12 ЕЛЕКТРИЧНЕ ПОЛЕ В ПРОВІДНИХ СЕРЕДОВИЩАХ

12.1 ОСНОВНІ ТЕОРЕТИЧНІ ПОЛОЖЕННЯ

Наслідком стаціонарного електричного поля в провідному середовищі є впорядкований рух зарядів або *струм провідності*, який супроводиться виділенням тепла. Тому для підтримки незмінного електричного поля (постійної різниці потенціалів) і компенсації теплових втрат енергії потрібне постійне зовнішнє джерело, в якому створюється стороннє електричне поле процесами неелектростатичного походження.

Основними характеристиками електричного поля є векторні величини – *густина струму провідності* $\vec{\delta}$ *[А/м²]* і *напруженість поля* $\vec{E}$ *[В/м]*, а також *скалярний електричний потенціал* φ *[В]*. Провідне середовище характеризують *питомою провідністю* γ *[См/м]*. В даному розділі розглядаються поля тільки в лінійних стаціонарних середовищах, для яких $\gamma = const$.

Струм через яку-небудь поверхню (переріз) і *напруга* на якій-небудь ділянці провідного середовища записуються як інтегральні величини:

$$I = \int_S \vec{\delta}\,\vec{dS}\,,\ A; \qquad U_{1\text{-}2} = \varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 \vec{E}\cdot\vec{dl}\,,\ B.$$

Опір ділянки провідного середовища завдовжки l і перерізом S знаходиться як $R = \dfrac{1}{\gamma}\dfrac{l}{S}$, *Ом*.

Основні закони електричного поля в провідних середовищах – це закон Ома і закони Кірхгофа, а також закон Джоуля-Ленца. Вони застосовуються в інтегральній і диференціальній формах:

$U = R{\cdot}I$ і $\vec{\delta} = \gamma\cdot\vec{E}$ – закон Ома для областей зовні джерел енергії;

$\vec{\delta} = \gamma\cdot(\vec{E} + \vec{E}_{стор})$ – узагальнена форма закону Ома для областей поля, зайнятих джерелами енергії. Цей вираз одночасно відображає другий закон Кірхгофа в диференціальній формі.

$\oint_S \vec{\delta}\,\vec{dS} = 0$ і $div\,\vec{\delta} = 0$ – перший закон Кірхгофа;

$P = \int_V \gamma E^2 dV$ і $\dfrac{dP}{dV} = \vec{\delta}\cdot\vec{E} = \gamma\cdot E^2$ – закон Джоуля-Ленца.

У разі декількох джерел справедливий *принцип накладання*:

$$\vec{E} = \vec{E}' + \vec{E}'' + \vec{E}''' + \ldots; \quad \varphi = \varphi' + \varphi'' + \varphi''' + \ldots.$$

В областях провідного середовища зовні джерел ЕРС електричне поле має потенціальний характер. У цьому випадку для нього справедливі співвідношення: $\vec{E} = -\,grad\,\varphi$, $\oint_L \vec{E}\cdot\vec{dl} = 0$, $rot\,\vec{E} = 0$.

Наслідком цих співвідношень і першого закону Кірхгофа є рівняння Лапласа, яке описує закон зміни потенціалу в провідному середовищі зовні джерел і має такий же вигляд, як і для електростатичного поля:

$$\nabla^2\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = 0.$$

Для полів у провідних середовищах можливий лише один тип межі: «середовище з провідністю γ_1 – середовище з провідністю γ_2». Граничні умови для основних величин поля $\vec{\delta}$, $\vec{E}$ і φ при цьому є наступними:

$$\delta_{1n} = \delta_{2n}, \qquad E_{1t} = E_{2t}, \qquad \varphi_1 = \varphi_2.$$

Між електростатичним і полем в провідному середовищі в областях зовні джерел поля існує формальна аналогія, оскільки в обох випадках діє рівняння Лапласа, граничні умови записуються ідентичними формулами і основні величини пов'язані одна з іншою аналогічним чином. Ця обставина є у нагоді при моделюванні полів, а також під час їх аналізу (підрозділ 12.2).

Аналогічним же чином застосовується метод дзеркальних зображень, в якому коефіцієнти неповного віддзеркалення обчислюються за формулами

$$k_1 = \frac{\gamma_1 - \gamma_2}{\gamma_1 + \gamma_2}, \quad k_2 = \frac{2\gamma_2}{\gamma_1 + \gamma_2} \text{ (підрозділ 12.4).}$$

<u>У загальному випадку</u> задачею розрахунку поля в провідному середовищі є отримання законів зміни $\vec{\delta}$, $\vec{E}$, $\varphi(x,y,z)$ або їх інтегральних характеристик I, R, U. Самим загальним методом розв'язання є інтегрування рівняння Лапласа $\nabla^2 \varphi(x,y,z) = 0$, яким описується це поле (підрозділ 12.3).

<u>У прикладних задачах</u> по розрахунку полів в провідних середовищах частіше за все вимагається визначити струми витоку і теплові втрати в ізоляції кабелів і конденсаторів, а також параметри розтікання струму заземлювачів: $R_з$ – *опір заземлювача*, U_K – *крокова напруга* на поверхні грунту над заземлювачем (підрозділ 12.5).

Якщо електрод і його поле мають правильні форми, наприклад, форму кулі або циліндра, розрахунок полегшується, оскільки є вже готові вирази:

- для поля кульового електроду в однорідному необмеженому середовищі (задача 12.1):

$$\delta(R) = \frac{I}{4\pi R^2}, \qquad E(R) = \frac{I}{4\pi\gamma R^2}, \qquad \varphi(R) = -\int E dR = \frac{I}{4\pi\gamma R} + A. \qquad (12.1)$$

- для поля циліндричного електроду в однорідному необмеженому середовищі (задача 12.2):

$$\delta(r) = \frac{I_0}{2\pi r}, \qquad E(r) = \frac{I_0}{2\pi\gamma r}, \qquad \varphi(r) = -\int E dr = \frac{I_0}{2\pi\gamma} \cdot ln\frac{H}{r}. \qquad (12.2)$$

- ємність і питома провідність одношарового коаксіального кабелю і двопровідної лінії в однорідному середовищі (задачі 11.8 і 11.47):

$$C_{0K} = \frac{2\pi\varepsilon_0\varepsilon}{ln(r_2/r_1)}, \; g_{0K} = \frac{2\pi\gamma}{ln(r_2/r_1)}, \; C_{0Л} = \frac{\pi\varepsilon_0\varepsilon}{ln(d/r_0)}, \; g_{0Л} = \frac{\pi\gamma}{ln(d/r_0)}. \quad (12.3)$$

12.2 РОЗРАХУНОК ПОЛЯ ЗА ДОПОМОГОЮ ІНТЕГРАЛЬНИХ СПІВВІДНОШЕНЬ. АНАЛОГІЯ МІЖ ЕЛЕКТРОСТАТИЧНИМ І ПОЛЕМ У ПРОВІДНОМУ СЕРЕДОВИЩІ

ЗАДАЧА 12.1. Отримати формули для розрахунку поля кульового електроду в однорідному середовищі (рис. 12.1). Радіус електроду R_0, провідність середовища γ, струм, що відводиться I.

Розв'язання

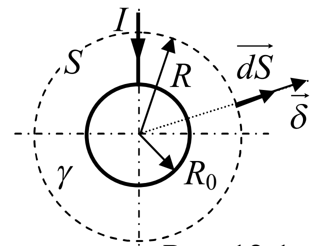


Рис. 12.1

Навкруги електроду проведемо сферичну поверхню S радіусом R і визначимо струм крізь неї: $I = \oint_S \vec{\delta} \cdot \vec{dS}$.

У всіх точках поверхні S напрями векторів $\vec{\delta}$ і $\vec{dS}$ співпадають, а значення δ одне й те саме. Тому

$$\oint_S \vec{\delta} \cdot \vec{dS} = \delta \cdot S = \delta \cdot 4\pi R^2 = I, \quad \text{звідки} \quad \delta = I/(4\pi R^2).$$

З урахуванням закону Ома в диференціальній формі $\delta = \gamma \cdot E$ одержуємо формулу для напруженості електричного поля – $E = \dfrac{I}{4\pi\gamma R^2}$.

Потенціал точок поля $\varphi = -\int E dR = \dfrac{I}{4\pi\gamma R} + A.$

Приймемо, що потенціал дорівнює нулю у нескінченності $\varphi_{(R=\infty)} = 0$, тоді

$$A = 0 \quad \text{і} \quad \varphi = \frac{I}{4\pi\gamma R}.$$

Отже, для поля кульового електроду

$$\delta = \frac{I}{4\pi R^2}; \quad E = \frac{I}{4\pi\gamma R^2}; \quad \varphi = -\int E dR = \frac{I}{4\pi\gamma R} + A.$$

ЗАДАЧА 12.2. Отримати формули для розрахунку поля циліндричного електроду в однорідному середовищі (рис. 12.1, але замінити R і R_0 на r і r_0, відповідно). Радіус і довжина електроду r_0 і l, провідність середовища γ, струм, що відводиться, на одиницю довжини I_0.

Розв'язання

Рис. 12.1 можна розглядати як поперечний переріз довгого циліндричного електроду. Навкруги електроду проведемо циліндричну поверхню S радіусом r, завдовжки l і визначимо струм через її бічну поверхню: $I_0 \cdot l = \int_{S_{бок}} \vec{\delta} \cdot \vec{dS}$. У всіх точках бічної частини поверхні S напрями векторів $\vec{\delta}$ і $\vec{dS}$ співпадають, а значення δ одне й те саме. Тому

$$\int_{S_{бок}} \vec{\delta} \cdot \vec{dS} = \delta \cdot S_{бок} = \delta \cdot 2\pi r l = I_0 \cdot l, \text{ звідки } \delta = I_0/(2\pi r).$$

З урахуванням закону Ома в диференціальній формі $\delta = \gamma \cdot E$ одержуємо формулу для напруженості електричного поля – $E = \dfrac{I_0}{2\pi\gamma r}$.

Потенціал точок поля $\varphi = -\int E dr = \dfrac{-I_0}{2\pi\gamma} ln(r) + A.$

Приймемо, що потенціал збирального електроду, що знаходиться на відстані H, дорівнює нулю ($\varphi_{(r=H)} = 0$), тоді $A = \dfrac{I_0}{2\pi\gamma} lnH$ і $\varphi = \dfrac{I_0}{2\pi\gamma} ln\dfrac{H}{r}$.

Отже, для поля циліндричного електроду

$$\delta = \frac{I_0}{2\pi r}; \quad E = \frac{I_0}{2\pi\gamma r}; \quad \varphi = -\int E dr = \frac{-I_0}{2\pi\gamma} ln(r) + A = \frac{I_0}{2\pi\gamma} ln\frac{H}{r}.$$

ЗАДАЧА 12.3. Дві металеві кулі з радіусами $r_1 = 2$ *см* і $r_2 = 4$ *см* занурено глибоко в морську воду. Відстань між кулями значно більше їх радіусів: $d = 2$ *м*.

Визначити опір води між кулями, якщо питомий опір морської води $\rho = 100$ *Ом·м*.

Розв'язання

Отримаємо формулу провідності g у загальному вигляді. Хоча кулі і різні за величиною, але з них стікає єдиний струм: $\pm I$, а питома провідність морської води $\gamma = 1/\rho = 0{,}01$ *См/м*.

