d/2} \text{ Вб/м} & \text{при } x < -a-d/2, \\ 7 \cdot 10^{-6} \ln(-x+d/2) + 57,5 \cdot 10^{-6} - 3,498 \cdot (x+d/2)^2 \text{ Вб/м} & \text{при } -a-d/2 \leq x \leq a-d/2, \\ 7 \cdot 10^{-6} \cdot \ln \frac{-x+d/2}{x+d/2} \text{ Вб/м} & \text{при } a+d/2 < x \leq -a+d/2, \\ -7 \cdot 10^{-6} \ln(x+d/2) - 57,5 \cdot 10^{-6} + 3,498 \cdot (x-d/2)^2 \text{ Вб/м} & \text{при } -a+d/2 < x \leq a+d/2, \\ 7 \cdot 10^{-6} \cdot \ln \frac{x-d/2}{x+d/2} \text{ Вб/м} & \text{при } x > a+d/2, \end{cases}$$

$$H(x) = \begin{cases} \frac{-5,57}{x+d/2} + \frac{-5,57}{x-d/2} \text{ А/м} & \text{при } x < -a-d/2, \\ 1,393 \cdot 10^{-6} (x+d/2) - \frac{5,57}{x+d/2} \text{ А/м} & \text{при } -a-\frac{d}{2} \leq x \leq a-\frac{d}{2}, \\ \frac{5,57}{x+d/2} + \frac{-5,57}{x-d/2} \text{ А/м} & \text{при } a-d/2 < x \leq -a+d/2, \\ \frac{5,57}{x+d/2} - 1,393 \cdot 10^{-6} (x-d/2) \text{ А/м} & \text{при } -a+\frac{d}{2} < x \leq a+\frac{d}{2}, \\ \frac{5,57}{x+d/2} + \frac{-5,57}{x-d/2} \text{ А/м} & \text{при } x > a+d/2. \end{cases}$$

Побудовані за цими формулами графіки $A(x)$ і $H(x)$ представлені на рис. 13.29 і 13.30.

ЗАДАЧА 13.24. По біметалевій шині прямокутного перерізу протікає постійний струм $I = 1500 \text{ А}$ (рис. 13.31). Відносні магнітні проникності матеріалів шин $\mu_1 = 6\mu_0$, $\mu_2 = \mu_0$, питомі провідності $\gamma_1 = 2 \cdot 10^7 \text{ См/м}$, $\gamma_2 = 4 \cdot 10^7 \text{ См/м}$. $a = 1 \text{ см}$, $h = 50 \text{ см}$.

Розрахувати і побудувати графік векторного магнітного потенціалу у функції координат.

Відповіді: густина струму $\delta_1 = 10^5 \text{ А/м}^2$, $\delta_2 = 2 \cdot 10^5 \text{ А/м}^2$,

$$A(y) = \begin{cases} 1,885 \cdot 10^{-3} y - 5,655 \cdot 10^{-5} \text{ Вб/м} & \text{при } y \leq -a, \\ -0,377 \cdot y^2 + 3,77 \cdot 10^{-3} y \text{ Вб/м} & \text{при } -a \leq y \leq 0, \\ -0,1257 \cdot y^2 + 6,283 \cdot 10^{-4} y \text{ Вб/м} & \text{при } 0 \leq y \leq a, \\ -1,885 \cdot 10^{-3} y + 1,257 \cdot 10^{-4} \text{ Вб/м} & \text{при } y > a. \end{cases}$$

Графік $A(y)$ представлений на рис. 13.32.

