7 ПЕРЕХІДНІ ПРОЦЕСИ (ПП) В ЛІНІЙНИХ КОЛАХ ІЗ ЗОСЕРЕДЖЕНИМИ ПАРАМЕТРАМИ

7.1 КЛАСИЧНИЙ МЕТОД РОЗРАХУНКУ ПП

7.1.1 Загальні положення

Якщо електричне коло достатньо довго зберігається у незмінному вигляді, то в ньому створюється так званий *усталений* (*вимушений*) режим. Останньому відповідають певні закони зміни енергії електричних полів конденсаторів і магнітних полів індуктивностей кола. У разі зміни схеми під час перемикань, які називатимемо *комутаціями*, енергія полів може змінитися, а для цього потрібний деякий час. Процес, що виникає в електричному колі при переході від одного усталеного режиму до іншого, називається *перехідним*.

Впродовж ПП електричне коло описується системою динамічних рівнянь, яка може бути зведена відносно однієї електричної величини (струму або напруги) до диференціального рівняння n-го порядку, причому його порядок визначається за рідкісним виключенням кількістю накопичувачів енергії (до них відносяться індуктивності і ємності). Це диференціальне рівняння є лінійним, неоднорідним, з постійними коефіцієнтами (див. задачу 7.1).

Загальний розв'язок неоднорідного лінійного диференціального рівняння є сумою окремого розв'язку неоднорідного рівняння, яке уособлює *усталений режим*, що задається джерелами, і загального розв'язку відповідного однорідного диференціального рівняння, яке уособлює *вільний режим*.

Відповідно до цього для будь-якого струму або напруги можна записати: $i = i_у + i_в$, $u = u_у + u_в$,

де $i_у$, $u_у$ – усталені (вимушені) складові струму і напруги;

$i_в$, $u_в$ – вільні складові струму і напруги.

Метод знаходження електричних величин у вигляді суми двох розглянутих складових називається *класичним*.

Усталені складові розраховуються будь-якими раніше розглянутими методами, а вигляд вільних складових залежить від числа і виду коренів характеристичного рівняння. Існує декілька способів його складання.

<u>1 спосіб.</u> За наявним диференціальним рівнянням:

$$K_n \cdot \frac{d^n i}{dt^n} + K_{n-1} \cdot \frac{d^{n-1} i}{dt^{n-1}} + \ldots + K_1 \cdot \frac{di}{dt} + K_0 \cdot i = f(t).$$

n-а похідна замінюється на p^n; . . . ; перша похідна на р; сама величина – 1; права частина – 0, тобто

$$K_n \cdot p^n + K_{n-1} \cdot p^{n-1} + \ldots + K_1 \cdot p + K_0 = 0.$$

<u>2 спосіб.</u> Шляхом запису вхідного опору в операторній формі:

1. Джерела замінюються їх внутрішніми опорами, а ключ подається у післякомутаційному стані.
2. Коло розмикають у будь-якому місці. Рекомендується розривати у вітці з конденсатором, а при його відсутності – у вітці з індуктивністю.

3. Відносно отриманих затисків вхідний опір подається в комплексній формі $\underline{Z}(j\omega)$ (індуктивний опір – $j\omega L$, а ємнісний – $1/(j\omega C)$).
4. Виконується заміна $j\omega = p$. Отримуємо вхідний опір $Z(p)$.
5. Отриманий опір прирівнюємо до нуля, тобто $Z(p) = 0$. Це і є характеристичне рівняння.

<u>*3 спосіб.*</u> За допомогою системи динамічних рівнянь кола:
1. Складається система динамічних рівнянь (рівняння за законами Кірхгофа) для післякомутаційного стану кола.
2. Отриману систему алгебризують (диференціальні рівняння перетворюють на алгебраїчні в операторній формі).
3. Визначник системи прирівнюється до нуля. Це і є характеристичне рівняння.

Якщо корінь характеристичного рівняння один (обов'язково негативний), вільна складова має вигляд: $i_в(t) = A \cdot e^{pt}$, де A – постійна інтегрування.

У випадку двох коренів і обидва дійсні, негативні, різні, причому $|p_1| < |p_2|$, маємо $i_в(t) = A_1 \cdot e^{p_1 t} + A_2 \cdot e^{p_2 t}$. Тут A_1 і A_2 – постійні інтегрування.

Якщо два кореня – дійсні, негативні, рівні $(p_1 = p_2 = p)$, то

$$i_в(t) = A_1 \cdot e^{pt} + A_2 \cdot t \cdot e^{pt}.$$

Якщо два кореня – комплексні, спряжені, тобто $p_{1,2} = -b \pm j\omega_0$, тоді

$$i_в(t) = A \cdot e^{-bt} \cdot sin(\omega_0 t + \psi),$$ де A і ψ – постійні інтегрування;

можливо також використання виразу $i_в(t) = A_1 \cdot e^{p_1 t} + A_2 \cdot e^{p_2 t}$.

Кількість коренів характеристичного рівняння визначає число постійних інтегрування і зазвичай дорівнює кількості накопичувачів енергії в колі після комутації.

Постійні інтегрування отримуються з початкових умов (значення електричних величин та їх похідних у початковий момент після комутації), які поділяються на *незалежні* і *залежні*. Незалежними виступають значення потокозчеплення і струму індуктивності, а також заряду і напруги ємності у момент комутації. Решта початкових умов вважаються залежними.

Положення про те, що запас енергії магнітного або електричного поля може змінюватися лише плавно, без стрибків, відображає принцип безперервності в часі потокозчеплення індуктивності і електричного заряду ємності і є грунтом для законів *комутації.*

<u>*Перший закон комутації*</u>: у індуктивному елементі потокозчеплення і струм безпосередньо після комутації зберігають значення, які вони мали безпосередньо перед комутацією, і далі починають змінюватися саме з цих значень: $\Psi(0_+) = \Psi(0_-)$, $i_L(0_+) = i_L(0_-)$,

де $t = 0_+$ – момент відразу після комутації,

$t = 0_-$ – момент безпосередньо перед комутацією.

<u>*Другий закон комутації*</u>: на ємнісному елементі заряд і напруга зберігають у момент комутації ті значення, які вони мали безпосередньо перед комутацією, і надалі змінюються, починаючи з цих значень:

$$q(0_+) = q(0_-), \quad u_C(0_+) = u_C(0_-).$$

За нульових початкових умов ($i_L(0_-) = 0$, $u_C(0_-) = 0$) індуктивність в початковий момент після комутації є місцем розривання кола, а ємність – короткого замикання. У разі ненульових початкових умов ($i_L(0_-) \neq 0$, $u_C(0_-) \neq 0$) індуктивність у момент $t = 0_+$ поводиться як джерело струму, а ємність – як джерело ЕРС.

У залежності від порядку диференціальних рівнянь розрізняють задачі першого, другого або вищого порядку.

Суть класичного методу аналізу ПП показана на прикладі задачі 7.1. Проте, застосований у задачі порядок розрахунку є нераціональним. Рекомендується наступний порядок розрахунку ПП, який може корегуватися:

1. Визначення незалежних початкових умов шляхом аналізу кола до комутації.
2. Запис шуканих електричних величин (струмів і напруг) у вигляді суми двох складових – усталеної і вільної.
3. Розрахунок усталених складових.
4. Складання системи диференціальних рівнянь, що описують ПП.
5. Вигляд вільних складових залежить від числа і вигляду коренів характеристичного рівняння. Тому у той або інший спосіб складається і розв’язується характеристичне рівняння.
6. Запис вільних складових з урахуванням кількості та вигляду коренів.
7. Визначення у той або інший спосіб необхідних залежних початкових умов.
8. Знаходження постійних інтегрування з початкових умов.
9. Запис шуканих величин в остаточній формі.

7.1.2 ПП в колах з одним накопичувачем

ЗАДАЧА 7.1. У схемі рис. 7.1 розрахувати напругу на конденсаторі та струми перехідного процесу. Параметри кола $U = 100$ *В*, $r_1 = 60$ *Ом*, $r_2 = 40$ *Ом*, $C = 10$ *мкФ*. Побудувати графік напруги на конденсаторі.

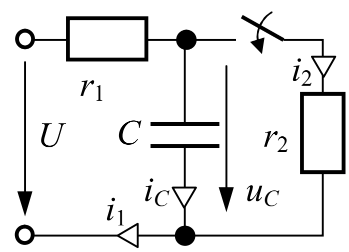

Рис. 7.1

Розв’язання

У післякомутаційному режимі коло описується наступною системою рівнянь за законами Кірхгофа відносно миттєвих значень струмів і напруги на конденсаторі:

$$\begin{cases} i_1 - i_2 - i_C = 0, \\ i_1 \cdot r_1 + u_C = U, \\ i_2 \cdot r_2 - u_C = 0. \end{cases}$$

Додаткове рівняння – рівняння зв’язку між струмом та напругою конденсатора: $i_C = C\dfrac{du_C}{dt}$.