Відповідно до формул (12.1) і принципу накладання записуємо напругу між кулями як різницю потенціалів куль

$$U = \varphi_1 - \varphi_2 = \left[\frac{I}{4\pi\gamma}\cdot\frac{1}{r_1} + \frac{-I}{4\pi\gamma}\cdot\frac{1}{d}\right] - \left[\frac{-I}{4\pi\gamma}\cdot\frac{1}{r_2} + \frac{I}{4\pi\gamma}\cdot\frac{1}{d}\right] = \frac{I}{4\pi\gamma}\left[r_1^{-1} + r_2^{-1} - 2\cdot d^{-1}\right].$$

Звідси провідність і опір води між кулями

$$g = \frac{I}{U} = \frac{4\pi\gamma}{r_1^{-1} + r_2^{-1} - 2\cdot d^{-1}} = 0{,}001698 \text{ См}, \qquad R = 1/g = 589 \text{ Ом}.$$

ЗАДАЧА 12.4. До плоскої провідної шайби за допомогою мідних пластин, що врізані у шайбу радіально, увімкнене джерело постійної напруги (рис. 12.2). Питомий опір матеріалу шайби $\rho = 0{,}5\cdot 10^{-6}$ *Ом·м*, розміри шайби: товщина $a = 1$ *мм*, внутрішній радіус $r_1 = 5$ *см*, зовнішній радіус $r_2 = 8$ *см*.

Визначити найбільше і найменше значення густини струму в шайбі, а також струм джерела напруги $U = 1{,}57$ *В*.

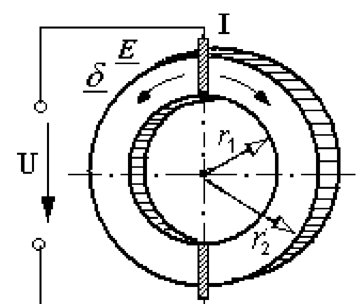


Рис. 12.2

Розв'язання

Дві половини шайби – це дві половини циліндра завдовжки $a = 1$ *мм* Лінії густини струму δ і напруженості поля E співпадають з напівколами шайби, їх величини залежать тільки від однієї координати – радіусу r. Тому:

$$E(r) = U/(\pi\cdot r); \qquad \delta(r) = \gamma\cdot E = \gamma\cdot U/(\pi\cdot r); \qquad \gamma = 1/\rho = 2\cdot 10^6 \text{ См/м}.$$

Тоді мінімальне і максимальне значення густини струму

$$\delta_{min} = \gamma\cdot U/(\pi\cdot r_2) = 2\cdot 10^6\cdot 1{,}57/(\pi\cdot 0{,}08) = 12{,}5\cdot 10^6 \text{ А/м}^2,$$

$$\delta_{max} = \gamma\cdot U/(\pi\cdot r_1) = 2\cdot 10^6\cdot 1{,}57/(\pi\cdot 0{,}05) = 20\cdot 10^6 \text{ А/м}^2.$$

Повний струм джерела знаходимо як інтегральну величину:

$$I = 2\int \delta\cdot dS = 2\int_{r1}^{r2} \gamma E\cdot(a\cdot dr) = 2\cdot\gamma\,\frac{U\cdot a}{\pi}\cdot\int_{r1}^{r2}\frac{1}{r}\cdot dr = \frac{2\gamma U\cdot a}{\pi}(ln\, r_2 - ln\, r_1) =$$

$$= (2\cdot 2\cdot 10^6\cdot 1{,}57\cdot 0{,}001/\pi)\cdot(ln 0{,}08 - ln 0{,}05) = 940 \text{ А}.$$

ЗАДАЧА 12.5. Розрахувати струм витоку плоского двошарового конденсатора і теплові втрати в одиниці об'єму другого діелектрика (рис. 12.3).

$d_1 = 1$ *см*, $d_2 = 2$ *см*, $\gamma_1 = 5\cdot 10^{-8}$ *См/м*,
$\gamma_2 = 2\cdot 10^{-8}$ *См/м*, $U = 1{,}8$ *кВ*, $S = 0{,}01$ *м*^{2}.

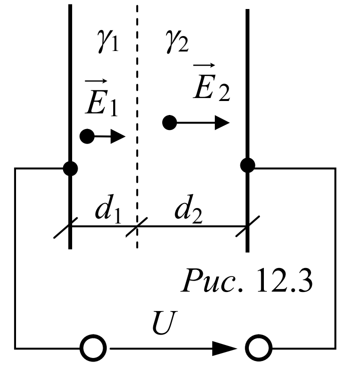


Рис. 12.3

Розв'язання

Задачу можна розв'язати за допомогою рівняння Лапласа. Проте, враховуючи, що поле між обкладинками конденсатора можна вважати рівномірним, розв'язання може бути істотно спрощено. На підставі другого закону Кірхгофа записуємо:

$$U = U_1 + U_2 = E_1\cdot d_1 + E_2\cdot d_2.$$

Силові лінії перпендикулярні до межі поділу недосконалих діелектриків, тому гранична умова $\delta_1 = \delta_2$ або $\gamma_1\cdot E_1 = \gamma_2\cdot E_2$.

Тоді $E_1 = (\gamma_2/\gamma_1)\cdot E_2 = 0{,}4E_2$; $U = E_2\cdot(0{,}4\cdot d_1 + d_2)$; звідки

$E_2 = U/(0{,}4\cdot d_1 + d_2) = 75$ *кВ/м*; $E_1 = 30$ *кВ/м*;

$\delta = \delta_1 = \delta_2 = \gamma_1\cdot E_1 = 1{,}5\cdot 10^{-3}$ *А/м*^{2}; $I = \delta\cdot S = 15$ *мкА*;

$p_2 = \delta^2/\gamma_2 = (1{,}5\cdot 10^{-3})^2/(2\cdot 10^{-8}) = 112{,}5$ *Вт/м*^{3}.

ЗАДАЧА 12.6. Визначити потужність теплових втрат P в плоскому конденсаторі (рис. 12.4) з недосконалим діелектриком (слюда).

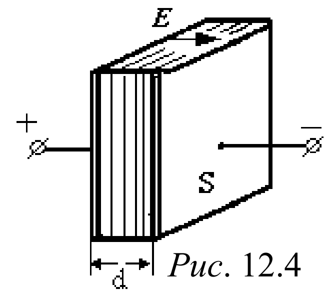


Рис. 12.4

$U = 1000$ *В*, $S = 100$ *см*^{2}, $d = 1$ *см*, $\gamma = 1\cdot 10^{-12}$ *См/м*.
Відповіді: $E = U/d = 100$ *кВ/м*, $P = \gamma E^2\cdot V = 1$ *мкВт*.

ЗАДАЧА 12.7. Коаксіальний кабель діє під напругою $U_0 = 10$ *кВ*. Ізоляція між струмоведучою жилою і оболонкою кабелю недосконала і має питому провідність $\gamma = 1\cdot 10^{-9}$ *См/м*. Розрахувати струм витоку і теплові втрати в ізоляції кабелю завдовжки $l = 1$ *км* (рис. 12.5). $r_1 = 1{,}2$ *мм*, $r_2 = 3{,}26$ *мм*.

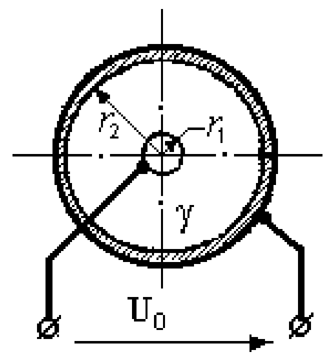


Рис. 12.5

Розв'язання

При розв'язанні задачі скористаємося формальною аналогією між виразами ємності і провідності одношарового коаксіального кабелю на одиницю довжини (формули 12.3):

$$C_0 = \frac{2\pi\cdot\varepsilon_0\varepsilon}{ln\, r_2/r_1},\quad g_0 = \frac{2\pi\cdot\gamma}{ln\, r_2/r_1} = \frac{2\pi\cdot 1\cdot 10^{-9}}{ln\ 3{,}26/1{,}2} = 0{,}0628\cdot 10^{-7}\ См/м.$$

Тоді струм витоку через ізоляцію кабелю на довжині в 1 *км* складе

$$I = g_0 lU = 0{,}0628\cdot 10^{-7}\cdot 1000\cdot 10\cdot 10^3 = 0{,}0628\ А.$$

Потужність теплових втрат в ізоляції $P = U\cdot I = 10000\cdot 0{,}0628 = 628$ *Вт*.

ЗАДАЧА 12.8. Одношаровий коаксіальний кабель працює під напругою 600 *В* і має розміри: $r_1 = 4$ *мм*, $r_2 = 8$ *мм*, $l = 10$ *км*, питома провідність ізоляції $\gamma =$ $= 1\cdot 10^{-9}$ *См/м*. Визначити струм витоку і його густину в ізоляції на поверхні жили і на внутрішній стороні оболонки кабелю, а також теплові втрати кабелю.

Відповіді: $I = 54{,}4\ мА$, $\delta_1 = 216\ мкА/м^2$, $\delta_2 = 108\ мкА/м^2$, $P = 32{,}6\ Вт$.

ЗАДАЧА 12.9. Розрахувати струм витоку між жилою та оболонкою коаксіального кабелю (рис. 12.6). Ізоляція виконана двошаровою з недосконалих діелектриків (питомі провідності $\gamma_1 = 5\cdot10^{-8}\ См/м$ і $\gamma_2 = 2\cdot10^{-8}\ См/м$, відносні діелектричні проникності $\varepsilon_1 = 2$ і $\varepsilon_2 = 5$). Напруга $U = 1\ кВ$. Геометричні розміри – $r_1 = 1\ мм$, $r_2 = 2\ мм$, $r_3 = 3\ мм$.

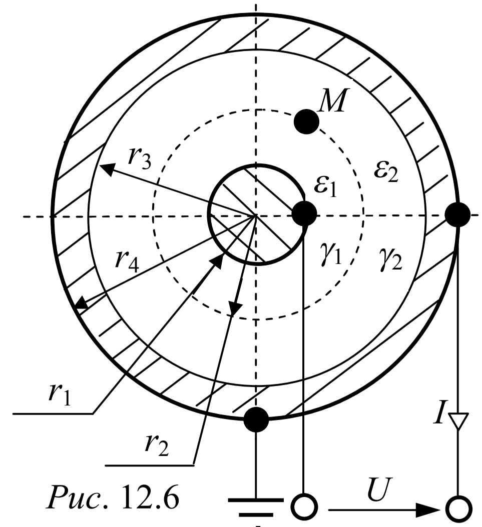


Рис. 12.6

Знайти питомі теплові втрати у точці *M*, провідності і ємності між тілами, побудувати схему заміщення системи. Кабель вважати вельми протяжним, а розрахунки виконати на одиницю довжини.

Додатково визначити найбільш можливу довжину кабелю як лінії електропередачі.

Розв'язання

Хай струм витоку дорівнює *I*. Тоді відповідно до формул (12.2) густина струму, напруженість і потенціал в шарах діелектрика визначаються за формулами

$$\delta = I/(2\pi r l);\quad E_1 = \frac{I}{2\pi\gamma_1 l r},\ E_2 = \frac{I}{2\pi\gamma_2 l r};\quad \varphi_1 = \frac{-I}{2\pi\gamma_1 l} ln r + A_1,\ \varphi_2 = \frac{-I}{2\pi\gamma_2 l} ln r + A_2.$$

Напруга, прикладена до пристрою,

$$U = \varphi_1(r_1) - \varphi_1(r_2) + \varphi_2(r_2) - \varphi_2(r_3) =$$

$$= \frac{I}{2\pi\gamma_1 l} ln\frac{r_2}{r_1} + \frac{I}{2\pi\gamma_2 l} ln\frac{r_3}{r_2} = \frac{I}{2\pi\gamma_2 l} ln\left[\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^{\gamma_2/\gamma_1}\cdot\left(\frac{r_3}{r_2}\right)\right].$$

Звідси струм витоку на одиницю довжини

$$I_0 = \frac{I}{l}\ \frac{U\cdot 2\pi\gamma_2}{ln\left[\left(r_2/r_1\right)^{\gamma_2/\gamma_1}\cdot\left(r_3/r_2\right)\right]} = \frac{1000\cdot 2\pi\cdot 2\cdot10^{-8}}{ln\left[\left(2/1\right)^{2/5}\cdot\left(3/2\right)\right]} = 1{,}841\cdot10^{-4}\ А/м = 0{,}1841\ мА/м.$$

Провідність кабелю струмам витоку знайдемо за законом Ома:

$$g_0 = I_0/U = 1{,}841\cdot10^{-4}/10^3 = 0{,}1841\cdot10^{-6}\ См/м = 0{,}1841\ мкСм/м.$$

Цю ж відповідь можна отримати за допомогою аналогії між електричним полем в провідному середовищі і електростатичним. Формула ємності одношарового коаксіального кабелю (12.3): $C_0 = \dfrac{2\pi\varepsilon_a}{ln\left(r_2/r_1\right)}$.