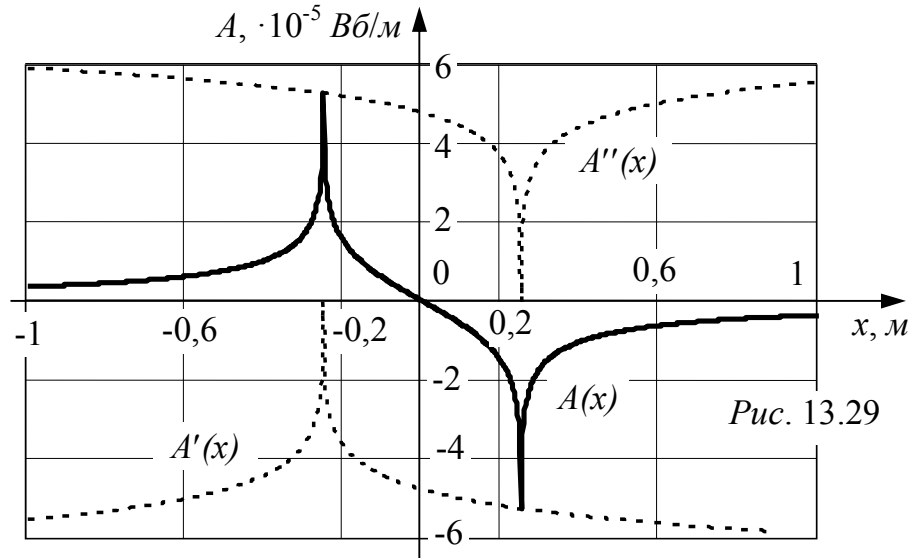


Рис. 13.29

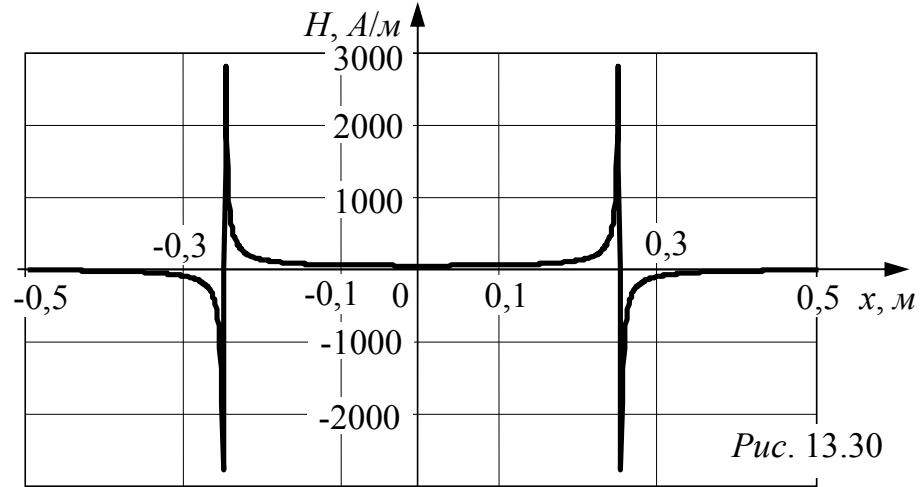


Рис. 13.30

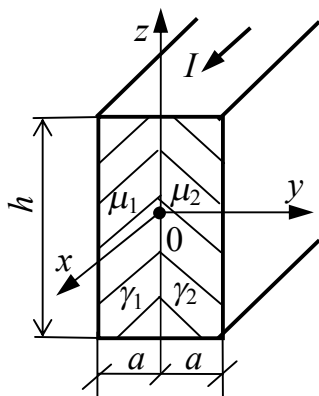


Рис. 13.31

$A(y)$
 $\times 10^{-5} \text{ Вб/м}$

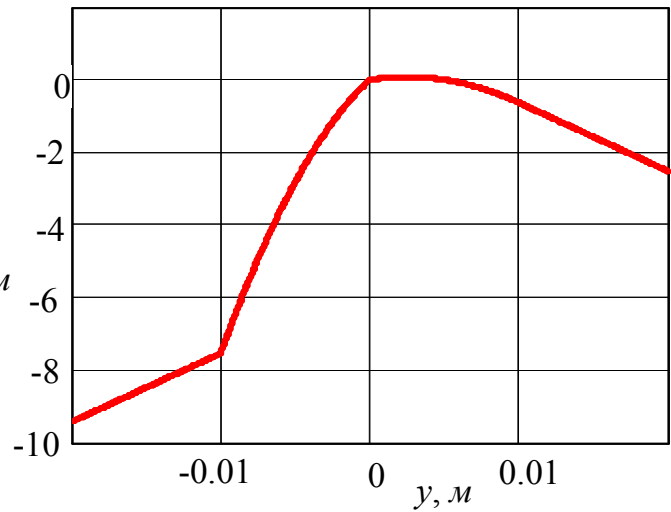


Рис. 13.32

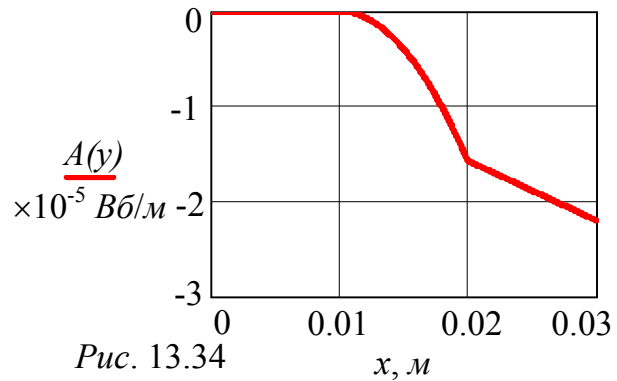
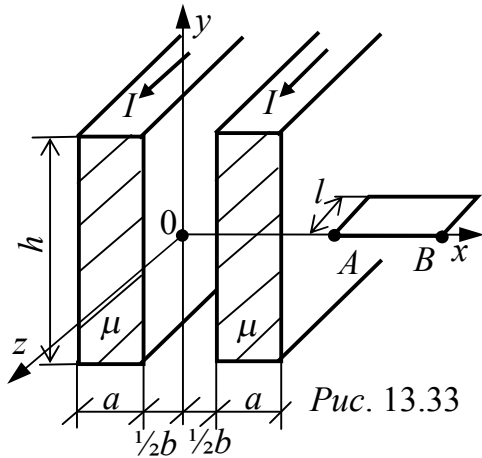
ЗАДАЧА 13.25. По двох паралельних шинах протікають однакові струми $I = 200 \text{ A}$ (рис. 13.33). Відносна магнітна проникність шин $\mu = 5$, навколишнє середовище – повітря.

Розрахувати і побудувати графік векторного магнітного потенціалу для позитивних значень координати x . Розрахувати магнітний потік через площу рамки завдовжки $l = 2 \text{ м}$, якщо $A[3 \text{ см}; 0]$; $B[5 \text{ см}; 0 \text{ см}]$ і $a = 1 \text{ см}$, $b = 2 \text{ см}$, $h = 40 \text{ см}$.

Відповіді: густина струму в шині $\delta = 5 \cdot 10^4 \text{ A/м}^2$;

$$A(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } 0 \leq x \leq 0,5b, \\ -0,157x^2 + 3,142 \cdot 10^{-3}x - 1,571 \cdot 10^{-5} \text{ Вб/м} & \text{при } 0,5b \leq x \leq 0,5b + a, \\ -6,283x - 3,142 \cdot 10^{-6} \text{ Вб/м} & \text{при } x > 0,5b + a; \end{cases}$$

графік $A(x)$ поданий на рис. 13.34; $A(x_B) = -3,456 \cdot 10^{-5}$, $A(x_A) = -2,199 \cdot 10^{-5}$, магнітний потік крізь рамку $\Phi = -l \cdot (A(x_B) - A(x_A)) = 25,13 \text{ мкВб}$.



ЗАДАЧА 13.26. Розрахувати і побудувати графіки векторного потенціалу і магнітної індукції коаксіального кабелю, ізоляція, жила і оболонка якого виконані з немагнітного матеріалу (рис. 13.35).

$$r_1 = 6 \text{ мм}, r_2 = 14 \text{ мм}, r_3 = 15 \text{ мм}, I = 200 \text{ A}.$$

Відповіді: густина струму $\delta_1 = 1,768 \cdot 10^6 \text{ A/м}^2$, $\delta_2 = 2,195 \cdot 10^6 \text{ A/м}^2$,

$$A(r) = \begin{cases} -0,556r^2 \text{ Вб/м} & \text{при } 0 \leq r \leq r_1, \\ -4 \cdot 10^{-5} \ln r - 2,246 \cdot 10^{-4} \text{ Вб/м} & \text{при } r_1 \leq r \leq r_2, \\ 0,6897r^2 - 3,103 \cdot 10^{-4} \ln r - 0,01514 \text{ Вб/м} & \text{при } r_2 \leq r \leq r_3, \\ -5,530 \cdot 10^{-4} \text{ Вб/м} & \text{при } r > r_3; \end{cases}$$

$$B(r) = \begin{cases} 1,111r \text{ Тл} & \text{при } 0 \leq r \leq r_1, \\ 4 \cdot 10^{-5} / r \text{ Тл} & \text{при } r_1 \leq r \leq r_2, \\ -1,379r - 3,103 \cdot 10^{-4} / r \text{ Тл} & \text{при } r_2 \leq r \leq r_3, \\ 0 & \text{при } r > r_3. \end{cases}$$

Графіки $A(r)$ і $B(r)$ подані на рис. 13.36.

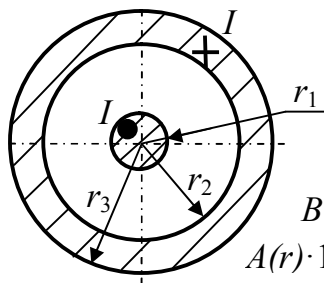


Рис. 13.35

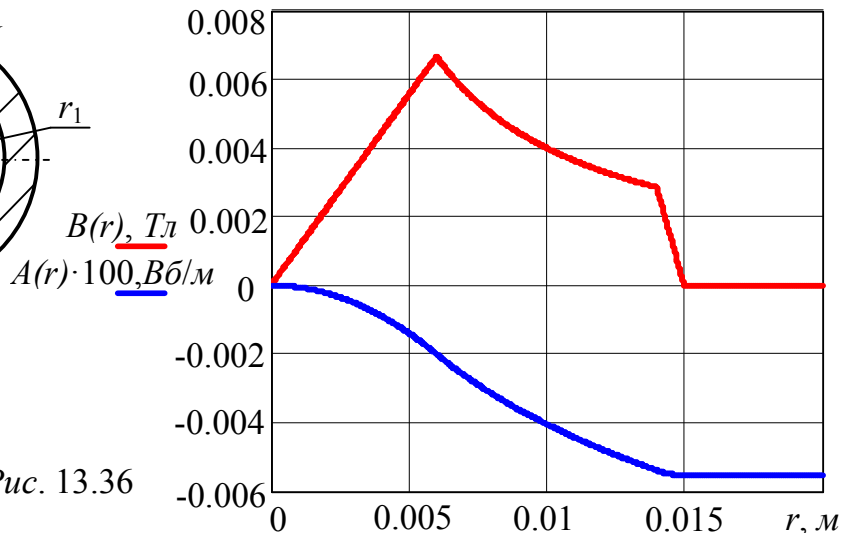


Рис. 13.36

13.5 ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ ДЗЕРКАЛЬНИХ ЗОБРАЖЕНЬ

ЗАДАЧА 13.27. По поодинокому проводу, що знаходиться поблизу межі поділу різних магнітних середовищ протікає постійний струм $I = 130 \text{ A}$ (рис. 13.37,а). Відстань $d = 70 \text{ см}$, а радіус проводу дуже малий у порівнянні з d .