Систему рівнянь розв’язуємо способом підстановки – всі струми виражаємо через напругу на конденсаторі і підставляємо в перше рівняння системи. В результаті система рівнянь зводиться до одного лінійного неоднорідного диференціального рівняння першого порядку з постійними коефіцієнтами. У даній задачі є лише один накопичувач – конденсатор, тому і рівняння виявилося першого порядку.

$$i_1 = \frac{U - u_C}{r_1}; \qquad i_2 = \frac{u_C}{r_2}; \qquad i_C = C\,\frac{du_C}{dt}; \qquad \frac{U - u_C}{r_1} - \frac{u_C}{r_2} - C\frac{du_C}{dt} = 0.$$

$$\frac{du_C}{dt} + \frac{r_1 + r_2}{Cr_1 r_2} u_C = \frac{U}{Cr_1}.$$

Розв'язок рівняння згідно з класичним методом розрахунку перехідних процесів знаходиться у вигляді суми усталеної і вільної складових: $u_C(t) = u_{Cy}(t) + u_{Cв}(t)$. Вигляд усталеної складової визначається видом правої частини рівняння, тобто характером джерела. У даному випадку, оскільки джерело постійне, усталена складова напруги на конденсаторі також буде постійною, а $\frac{du_{Cy}}{dt} = 0$:

$$u_{Cy} = \frac{Cr_1 r_2}{r_1 + r_2} \cdot \frac{U}{Cr_1} = \frac{r_2}{r_1 + r_2} \cdot U = \frac{40}{60 + 40} \cdot 100 = 40\ B.$$

Вигляд вільної складової залежить від числа та виду коренів характеристичного рівняння. Тому складемо і розв'яжемо характеристичне рівняння за наявним диференціальним рівнянням:

$$p + \frac{r_1 + r_2}{Cr_1 r_2} = 0.$$

Розв'язок рівняння: $p = -\frac{r_1 + r_2}{Cr_1 r_2} = -\frac{60 + 40}{10^{-5} \cdot 60 \cdot 40} = -4167\ c^{-1}.$

При одному корені характеристичного рівняння вільна складова має вигляд: $u_{Cy}(t) = A \cdot e^{pt}$. Постійну інтегрування A знаходимо з використанням початкових умов. Напруга на конденсаторі до комутації: $u_C(0_-) = U = 100\ B$. Згідно з другим законом комутації, $u_C(0_+) = u_C(0_-) = 100\ B$. Таким чином, постійна інтегрування $A = u_{Cy}(0_+) = u_C(0_+) - u_{Cy}(0_+) = 100 - 40 = 60\ B$.

Остаточно отримуємо: $u_C(t) = 40 + 60 \cdot e^{-4167t}\ B$.

Струми в вітках: $i_1(t) = \frac{U - u_C}{r_1} = \frac{100 - 40 - 60 \cdot e^{-4167t}}{60} = 1 - 1 \cdot e^{-4167t}\ A,$

$$i_2(t) = \frac{u_C}{r_2} = \frac{40 + 60 \cdot e^{-4167t}}{40} = 1 + 1{,}5 \cdot e^{-4167t}\ A,$$

$$i_C(t) = i_1(t) - i_2(t) = -2{,}5 \cdot e^{-4167t}\ A.$$

Для побудови графіка $u_C(t)$ додатково обчислимо:

- стала часу кола $\tau = 1/|p| = 1/4167\ c = 0{,}24\ мс$,
- практична тривалість перехідного процесу $T_{ПП} = (3 \div 5)\tau$. Візьмемо $T_{ПП} = 4 \cdot \tau = 0{,}96\ мс$.

Графік $u_C(t)$ будуємо за складовими: окремо подаємо усталену та вільну складові, а потім їх графічно підсумовуємо. Графік поданий на рис. 7.2.

ЗАДАЧА 7.2. Розрахувати струм котушки і напругу на індуктивності (рис. 7.3), якщо $U = 200\ B$, $r_к = 10\ Ом$, $L = 25\ мГн$.

Побудувати графіки $i(t)$ і $u_L(t)$.

Коментарі і відповіді.

1. Незалежна початкова умова: $i(0_+) = i(0_-) = 0$.
2. Розрахунок усталеного режиму за схемою рис. 7.4: $i_y = 20\ A$; $u_{Ly} = 0$.
3. Характеристичне рівняння і його корінь: $r_к + pL = 0$, $p = -400\ с^{-1}$.
4. Вільні складові: $i_в = Ae^{pt}$; $u_{Lв} = Be^{pt}$.
5. Початкові умови: $i_в(0_+) = i(0_+) - i_y = -20\ A$; $u_{Lв}(0_+) = u_L(0_+) = U - r_к i(0_+) = 200\ B$.
6. Постійні інтегрування $A = i_в(0_+) = -20$; $B = u_{Lв}(0_+) = 200$.
7. Повні величини: $i(t) = 20 - 20e^{-400t}\ A$; $u_L(t) = 200e^{-400t}\ B$.
8. Стала часу кола та практична тривалість ПП

$$\tau = \frac{1}{|p|} = \frac{L}{r_к} = 2{,}5 \cdot 10^{-3}\ с; \quad T_{ПП} = 4 \cdot \tau = 0{,}01\ с.$$

Графіки $i(t)$, $u_L(t)$ на рис. 7.5.

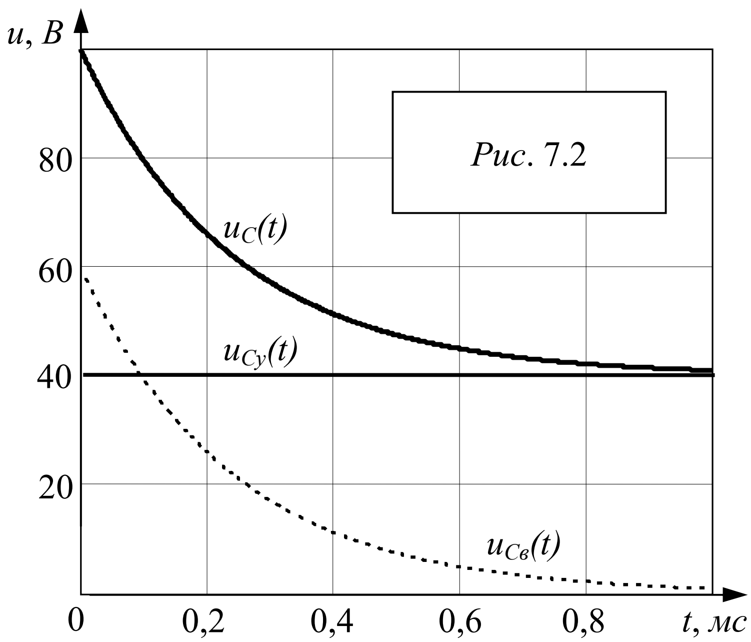

Рис. 7.2

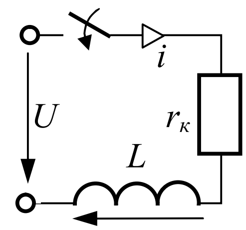

Рис. 7.3

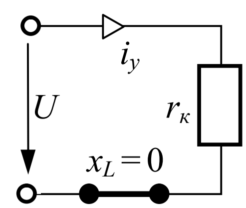

Рис. 7.4

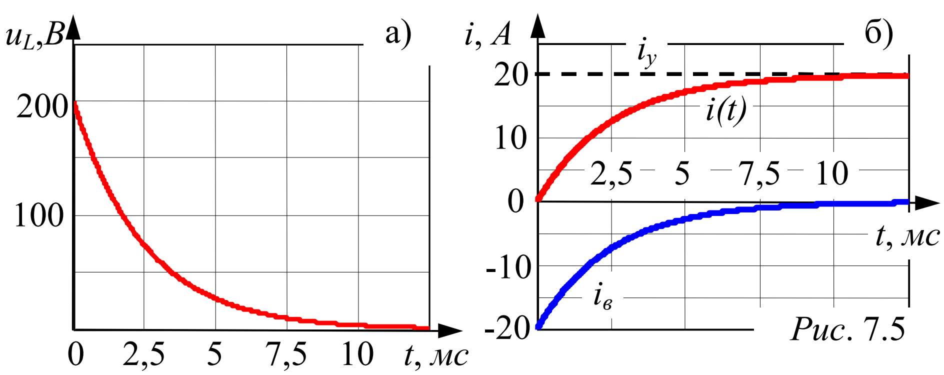

Рис. 7.5

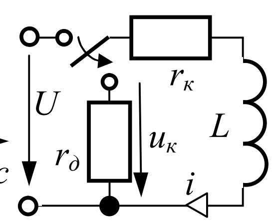

Рис. 7.6

ЗАДАЧА 7.3. Визначити струм і напругу котушки при перемиканні її на додатковий опір $r_д$ (рис. 7.6), якщо $U = 200\ B$, $r_к = 10\ Ом$, $L = 25\ мГн$, $r_д = 40\ Ом$.