Ємності шарів і всього даного кабелю:

$$C_{10} = \frac{2\pi\varepsilon_1\varepsilon_0}{ln\left(r_2/r_1\right)} = \frac{2\pi \cdot 2 \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12}}{ln\left(2/1\right)} = 160{,}4 \ \textit{пФ/м};$$

$$C_{20} = \frac{2\pi\varepsilon_2\varepsilon_0}{ln\left(r_3/r_2\right)} = \frac{2\pi \cdot 5 \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12}}{ln\left(3/2\right)} = 873{,}5 \ \textit{пФ/м};$$

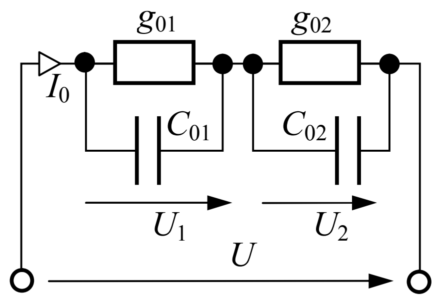


Рис. 12.7

оскільки ємності з'єднані послідовно, то

$$C_0 = \frac{C_{10}C_{20}}{C_{10} + C_{20}} = \frac{160{,}4 \cdot 873{,}5}{160{,}4 + 873{,}5} = 135{,}5 \ \textit{пФ/м}.$$

Провідності шарів і всього кабелю на одиницю довжини:

$$g_{10} = \frac{2\pi\gamma_1}{ln\left(r_2/r_1\right)} = \frac{2\pi \cdot 5 \cdot 10^{-8}}{ln\left(2/1\right)} = 0{,}454 \cdot 10^{-6} \ \textit{См/м};$$

$$g_{20} = \frac{2\pi\gamma_2}{ln\left(r_2/r_1\right)} = \frac{2\pi \cdot 2 \cdot 10^{-8}}{ln\left(3/2\right)} = 0{,}310 \cdot 10^{-6} \ \textit{См/м};$$

$$g_0 = \frac{g_{10}g_{20}}{g_{10} + g_{20}} = \frac{0{,}454 \cdot 0{,}310}{0{,}454 + 0{,}310} = 0{,}1842 \ \textit{мкСм/м}.$$

Електрична схема заміщення пристрою подана на рис. 12.7.

Густина струму в точці M:

$$\delta = I_0/(2\pi r_2) = 1{,}841 \cdot 10^{-4}/(2\pi \cdot 2 \cdot 10^{-3}) = 0{,}0147 \ A/м^2;$$

теплові втрати в точці M за законом Джоуля-Ленца:

$$p_1 = \delta^2/\gamma_1 = 0{,}0147^2/(5 \cdot 10^{-8}) = 0{,}432 \cdot 10^4 \ Вт/м^3 = 4{,}32 \ кВт/м^3;$$
$$p_2 = \delta^2/\gamma_2 = 0{,}0147^2/(2 \cdot 10^{-8}) = 1{,}08 \cdot 10^4 \ Вт/м^3 = 10{,}8 \ кВт/м^3.$$

Переріз внутрішньої жили кабелю менше ніж зовнішньої і становить $S = \pi r_1^2 = 3{,}14 \ мм^2$. Якщо прийняти, що жила і оболонка алюмінієві, а допустима густина струму 1 $A/мм^2$, то допустимий струм для кабелю буде рівний 3,14 A. Тоді допустима довжина кабелю (поки він ще хоч скільки-небудь здатний живити навантаження, а не цілком себе) –

$$l_{доп} = 3{,}14/I_0 = 3{,}14 \cdot 1000/0{,}1841 = 17050 \ м.$$

ЗАДАЧА 12.10. Циліндричний конденсатор з двошаровою ізоляцією (рис. 12.6) працює при напрузі $U = 1$ *кВ*. Відомі розміри конденсатора ($r_1 = 0{,}08$ *см*, $r_2 = 0{,}2$ *см*, $r_3 = 0{,}6$ *см*, $l = 5$ *см*) і властивості ізоляції ($\gamma_1 = 1 \cdot 10^{-8}$ *См/см*, $\varepsilon_1 = 2$, $\gamma_2 = 4 \cdot 10^{-8}$ *См/см*, $\varepsilon_2 = 6$). Розрахувати струм витоку через ізоляцію конденса тора, знайти вирази питомої провідності g_0 і ємності C_0 конденсатора.

Відповіді: $I = 0{,}2634$ *мА*,

$$g_0 = \frac{2\pi\gamma_1}{ln\frac{r_2}{r_1} + \frac{\gamma_1}{\gamma_2}ln\frac{r_3}{r_2}} = 5{,}273 \cdot 10^{-8} \ \textit{См/м}, \quad C_0 = \frac{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_1}{ln\frac{r_2}{r_1} + \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}ln\frac{r_3}{r_2}} = 43{,}34 \ \textit{пФ/м}.$$

ЗАДАЧА 12.11. Плоский конденсатор ємністю 10 *мкФ* знаходиться під напругою 1 *кВ*. Діелектрична проникність ізоляції $\varepsilon = 4$, а питома провідність $\gamma = 1 \cdot 10^{-12}$ *См/м*. Визначити струм витоку між обкладинками конденсатора.

Методичні вказівки: з формули ємності $C = q/U = \varepsilon_0 \varepsilon S/d$ можна отримати співвідношення $S/d = C/(\varepsilon_0\varepsilon)$, яке далі використати в аналогічній формулі провідності конденсатора: $g = \gamma \cdot C/(\varepsilon_0\varepsilon)$.

Відповідь: $I = 0{,}283$ *мА*.

ЗАДАЧА 12.12. Два плоскі конденсатори $C_1 = 0{,}2$ *мкФ*, $C_2 = 0{,}5$ *мкФ* з недосконалими діелектриками з'єднані послідовно і увімкнені до джерела напруги $U = 1200$ *В*. Діелектричні проникності діелектриків: $\varepsilon_1 = 2{,}4$, $\varepsilon_2 = 4$; питомі провідності: $\gamma_1 = 0{,}2 \cdot 10^{-9}$ *См/м*, $\gamma_2 = 5 \cdot 10^{-9}$ *См/м*. Визначити напруги на кожному з конденсаторів у момент вмикання, а також в усталеному режимі.

Розв'язання

При розв'язанні задачі скористаємося схемою заміщення системи, поданої на рис. 12.7. У момент увімкнення весь струм проходить по незарядженних конденсаторах відповідно до другого закону комутації. Тобто через конденсатори переноситься один і той же заряд $q = C_1U_1 = C_2U_2$. А згідно з другим законом Кірхгофа для кіл $U_1 + U_2 = U$. Звідси у початковий момент часу напруги на конденсаторах

$$U_1(0) = \frac{U}{1 + \dfrac{C_1}{C_2}} = \frac{1200}{1 + \dfrac{0{,}2}{0{,}5}} = 857\ B, \quad U_2(0) = \frac{U}{1 + \dfrac{C_2}{C_1}} = \frac{1200}{1 + \dfrac{0{,}5}{0{,}2}} = 343\ B.$$

В усталеному режимі весь струм тече через провідності g_1 і g_2, які знайдемо за допомогою формули для ємності плоского конденсатора $C = \varepsilon_0 \varepsilon S/d$:

$$g_1 = \gamma_1 \cdot \frac{S_1}{d_1} = \gamma_1 \cdot C_1/\varepsilon_0\varepsilon_1 = 0{,}2 \cdot 10^{-9} \cdot \frac{0{,}2 \cdot 10^{-6}}{8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot 2{,}4} = 1{,}883 \cdot 10^{-6}\ См;$$

$$g_2 = \gamma_2 \cdot C_2/\varepsilon_0\varepsilon_2 = 5 \cdot 10^{-9} \cdot \frac{0{,}5 \cdot 10^{-6}}{8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot 4} = 70{,}62 \cdot 10^{-6}\ См;$$

$$g = \frac{g_1 \cdot g_2}{g_1 + g_2} = 10^{-6} \cdot \frac{1{,}883 \cdot 70{,}62}{1{,}883 + 70{,}62} = 1{,}834 \cdot 10^{-6}\ См.$$

Струм витоку і напруги на конденсаторах знаходимо за законом Ома:

$I = g \cdot U = 1{,}834 \cdot 10^{-6} \cdot 1200 = 2{,}201 \cdot 10^{-3}\ A = 2{,}201$ *мА*,

$U_1 = I/g_1 = 2{,}201 \cdot 10^{-3}/1{,}883 \cdot 10^{-6} = 1169\ B$;

$U_2 = I/g_2 = 2{,}201 \cdot 10^{-3}/70{,}62 \cdot 10^{-6} = 31\ B$.

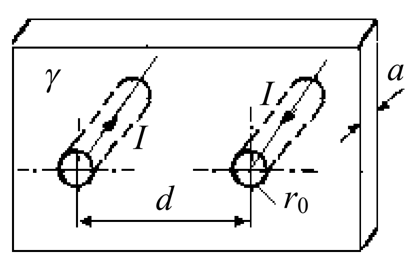


Рис. 12.8

ЗАДАЧА 12.13. Два циліндричні проводи проходять крізь мармуровий щит (рис. 12.8) товщиною $a = 3$ *см*. Відстань між осями проводів $d = 20$ *см*, радіуси проводів $r_0 = 4$ *мм*. Вважаючи площину щита необмежено великою, знайти струм витоку між проводами, якщо: $\gamma = 1 \cdot 10^{-10}$ *См/м*, $U = 240$ *В*.

Методичні вказівки. При традиційному розрахунку за формулою (12.2) треба, задавшися поки невідомим струмом витоку I, записати потенціали проводів φ_1, φ_2 і з виразу $U = \varphi_1 - \varphi_2$ знайти струм витоку.

Але простіше скористатися аналогією між формулами ємності і провідності двопровідної лінії в необмеженому середовищі (формули 12.3):

$$C_0 = \frac{\pi \cdot \varepsilon_0 \varepsilon}{ln(d - r_0)/r_0}; \quad g_0 = \frac{\pi \cdot \gamma}{ln(d - r_0)/r_0}.$$

Відповіді: $g_0 = 0{,}6837$ *См/м*, $I = g_0 \cdot a \cdot U = 4{,}92 \cdot 10^{-10}$ *А*.

ЗАДАЧА 12.14. Електроводонагрівач є циліндричним металевим баком радіусом 30 *см*, в який коаксіально поміщений циліндричний електрод радіусом 5 *см*. Корпус бака заземлений. Дно і кришку бака виготовлено з ізоляційного матеріалу.

Визначити, яку напругу постійного струму необхідно підвести до бака, щоб за 5 *хв* температура води, що заповнює бак повністю, підвищилася з $\theta_n = 20°C$ до $\theta_к = 80°C$.

Питому провідність води $\gamma = 5$ *См/м* можна вважати незалежною від температури. Віддачею тепла в оточуюче середовище нехтувати.

Розв'язання

За заданих умов вся енергія, що виділяється електричним полем у воді, йде на нагрів. Це враховується співвідношенням

$$0{,}24 \cdot P \cdot t = C \cdot M(\theta_к - \theta_n). \qquad (12.4)$$

Підготуємо (розрахуємо) величини в цьому співвідношенні.

Теплоємність води $C = 1$ *кал/°С·г*; $g = 1$ *г/см*^{3} – питома вага води.

Маса води $M = g \cdot V = g \cdot \pi(r_2^2 - r_1^2) \cdot l = 1 \cdot \pi(30^2 - 5^2) \cdot l = 2749 \cdot l$ *г*.

Початкова і кінцева температури води – $\theta_n = 20°C$, $\theta_к = 80°C$.