Виконати наступне: 1) розрахувати напруженості магнітного поля у точках $A(x_A = -15 \text{ см}; y_A = 30 \text{ см})$ і $B(x_B = 20 \text{ см}; y_B = -35 \text{ см})$, а також магнітну напругу між ними; 2) вважаючи, що A і B є точками перетину довгих сторін прямокутної рамки завдовжки $l = 5 \text{ м}$ і з числом витків $w = 200$, знайти магнітний потік рамки і взаємну індуктивність проводу і рамки.

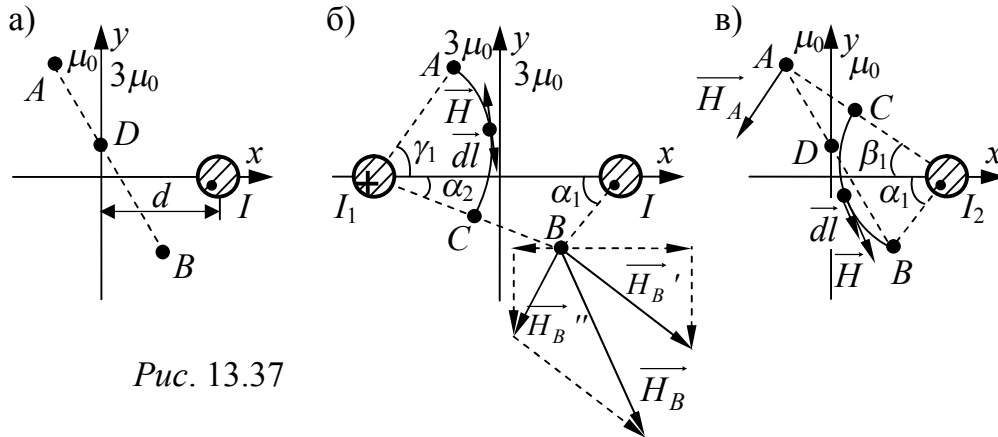


Рис. 13.37

Розв'язання

Оскільки провід знаходиться поблизу межі поділу середовищ з різними магнітними проникністями, то для розв'язання задачі застосуємо метод дзеркальних зображень, згідно з яким поле в правому напівпросторі може бути розраховане за рис. 13.37,б, а в лівому – за рис. 13.37,в.

Визначимо коефіцієнти для фіктивних струмів:

$$k_1 = \frac{\mu_0 - 3\mu_0}{\mu_0 + 3\mu_0} = -0,5; \quad k_2 = \frac{2 \cdot 3\mu_0}{\mu_0 + 3\mu_0} = 1,5.$$

Тоді $I_1 = k_1 I = -65 \text{ A}$; $I_2 = k_2 I = 195 \text{ A}$. У подальшому значення струму I_1 вважатимемо позитивним, але його напрям змінимо на протилежний у порівнянні з I , що враховано на рис. 13.37,б.

1. Розрахунок напруженостей.

В точці A напруженість створюється тільки струмом I_2 (рис. 13.37,в) і визначається вона відповідно до закону повного струму:

$$H_A = \frac{I_2}{2\pi\sqrt{y_A^2 + (d - x_A)^2}} = \frac{195}{2\pi\sqrt{0,3^2 + (0,7 + 0,15)^2}} = 34,4 \frac{A}{m}.$$

В точці B напруженість створюється струмами I і I_1 (рис. 13.37,б). Обчислимо проекції на осі x і y складових H'_B і H''_B :

$$H'_{Bx} = H'_B \cdot \cos\alpha_1 = \frac{I}{2\pi\sqrt{y_B^2 + (d - x_B)^2}} \cdot \frac{-y_B}{\sqrt{y_B^2 + (d - x_B)^2}} = \frac{-I \cdot y_B}{2\pi \cdot (y_B^2 + (d - x_B)^2)} = 19,4 \frac{A}{m};$$

$$H'_{By} = H'_B \cdot \sin\alpha_1 = \frac{I \cdot (d - x_B)}{2\pi \cdot (y_B^2 + (d - x_B)^2)} = 27,77 \frac{A}{m};$$

$$H''_{Bx} = H''_B \cdot \cos\alpha_2 = \frac{I_1}{2\pi\sqrt{y_B^2 + (d + x_B)^2}} \cdot \frac{-y_B}{\sqrt{y_B^2 + (d + x_B)^2}} = \frac{-I_1 \cdot y_B}{2\pi \cdot (y_B^2 + (d + x_B)^2)} = 3,88 \frac{A}{m};$$

$$H''_{By} = H''_B \cdot \sin\alpha_2 = \frac{I_1 \cdot (d + x_B)}{2\pi \cdot (y_B^2 + (d + x_B)^2)} = 9,99 \frac{A}{m}.$$

$$\text{Тоді } H_{Bx} = H'_{Bx} - H''_{Bx} = 15,52 \text{ A/m}; \quad H_{By} = H'_{By} + H''_{By} = 37,76 \text{ A/m};$$

$$H_B = \sqrt{H_{Bx}^2 + H_{By}^2} = 40,84 \text{ A/m}.$$

2. Розрахунок магнітної напруги.

Його проведемо методом накладання. Складова напруги, що створюється струмами I і I_2 (див. рис. 13.37), у відповідності до (13.4)

$$U_{MAB}' = \frac{I + I_2}{2\pi} (\alpha_1 + \beta_1),$$

де α_1 і β_1 – виражені в радіанах кути, показані на рис. 13.37,в.

$$\alpha_1 = \arctg \frac{|y_B|}{d - x_B} = 0,61; \quad \beta_1 = \arctg \frac{y_A}{d - x_A} = 0,34;$$

$$U_{MAB}' = \frac{130 + 195}{2\pi} (0,61 + 0,34) = 49,14 \text{ A}.$$

Складова U_{MAB}'' , створена струмом I_1 (рис. 13.37,б),

$$U_{MAB}'' = \frac{-I_1}{2\pi} (\alpha_2 + \gamma_1), \quad \alpha_2 = \arctg \frac{|y_B|}{d + x_B} = 0,371; \quad \gamma_1 = \arctg \frac{y_A}{d + x_A} = 0,5;$$

$$U_{MAB}'' = \frac{-65}{2\pi} (0,371 + 0,5) = -9 \text{ A}.$$

$$\text{Тоді } U_{MAB} = U_{MAB}' + U_{MAB}'' = 40,14 \text{ A}.$$

3. Розрахунок магнітного потоку.

Оскільки частини рамки знаходяться у різних середовищах, то використовуємо допоміжну точку D , в якій (рис. 13.37,в)

$$y_D = y_A - x_A \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = 0,021 \text{ м.}$$

Тоді складова магнітного потоку в тій частині рамки, яка знаходиться в лівому напівпросторі у відповідності до (13.3)

$$\Phi' = \frac{\mu_0 I_2 \cdot l}{2\pi} \ln \frac{r_A}{r_D} = \frac{\mu_0 I_2 \cdot l}{2\pi} \ln \frac{\sqrt{y_A^2 + (d - x_A)^2}}{\sqrt{d^2 + y_D^2}} = 4,92 \cdot 10^{-5} \text{ Вб.}$$

Складова магнітного потоку в тій частині рамки, яка знаходиться в правому напівпросторі

$$\Phi'' = \frac{3\mu_0 \cdot l}{2\pi} \left(I \cdot \ln \frac{\sqrt{d^2 + y_D^2}}{\sqrt{y_B^2 + (d - x_B)^2}} + I_1 \cdot \ln \frac{\sqrt{d^2 + y_D^2}}{\sqrt{y_B^2 + (d + x_B)^2}} \right) = 1,16 \cdot 10^{-4} \text{ Вб.}$$

Магнітний потік через рамку $\Phi = \Phi' + \Phi'' = 1,65 \cdot 10^{-4} \text{ Вб.}$

Взаємна індуктивність проводу і рамки $M = \frac{w \cdot \Phi}{I} = 2,55 \cdot 10^{-4} \text{ Гн.}$

ЗАДАЧА 13.28. Плоска шина із струмом $I = 500 \text{ А}$ розташована поблизу межі поділу різних магнітних середовищ (рис. 13.38,а) на відстані $a = 5 \text{ мм}$ від межі. Необхідно визначити магнітну індукцію у точці A і взаємну індуктивність шини і прямокутної рамки, яка має $w = 200$ витків.