Побудувати графіки $i(t)$, $u_к(t)$.

Коментарі і відповіді.

1. Незалежна початкова умова: $i(0_+) = i(0_-) = U/r_к = 20\ A$.
2. Усталені складові: $i_y = 0$; $u_{ку} = 0$.

3. Характеристичне рівняння і його корінь: $pL + (r_д + r_к) = 0$, $p = -2000\ c^{-1}$.
4. Вільні складові: $i_в = Ae^{pt}$; $u_{кв} = Be^{pt}$.
5. Початкові умови: $i_в(0_+) = i(0_+) - i_у = 20\ A$;
$u_L(0_+) = -i(0_+)\cdot(r_д + r_к) = -1000\ B$ та $u_{кв}(0_+) = u_к(0_+) = r_к i(0_+) + u_L(0_+) = -800\ B$.
6. Постійні інтегрування $A = i_в(0_+) = 20$; $B = u_{кв}(0_+) = -800$.
7. Повні величини: $i(t) = 20e^{-2000t}\ A$; $u_к(t) = -800e^{-2000t}\ B$.
8. Стала часу кола і практична тривалість ПП

$$\tau = \frac{1}{|p|} = 0{,}5\cdot 10^{-3}\ c = 0{,}5\ мс; \quad T_{ПП} = 2\ мс.$$

Графіки $i(t)$, $u_к(t)$ на рис. 7.7.

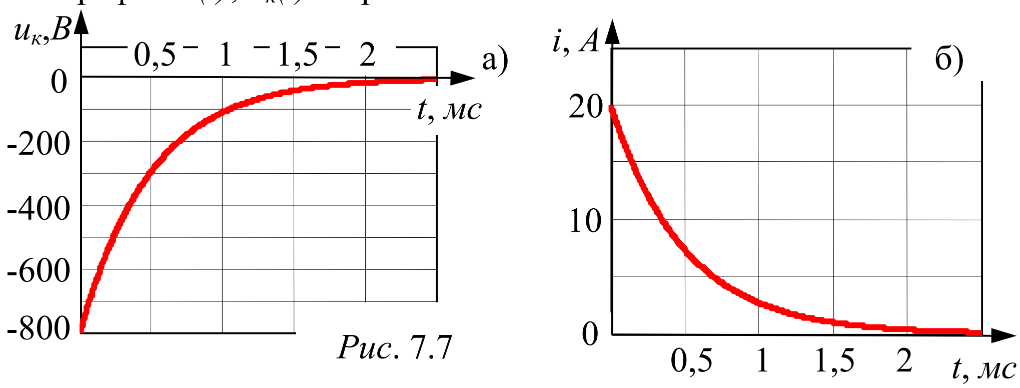

Рис. 7.7

ЗАДАЧА 7.4. На рис. 7.8,а представлена схема для розрахунку перехідного процесу при увімкненні трансформатора в режимі неробочого ходу. Причому $u(t) = 100\cdot sin(314t + \psi_u)\ B$, $r = 20\ Ом$, $L = 0{,}159\ Гн$. Розрахувати ψ_u для здобуття найбільшого ударного струму. Побудувати графік струму. Визначити величину найбільшого ударного струму.

Розв'язання

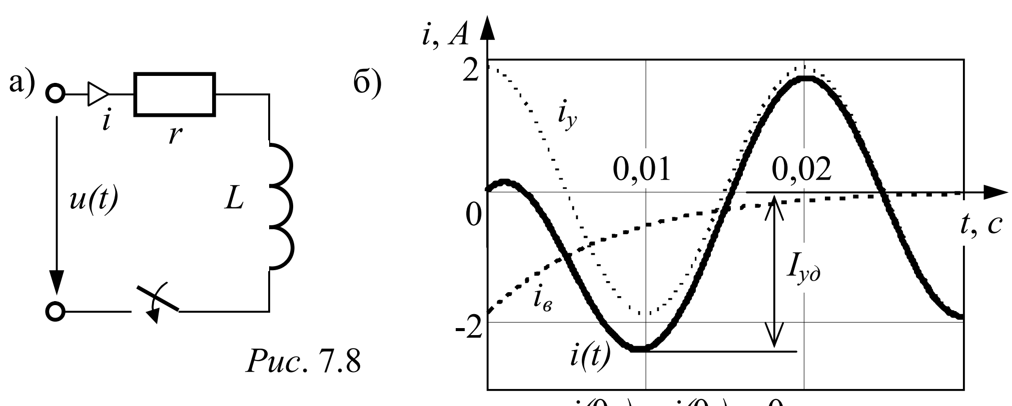

Рис. 7.8

1. Незалежна початкова умова нульова – $i(0_+) = i(0_-) = 0$.
2. Розрахунок струму виконаємо класичним методом. Усталена складова має вигляд:

$$i_у(t) = I_m\cdot sin(314t + \psi_i) = \frac{U_m}{Z}\cdot sin(314t + \psi_u - \varphi).$$

Тут $Z = \sqrt{r^2 + (\omega L)^2} = \sqrt{20^2 + (314\cdot 0{,}159)^2} = \sqrt{20^2 + 50^2} = 53{,}9\ Ом$,

$$\varphi = arctg\frac{\omega L}{r} = arctg\frac{50}{20} = 68{,}1°, \qquad I_m = \frac{U_m}{Z} = \frac{100}{53{,}9} = 1{,}86\ A.$$

Таким чином, $i_у(t) = 1{,}86 \cdot sin(314t + \psi_u - 68{,}1°)\ A$.

Початкове значення усталеної складової струму

$$i_у(0_+) = 1{,}86 \cdot sin(\psi_u - 68{,}1°)\ A.$$

3. Характеристичне рівняння і його корінь:

$$pL + r = 0, \quad p = -r/L = 20/0{,}159 = -125{,}8\ c^{-1}.$$

Стала часу кола і практична тривалість перехідного процесу:

$$\tau = 1/|p| = 1/125{,}8 = 0{,}008\ c, \;\; T_{ПП} = (3 \div 5)\tau = (24 \div 40)\ мс.$$

Період коливань усталеної складової $T = \frac{2\pi}{\omega} = 20\ мс$.

4. Вільна складова струму має вигляд: $i_в(t) = A \cdot e^{pt}$. Значення постійної інтегрування $A = i_в(0_+) = i(0_+) - i_у(0_+) = -1{,}86 \cdot sin(\psi_u - 68{,}1°)$.

5. Найбільше значення вільної складової вийде при $\psi_u - 68{,}1° = \pm 90°$. Таким чином, $\psi_u = 158{,}1°$ або $\psi_u = -21{,}9°$.

Вільна складова відсутня при $\psi_u - 68{,}1° = 0°$ або $\pm 180°$, тобто

$$\psi_u = 68{,}1° \text{ або } \psi_u = -111{,}9°.$$

Розглянемо $\psi_u - 68{,}1° = 90°$, тоді $\psi_u = 158{,}1°$. Миттєве значення перехідного струму в цьому випадку записується як

$$i(t) = i_у(t) + i_в(t) = 1{,}86 \cdot sin(314t + 90°) - 1{,}86 \cdot e^{-125{,}8t}\ A.$$

6. Графік струму і його складових подано на рис. 7.8,б.

7. *Ударним струмом* називається максимальне значення перехідного струму. Як видно з графіка, найбільшого за величиною значення $I_{уд} = 2{,}4\ A$ струм досягає у момент часу $t = 9{,}7\ мс$.

ЗАДАЧА 7.5. Розрахувати струм перехідного процесу при увімкненні котушки на синусоїдну напругу $u(t) = U_m \cdot sin(\omega t + \psi_u)$ (рис. 7.9), якщо

$$U_m = 200\ В, \; \omega = 1000\ рад/с, \; \psi_u = -30°, \; r_к = 10\ Ом, \; L = 25\ мГн.$$

Побудувати графік $i(t)$.

Відповідь: $i(t) = 7{,}43 sin(1000t - 98{,}2°) + 7{,}35 e^{-400t}\ A$; графік $i(t)$ на рис. 7.10.