Потужність електричного струму $P = G \cdot U^2$, *Вт*. (12.5)

Час нагріву $t = 5 \cdot 60 = 300$ *с*.

Провідність води G визначимо за допомогою аналогії з ємністю коаксіального кабелю завдовжки l (формули 12.3):

$$C_к = \frac{2\pi\varepsilon_a \cdot l}{ln\, r_2/r_1} \quad \Rightarrow \quad G = \frac{2\pi\gamma \cdot l}{ln\, r_2/r_1} = \frac{2\pi \cdot 0.05 \cdot l}{ln 30/5} = 0{,}1753 \cdot l \text{ См}.$$

З рівняння (12.4) з урахуванням (12.5) отримаємо:

$$U = \sqrt{C \cdot M \cdot (\theta_n - \theta_н)/(0{,}24 \cdot G \cdot t)} = \sqrt{1 \cdot 2749 \cdot 60/(0{,}24 \cdot 0{,}1753 \cdot 300)} = 114 \text{ В}.$$

12.3 РОЗРАХУНОК ПОЛЯ ІНТЕГРУВАННЯМ РІВНЯННЯ ЛАПЛАСА

ЗАДАЧА 12.15. В електростатичній машині для підсилення поля в області 2 (рис. 12.9,а) в повітряний простір внесений діелектрик у формі кулі з великою ε. Через достатньо тривалий час картина поля змінилася (рис. 12.9,б). Провідність повітря γ_e більше провідності діелектрика γ_i унаслідок іонізації повітря. Дати пояснення зміні картини поля.

Можливі варіанти відповіді: в перший момент після внесення діелект ричної кулі в поле вільний заряд на його поверхні відсутній і лінії поля втягуються в діелектрик. З часом зміни поля припиняються, струм зміщення стає рівним нулю, в просторі залишається тільки струм провідності, лінії поля співпадають з лініями густини струму, відповідно вони прагнуть огинати сферу, провідність якої менше провідності навколишнього простору.

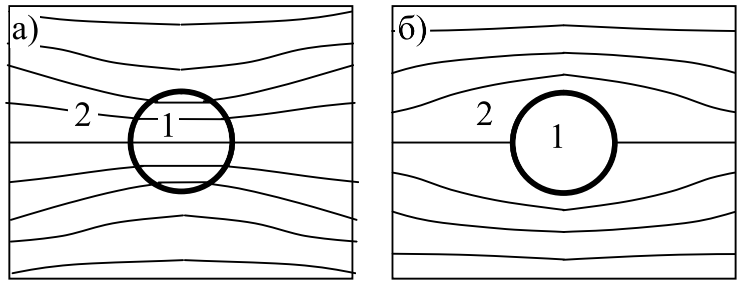


Рис. 12.9

Або: спочатку маємо справу з електростатичним полем, коли форма силових ліній визначається співвідношенням діелектричних проникностей (тут $\varepsilon_e < \varepsilon_i$, і лінії поля втягуються в діелектрик), з часом маємо справу з полем в провідному середовищі, і тут потрібно враховувати співвідношення між провідностями, яке в даному випадку $\gamma_e > \gamma_i$, і силові лінії струму виштовхуються в повітря.

Або: процес аналогічний тому, як два паралельно з’єднаних конденсатори з недосконалим діелектриком увімкнули до постійного джерела. Причому ємність першого конденсатора більше ємності другого за рахунок більшої діелектричної проникності, а струми витоку в другому конденсаторі більше за рахунок більшої питомої провідності. Поки конденсатори заряджають, по них протікає головним чином струм зміщення, і струм в першому конденсаторі більше (як би лінії загального струму проходять переважно через перший конденсатор), а після закінчення заряду тече тільки струм провідності, який вже більше в другому конденсаторі (як би лінії загального струму проходять переважно через другий конденсатор).

Виштовхування ж або втягування силових ліній поля витікає з розв’язання рівняння Лапласа для випадку «куля в рівномірному полі».

ЗАДАЧА 12.16. Чи може потенціал електричного поля в провідній області простору визначатися за функціями:

1) в декартовій системі координат $\varphi = 3x^2y - y^3 + 5x$;

2) в циліндричній системі координат $\varphi = 3r^2 cos\alpha - cos^3\alpha + 5r$.

Розв’язання

1) В декартовій системі координат рівняння Лапласа приймає вигляд

$$\nabla^2\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = 0.$$

В даному випадку

$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = 6y$, $\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = -6y$, $\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = 0$, $\nabla^2\varphi = 6y - 6y = 0$, що є тотожністю для точки з будь-якими координатами.

2) В циліндричній системі координат рівняння Лапласа має вигляд

$$\nabla^2\varphi = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\alpha^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = 0.$$

В даному випадку

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right) = 12cos\alpha + \frac{5}{r},\ \ \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\alpha^2} = -3cos\alpha - \frac{6}{r^2}cos\alpha\cdot sin^2\alpha + \frac{3}{r^2}cos^3\alpha,\ \ \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = 0,$$

$$\nabla^2\varphi = 12cos\alpha + \frac{5}{r} - 3cos\alpha - \frac{6}{r^2}cos\alpha\cdot sin^2\alpha + \frac{3}{r^2}cos^3\alpha.$$

Останній вираз дорівнює нулю не у всіх точках простору.

Тому відповідь на питання задачі така: в першому випадку – так, у другому – ні.

ЗАДАЧА 12.17. Для більш швидкого плавлення завантаженої маси сталеплавильної печі (металолом, тощо) в піч додатково завантажили циліндричні колоди, довжини яких значно більше їх радіусів.

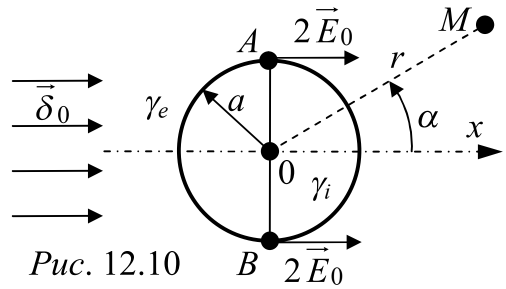


Рис. 12.10

Вважаючи, що силові лінії електричного поля перпендикулярні осі однієї з колод, а вихідне поле рівномірне (рис. 12.10), розрахувати напруженість поля в області колоди, знайти точки, в яких питома потужність виділення тепла найбільша.

Виконати числові розрахунки для наступних умов:

- густина струму вихідного поля $\delta_0 = 800\ А/м^2$;
- питома провідність матеріалу, що розплавляється в печі, $\gamma_e = 80\ См/м$;
- питома провідність матеріалу колоди $\gamma_i = 0$;
- радіус колоди $a = 5\ см$.

Розв'язання

Для розв'язання задачі скористаємося циліндричними координатами (рис. 12.10). Враховуючи значну протяжність циліндра і нехтуючи краєвим ефектом, приходимо до висновку, що поле в області циліндра не залежить від координати z, тобто $\varphi = \varphi(r, \alpha)$. Рівняння Лапласа приймає вигляд

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\alpha^2} = 0.$$

Розділимо змінні, прийнявши $\varphi = M\cdot N$, де $M = M(r)$, $N = N(\alpha)$. Тоді рівняння Лапласа приймає вигляд $\frac{N}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial M}{\partial r}\right) + \frac{M}{r^2}\frac{\partial^2 N}{\partial\alpha^2} = 0,$ а після множення на $\frac{r^2}{M\cdot N}$ отримуємо $\frac{r}{M}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial M}{\partial r}\right) + \frac{1}{N}\frac{\partial^2 N}{\partial\alpha^2} = 0,$ де змінні розділені.

Для останнього виразу можливі два варіанти: 1) кожний доданок дорівнює нулю; 2) кожний з доданків дорівнює довільному числу з протилежними знаками (наприклад ±1).

Розглянемо **варіант 1.**

$$\frac{r}{M'}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial M'}{\partial r}\right)=0,\quad \frac{1}{N'}\frac{\partial^2 N'}{\partial\alpha^2}=0,$$ після інтегрування одержуємо

$$r\frac{\partial M'}{\partial r}=A_{\mathrm{I}},\quad M'=A_{\mathrm{I}}lnr+A_{\mathrm{II}};\qquad \frac{\partial N'}{\partial\alpha}=A_{\mathrm{III}},\qquad N'=A_{\mathrm{III}}\alpha+A_{\mathrm{IV}};$$

а окремий розв'язок рівняння Лапласа приймає вигляд

$$\varphi'=M'N'=A_{\mathrm{I}}A_{\mathrm{IV}}lnr+A_{\mathrm{II}}A_{\mathrm{IV}}+A_{\mathrm{III}}A_{\mathrm{I}}\alpha\, lnr+A_{\mathrm{II}}A_{\mathrm{III}}\alpha.$$

З рис. 12.10 виходить, що картина поля у верхній і нижній частинах симетрична щодо осі x, тобто не залежить від знака координати α (парна функція координати α). Тому постійна інтегрування $A_{\mathrm{III}}=0$.

Позначимо $A_{\mathrm{I}}A_{\mathrm{IV}}=A_1$, $A_{\mathrm{II}}A_{\mathrm{IV}}=A_4$ і отримаємо перший окремий розв'язок рівняння Лапласа для даних умов: $\varphi'=M'\cdot N'=A_1lnr+A_4$.

Розглянемо **варіант 2.** $\frac{r}{M''}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial M''}{\partial r}\right)=p,\quad \frac{1}{N''}\frac{\partial^2 N''}{\partial\alpha^2}=-p.$

Перше з диференціальних рівнянь розв'яжемо за допомогою підстановки Ейлера $M''=Br^n$. В цьому випадку $\frac{\partial M''}{\partial r}=Bnr^{n-1},\quad \frac{\partial^2 M''}{\partial r^2}=Bn(n-1)r^{n-2},$

а $$\frac{r}{M''}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial M''}{\partial r}\right)=\frac{r}{M''}\left[\frac{\partial M''}{\partial r}+r\frac{\partial^2 M''}{\partial r^2}\right]=\frac{r}{Br^n}[Bnr^{n-1}+rBn(n-1)r^{n-2}]=$$

$$=[n+n(n-1)]=p,$$

звідки одержуємо $n^2=p$.

Друге з диференціальних рівнянь розв'яжемо за допомогою підстановки $N''=C\cdot cos\alpha$, оскільки раніше було встановлено, що потрібна парна функція від α. Тоді

$$\frac{1}{N''}\frac{\partial^2 N''}{\partial\alpha^2}=\frac{1}{C\,cos\alpha}\frac{\partial}{\partial\alpha}(-C\,sin\alpha)=\frac{1}{C\,cos\alpha}(-Ccos\alpha)=-1=-p,$$

звідки визначається числове значення $p=1$.

Тепер можна розрахувати числові значення показника ступеня

$$n^2=p=1,\ \text{звідки}\ \ n_1=1,\ n_2=-1,\ \text{а}\quad M''=B_1r+\frac{B_2}{r},$$

другий окремий розв'язок рівняння Лапласа

$$\varphi''=M''N''=(B_1r+\frac{B_2}{r})Ccos\alpha=\left(A_2r+\frac{A_3}{r}\right)cos\alpha.$$

Розв'язання рівняння Лапласа для випадку, поданого на рис. 12.10, приймає вигляд: $\varphi=\varphi'+\varphi''=A_1lnr+\left(A_2r+\frac{A_3}{r}\right)cos\alpha+A_4.$

Складова A_1lnr з'являється тільки у випадку, якщо циліндр є електродом, з якого розтікається струм I, тоді частковий доданок потенціалу

$$\varphi_1=-\frac{I}{2\pi\gamma_e l}lnr.$$

В даному прикладі $I = 0$, тому $A_1 = 0$, а

$$\varphi = \left(A_2 r + \frac{A_3}{r}\right) cos\alpha + A_4.$$

Радіальна складова напруженості електричного поля

$$E_r = -\frac{\partial\varphi}{\partial r} = -\left(A_2 - \frac{A_3}{r^2}\right) cos\alpha,$$

складова напруженості за координатою α: $E_\alpha = -\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha} = \left(A_2 + \frac{A_3}{r^2}\right) sin\alpha.$

На межі поділу середовищ з питомими проводимостями γ_e і γ_i при $r = a$ $\delta_{in} = \delta_{en} = 0$, оскільки з циліндра струм не розтікається.