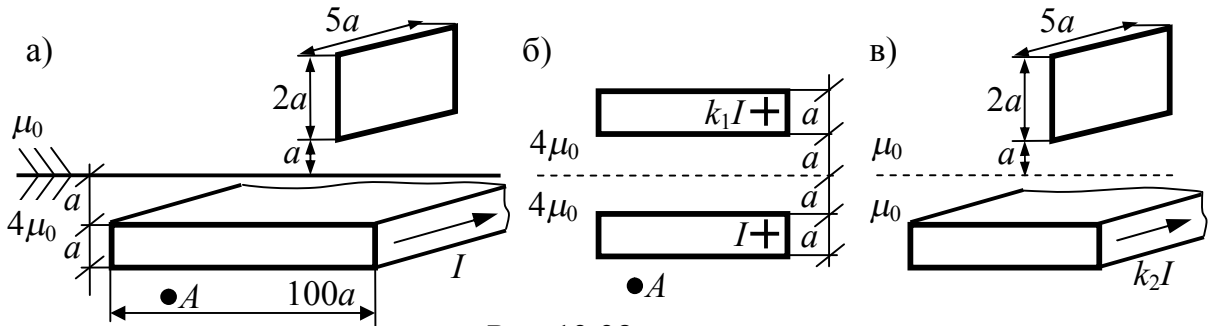


Рис. 13.38

Розв'язання

Для розв'язання задачі застосуємо метод дзеркальних зображень. Визначимо коефіцієнти для фіктивних струмів:

$$k_1 = \frac{\mu_0 - 4\mu_0}{\mu_0 + 4\mu_0} = -0,6; \quad k_2 = \frac{2 \cdot 4\mu_0}{\mu_0 + 4\mu_0} = 1,6.$$

Тоді магнітне поле в нижньому напівпросторі розрахуємо згідно з рис. 13.38,б. Оскільки ширина шини набагато більше її товщини, то можна знехтувати краєвим ефектом і відповідно до закону повного струму, а також методу накладання напруженість поля і індукція в точці A становлять:

$$H_A = \frac{I \cdot (1 + k_1)}{2 \cdot 100a} = \frac{500 \cdot (1 - 0,6)}{200 \cdot 0,005} = 200 \text{ А/м}; \quad B_A = 4\mu_0 H_A = 1,0 \cdot 10^{-3} \text{ Тл.}$$

Взаємна індуктивність проводу і рамки $M = \frac{w \cdot \Phi}{I}$, де Φ – магнітний потік, зчеплений з витками рамки. Його розрахунок виконаємо за рис. 13.38,в:

$$\Phi = S \cdot \mu_0 H = 2a \cdot 5a \cdot \mu_0 \cdot k_2 \cdot I / (2 \cdot 100a).$$

$$\text{Тоді } M = 10a \cdot \mu_0 \cdot k_2 \cdot w / 200 = 0,10 \cdot 10^{-6} \text{ Гн.}$$

ЗАДАЧА 13.29. Поодинокий провід із струмом $I = 10 \text{ А}$ знаходиться поблизу межі поділу середовищ (рис. 13.39,а) з $\mu_1 = 2$ і $\mu_2 = 6$, $r_1 = 10 \text{ см}$. Координати точок $x_A = y_A = -10 \text{ см}$, $x_B = 5 \text{ см}$, $y_B = 15 \text{ см}$. Виконати наступне:

1. Розрахувати напруженості магнітного поля у точках A і B , а також магнітну напругу між ними.

2. Вважаючи, що A і B є точками перетину довгих сторін прямокутної рамки завдовжки $l = 1 \text{ м}$ і з числом витків $w = 100$, визначити магнітний потік рамки і взаємну індуктивність проводу і рамки.

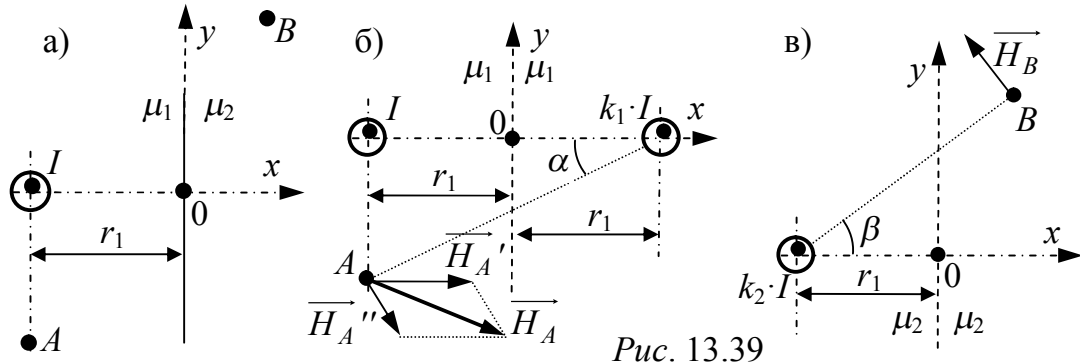


Рис. 13.39

Розв'язання

1. Розрахунок поля у лівому напівпросторі від межі виконаємо за рис. 13.39,б у відповідності до методу дзеркальних зображень. Для переходу від однієї області до іншої візьмемо будь-яку точку на межі, наприклад, початок координат 0.

$$\text{Коефіцієнт неповного віддзеркалення } k_1 = \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_2 + \mu_1} = \frac{6 - 2}{6 + 2} = 0,5.$$

Напруженість магнітного поля у точці A :

$$H_A' = \frac{I}{2\pi(-y_A)} = \frac{10}{2\pi(-10)} = 0,159 \text{ А/см};$$

$$H_{Ax}' = H_A' = 0,159 \text{ А/см}; \quad H_{Ay}' = 0;$$

$$H_A'' = \frac{k_1 \cdot I}{2\pi\sqrt{(2r_1)^2 + y_A^2}} = \frac{5}{2\pi\sqrt{20^2 + 10^2}} = 0,036 \text{ А/см};$$

$$\text{tg } \alpha = \frac{-y_A}{2r_1} = 10/20 = 0,5, \quad \alpha = 0,4636 \text{ рад};$$

$$H_{Ax}'' = H_A'' \cdot \sin \alpha = 0,036 \cdot 0,4472 = 0,016 \text{ А/см};$$

$$H_{Ay}'' = -H_A'' \cdot \cos \alpha = -0,036 \cdot 0,8944 = -0,032 \text{ А/см};$$

$$H_A = \sqrt{(H_{Ax}' + H_{Ax}'')^2 + (H_{Ay}' + H_{Ay}'')^2} = \sqrt{(0,159 + 0,016)^2 + (0 - 0,032)^2} = 0,178 \text{ А/см.}$$

Магнітна напруга згідно з (13.4):

$$U_{MA0} = U_{MA0}' + U_{MA0}'' = \frac{I}{2\pi} \frac{\pi}{2} - \frac{k_1 \cdot I}{2\pi} \alpha = \frac{10}{4} - \frac{5}{2\pi} 0,4636 = 2,131 \text{ А.}$$