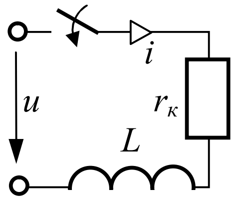

Рис. 7.9

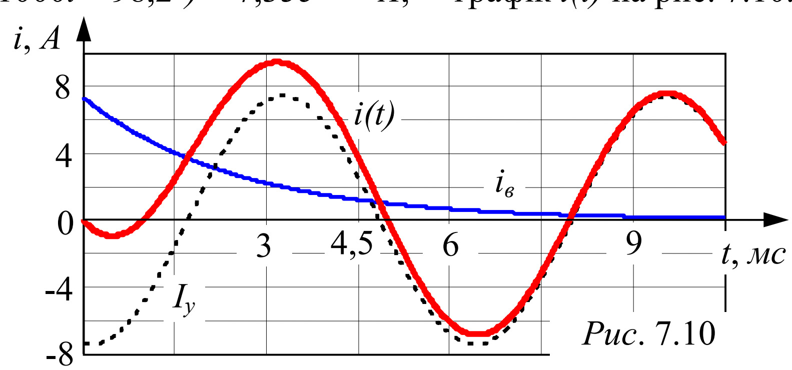

Рис. 7.10

ЗАДАЧА 7.6. Розрахувати струм перехідного процесу і напругу на ємності (рис. 7.11), якщо

$$U = 200\ В, \; r = 100\ Ом, \; C = 100\ мкФ.$$

Побудувати графіки $i(t)$, $u_C(t)$.

Коментарі і відповіді.

1. Незалежна початкова умова: $u_C(0_+) = u_C(0_-) = 0$.
2. Розрахунок усталеного режиму за схемою рис. 7.12:

$$i_y = 0; \qquad u_{Cy} = U = 200\ B.$$

3. Характеристичне рівняння і його корінь:

$$r + \frac{1}{pC} = 0, \quad p = -\frac{1}{rC} = -100\ c^{-1}.$$

4. Вільні складові: $i_в(t) = Ae^{pt}$; $u_{Cв}(t) = Be^{pt}$.
5. Початкові умови: $u_{Cв}(0_+) = u_C(0_+) - u_{Cy} = -200\ B$.

$$i_в(0_+) = -\frac{u_{Cв}(0_+)}{r} = 2\ A.$$

6. Постійні інтегрування $A = i_в(0_+) = 2$; $B = u_{Cв}(0_+) = -200$.
7. Повні величини: $i(t) = 2e^{-100t}\ A$; $u_C(t) = 200 - 200e^{-100t}\ B$.
8. Стала часу кола і практична тривалість ПП $\tau = \dfrac{1}{|p|} = 0{,}01\ c$; $T_{ПП} = 0{,}04\ c$.

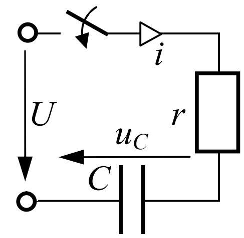

Рис. 7.11

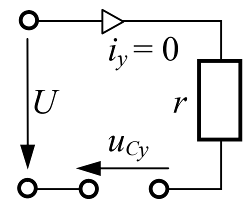

Рис. 7.12

Графіки $i(t)$, $u_C(t)$ на рис. 7.13.

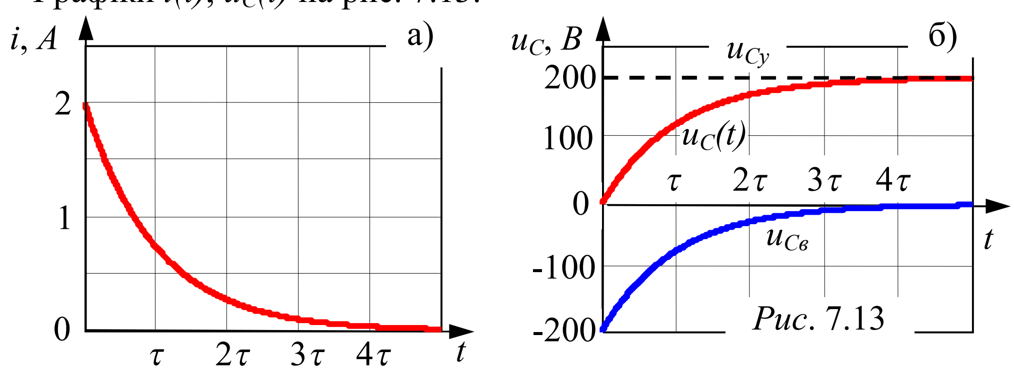

Рис. 7.13

ЗАДАЧА 7.7. Визначити струм і напругу на ємності при перемиканні кола на додатковий опір $r_д$ (рис. 7.14), якщо

$U = 200\ B$, $r = 100\ Ом$, $C = 100\ мкФ$, $r_д = 400\ Ом$.

Побудувати графіки $i(t)$, $u_C(t)$.

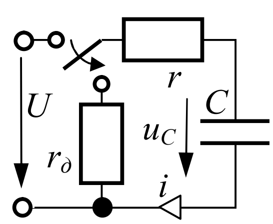

Рис. 7.14

Коментарі і відповіді.

1. Незалежна початкова умова: $u_C(0_+) = u_C(0_-) = U = 200\ B$.
2. Усталені складові: $i_y = 0$; $u_{Cy} = 0$.
3. Характеристичне рівняння і його корінь:

$$(r_д + r) + \frac{1}{pC} = 0, \quad p = -\frac{1}{(r_д + r)C} = -20\ c^{-1}.$$

4. Вільні складові: $i_в = Ae^{pt}$; $u_{Cв} = Be^{pt}$.
5. Початкові умови: $u_{Cв}(0_+) = u_C(0_+) - u_{Cy} = 200\ B$; $i_{св}(0_+) = -\dfrac{u_{Cв}(0_+)}{r_д + r} = -0{,}4\ A$.
6. Постійні інтегрування $A = i_в(0_+) = -0{,}4$; $B = u_{Cв}(0_+) = 200$.
7. Повні величини: $i(t) = -0{,}4e^{-20t}\ A$, $u_C(t) = 200e^{-20t}\ B$.
8. Стала часу кола і практична тривалість ПП $\tau = \dfrac{1}{|p|} = 0{,}05\ c$, $T_{ПП} = 4\tau = 0{,}2\ c$.

Графіки $i(t)$, $u_C(t)$ на рис. 7.15.

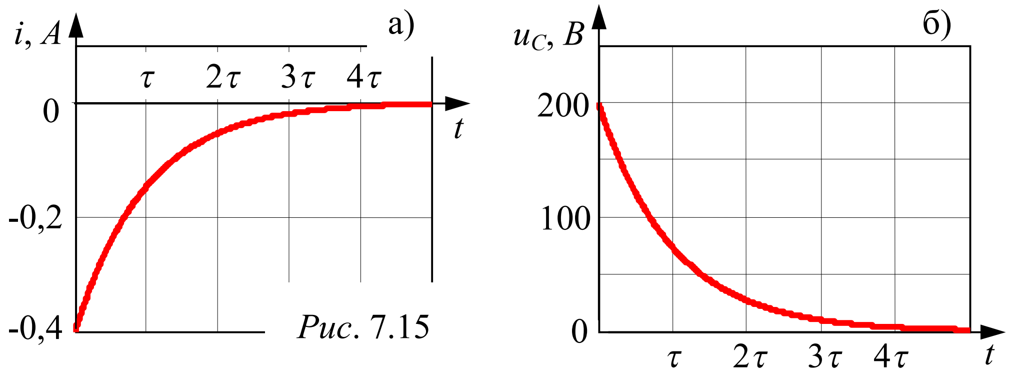

Рис. 7.15

ЗАДАЧА 7.8. Визначити струм $i(t)$ та напругу на конденсаторі $u_C(t)$ (рис. 7.16), якщо

$$r = 100\ Ом,\quad C = 10\ мкФ,\quad E_0 = 300\ В,$$
$$e(t) = 100 sin(1000t - 90°)\ В.$$

Побудувати графік $i(t)$.

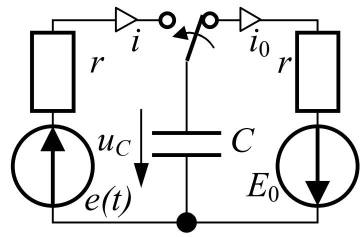

Рис. 7.16

Розв'язання

Аналізом схеми до комутації визначимо напругу на конденсаторі за другим законом Кірхгофа: $ri_0(0_-) - u_C(0_-) = E_0$.

$i_0(0_-) = 0$, отже, $u_C(0_-) = -E_0 = -300\ В$.