За законом Ома в диференціальній формі $\delta_{in} = \gamma_i E_{in}$, $\delta_{en} = \gamma_e E_{en}$ і при $r = a$ одержуємо $E_{en} = 0 = E_r$ звідки $A_2 - \frac{A_3}{a^2} = 0.$

Граничною умовою для тангенціальних складових напруженостей при $r = a$ скористатися не можна, оскільки усередині циліндра поле струму не визначено.

Скористаємося умовами в нескінченності, спрямувавши $r \to \infty$. На цій відстані поле буде невикривленим з напруженістю

$$E_0 = \frac{\delta_0}{\gamma_e} = \frac{800}{80} = 10\ В/м,$$

яка направлена уздовж осі x, коли $\alpha = 0$.

$$E_r = -\left(A_2 - \frac{A_3}{\infty}\right) cos 0° = -A_2 = E_0, \text{ звідки } A_2 = -E_0 = -10\ В/м.$$

З раніше отриманого співвідношення

$$A_3 = A_2 a^2 = -E_0 a^2 = -10 \cdot 0{,}05^2 = -25 \cdot 10^{-3}\ В \cdot м.$$

При $r = a$ відмінна від нуля тільки дотична складова напруженості поля

$$E_\alpha = E_\tau = \left(-E_0 - \frac{E_0 a^2}{a^2}\right) sin\alpha = -2E_0 sin\alpha.$$

Звідси найбільша напруженість має місце при $\alpha = \pm\frac{1}{2}\pi$ (на рис. 12.10 точки A і B, відповідно) і дорівнює

$$E_{\tau\, max} = 2E_0 = 20\ В/м.$$

В цих точках спостерігається найінтенсивніше виділення тепла з об'ємною густиною в 4 рази більше, ніж в невикривленому рівномірному полі:

$$P_{max} = \gamma_e E_{max}^2 = \gamma_e \cdot (2E_0)^2 = 4\gamma_e E_0^2 = 4 \cdot 80 \cdot 10^2 = 32 \cdot 10^3\ Вт/м^3.$$

Таким чином, A і B – точки інтенсивного плавлення матеріалу сталеплавильної печі.

ЗАДАЧА 12.18. В рівномірне поле струму з напруженістю $E_0 = 17{,}5\ В/м$ внесено непровідне сферичне тіло радіусом $R_0 = 25\ см$.

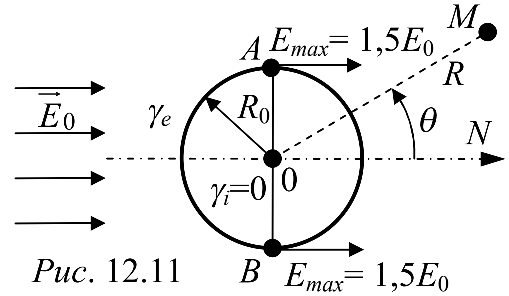


Рис. 12.11

Розрахувати поле в області кулі, знайти питомі теплові втрати в точці *M*, сферичні координати якої відповідно до рис. 12.11 *M[*40 *см*; 35°; 0°*]*. Питома провідність середовища $\gamma_e = 20$ *См/м*.

Вказівка. Скористатися окремим розв'язком рівняння Лапласа для випадку, коли потенціал в зовнішній області визначається виразом

$$\varphi = \frac{A_1}{R} + \left(A_2 R + \frac{A_3}{R^2} \right) cos\theta + A_4.$$

Відповідь: для $R > R_0$ $\quad E_R = -\left(A_2 - \frac{2A_3}{R^3} \right) cos\theta,\; E_\theta = \left(A_2 + \frac{A_3}{R^3} \right) sin\theta,$

$$A_2 = -E_0 = -17{,}5\ В/м,\; A_3 = -\frac{E_0 R_0^3}{2}.$$

При $R = 40$ *см*, $\theta = 35°$ $E_R = 10{,}84$ *В/м*, $E_\theta = -11{,}26$ *В/м*, $E = \sqrt{E_R^2 + E_\theta^2} = 15{,}63$ *В/м*.

Найбільша напруженість в точках *A* і *B* $E_{max} = 1{,}5E_0$.

12.4 РОЗРАХУНОК ПОЛЯ МЕТОДОМ ДЗЕРКАЛЬНИХ ЗОБРАЖЕНЬ

ЗАДАЧА 12.19. Контактний провід трамвая (тролея) підвішений на висоті $h = 5$ *м* над землею, радіус проводу $r_0 = 6$ *мм*, потенціал щодо землі $U = 600$ *В* (рис. 12.12). Розрахувати ємність проводу по відношенню до землі і знайти струм витоку на ділянці $l = 500$ *м* у звичайну і в туманну погоду: $\gamma_П = 0{,}2\cdot10^{-6}$ *См/м*, $\gamma_T = 1\cdot10^{-4}$ *См/м*.

Додатково: скориставшись аналогією з електростатичним полем, знайти напруженість електричного поля під проводом на висоті людського зросту $h_1 = 1{,}7$ *м*.

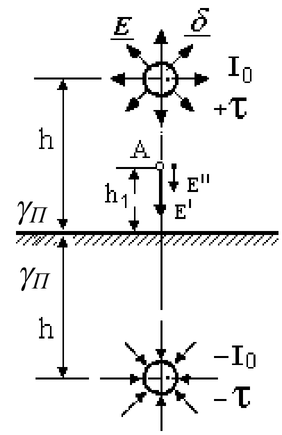


Рис. 12.12

Розв'язання

В однорідному необмеженому середовищі основні характеристики поля циліндричного електроду визначаються виразами (12.2):

$$\delta(r) = \frac{I_0}{2\pi r}, \qquad E(r) = \frac{I_0}{2\pi\gamma r}, \qquad \varphi(r) = -\int E dr = \frac{-I_0}{2\pi\gamma} \cdot ln\ r + A.$$

Контактний провід створює поле поблизу плоскої провідної поверхні; у таких випадках застосовується метод дзеркальних зображень.

Вводимо фіктивний провід із струмом $I_ф = -I_0$. Напругу на контактному проводі записуємо від дії обох проводів ($h >> r_0$):

$$U = \frac{-I_0}{2\pi\gamma_П} \cdot (ln\ r_0 - ln\ 2h) = \frac{I_0}{2\pi\gamma_П} \cdot ln\frac{2h}{r_0}.$$

Звідси визначимо провідність проводу поблизу провідної поверхні землі для двох вказаних випадків

$$g_{0П} = \frac{I_0}{U} = \frac{2\pi\gamma_П}{ln(2h/r_0)} = \frac{2\pi \cdot 0{,}2 \cdot 10^{-6}}{ln(2 \cdot 5 / 0{,}006)} = 0{,}17\cdot10^{-6}\ См/м;$$

$$g_{0T} = \frac{2\pi\gamma_T}{ln(2h/r_0)} = \frac{2\pi \cdot 10^{-4}}{ln(2 \cdot 5/0{,}006)} = 0{,}0847 \cdot 10^{-3}\ См/м.$$

На підставі аналогії ємність контактного проводу поблизу провідної поверхні визначиться виразом:

$$C_0 = \frac{\tau}{U} = \frac{2\pi\varepsilon_0}{ln(2h/r_0)} = \frac{2\pi \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12}}{ln(2 \cdot 5/0{,}006)} = 7{,}5 \cdot 10^{-12}\ Ф/м = 7{,}5\ пФ/м.$$

Струм витоку з контактного проводу на ділянці $l = 500\ м$ для двох випадків складе, відповідно:

$$I_П = g_{0П} U \cdot l = 0{,}17 \cdot 10^{-6} \cdot 600 \cdot 500 = 0{,}051\ A, \qquad I_T = 25{,}4\ A.$$

Щодо додаткового питання задачі.

Через знайдену величину ємності проводу можна записати густину заряду τ на контактному проводі:

$$\tau = C_0 \cdot U = 7{,}5 \cdot 10^{-12} \cdot 600 = 4{,}49 \cdot 10^{-9}\ Кл/м.$$

Напруженість поля у точці A під проводом обчислюємо як суму складових від двох заряджених осей (рис. 12.12): τ і $-\tau$:

$$E_A = E' + E'' = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0(h-h_1)} + \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0(h+h_1)} = \frac{4{,}49 \cdot 10^{-9}}{2\pi \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12}}(0{,}303 + 0{,}149) = 36{,}6\ В/м.$$

ЗАДАЧА 12.20. Контактні проводи тролейбуса підвішені на висоті $h = 6\ м$ від поверхні землі, радіус проводів $r_0 = 6\ мм$, відстань між проводами $d = 0{,}5\ м$. Лінія ізольована від землі і діє при напрузі $U = 600\ В$.

Визначити провідність і струм витоку лінії завдовжки $l = 500\ м$ з урахуванням туманної погоди $\gamma_T = 1 \cdot 10^{-4}\ См/м$.

Додатково: знайти робочу ємність $C_{роб}$ ділянки $l = 500\ м$ і напруженість електричного поля під проводами на висоті людського зросту $h_1 = 1{,}7\ м$.

Відповіді: розрахунковий ескіз наведений на рис. 12.13, $E_A = 1{,}26\ В/м$,

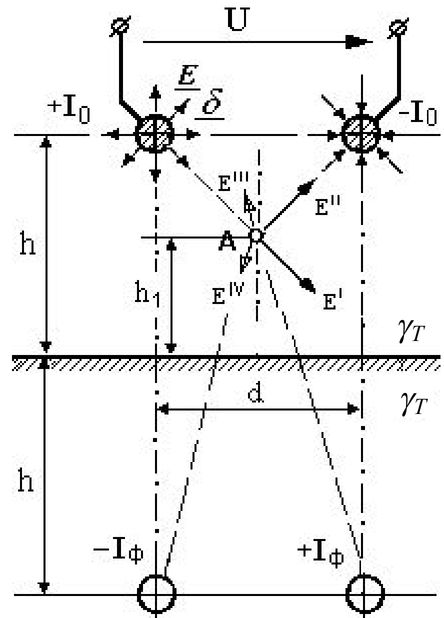


Рис. 12.13

$$g_0 = \frac{\pi\gamma_T}{ln(2h/r_0) + ln(d/\sqrt{(2h)^2 + d^2})} =$$

$$= 0{,}0711 \cdot 10^{-3}\ См/м, \quad I = 21{,}3\ A,$$

$$C_0 = \frac{\pi\varepsilon_0}{ln(2h/r_0) + ln(d/\sqrt{(2h)^2 + d^2})} = 6{,}29 \cdot 10^{-12}\ Ф/м, \quad C_{роб} = 3{,}14\ нФ.$$

ЗАДАЧА 12.21. Для прогрівання землі в парниках використовується двопровідна лінія, виконана неізольованим проводом (рис. 12.14,а). Числові дані: $h = 50\ см$, $d = 80\ см$, $r_0 = 3\ мм$, $l = 20\ м$, $U = 36\ В$, $\gamma = 0{,}2\ См/м$.

Визначити струм лінії та її потужність.