Магнітний потік крізь переріз $A0$ згідно з (13.3):

$$\begin{aligned}\Phi_{A0} &= \Phi' + \Phi'' = \frac{\mu_1 \mu_0 I \cdot l}{2\pi} \ln \frac{-y_A}{r_1} + \frac{\mu_1 \mu_0 k_1 I \cdot l}{2\pi} \ln \frac{\sqrt{(2r_1)^2 + y_A^2}}{r_1} = \\ &= 0 + \frac{2 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 5 \cdot 1}{2\pi} \ln \frac{\sqrt{500}}{10} = 1,609 \cdot 10^{-6} \text{ Вб (напрявлений зверху униз)}.\end{aligned}$$

2. Розрахунок поля у правому напівпросторі від межі виконаємо за рис. 13.39,в.

$$k_2 = \frac{2\mu_1}{\mu_2 + \mu_1} = \frac{4}{6 + 2} = 0,5;$$

$$H_B = \frac{k_2 I}{2\pi \sqrt{(r_1 + x_B)^2 + y_B^2}} = \frac{5}{2\pi \sqrt{15^2 + 15^2}} = 0,038 \text{ А/см};$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{y_B}{r_1 + x_B} = 15/15 = 1, \quad \alpha = \pi/4 \text{ рад};$$

$$U_{MOB} = \frac{k_2 \cdot I}{2\pi} \beta = \frac{5}{2\pi} \frac{\pi}{4} = 0,625 \text{ А};$$

$$\begin{aligned}\Phi_{OB} &= \frac{\mu_2 \mu_0 k_2 I \cdot l}{2\pi} \ln \frac{\sqrt{(r_1 + x_B)^2 + y_B^2}}{r_1} = \frac{6 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 5 \cdot 1}{2\pi} \ln \frac{\sqrt{450}}{10} = \\ &= 4,512 \cdot 10^{-6} \text{ Вб (напрявлений знизу уверх)}.\end{aligned}$$

3. Остаточно одержуємо:

- напруженості поля – $H_A = 0,178 \text{ А/см}; H_B = 0,038 \text{ А/см};$

- магнітна напруга $U_{MAB} = U_{MA0} + U_{MOB} = 2,131 + 0,625 = 2,756 \text{ А};$

- магнітний потік $\Phi_{AB} = -\Phi_{A0} + \Phi_{OB} = (-1,609 + 4,512) \cdot 10^{-6} = 2,903 \cdot 10^{-6} \text{ Вб};$

- взаємна індуктивність проводу і рамки $M = \frac{w \cdot \Phi_{AB}}{I} = \frac{100 \cdot 2,903}{10} = 29,03 \text{ мкГн}.$

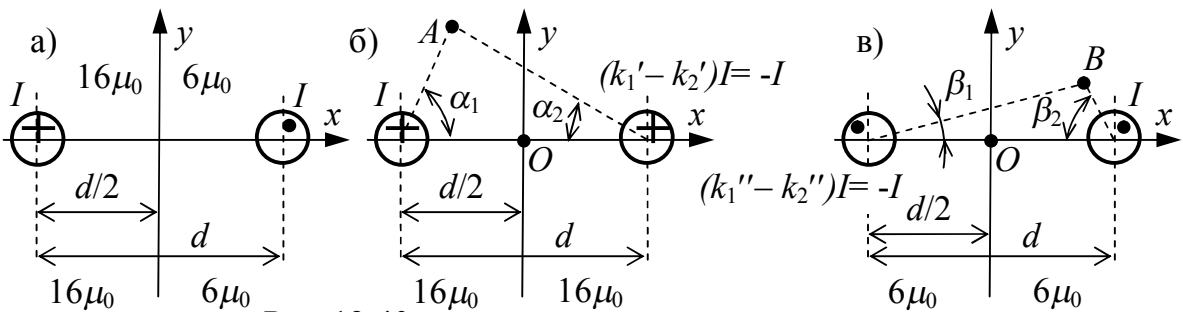


Рис. 13.40

ЗАДАЧА 3.30. По проводах двопровідної лінії ($r_0 = 1 \text{ см}, d = 50 \text{ см}$), що знаходяться в різних магнітних середовищах, протікає постійний струм $I = 130 \text{ А}$ (рис. 13.40,а). Розрахувати магнітну напругу між точками $A(-15 \text{ см}; +30 \text{ см})$ і $B(20 \text{ см}; 10 \text{ см})$.

Відповідь: коефіцієнти неповного віддзеркалення:

$$k_1' = \frac{6-16}{6+16} = -0,455, \quad k_2' = \frac{2 \cdot 6}{6+16} = 0,545, \quad k_1'' = -k_1' = 0,455, \quad k_2'' = \frac{2 \cdot 16}{6+16} = 1,455;$$

кути в радіанах, показані на рис. 13.40,б і в:

$$\alpha_1 = 1,249, \quad \alpha_2 = 0,644, \quad \beta_1 = 0,219, \quad \beta_2 = 1,107;$$

розрахункові ескізи для напруг U_{MAO} і U_{MOB} на рис. 13.40,б і в, відповідно;

$$U_{MAO} = \frac{I}{2\pi} (\alpha_1 + \alpha_2) = 39,2 \text{ A}, \quad U_{MOB} = \frac{-I}{2\pi} (\beta_1 + \beta_2) = -27,4 \text{ A}, \quad U_{MAB} = 11,8 \text{ A}.$$

ЗАДАЧА 13.31. Циліндричний провід радіусом $r_0 = 6 \text{ мм}$ знаходиться у повітрі на відстані $h = 40 \text{ см}$ (рис. 13.41) від залізобетонної стіни з відносною магнітною проникністю $\mu = 4$. Виконати наступне:

1. Визначити, якого напрямку і величини необхідно пропустити струм по проводу, щоб у точці N ($b = 30 \text{ см}$) тангенціальна складова напруженості магнітного поля складала $H_t = 50 \text{ A/м}$.

2. Розрахувати силу, що діє при цьому на 1 м провідника.

3. Визначити магнітну індукцію у точці K (величина і напрям).

4. Знайти об'ємну густину енергії магнітного поля у точках K і K' , що є дзеркальним відображенням точки K .

Відповіді: $I = 490,6 \text{ A}$, струм напрямлений за площину рисунка;

$F = 0,0361 \text{ Н/м}$, а провідник притягується до стіни;

$B_K = 3,572 \cdot 10^{-4} \text{ Тл}$; $w_K = 50,8 \cdot 10^{-3} \text{ Дж/м}^3$, $w_{K'} = 3,36 \cdot 10^{-3} \text{ Дж/м}^3$.

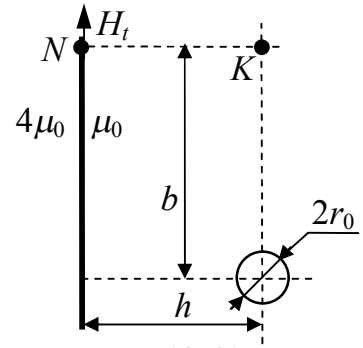


Рис. 13.41

13.6 ЗАСТОСУВАННЯ ПЕОМ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ

Застосовувати ПЕОМ доцільно для розв'язання задач, що вимагають великого об'єму обчислювальної роботи. Нижче подані приклади розв'язання деяких подібних задач.