Згідно з другим законом комутації $u_C(0_+) = u_C(0_-) = -300\ В$.

Схема після комутації описується лінійним диференціальним рівнянням $ri(t) + u_C(t) = e(t)$, де $u_C(t) = \frac{1}{C}\int i dt$. Його розв'язок:

$$i = i_у + i_в; \quad u_C = u_{Cу} + u_{Cв}.$$

Розрахунок усталеного режиму виконаємо символічним методом.

$$\underline{E}_m = 100e^{-j90°}\ В, \quad x_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{10^6}{1000\cdot 10} = 100\ Ом,$$

$$\underline{Z} = r - jx_C = 100 - j100 = 100\sqrt{2}\, e^{-j45°}\ Ом,$$

$$\underline{I}_{mу} = \frac{\underline{E}_m}{\underline{Z}} = \frac{100e^{-j90}}{100\sqrt{2}e^{-j45}} = 0{,}5\sqrt{2}\, e^{-j45°} = 0{,}707e^{-j45°}\ A,$$

$$\underline{U}_{Cmу} = -jx_C\cdot\underline{I}_{mу} = 100e^{-j90°}\cdot 0{,}5\sqrt{2}\, e^{-j45°} = 50\sqrt{2}\, e^{-j135°} = 70{,}7e^{-j135°}\ В.$$

Миттєві значення усталених складових:

$$i_у(t) = 0{,}707 sin(1000t - 45°)\ A, \qquad u_{Cу}(t) = 70{,}7 sin(1000t - 135°)\ В.$$

Характеристичне рівняння запишемо на основі диференціального:

$$r + \frac{1}{pC} = 0, \quad p = -\frac{1}{rC} = -\frac{10^6}{100\cdot 10} = -1000\ c^{-1}.$$

Отже, вільні складові мають вигляд: $i_в(t) = Ae^{-1000t}$; $u_{Cв}(t) = Be^{-1000t}$.

Постійні інтегрування визначимо з початкових умов.

При $t = 0_+$ маємо: $i_в(0_+) = A$; $u_{Cв}(0_+) = B = u_C(0_+) - u_{Cу}(0_+)$,

де $u_{Cу}(0_+) = 70{,}7 sin(-135°) = -50\ В$,

$u_{Cв}(0_+) = B = -300 - (-50) = -250\ В$.

Диференціальне рівняння для вільних складових при $t = 0_+$ має вигляд
$ri_в(0_+) + u_{Cв}(0_+) = 0$.

$$i_в(0_+) = A = \frac{-u_{Cв}(0_+)}{r} = \frac{250}{100} = 2{,}5\ A,$$ таким чином

$i_в(t) = 2{,}5e^{-1000t}\ A$; $\qquad u_{Cв}(t) = -\,250e^{-1000t}\ B$.

Шукані величини мають вигляд:

$u_C(t) = 70{,}7\sin(1000t - 135°) - 250e^{-1000t}\ B$,

$i(t) = 0{,}707\sin(1000t - 45°) + 2{,}5e^{-1000t}\ A$.

Для побудови графіків (рис. 7.17) визначимо сталу часу кола і тривалість ПП: $\tau = \dfrac{1}{|p|} = \dfrac{1}{|-1000|} = 0{,}001\ c$, $\qquad T_{ПП} = 4\tau = 0{,}004\ c$.

Період синусоїди $\qquad T = \dfrac{2\pi}{\omega} = \dfrac{2\pi}{1000} = 0{,}00628\ c = 6{,}28\ мс$.

Результати розрахунків для побудови графіка зведемо до табл. 7.1.

Таблиця 7.1

t, *мс*	0	0,75	1,5	2,25	3	3,75	4,5	5,25	6	6,75
$i_у$, *А*	–0,5	–0,02	0,46	0,7	0,57	0,12	–0,38	–0,7	–0,62	–0,22
$i_в$, *А*	2,5	1,18	0,56	0,26	0,12	0,06	0,03	0,01	0,006	0,003
i, *А*	2,0	1,16	1,02	0,96	0,69	0,18	–0,35	–0,68	–0,614	–0,217

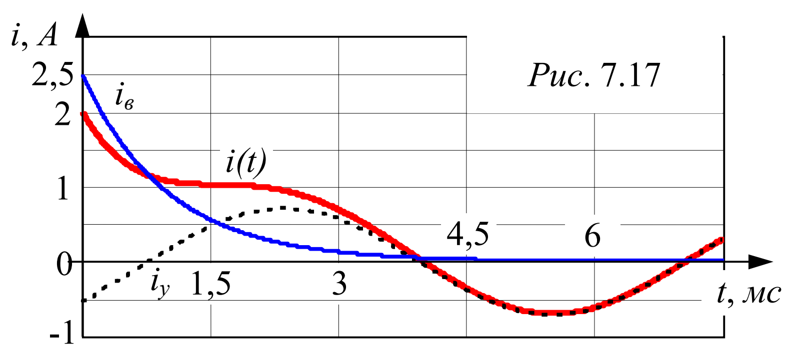

Рис. 7.17

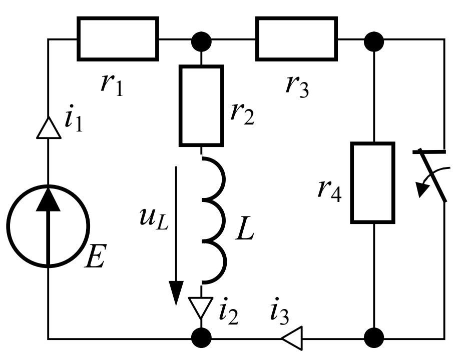

Рис. 7.18

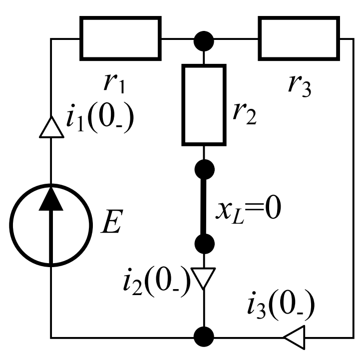

Рис. 7.19

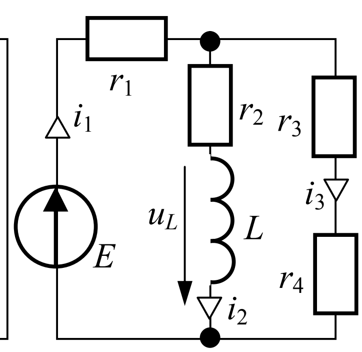

Рис. 7.20

ЗАДАЧА 7.9. Розрахувати струми перехідного процесу і напругу на індуктивності у схемі рис. 7.18, якщо

$E = 150\ B$, $\quad r_1 = r_2 = 10\ Ом$, $\quad r_3 = r_4 = 5\ Ом$, $\quad L = 20\ мГн$.

Побудувати графіки $i_2(t)$, $u_L(t)$.

Розв’язання

1. Аналізом схеми до комутації визначимо незалежну початкову умову, якою тут є струм в індуктивності – $i_2(0_-)$.

Схема до комутації має вигляд рис. 7.19. Струм в індуктивності

$$i_2(0_-) = \frac{E}{\dfrac{r_2 r_3}{r_2+r_3}+r_1}\cdot\frac{r_3}{r_2+r_3} = \frac{150}{\dfrac{10\cdot 5}{10+5}+10}\cdot\frac{5}{10+5} = 3{,}75\ A.$$

Згідно з першим законом комутації маємо $i_2(0_+) = i_2(0_-) = 3{,}75\ A$.

2. Схема після комутації має вигляд рис. 7.20 і описується системою лінійних диференціальних рівнянь, складеними за законами Кірхгофа

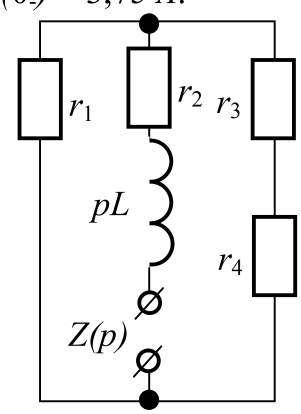

Рис. 7.21

$$\begin{cases} i_1(t) = i_2(t) + i_3(t), \\ r_1 i_1 + r_2 i_2 + L\dfrac{di_2}{dt} = E, \\ r_1 i_1 + (r_3 + r_4)\cdot i_3 = E, \end{cases}$$

розв’язання якої шукатимемо у вигляді

$$i_q(t) = i_{qy}(t) + i_{qв}(t);\quad u_L(t) = u_{Ly}(t) + u_{Lв}(t).$$

3. Усталений режим:

$$i_{1y} = \frac{E}{\dfrac{r_2(r_3+r_4)}{r_2+r_3+r_4}+r_1} = \frac{150}{\dfrac{10\cdot(5+5)}{10+5+5}+10} = 10\ A;$$

$$i_{2y} = i_{1y}\cdot\frac{r_3+r_4}{r_2+r_3+r_4} = 10\cdot\frac{5+5}{10+5+5} = 5\ A;$$

$$i_{3y} = i_{1y} - i_{2y} = 10 - 5 = 5\ A,\qquad u_{Ly} = 0.$$

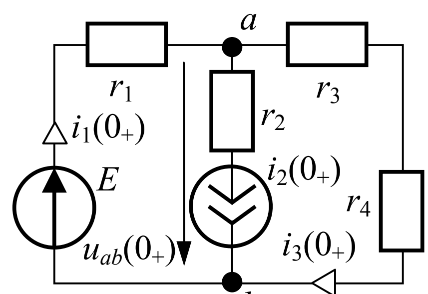

Рис. 7.22

4. Вільний режим.