Розв'язання

Задача розв'язується методом дзеркальних зображень. Ескіз для розрахунку поля в нижній напівплощині поданий на рис. 12.14,б. Тут враховано, що коефіцієнт неповного віддзеркалення – $k_1 = \dfrac{\gamma - \gamma_П}{\gamma + \gamma_П} = 1.$

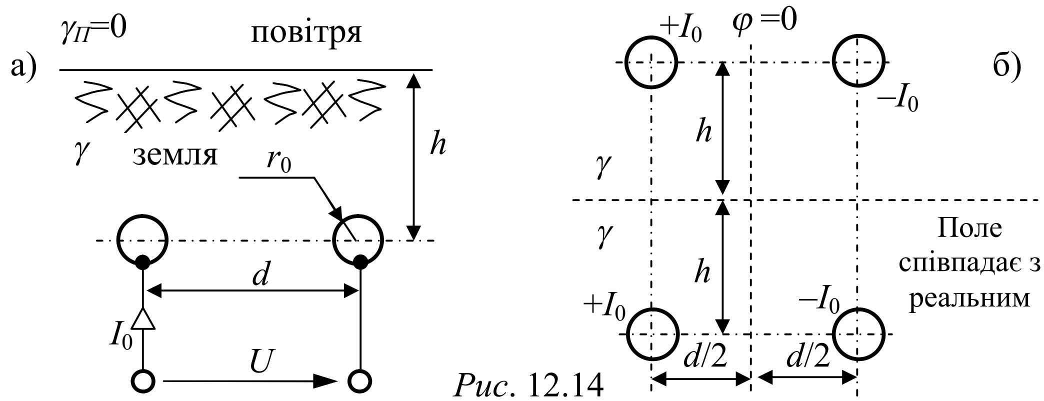


Рис. 12.14

Далі застосовуємо принцип накладання. Врахуємо також, що, оскільки картина поля симетрична щодо вертикальної площини між проводами, її потенціал раціонально прийняти рівним нулю. Відстань від будь-якого проводу до цієї поверхні (до точки з нульовим потенціалом) дорівнює $d/2$.

Потенціал від одного проводу (12.2) – $\varphi = \dfrac{I_0}{2\pi\gamma} ln \dfrac{d/2}{r}$.

Потенціал лівого реального проводу:

$U/2 = \varphi' + \varphi'' + \varphi''' + \varphi'''' =$

$$= \frac{I_0}{2\pi\gamma}[ln\frac{d/2}{r_0} - ln\frac{d/2}{d} + ln\frac{d/2}{2h} - ln\frac{d/2}{\sqrt{d^2+(2h)^2}}] = \frac{I_0}{2\pi\gamma} ln\frac{d\cdot\sqrt{d^2+(2h)^2}}{r_0\cdot 2h},$$

звідси струм і потужність лінії на одиницю довжини:

$$I_0 = \frac{U\cdot\pi\gamma}{ln\dfrac{d\cdot\sqrt{d^2+(2h)^2}}{r_0\cdot 2h}} = \frac{36\cdot\pi\cdot 0{,}2}{ln\dfrac{80\cdot\sqrt{80^2+100^2}}{0{,}3\cdot 100}} = 3{,}878\ А/м,$$

$P_0 = U\cdot I_0 = 36\cdot 3{,}878 = 139{,}6\ Вт/м.$

ЗАДАЧА 12.22. Між кулею радіусу $R_0 = 10$ *см*, розташованою в морській воді з питомою провідністю $\gamma = 0{,}2$ *См/м* на глибині $h = 2$ *м*, і металевою плитою, що знаходиться на поверхні води, прикладено напругу $U = 220$ *В* (рис. 12.15). Визначити струм, що замикається між кулею і необмежено великою металевою поверхнею.

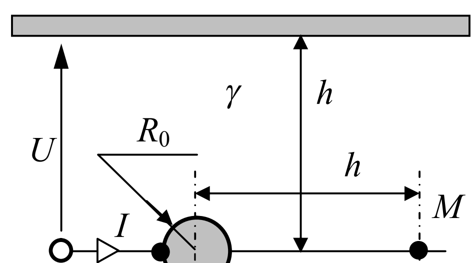


Рис. 12.15

Знайти питомі теплові втрати в точці M.

Відповіді: розрахунковий ескіз на рис. 12.16.

$$U = \frac{I}{4\pi\gamma}(R_0^{-1} - (2h)^{-1}),\quad I = \frac{U\cdot 4\pi\gamma}{R_0^{-1} - (2h)^{-1}} = 56{,}71\ А.$$

Результати допоміжних обчислень під час розкладання векторів густини струму на проекції:

$cos\alpha = 2h/\sqrt{h^2+(2h)^2} = 2/\sqrt{5} = 0{,}8944;$

$sin\alpha = 1/\sqrt{5} = 0{,}4472,$

$\delta' = \dfrac{I}{4\pi h^2}; \qquad \delta'_x = \dfrac{I}{4\pi h^2}; \qquad \delta'_y = 0;$

$\delta'' = \dfrac{I}{4\pi(h^2+(2h)^2)} = \dfrac{I}{20\pi h^2};$

$\delta''_x = -\dfrac{I\cdot sin\alpha}{20\pi h^2}; \qquad \delta''_y = \dfrac{I\cdot cos\alpha}{20\pi h^2};$

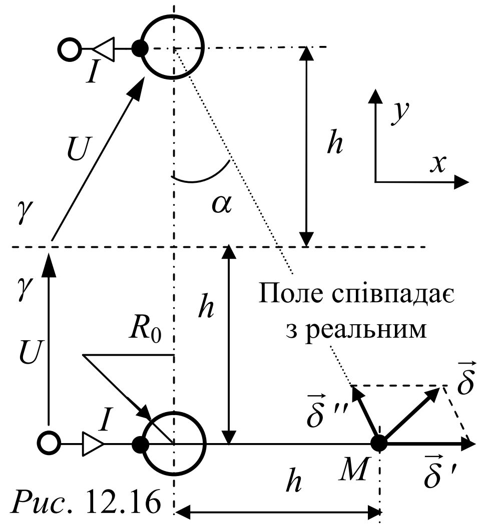


Рис. 12.16

$$\delta = \sqrt{(\delta'_x+\delta''_x)^2+(\delta'_y+\delta''_y)^2} = \frac{I}{4\pi h^2}\sqrt{(1-0{,}2\,sin\alpha)^2+(0{,}2\,cos\alpha)^2} = 1{,}047\ А/м^2.$$

Питомі теплові втрати в точці M: $p_M = \delta^2/\gamma = 5{,}48\ Вт/м^3$.

Примітка. У разі розташування проводу поблизу провідної поверхні після дзеркального відображення виникає двопровідна лінія, ємність якої – $C = \dfrac{\pi\varepsilon_a l}{ln\left(d/r_0\right)}$. Тоді провідність $g = \dfrac{\pi\gamma l}{ln\left(d/r_0\right)}$, а шуканий струм – $I = g\cdot U$.

ЗАДАЧА 12.23. Проводи двопровідної лінії напругою $U = 500\ В$ знаходяться в різних діелектриках, як показано на рис. 12.17. Розрахувати струм витоку лінії. Геометричні розміри і властивості середовищ:

$r_0 = 0{,}2\ см,\quad r_1 = 20\ см,\quad r_2 = 40\ см,$

$\gamma_1 = 2\cdot10^{-8}\ См/м,\quad \gamma_2 = 10^{-8}\ См/м.$

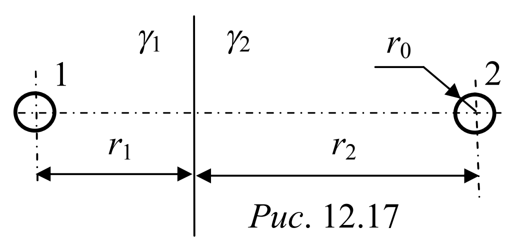


Рис. 12.17

Методичні вказівки і відповіді. Задача розв'язується точно так, як і задача 11.29 після заміни τ на I_0 і ε на γ. Розрахункові ескізи ідентичні рис. 11.33,а і б.

$$k_1' = 0{,}333;\quad k_2' = 1{,}333;\quad k_1'' = -0{,}333;\quad k_2'' = 0{,}667.$$

Потенціал точки на межі приймається рівним нулю. Потенціали проводів:

$$\varphi_1 = \frac{I_0}{2\pi\gamma_1}\left(ln\frac{r_1}{r_0} + k_1'\cdot ln\frac{r_1}{2r_1} - k_2'\cdot ln\frac{r_2}{r_1+r_2}\right);$$

$$\varphi_2 = \frac{I_0}{2\pi\gamma_2}\left(-ln\frac{r_2}{r_0} - k_1''\cdot ln\frac{r_2}{2r_2} + k_2''\cdot ln\frac{r_1}{r_1+r_2}\right).$$

Напруга між проводами

$$U = \varphi_1 - \varphi_2 = \frac{I_0}{2\pi}\Big[\gamma_1^{-1}\cdot\left(ln\frac{r_1}{r_0} + k_1'\cdot ln\frac{r_1}{2r_1} - k_2'\cdot ln\frac{r_2}{r_1+r_2}\right) -$$

$$-\gamma_2^{-1}\cdot\left(-ln\frac{r_2}{r_0} - k_1''\cdot ln\frac{r_2}{2r_2} + k_2''\cdot ln\frac{r_1}{r_1+r_2}\right)\Big] = I_0\cdot 1{,}388\cdot10^8.$$

Звідси $I_0 = U/(1{,}388\cdot 10^8) = 3{,}603\cdot 10^{-6}\ А/м = 3{,}603\ мкА/м$.

12.5 РОЗРАХУНОК ЗАЗЕМЛЮВАЧІВ

ЗАДАЧА 12.24. Опора ЛЕП стоїть на півсферичному залізобетонному фундаменті недалеко від краю глибокого обриву (рис. 12.18); $R_0 = 2\ м$, $h = 25\ м$. Провідність залізобетону можна вважати у багато разів більше провідності землі $\gamma = 10^{-4}\ См/см$. Через фундамент передбачається відводити струм короткого замикання $I = 200\ А$.

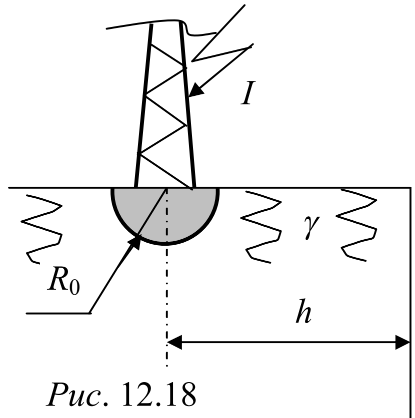


Рис. 12.18

Розрахувати опір заземлювача, побудувати графік зміни потенціалу на поверхні землі поблизу від заземлювача, знайти максимальну крокову напругу. Довжину кроку прийняти рівною $l_к = 0{,}8\ м$.

Розв'язання

Задача розв'язується методом дзеркальних зображень. Ескіз для розрахунку поля у нижній напівплощині наведений на рис. 12.19. Тут враховано, що коефіцієнт неповного віддзеркалення

$$k_1 = \frac{\gamma - \gamma_П}{\gamma + \gamma_П} = 1.$$

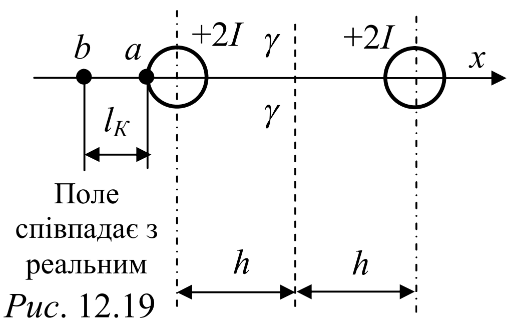


Рис. 12.19

Далі застосуємо принцип накладання. Для однієї кулі із струмом I в однорідному середовищі (12.1) $\varphi = \dfrac{I}{4\pi\gamma R}$. У нашому випадку через кулю відводиться струм $2I$, тому $\varphi = \dfrac{I}{2\pi\gamma R}$.

Потенціал заземлювача $\varphi = \varphi' + \varphi'' = \dfrac{I}{2\pi\gamma}(R_0^{-1} + (2h)^{-1}) = 1655\ В$.

Опір заземлювача за законом Ома – $R_з = \dfrac{\varphi_з}{I} = 8{,}28\ Ом$.