ЗАДАЧА 13.32. По проводах трипровідної повітряної лінії протікає постійний струм I як показано на рис. 13.42. Відстань між всіма проводами $2d = 140 \text{ см}$. Радіуси проводів набагато менше d . Розрахувати напруженості магнітного поля у точках A і B , а також магнітну напругу між ними, якщо

$$I = 60 \text{ A}, \quad x_A = -10 \text{ см}; \quad y_A = -15 \text{ см}; \quad x_B = 15 \text{ см}; \quad y_B = 20 \text{ см}.$$

Розв'язання

Для розрахунку напруженостей у точках A і B застосуємо закон повного струму в інтегральній формі і метод накладання, причому обидві напруженості розкладатимемо на проекції в прямокутній системі координат. З цією метою розглянемо довільну точку, положення якої визначається координатами x і y (рис. 13.42). Проекція напруженості поля в цій точці на вісь x :

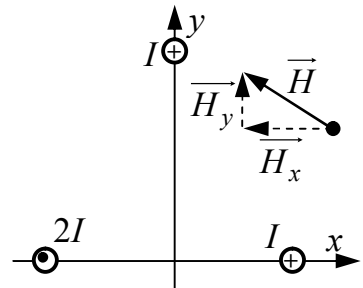


Рис. 13.42

$$H_x(x, y) := \frac{-I}{2 \cdot \pi} \cdot \left[\frac{2 \cdot y}{(d+x)^2 + y^2} - \frac{y}{(d-x)^2 + y^2} + \frac{\sqrt{3} \cdot d - y}{(\sqrt{3} \cdot d - y)^2 + x^2} \right].$$

Вона містить три складові, які створені лівим, правим і верхнім проводами лінії, відповідно.

Аналогічно проекція напруженості поля в цій точці на вісь y :

$$H_y(x, y) := \frac{I}{2 \cdot \pi} \cdot \left[\frac{2 \cdot (d+x)}{(d+x)^2 + y^2} + \frac{d-x}{(d-x)^2 + y^2} - \frac{x}{(\sqrt{3} \cdot d - y)^2 + x^2} \right].$$

Повні значення напруженості у точках A і B :

$$H_A := \sqrt{H_x(x_A, y_A)^2 + H_y(x_A, y_A)^2} \quad H_B := \sqrt{H_x(x_B, y_B)^2 + H_y(x_B, y_B)^2}$$

Магнітну напругу між точками визначимо у відповідності до співвідношення: $U_M = \int_A^B \vec{H} \cdot \vec{dl}$. Інтегрування

виконаємо по горизонталі і вертикалі. Тоді

$$U_M := \int_{x_A}^{x_B} H_x(x, y_A) dx + \int_{y_A}^{y_B} H_y(x_B, y) dy.$$

MathCAD-програма і відповідь подані у додатку до розділу 13.

ЗАДАЧА 13.33. Розрахувати взаємну індуктивність двох двопровідних ліній, які розташовані у повітрі (рис. 13.43), якщо

$$r_1 = 4 \text{ мм}, \quad r_2 = 2 \text{ мм}, \quad d_1 = 0,5 \text{ м}, \quad d_2 = 0,2 \text{ м}, \quad h_1 = 20 \text{ см}, \quad h_2 = 30 \text{ см}.$$

Розв'язання

Розрахунок виконаємо за допомогою векторного магнітного потенціалу^{*)}. Отримаємо формулу для векторного магнітного потенціалу зовні циліндричного провідника із струмом I . Згідно з рівнянням Пуассона для магнітного поля $\nabla^2 \vec{A} = \vec{\delta}$. Записавши вираз лапласіана у циліндричній системі координат і враховуючи, що вектор \vec{A} в даному випадку має тільки одну складову $\vec{A} = \vec{k} \cdot A_z = \vec{k} \cdot A$, яка напрямлена по осі проводу (по осі z), і ця складова залежить через симетрію пристрою тільки від координати r , а також відсутність густини струму за межами проводу, отримаємо

$$\nabla^2 A = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial A}{\partial r} \right) = 0.$$

Двократне інтегрування по r дає $A = C_0 \cdot \ln r + C_1$. Вектор-потенціал визначається з точністю до постійної. Прийmemo, що він має нульове значення на поверхні проводу, тобто при $r = r_0$. Тоді $C_1 = -C_0 \cdot \ln r_0$ і $A = C_0 \cdot \ln(r/r_0)$. Постійну інтегрування C_0 визначимо з використанням напруженості магнітного поля, яка пов'язана з вектор-потенціалом формулою $\mu_a \cdot \vec{H} = \text{rot } \vec{A}$.

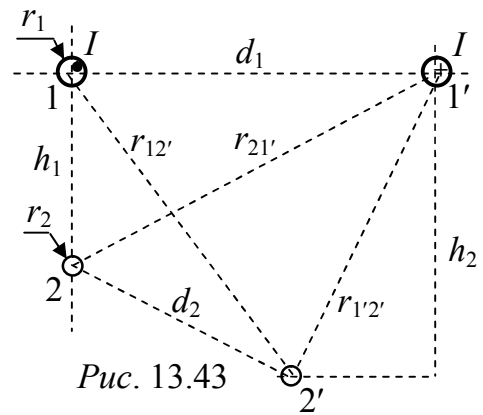


Рис. 13.43

^{*)} Відзначимо, що магнітні потоки можна знайти також за формулою (13.3).

Після розкриття ротору в циліндричній системі координат з урахуванням $\vec{A} = \vec{k} \cdot A$ і $\vec{H} = \vec{l}_\theta \cdot H$, отримуємо $\mu_a \cdot H = -\frac{dA}{dr}$, звідки $H = -\frac{C_0}{\mu_a r}$.

На поверхні проводу відповідно до закону повного струму

$$H = \frac{I}{2\pi \cdot r_0}. \quad \text{Тоді} \quad C_0 = -\frac{\mu_a I}{2\pi} \quad \text{і} \quad A = \frac{\mu_a I}{2\pi} \ln \frac{r_0}{r}.$$

Для визначення взаємної індуктивності ліній припустимо, що по проводах першої лінії (1-1') замикається струм I , як вказано на рис. 13.43. Виходячи з формули $\Phi = \oint \vec{A} d\vec{l}$, визначимо складову магнітного потоку Φ_1 , яка створена проводом 1 і пронизує площину ділянки другої лінії завдовжки l , а також складову Φ_2 , що створена струмом проводу 1':

$$\Phi_1 = \frac{\mu_0 I l}{2\pi} \ln \frac{r_1}{r_{12}} - \frac{\mu_0 I l}{2\pi} \ln \frac{r_1}{r_{12'}} = \frac{\mu_0 I l}{2\pi} \ln \frac{r_{12'}}{r_{12}},$$

$$\Phi_2 = \frac{\mu_0 I l}{2\pi} \ln \frac{r_1}{r_{12'}} - \frac{\mu_0 I l}{2\pi} \ln \frac{r_1}{r_{12}} = \frac{\mu_0 I l}{2\pi} \ln \frac{r_{12}}{r_{12'}}.$$

Відстані у цих формулах (див. рис. 14.43):

$$r_{12} = h_1; \quad r_{12'} = \sqrt{h_2^2 + d_2^2 - (h_2 - h_1)^2}; \quad r_{1'2} = \sqrt{h_1^2 + d_1^2};$$

$$r_{1'2'} = \sqrt{h_2^2 + (d_1 - \sqrt{d_2^2 - (h_2 - h_1)^2})^2}.$$

Потік взаємної індукції $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 = \frac{\mu_0 I \cdot l}{2\pi} \ln \frac{r_{12} r_{12'}}{r_{12} r_{12'}}.$

Взаємна індуктивність ліній $M = \frac{\Phi}{I} = \frac{\mu_0 \cdot l}{2\pi} \ln \frac{r_{12} r_{12'}}{r_{12} r_{12'}}.$

За довжини ліній $l = 1 \text{ км}$ $M = \frac{\mu_0 \cdot 10^3}{2\pi} \ln \frac{r_{12} r_{12'}}{r_{12} r_{12'}}.$

MathCAD-програма і відповідь подані у додатку до розділу 13.