Складемо характеристичне рівняння шляхом запису вхідного опору в операторній формі (2-й спосіб):

$$\frac{(r_3+r_4)(r_2+pL)}{r_3+r_4+r_2+pL} + r_1 = 0.$$

Але можна скласти характеристичне рівняння і відносно вітки з накопичувачем, при цьому джерело замінюється його внутрішнім опором (рис. 7.21). Тоді вигляд рівняння буде простіше:

$$\frac{(r_3+r_4)r_1}{r_3+r_4+r_1} + r_2 + pL = 0;\qquad \frac{(5+5)\cdot 10}{5+5+10} + 10 + 20\cdot 10^{-3}\cdot p = 0;\qquad p = -750\ c^{-1}.$$

Тоді $i_{1в} = A_1 e^{pt} = A_1 e^{-750t}$; $i_{2в} = A_2 e^{-750t}$; $i_{3в} = A_3 e^{-750t}$; $u_{Lв} = Be^{-750t}$.

Постійні інтегрування визначимо при $t = 0_+$.

І-й спосіб розв’язання

Схема після комутації для $t = 0_+$ має вигляд рис. 7.22. По методу двох вузлів

$$u_{ab}(0_+) = \frac{E/r_1 - i_2(0_+)}{\dfrac{1}{r_1}+\dfrac{1}{r_3+r_4}} = \frac{150/10 - 3{,}75}{\dfrac{1}{10}+\dfrac{1}{5+5}} = 56{,}25\ B.$$

Струми у момент комутації

$$i_1(0_+) = \frac{E - u_{ab}(0_+)}{r_1} = \frac{150 - 56{,}25}{10} = 9{,}375\ A,$$

$$i_3(0_+) = \frac{u_{ab}(0_+)}{r_3 + r_4} = \frac{56{,}25}{10} = 5{,}625\ A \quad \text{або} \quad i_3(0_+) = i_1(0_+) - i_2(0_+) = 5{,}625\ A,$$

$u_L(0_+) = u_{ab}(0_+) - r_2 i_2(0_+) = 56{,}25 - 10 \cdot 3{,}75 = 18{,}75\ B$.

Запишемо вільні складові при $t = 0_+$:

$i_{1в}(0_+) = A_1 = i_1(0_+) - i_{1y} = 9{,}375 - 10 = -0{,}625\ A$,

$i_{2в}(0_+) = A_2 = i_2(0_+) - i_{2y} = 3{,}75 - 5 = -1{,}25\ A$,

$i_{3в}(0_+) = A_3 = i_3(0_+) - i_{3y} = 5{,}625 - 5 = 0{,}625\ A$,

$u_{Lв}(0_+) = B = u_L(0_+) - u_{Ly} = 18{,}75 - 0 = 18{,}75\ B$.

Таким чином: $i_{1в}(t) = -0{,}625e^{-750t}\ A$, $\quad i_1(t) = 10 - 0{,}625e^{-750t}\ A$,

$i_{2в}(t) = -1{,}25e^{-750t}\ A$, $\quad i_2(t) = 5 - 1{,}25e^{-750t}\ A$,

$i_{3в}(t) = 0{,}625e^{-750t}\ A$, $\quad i_3(t) = 5 + 0{,}625e^{-750t}\ A$,

$u_L(t) = u_{Lв}(t) = 18{,}75e^{-750t}\ B$.

II-й спосіб розв'язання

Постійну інтегрування A_2 можна визначити відразу, оскільки для струму i_2 діє перший закон комутації:

$A_2 = i_2(0_+) - i_{2y} = 3{,}75 - 5 = -1{,}25\ A$,

$i_{2в}(t) = A_2 e^{-750t} = -1{,}25e^{-750t}\ A$, $\quad i_2(t) = i_{2y}(t) + i_{2в}(t) = 5 - 1{,}25e^{-750t}\ A$.

Визначимо напругу на індуктивності

$$u_L(t) = L\frac{di_2}{dt} = 20 \cdot 10^{-3} \cdot (-1{,}25)(-750)e^{-750t} = 18{,}75e^{-750t}\ B.$$

Вузлова напруга

$u_{ab}(t) = r_2 i_2(t) + u_L(t) = 10 \cdot (5 - 1{,}25e^{-750t}) + 18{,}75e^{-750t} = 50 + 6{,}25e^{-750t}\ B$.

Струми $\quad i_3(t) = \dfrac{u_{ab}(t)}{r_3 + r_4} = \dfrac{50 + 6{,}25e^{-750t}}{5 + 5} = 5 + 0{,}625e^{-750t}\ A$,

$$i_1(t) = i_2(t) + i_3(t) = 5 - 1{,}25e^{-750t} + 5 + 0{,}625e^{-750t} = 10 - 0{,}625e^{-750t}\ A.$$

5. Побудуємо графіки $i_2(t)$ і $u_L(t)$. Тривалість перехідного процесу

$$T_{ПП} = 4\tau = \frac{4}{|p|} = \frac{4}{|-750|}\ c = 5{,}33\ мс.$$

Результати розрахунків представимо у вигляді табл. 7.2.

Таблиця 7.2

t, *мс*	0	1,33	2,67	4	5,33
$i_{2в}$, A	– 1,25	– 0,46	– 0,17	– 0,06	– 0,02
i_2, A	3,75	4,54	4,83	4,94	4,98
u_L, B	18,75	6,9	2,54	0,93	0,34

Графіки подано на рис. 7.23.

ЗАДАЧА 7.10. У схемі рис. 7.24,а розрахувати струми перехідного процесу класичним методом. Параметри кола: $U = 50\ B$, $r_1 = r_3 = 100\ Ом$, $r_2 = 50\ Ом$, $C = 100\ мкФ$.

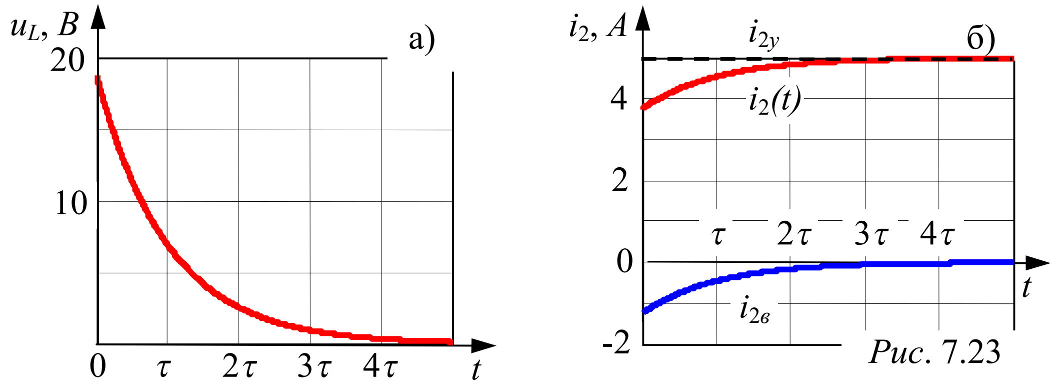

Рис. 7.23

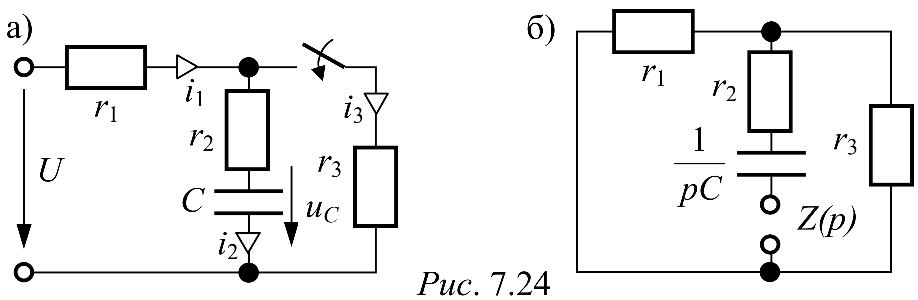

Рис. 7.24

Розв'язання

1. Стан кола до комутації: $i_1(t_-) = i_2(t_-) = 0$, $u_C(t_-) = U = 50\ B$. У відповідності до другого закону комутації незалежна початкова умова – $u_C(0_+) = u_C(0_-) = 50\ B$.