Виберемо вісь координат Ox по поверхні землі зліва-направо (рис. 12.20). Початок координат суміщений з центром лівої кулі. Потенціал будь-якої точки на поверхні землі (за виключенням точок

$(-R_0) < x < (+R_0)$, у яких потенціал 1656 $В$) для $x < h$:

$$\varphi(x) = \frac{I}{2\pi\gamma}(|x|^{-1} + (2h - x)^{-1}).$$

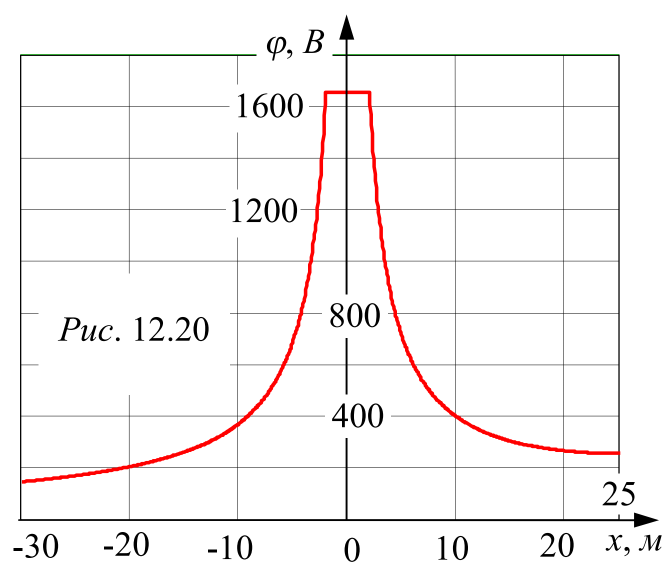


Рис. 12.20

Як видно з графіка рис. 12.20, що побудований за цією формулою, більш круто потенціал спадає в області негативних «іксів». Тому максимальна крокова напруга буде між точками a і b, показаними на рис. 12.19.

$$U_{K\,max} = \varphi_a - \varphi_b = \frac{I}{2\pi\gamma}(R_0^{-1} + (2h + R_0)^{-1} - (R_0 + l_K)^{-1} - (2h + R_0 + l_K)^{-1}) = 456\ B.$$

ЗАДАЧА 12.25. Для заземлювача, що складається з двох циліндрів (рис. 12.21) відомо: $h = 1$ *м*, $d = 1{,}5$ *м*, $r_0 = 0{,}1$ *м*, $\gamma = = 0{,}1$ *См/м*. Крокова напруга між точками a і b ($l_K = 0{,}8$ *м*) не повинна перевищувати 50 *В*. Розрахувати максимально допустимий струм, що відводиться заземлювачем.

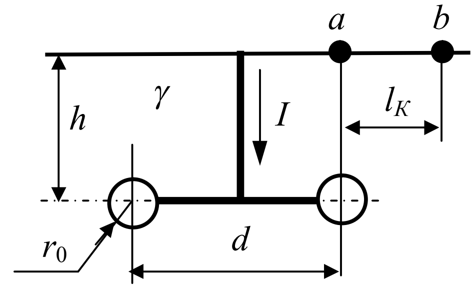


Рис. 12.21

Розв'язання

Хай струм, що відводиться, на одиницю довжини I_0. Відповідно до методу дзеркальних зображень поле двох циліндрів (кожний із струмом $I_0/2$) в неоднорідному середовищі (земля-повітря) представляється полем чотирьох таких же циліндрів в однорідному середовищі. Потенціал від одного циліндричного електроду (12.2): $\varphi = \frac{I_0 / 2}{2\pi\gamma} ln\frac{H}{r}$,

де H – відстань до збирального електроду. Задана крокова напруга:

$$U_{ab} = \varphi_a - \varphi_b = \frac{2 \cdot I_0}{4\pi\gamma}(ln\frac{H^2}{\sqrt{d^2 + h^2} \cdot h} - ln\frac{H^2}{\sqrt{(d + l_K)^2 + h^2} \cdot \sqrt{l_K^{\,2} + h^2}}) =$$

$$= \frac{I_0}{2\pi\gamma} ln\frac{\sqrt{(d + l_K)^2 + h^2} \cdot \sqrt{l_K^{\,2} + h^2}}{\sqrt{d^2 + h^2} \cdot h}.$$

Звідси шуканий струм

$$I_0 = \frac{U_{ab} \cdot 2\pi\gamma}{ln\left(\sqrt{(d + l_K)^2 + h^2}\sqrt{l_K^{\,2} + h^2} \Big/ \sqrt{d^2 + h^2} \cdot h\right)} = 54{,}4\ A/м.$$

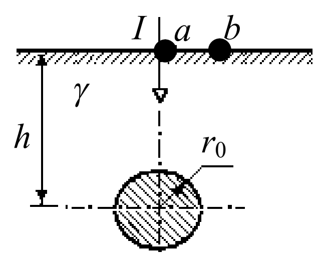


Рис. 12.22

ЗАДАЧА 12.26. Заземлювач у формі кулі радіусом $r_0 = 28$ *см* розташований в однорідному грунті $\gamma = 1{,}2\cdot 10^{-2}$ *См/м* на глибині $h = 2$ *м*. Із заземлювача стікає струм $I = 150$ *А* (рис. 12.22). Збиральний електрод розташований достатньо далеко.

Визначити опір $R_з$, вказавши, від чого він залежить, знайти максимальну крокову напругу U_K на поверхні грунту. $l_K = 0{,}8$ *м*.

Відповіді: потенціал заземлювача $\varphi_з = \frac{I}{4\pi\gamma}\left(\frac{1}{r_0} + \frac{1}{2h}\right) = 3820\ B$,

опір заземлювача $R_з = \frac{1}{4\pi\gamma}\left(\frac{1}{r_0} + \frac{1}{2h}\right) = 25{,}5$ *Ом* опір заземлювача залежить від його розміру, глибини занурення і провідності грунту; якщо $h >> r_0$, то опір залежить, головним чином, від радіусу заземлювача і провідності грунту.

Крокова напруга $U_K = \varphi_a - \varphi_b = \dfrac{I}{2\pi\gamma}\left(\dfrac{1}{h} - \dfrac{1}{\sqrt{h^2 + l_к^2}}\right) = 63{,}4\ B$.

ЗАДАЧА 12.27. Для заземлювача задачі 12.26 визначити його опір і крокову напругу у наступних випадках:

- в 1,5 рази збільшився струм I, що стікає з заземлювача;
- в 1,5 рази збільшилася глибина h розташування заземлювача;
- в 1,5 рази збільшили радіус r_0 заземлювача;
- шляхом зволоження в 1,5 рази збільшили провідність грунту γ.

Відповіді подані в табл. 12.1.

Таблиця 12.1

Вихідні	$\varphi_з = 3820\ B$	$R_з = 25{,}5\ Ом$	$\varphi_a = 3553\ B$	$\varphi_b = 3490\ B$	$U_K = 63\ B$
$I' = 1{,}5I$	5730	25,5	5329	5234	95
$h' = 1{,}5h$	3727	24,8	663	643	20
$r_0' = 1{,}5r_0$	2646	17,6	995	931	64
$\gamma' = 1{,}5\gamma$	2547	17,0	663	621	42

ЗАДАЧА 12.28. Струм заземлювача задачі 12.26 збільшився в 1,5 рази. Визначити:

- радіус r_0' заземлювача, при якому крокова напруга U_K не зміниться;
- глибину h' розташування заземлювача, при якій крокова напруга U_K не зміниться.

Відповіді:

- U_K не залежить від радіусу заземлювача, тому зміною радіусу r_0 кульового заземлювача крокову напругу зберегти не вдається;
- щоб визначити необхідну величину глибини h' за умови збільшення струму в 1,5 рази і збереження величини крокової напруги $U_K = 63{,}4\ B$, перепишемо формулу для U_K (див. задачу 12.26) у вигляді

$$U_K = \frac{1{,}5\cdot 150}{2\pi\cdot 0{,}012}\left(\frac{1}{h'} - \frac{1}{\sqrt{(h')^2 + 0{,}8^2}}\right) = 2984\cdot\left(\frac{1}{h'} - \frac{1}{\sqrt{(h')^2 + 0{,}8^2}}\right) = 63{,}4\ B$$

$$\text{або}\quad \frac{1}{h'} - \frac{1}{\sqrt{(h')^2 + 0{,}8^2}} = 0{,}0212.$$

Зрештою отримаємо рівняння 4-го порядку:

$$(h')^4 - 94{,}34(h')^3 + 0{,}64(h')^2 - 60{,}38h' + 1424 = 0, \qquad h' = 2{,}41\ м.$$

ЗАДАЧА 12.29. Заземлювач у формі кулі радіусом $r_0 = 28\ см$ (рис. 12.23,а) розташований на глибині $h = 2\ м$ в грунті з провідністю $\gamma = 1{,}2\cdot 10^{-2}\ См/м$ на відстані $1{,}5h$ від краю глибокого яру. $I = 150\ A$, $l_к = 0{,}8\ м$.

Визначити опір заземлювача та крокову напругу на поверхні грунту.

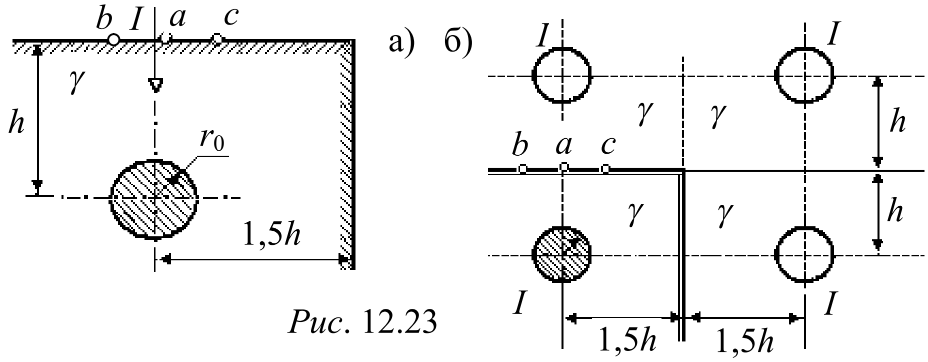


Рис. 12.23

Відповіді: розрахунковий ескіз наведений на рис. 12.23,б; потенціал заземлювача

$$\varphi_з = \frac{I}{4\pi\gamma r_0} + \frac{I}{4\pi\gamma \cdot 2h} + \frac{I}{4\pi\gamma \cdot 2 \cdot 1{,}5h} + \frac{I}{4\pi\gamma\sqrt{(2h)^2 + (3h)^2}} = 4140\ В;$$

опір заземлювача $R_з = 27{,}6$ *Ом*;

крокова напруга $U_{ab} = 95{,}4$ *В*, $U_{ac} = 24{,}2$ *В*.

ЗАДАЧА 12.30. Заземлювач у вигляді відносно довгої труби закопаний в грунт вертикально (рис. 12.24). Збиральний електрод знаходиться на відстані $H = 100$ *м*.

$I_0 = 10$ *А/м*, $d = 10$ *см*, $\gamma = 0{,}1$ *См/м*, $l_к = 0{,}8$ *м*.

Визначити опір заземлювача і крокову напругу.

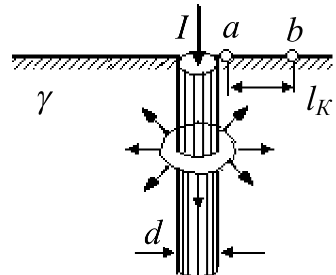


Рис. 12.24

Відповіді: заземлювач у вигляді довгої труби створює плоскопаралельне поле. На межі з повітрям воно не спотворюється. Струм із заземлювача розтікається по радіальних лініях.

Потенціал заземлювача і його опір на одиницю довжини:

$$\varphi_з = \frac{I_0}{2\pi\gamma} \cdot ln\frac{H}{d/2} = 121\ В, \qquad R_з = 12{,}1\ Ом \cdot м.$$

Максимальна крокова напруга

$$U_K = \varphi_a - \varphi_b = \frac{I_0}{2\pi\gamma} \cdot (ln\frac{H}{d/2} - ln\frac{H}{l_K + d/2}) = 45{,}1\ В.$$

ЗАДАЧА 12.31. Заземлювач у вигляді відносно довгої труби (рис. 12.25) закопаний в грунт вертикально, недалеко від крутого яру. Збиральний електрод знаходиться на відстані $H = 100$ *м*. $I_0 = 10$ *А/м*, $d = 10$ *см*, $\gamma = 0{,}1$ *См/м*, $h = 2$ *м*.