ЗАДАЧА 13.34. По плоскій шині заввишки $h = 15 \text{ см}$ і завтовшки $2a = 0,8 \text{ см}$ протікає постійний струм $I = 3600 \text{ А}$ (рис. 13.44). Шина мідна, розташована у повітрі. В площині xOy розташована прямокутна рамка завдовжки $l = 0,5 \text{ м}$, причому сторона l паралельна осі Ox . Число витків рамки $w = 150$, $b = 1 \text{ см}$, $c = 0,5 \text{ см}$.

1) Розрахувати залежність векторного магнітного потенціалу поля у функції координат і побудувати його графік.

2) Розрахувати взаємну індуктивність шини і рамки за допомогою векторного магнітного потенціалу.

Відповідь: MathCAD-програма, складена відповідно

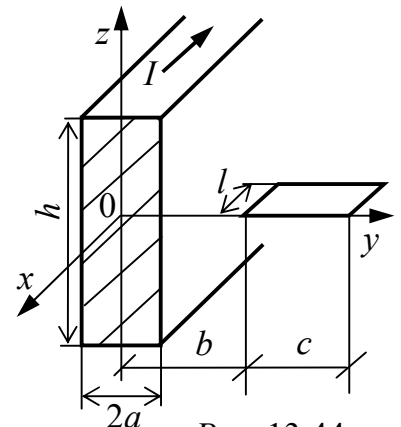


Рис. 13.44

до алгоритму розв'язання задачі 13.21, і результати розрахунків наведені у додатку до розділу 13.

ЗАДАЧА 13.35. Постійний струм $I = 600 \text{ А}$ замикається по двопровідній повітряній лінії, яка виконана шинами прямокутного перерізу з розмірами $a = 4 \text{ мм}$, $h = 200 \text{ мм}$ (рис. 13.45). Магнітна проникність лівої шини $\mu_1 = 800$, а правої – $\mu_2 = 400$.

Побудувати графіки залежності векторного магнітного потенціалу і напруженості магнітного поля у функції координат. Визначити магнітний потік, що замикається по тілу лівої шини завдовжки $l = 1 \text{ м}$. Розрахувати внутрішню індуктивність одиниці довжини лінії.

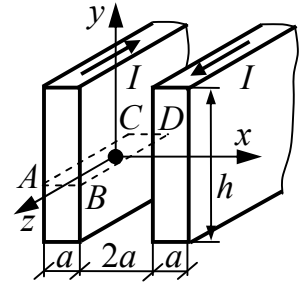


Рис. 13.45

Розв'язання

Виберемо розташування декартової системи координат як показано на рис. 13.45. Для визначення векторного магнітного потенціалу застосуємо рівняння Пуассона. При цьому врахуємо, що оскільки товщина шин і відстань між ними значно менше їх висоти, то можна знехтувати краєвим ефектом. Оскільки вектор густини струму має проекцію тільки на вісь z , то і вектор \vec{A} в даній задачі має тільки одну складову $\vec{A} = \vec{k}A_z = \vec{k}A$, яка направлена вздовж шин, а залежить вона тільки від координати x .

Визначимо величину густини струму в шинах $\delta = \frac{I}{h \cdot a}$.

Тоді з урахуванням того, що в правій шині вектор $\vec{\delta}$ напрямлений вздовж осі z , а в лівій – у протилежному напрямі, отримаємо

$$\nabla^2 A = \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} = \begin{cases} 0 & \text{при } -\infty < x \leq -2a, \\ \mu_{1a} \cdot \delta & \text{при } -2a \leq x \leq -a, \\ 0 & \text{при } -a \leq x \leq a, \\ -\mu_{2a} \cdot \delta & \text{при } a \leq x \leq 2a, \\ 0 & \text{при } 2a \leq x < \infty. \end{cases} \quad (13.5)$$

Двократне інтегрування (13.5) по x дає

$$\begin{aligned} A_0 &= C_0 x + C_1; & A_1 &= 0,5\mu_{1a}\delta x^2 + C_2 x + C_3; & A_2 &= C_4 x + C_5; \\ A_3 &= -0,5\mu_{2a}\delta x^2 + C_6 x + C_7; & A_4 &= C_8 x + C_9. \end{aligned} \quad (13.6)$$

Оскільки вектор-потенціал визначається з точністю до сталої величини, прийнемо $A_2 = 0$ при $x = 0$. Тоді $C_5 = 0$.

Для визначення решти постійних інтегрування використаємо безперервність вектор-потенціалу і вирази (13.6), а саме:

$$\text{при } x = -2a \quad A_0 = A_1 \quad \text{або} \quad C_0(-2a) + C_1 = 0,5\mu_{1a}\delta(-2a)^2 + C_2(-2a) + C_3; \quad (13.7)$$

$$\text{при } x = -a \quad A_1 = A_2 \quad \text{або} \quad 0,5\mu_{1a}\delta(-a)^2 + C_2(-a) + C_3 = C_4(-a) + C_5; \quad (13.8)$$

$$\text{при } x = a \quad A_2 = A_3 \quad \text{або} \quad C_4 \cdot a + C_5 = -0,5\mu_{2a}\delta a^2 + C_6 a + C_7; \quad (13.9)$$

$$\text{при } x = 2a \quad A_3 = A_4 \quad \text{або} \quad -0,5\mu_{2a}\delta(2a) + C_6(2a) + C_7 = C_8(2a) + C_9. \quad (13.10)$$

З метою складання рівнянь, яких не вистачає для визначення постійних інтегрування, використаємо напруженість магнітного поля, яка пов'язана з вектором \vec{A} наступним співвідношенням $\mu_a \vec{H} = \text{rot} \vec{A}$.

Після розкриття ротору в декартовій системі координат з урахуванням $\vec{A} = \vec{k}A$ і $\vec{H} = \vec{j}H$ отримаємо $\mu_a H = -\frac{dA}{dx}$ або

$$H_0 = -\frac{C_0}{\mu_0}; \quad H_1 = \delta \cdot x - \frac{C_2}{\mu_{1a}}; \quad H_2 = -\frac{C_4}{\mu_0}; \quad H_3 = -\delta \cdot x - \frac{C_6}{\mu_{2a}}; \quad H_4 = -\frac{C_8}{\mu_0}.$$

Із закону повного струму в інтегральній формі для нашого пристрою маємо

$$H_0 = 0, \quad H_2 = -\frac{I}{h}, \quad H_4 = 0. \quad (13.11)$$

Крім того, на підставі граничних умов

$$\text{при } x = -2a \quad H_0 = H_1, \quad \text{а при } x = 2a \quad H_3 = H_4. \quad (13.12)$$

Тоді з системи рівнянь (13.7)-(13.12) одержуємо $C_0 \dots C_9$.

Всі розрахунки і побудова графіків $A(x)$ і $H(x)$ виконані за допомогою системи MathCAD. Вони подані у додатку до розділу 13.

Магнітний потік, що замикається по тілу шин, визначимо за формулою $\Phi = \oint_L \vec{A} d\vec{l}$. Контуром інтегрування візьмемо прямокутник $A-B-C-D-A$ (рис.

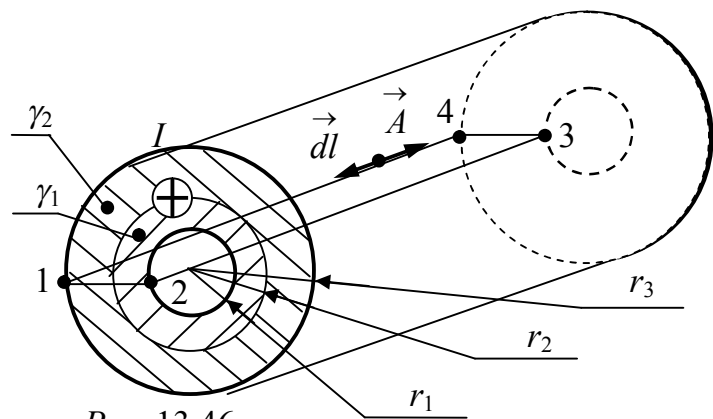
13.45). Вздовж сторін AB і CD $\int \vec{A} d\vec{l} = 0$, оскільки на цих ділянках вектори \vec{A} і $d\vec{l}$ взаємно перпендикулярні. Вздовж сторони BD вектори \vec{A} і $d\vec{l}$ співпадають за напрямом, а вздовж сторони CA вони протилежні, тому $\Phi = (A_{(x=a)} - A_{(x=-2a)})l$.