2. Згідно з класичним методом шукані перехідні струми записуються у вигляді суми усталених і вільних складових:

$$i_1 = i_{1y} + i_{1в}, \quad i_2 = i_{2y} + i_{2в}, \quad i_3 = i_{3y} + i_{3в}.$$

3. Розраховуємо вимушені складові струмів:

$$i_{2y} = 0; \quad i_{1y} = i_{3y} = \frac{U}{r_1 + r_3} = \frac{50}{100 + 100} = 0{,}25\ A.$$

3. Характеристичне рівняння складемо за допомогою вхідного опору в операторній формі (див. 7.1.1, другий спосіб укладання характеристичного рівняння): $Z(p) = \dfrac{1}{pC} + r_2 + \dfrac{r_1 r_3}{r_1 + r_3} = 0$. Корінь характеристичного рівняння:

$$p = -\frac{r_1 + r_3}{C(r_1 r_2 + r_1 r_3 + r_2 r_3)} = -\frac{100 + 100}{10^{-4}(100 \cdot 50 + 100 \cdot 100 + 50 \cdot 100)} = -100\ c^{-1}.$$

4. Вільні складові струмів при одному корені характеристичного рівняння: $i_{1в} = A \cdot e^{pt}$, $i_{2в} = B \cdot e^{pt}$, $i_{3в} = D \cdot e^{pt}$.

5. Постійні інтегрування *A, B*, *D* знаходяться за допомогою початкових умов, які, проте, можна отримати різними способами. Розглянемо деякі з них.

а) *Перший спосіб*. Складається система рівнянь за законами Кірхгофа для післякомутаційного режиму для початкового моменту часу:

$$\begin{cases} i_1(0_+) - i_2(0_+) - i_3(0_+) = 0, \\ i_1(0_+) \cdot r_1 + i_2(0_+) \cdot r_2 + u_C(0_+) = U, \\ i_1(0_+) \cdot r_1 + i_3(0_+) \cdot r_3 = U. \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} i_1(0_+) - i_2(0_+) - i_3(0_+) = 0, \\ i_1(0_+) \cdot 100 + i_2(0_+) \cdot 50 + 50 = 50, \\ i_1(0_+) \cdot 100 + i_3(0_+) \cdot 100 = 50. \end{cases}$$

Розв'язання системи: $i_1(0_+) = 0{,}125\ A$, $i_2(0_+) = -0{,}25\ A$, $i_3(0_+) = 0{,}375\ A$.

Постійні інтегрування: $A = i_{1в}(0_+) = i_1(0_+) - i_{1y} = 0{,}125 - 0{,}25 = -0{,}125;$

$B = i_{2в}(0_+) = i_2(0_+) - i_{2y} = -0{,}25 - 0 = -0{,}25;$

$D = i_{3в}(0_+) = i_3(0_+) - i_{3y} = 0{,}375 - 0{,}25 = 0{,}125.$

б) *Другий спосіб*. Розрахунок виконується за еквівалентною схемою, яка складається на початковий момент часу. Тут застосовують наслідки із законів комутації: індуктивність у момент комутації поводиться як джерело струму із струмом $i_L(0_+)$, ємність – як джерело ЕРС з напругою $u_C(0_+)$. Для початкового моменту часу, таким чином, отримуємо схему рис. 7.25,а. Враховуючи, що у колі виявилися два однакові джерела $u_C(0_+) = U$, можна стверджувати, що потенціали точок a і b однакові, тому їх можна з'єднати перемичкою. Отримуємо схему рис. 7.25,б, з якої знаходимо початкові значення струмів:

$$i_3(0_+) = \frac{U}{r_3 + \dfrac{r_1 r_2}{r_1 + r_2}} = \frac{50}{100 + \dfrac{50 \cdot 100}{50 + 100}} = 0{,}375\ A,$$

$$i_1(0_+) = i_3(0_+) \cdot \frac{r_2}{r_1 + r_2} = 0{,}375 \cdot \frac{50}{50 + 100} = 0{,}125\ A,$$

$$i_2(0_+) = i_1(0_+) - i_3(0_+) = 0{,}125 - 0{,}375 = -0{,}25\ A.$$

Далі постійні інтегрування визначаються як у першому способі.

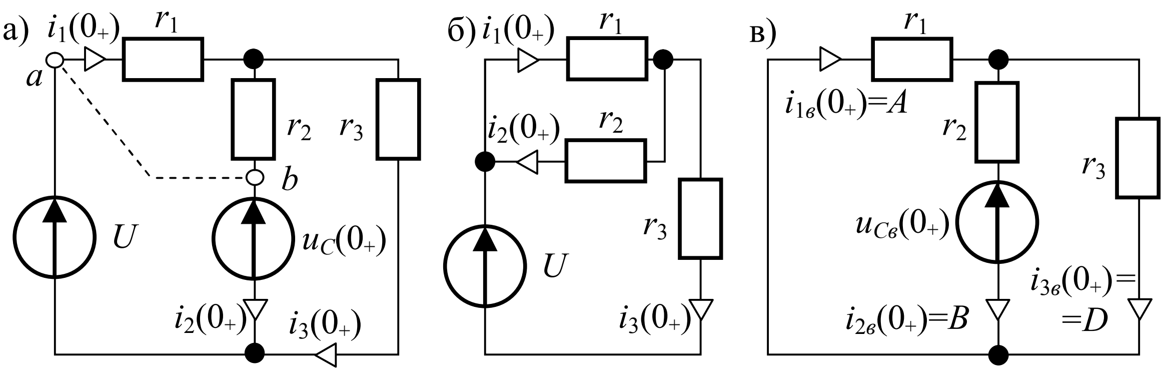

Рис. 7.25

в) *Третій спосіб*. Розрахунок виконується за еквівалентною схемою для початкового моменту часу лише для вільних складових (рис. 7.25,в). Визначимо необхідне початкове значення вільної складової напруги на конденсаторі. Значення усталеної складової: $u_{Cy} = i_{3y} \cdot r_3 = 0{,}25 \cdot 100 = 25\ B.$

$$u_{Cв}(0_+) = u_C(0_+) - u_{Cy} = 50 - 25 = 25\ B.$$

Постійні інтегрування: $B = \dfrac{-u_{Cв}(0_+)}{r_2 + \dfrac{r_1 r_3}{r_1 + r_3}} = \dfrac{-25}{50 + \dfrac{100}{2}} = -0{,}25;$

$$A = B \cdot \frac{r_3}{r_1 + r_3} = -0{,}25 \cdot \frac{100}{100 + 100} = -0{,}125,$$

$$D = -B \cdot \frac{r_1}{r_1 + r_3} = 0{,}25 \cdot \frac{100}{100 + 100} = 0{,}125.$$

6. Записуємо остаточні вирази для струмів:

$i_1(t) = 0{,}25 - 0{,}125 \cdot e^{-100t}\ A$; $i_2(t) = -0{,}25 \cdot e^{-100t}\ A$; $i_3(t) = 0{,}25 + 0{,}125 \cdot e^{-100t}\ A$.

7. Для побудови графіка $i_1(t)$ обчислимо:

- стала часу кола $\tau = 1/|p| = 1/100\ c = 10\ мс$,
- практична тривалість перехідного процесу $T_{ПП} = (3 \div 5)\tau = 4 \cdot \tau = 40\ мс$.

Графік подано на рис. 7.26.