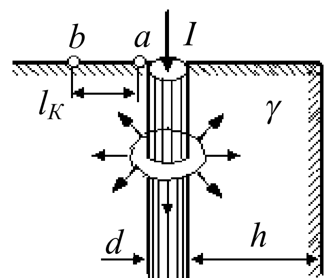


Рис. 12.25

Визначити опір заземлювача і крокову напругу на поверхні грунту.

Відповіді: потенціал заземлювача і його опір на одиницю довжини:

$$\varphi_з = \frac{I_0}{2\pi\gamma} \cdot ln\frac{H^2}{hd} = 172\ В, \qquad R_з = 17{,}2\ Ом \cdot м.$$

Максимальна крокова напруга

$$U_K = \varphi_a - \varphi_b = \frac{I_0}{2\pi\gamma}\cdot(ln\frac{H^2}{hd} - ln\frac{H^2}{(l_K + d/2)(2h + l_K + d/2)}) = 48{,}4\ B.$$

ЗАДАЧА 12.32. Заземлювач зроблений у вигляді половини циліндра і лише злегка поглиблений в грунт (рис. 12.26). Із заземлювача стікає струм $I_0 = 50\ А/м$. Збиральний електрод знаходиться на відстані $H = 100\ м$. $r_0 = 0{,}2\ м$, $\gamma = 0{,}1\ См/м$.

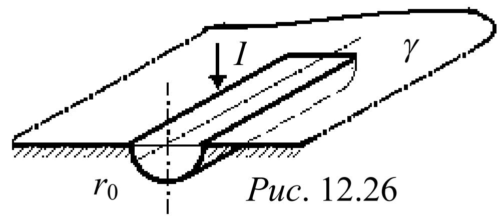


Рис. 12.26

Визначити опір заземлювача і максимальну крокову напругу на поверхні грунту ($l_K = 0{,}8\ м$).

Відповіді: потенціал заземлювача і його опір на одиницю довжини:

$$\varphi_з = \frac{I_0}{\pi\gamma}\cdot ln\frac{H}{r_0} = 989\ B, \qquad R_з = 19{,}8\ Ом\cdot м.$$

Крокова напруга $U_K = \frac{I_0}{\pi\gamma}\cdot ln\frac{r_0 + l_K}{r_0} = 256\ B.$

ЗАДАЧА 12.33. Заземлювач у вигляді труби розташований в грунті горизонтально на глибині h (рис. 12.27,а). Збиральний електрод знаходиться на відстані $H = 100\ м$.

$I_0 = 10\ А/м$, $r_0 = 5\ см$,
$h = 1\ м$, $\gamma = 0{,}1\ См/м$, $l_к = 0{,}8\ м$.

Визначити опір заземлювача і крокову напругу на поверхні грунту.

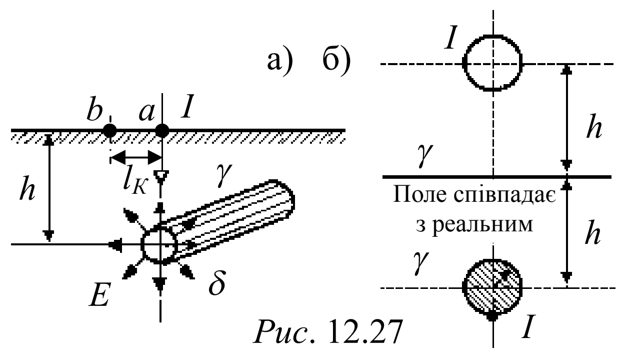


Рис. 12.27

Відповіді: розрахунковий ескіз наведений на рис. 12.27,б;

потенціал заземлювача і його опір на одиницю довжини:

$$\varphi_з = \frac{I_0}{2\pi\gamma}\cdot[ln\frac{H}{r_0} + ln\frac{H}{2h}] = 184\ B, \quad R_з = 18{,}4\ Ом\cdot м.$$

Крокова напруга $U_K = \varphi_a - \varphi_b = \frac{I_0}{\pi\gamma}\cdot ln\frac{\sqrt{h^2 + l_K^2}}{h} = 7{,}88\ B.$

ЗАДАЧА 12.34. Заземлювач у вигляді труби розташований горизонтально в грунті поблизу краю глибокого яру (рис. 13.28,а). Збиральний електрод знаходиться на відстані $H = 100\ м$.

$I_0 = 10\ А/м$, $r_0 = 5\ см$, $h_1 = 1\ м$, $h_2 = 2\ м$, $\gamma = 0{,}1\ См/м$, $l_к = 0{,}8\ м$.

Визначити опір заземлювача і крокову напругу на поверхні грунту.

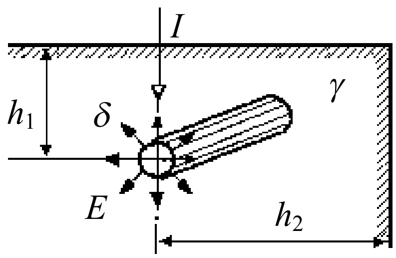
Відповіді: розрахунковий ескіз на рис. 12.28,б;

потенціал заземлювача і його опір на одиницю довжини:

$$\varphi_з = \frac{I_0}{2\pi\gamma}\cdot[ln\frac{H}{r_0} + ln\frac{H}{2h_1} + ln\frac{H}{2h_2} + ln\frac{H}{\sqrt{(2h_1)^2 + (2h_2)^2}}] = 284\ B, \quad R_з = 28{,}4\ Ом\cdot м.$$

Крокова напруга $U_{K\,ab} = 13{,}4$ B, $U_{K\,ac} = 1{,}3$ B.

а)



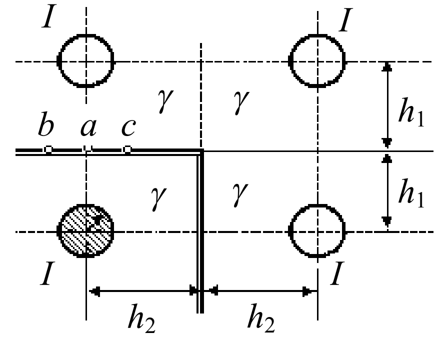


Рис. 12.28

ЗАДАЧА 12.35. Виконати розрахунок циліндричного заземлювача кінцевої довжини h, забитого вертикально в землю (рис. 12.29).

Розв'язання

Хай струм, що відводиться, становить I, тоді струм на одиницю довжини заземлювача $I_0 = I/h$. Застосуємо метод дзеркальних зображень (рис. 12.30).

Елемент струму I_0dz, що знаходиться на відстані z від початку координат, можна розглядати як точковий. Доданок від його дії на довільну точку M, яка має координати r і b (α ролі не грає) на підставі (12.1) наступний:

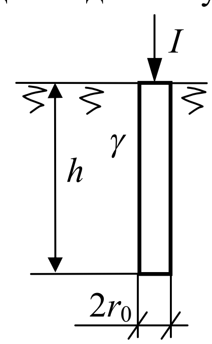


Рис. 12.29

$$d\varphi = \frac{I_0 dz}{4\pi\gamma R} = \frac{I_0 dz}{4\pi\gamma\sqrt{r^2 + (z+b)^2}} = \frac{I_0 d(z+b)}{4\pi\gamma\sqrt{r^2 + (z+b)^2}}.$$

Із застосуванням табличного інтегралу

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = ln\left(x + \sqrt{a^2 + x^2}\right)$$

маємо потенціал довільної точки M простору:

$$\varphi = \int_{-h}^{h} d\varphi = \frac{I_0}{4\pi\gamma} ln \frac{(h+b) + \sqrt{r^2 + (h+b)^2}}{(-h+b) + \sqrt{r^2 + (-h+b)^2}}.$$

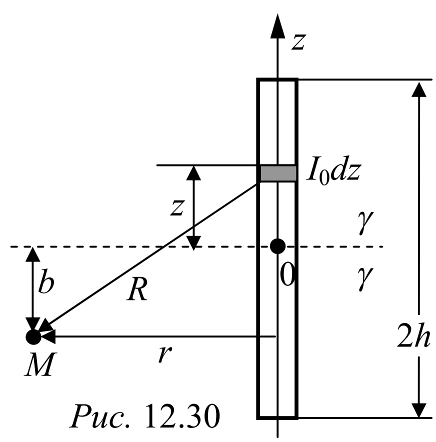


Рис. 12.30

Потенціал заземлювача (потенціал точки на поверхні землі з координатами $r = r_0$ і $b = 0$):

$$\varphi_з = \frac{I_0}{4\pi\gamma} ln \frac{h + \sqrt{r_0^2 + h^2}}{-h + \sqrt{r_0^2 + h^2}} = \frac{I_0}{2\pi\gamma} ln \frac{h + \sqrt{r_0^2 + h^2}}{r_0}.$$

При $h >> r_0$ $\qquad \varphi_з \approx \frac{I_0}{2\pi\gamma} ln \frac{2h}{r_0}.$

Опір заземлювача на одиницю довжини:

$$R_{з0} = \varphi_з / I_0 = \frac{1}{2\pi\gamma} ln \frac{2h}{r_0}.$$

Повний опір заземлювача $R_з = R_{з0}/h$.

З наведеного вище виразу $\varphi(r)$ при $b = 0$ витікає, що під час віддалення від заземлювача потенціал φ убуває за логарифмічною залежністю. Максимальна крокова напруга буде на довжині кроку l_K, який відлічується безпосередньо від заземлювача:

$U_{K\,max} = \varphi_з - \varphi(r{=}r_0{+}l_K) =$

$$= \frac{I_0}{2\pi\gamma}\left(ln\frac{h+\sqrt{r_0^2+h^2}}{r_0} - ln\frac{h+\sqrt{(r_0+l_K)^2+h^2}}{r_0+l_K} \right) =$$

$$= \frac{I_0}{2\pi\gamma}\left(ln\frac{(h+\sqrt{r_0^2+h^2})(r_0+l_K)}{r_0\cdot(h+\sqrt{(r_0+l_K)^2+h^2})} \right).$$

ЗАДАЧА 12.36. В підземних умовах шахт захисне заземлення часто виконується у вигляді напівциліндра завдовжки l і радіусом r_0, як показано на рис. 12.31. Розміри заземлювача: $l = 2{,}5$ *м*; $r_0 = 30$ *см*. Питома провідність грунту $\gamma = 0{,}35$ *См/м*.

1. Який струм можна підвести до заземлювача, щоб максимальна крокова напруга не перевищила величину $U_{K\,max} \le 36$ *В*?

2. Розрахувати опір заземлювача.

Вказівка. Скористатися методом дзеркальних зображень. Задачу розв’язати з урахуванням кінцевої довжини l заземлювача.

Відповідь: $I_{max} = 86{,}4$ *А*, $R_з = 0{,}78$ *Ом*.

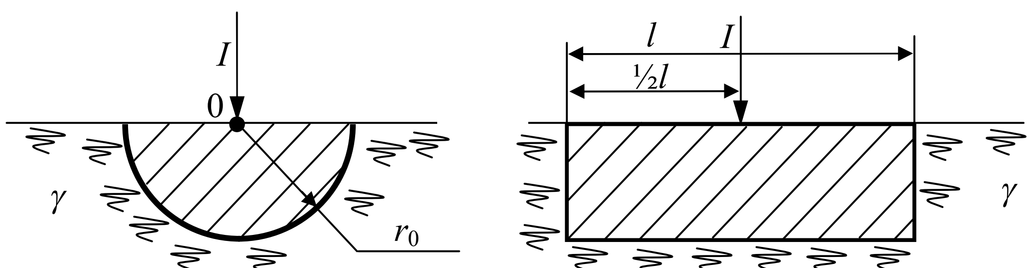


Рис. 12.31