Для визначення внутрішньої індуктивності аналогічно визначимо магнітний потік, що замикається по тілу правої шини $\Phi' = (A_{(x=2a)} - A_{(x=a)})l$.

Тоді внутрішня індуктивність одиниці довжини лінії

$$L_i = \frac{\Phi + \Phi'}{I}.$$

ЗАДАЧА 13.36. По вельми довгій біметалевій трубі, що розташована у повітрі, тече постійний струм $I = 1 \text{ кА}$ (рис. 13.46). Провідність внутрішнього шару γ_1 , а зовнішнього $\gamma_2 = 1,5 \gamma_1$. Магнітна проникність внутрішнього шару $\mu_{1a} = 10\mu_0$, зовнішнього — $\mu_{2a} = \mu_0$. Побудувати графік залежності векторного магнітного потенціалу від відстані до центру труби. Визначити магнітний потік, що замикається по тілу труби завдовжки 1 м, якщо $r_1 = 10 \text{ см}$, $r_2 = 15 \text{ см}$, $r_3 = 20 \text{ см}$.



Розв'язання

Визначимо густину струму в першій ($r_1 < r < r_2$) і другій ($r_2 < r < r_3$) областях за допомогою граничних умов. Оскільки $E_{1t} = E_{2t}$ і вектори \vec{E}_1 і \vec{E}_2 у даному випадку мають тільки тангенціальні складові, то $\frac{\delta_1}{\gamma_1} = \frac{\delta_2}{\gamma_2}$.

$$\begin{aligned} \text{З іншого боку, } \delta_1(\pi r_2^2 - \pi r_1^2) + \delta_2(\pi r_3^2 - \pi r_2^2) &= I, \text{ звідки} \\ \delta_2 = \delta_1 \frac{\gamma_2}{\gamma_1} \quad \delta_1 &= \frac{I}{\pi(r_2^2 - r_1^2) + \frac{\gamma_2}{\gamma_1} \pi(r_3^2 - r_2^2)}. \end{aligned}$$

Для визначення векторного магнітного потенціалу застосуємо рівняння Пуассона в циліндричній системі координат. Оскільки вектор густини струму має проекцію тільки на одну вісь z , то і вектор \vec{A} в даній задачі має тільки одну складову $\vec{A} = \vec{k} \cdot A$, яка напрямлена вздовж осі труби (по осі z), і ця складова залежить тільки від координати r через симетрію пристрою.

$$\text{Тоді } \nabla^2 A = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial A}{\partial r} \right) = \begin{cases} \text{для області всередині труби } 0; \\ \text{для I області} & -\mu_{1a} \cdot \delta_1; \\ \text{для II області} & -\mu_{2a} \cdot \delta_2; \\ \text{для області зовні труби} & 0. \end{cases}$$

Двократне інтегрування по r дає:

$$\begin{aligned} A_0 &= C_0 \cdot \ln r + C_1; & A_1 &= -\frac{1}{4} \mu_{1a} \delta_1 r^2 + C_2 \cdot \ln r + C_3; \\ A_2 &= -\frac{1}{4} \mu_{2a} \delta_2 r^2 + C_4 \cdot \ln r + C_5; & A_3 &= C_6 \cdot \ln r + C_7. \end{aligned}$$

Складова $C_0 \cdot \ln r$ повинна бути відсутня, оскільки вектор \vec{A} не може приймати нескінченно великі значення при $r = 0$, звідси витікає, що $C_0 = 0$. Вектор-потенціал визначається з точністю до сталої. Прийmemo, що на осі труби ($r = 0$) він дорівнює нулеві, тоді $C_1 = 0$ і $A_0 = 0$.

Для визначення решти постійних інтегрування застосуємо безперервність вектор-потенціалу:

$$\text{- при } r = r_1 \quad A_0 = A_1, \quad \text{або} \quad 0 = -0,25 \mu_{1a} \delta_1 r_1^2 + C_2 \cdot \ln r_1 + C_3. \quad (13.13)$$

$$\text{- при } r = r_2 \quad A_1 = A_2, \quad -0,25 \mu_{1a} \delta_1 r_2^2 + C_2 \cdot \ln r_2 + C_3 = -0,25 \mu_{2a} \delta_2 r_2^2 + C_4 \cdot \ln r_2 + C_5. \quad (13.14)$$

$$\text{- при } r = r_3 \quad A_2 = A_3, \quad -0,25 \mu_{2a} \delta_2 r_3^2 + C_4 \cdot \ln r_3 + C_5 = C_6 \cdot \ln r_3 + C_7. \quad (13.15)$$

З метою складання рівнянь, яких не вистачає для визначення постійних інтегрування, використаємо напруженість магнітного поля, яку визначимо за формулою $\mu_a \vec{H} = \text{rot } \vec{A}$. Після розкриття ротору у циліндричній системі координат з урахуванням $\vec{A} = \vec{k} \cdot A$ і $\vec{H} = \vec{1}_\theta \cdot H$, отримаємо $\mu_a \cdot H = -dA/dr$, звідки

$$H_0 = 0; \quad H_1 = \frac{\delta_1 r}{2} - \frac{C_2}{\mu_{1a} r}, \quad H_2 = \frac{\delta_2 r}{2} - \frac{C_4}{\mu_{2a} r}, \quad H_3 = -\frac{C_6}{\mu_{2a} r}.$$

На підставі граничних умов отримаємо:

$$\text{- при } r = r_1 \quad H_0 = H_1 \quad \text{або} \quad 0 = \frac{\delta_1 r_1}{2} - \frac{C_2}{\mu_{1a} r_1}. \quad (13.16)$$

$$\text{- при } r = r_2 \quad H_1 = H_2 \quad \text{або} \quad \frac{\delta_1 r_2}{2} \frac{C_2}{\mu_{1a} r_2} = \frac{\delta_2 r_2}{2} \frac{C_4}{\mu_{2a} r_2}. \quad (13.17)$$

$$\text{- при } r = r_3 \quad H_2 = H_3 \quad \text{або} \quad \frac{\delta_2 r_3}{2} \frac{C_4}{\mu_{2a} r_3} = - \frac{C_6}{\mu_{2a} r_3}. \quad (13.18)$$

Розв'язання системи рівнянь (13.13)-(13.18) дає $C_2 \dots C_7$.

Всі розрахунки і побудова графіка $A(r)$ виконані за допомогою системи MathCAD. Вони подані у додатку до розділу 13.

Для визначення магнітного потоку, що замикається по тілу труби, скористаємося формулою $\Phi = \oint_L \vec{A} \cdot \vec{dl}$. Контуром інтегрування візьмемо пря-

мокутник 1-2-3-4-1 (рис. 13.46), причому уздовж сторін 1-2 і 3-4 $\int \vec{A} \cdot \vec{dl} = 0$, оскільки на цих ділянках кут між \vec{A} і \vec{dl} становить 90° . Уздовж сторони 2-3 $\int \vec{A} \cdot \vec{dl} = 0$, оскільки на внутрішній поверхні труби $A = 0$. Отже:

$$\Phi = \int_4^1 \vec{A} \cdot \vec{dl} = - A_{[r=r_3]} \cdot l.$$