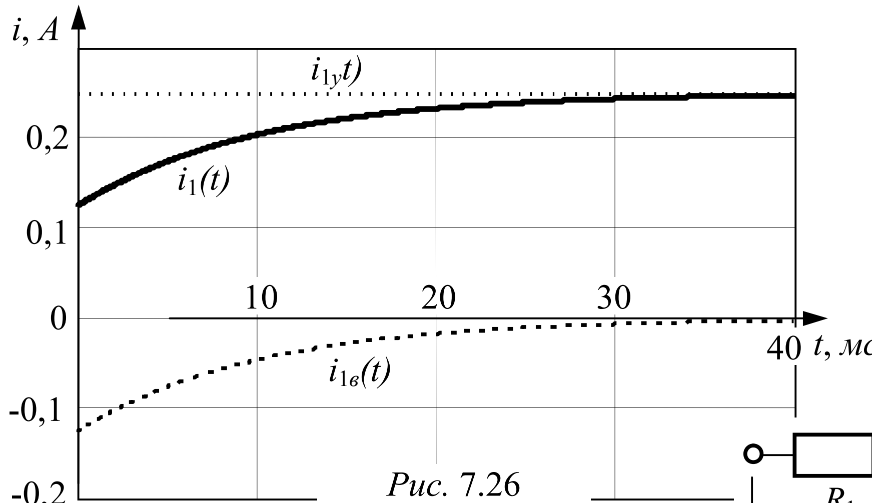

Рис. 7.26

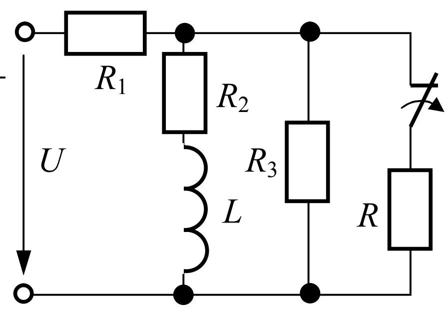

Рис. 7.27

ЗАДАЧА 7.11. В схемі рис. 7.27 розрахувати струми перехідного процесу. Параметри кола:

$U = 60\ В$, $R_1 = 9\ Ом$, $R_2 = R_3 = 30\ Ом$,

$R = 10\ Ом$, $L = 0{,}4\ Гн$.

Відповіді: $i_1(t) = 2{,}5 - 0{,}346 \cdot e^{-92{,}3t}\ A$;

$i_2(t) = 1{,}25 - 0{,}450 \cdot e^{-92{,}3t}\ A$;

$i_3(t) = 1{,}25 + 0{,}104 \cdot e^{-92{,}3t}\ A$.

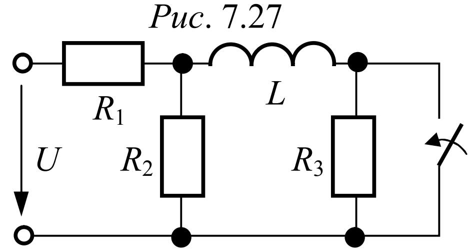

Рис. 7.28

ЗАДАЧА 7.12. В схемі рис. 7.28 розрахувати струми перехідного процесу. Параметри кола:

$U = 300\ В$, $R_1 = R_2 = R_3 = 100\ Ом$, $L = 0{,}5\ Гн$.

Відповіді: $i_1(t) = 3 - e^{-100t}\ A$;

$i_2(t) = e^{-100t}\ A$;

$i_3(t) = 3 - 2 \cdot e^{-100t}\ A$.

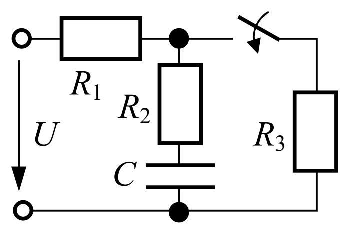

Рис. 7.29

ЗАДАЧА 7.13. В схемі рис. 7.29 розрахувати напругу на конденсаторі і струми перехідного процесу. Параметри кола: $U = 100\ В$, $C = 60\ мкФ$, $R_1 = 50\ Ом$, $R_2 = R_3 = 100\ Ом$.

Відповіді: $u_C(t) = 66{,}67 + 33{,}33 \cdot e^{-125t}\ В$;

$i_1(t) = 0{,}667 - 0{,}167 \cdot e^{-125t}\ A$; $i_2(t) = -0{,}250 \cdot e^{-125t}\ A$; $i_3(t) = 0{,}667 + 0{,}083 \cdot e^{-125t}\ A$.

ЗАДАЧА 7.14. Розв’язати задачу 7.13 з наступними числовими даними:

$U = 200\ В$, $R_1 = R_3 = 20\ Ом$, $R_2 = 10\ Ом$, $C = 50\ мкФ$.

Відповіді: $u_C(t) = 100 + 100 \cdot e^{-1000t}\ В$;

$i_1(t) = 5 - 2{,}5 \cdot e^{-1000t}\ A$; $i_2(t) = -5 \cdot e^{-1000t}\ A$; $i_3(t) = 5 + 2{,}5 \cdot e^{-1000t}\ A$.

ЗАДАЧА 7.15. У схемі рис. 7.30,а розрахувати струми перехідного процесу класичним методом. Параметри кола:

$$u(t) = 100\cdot sin(100t + 30°)\ B,\quad r_1 = 173\ Ом,\quad r_2 = 100\ Ом,\quad C = 100\ мкФ.$$

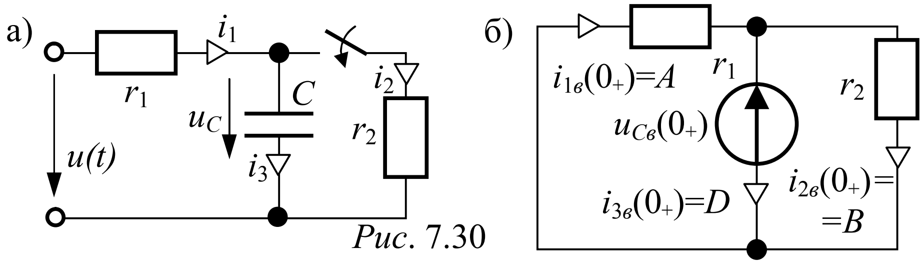

Рис. 7.30

Розв’язання

1. Незалежну початкову умову отримаємо розрахунком кола до комутації:

$$i_2(t_-) = 0;\quad i_1(t_-) = i_3(t_-) = I_{1m}\cdot sin(100t + \psi_{i1});$$

$$I_{1m} = \frac{U_{1m}}{\sqrt{r_1^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}} = \frac{100}{\sqrt{173^2 + 100^2}} = 0{,}5\ A,$$

$$\psi_{i1} = \psi_u - arctg\frac{-1/\omega C}{r_1} = 30° + arctg\frac{100}{173} = 60°,$$

$$U_{Cm} = I_{1m}\cdot\frac{1}{\omega C} = 0{,}5\cdot 100 = 50\ B,\quad \psi_{uC} = \psi_{i1} - 90° = -30°;$$

$$u_C(t_-) = U_{Cm}\cdot sin(100t + \psi_{uC}) = 50\cdot sin(100t - 30°)\ B.$$

Незалежна початкова умова з урахуванням другого закону комутації:

$$u_C(0_+) = u_C(0_-) = 50\cdot sin(-30°) = -25\ B.$$

2. Відповідно до класичного методу розрахунку

$$u_C(t) = u_{Cy}(t) + u_{Cв}(t),$$

$$i_1(t) = i_{1y}(t) + i_{1в}(t),\quad i_2(t) = i_{2y}(t) + i_{2в}(t),\quad i_3(t) = i_{3y}(t) + i_{3в}(t).$$

3. Вимушені складові розрахуємо символічним методом:

$$\underline{U}_m = 100\cdot e^{j30°}\ B,$$

$$\underline{Z} = r_1 + \frac{r_2\cdot\left(-j\frac{1}{\omega C}\right)}{r_2 - j\frac{1}{\omega C}} = 173 + \frac{100\cdot(-j100)}{100 - j100} = 228{,}7\cdot e^{-j12{,}6°}\ Ом,$$

$$\underline{I}_{1ym} = \frac{\underline{U}_m}{\underline{Z}} = \frac{100\cdot e^{j30}}{228{,}7\cdot e^{-j12{,}6}} = 0{,}437\cdot e^{j42{,}6°}\ A,$$

$$\underline{I}_{2ym} = \underline{I}_{1ym}\cdot\frac{-j\frac{1}{\omega C}}{r_2 - j\frac{1}{\omega C}} = 0{,}437\cdot e^{j42{,}6°}\cdot\frac{-j100}{100 - j100} = 0{,}309\cdot e^{-j2{,}4°}\ A,$$

$$\underline{I}_{3ym} = \underline{I}_{1ym}\cdot\frac{r_2}{r_2 - j\frac{1}{\omega C}} = 0{,}437\cdot e^{j42{,}6°}\cdot\frac{100}{100 - j100} = 0{,}309\cdot e^{j87{,}6°}\ A,$$

$\underline{U}_{Cym} = \underline{I}_{2ym} \cdot r_2 = 0,309 \cdot e^{-j2,4°} \cdot 100 = 30,9 \cdot e^{-j2,4°}$ B.

Миттєві значення усталених струмів:

$$i_{1y}(t) = 0,437 \cdot sin(100t + 42,6°)\ A, \quad i_{2y}(t) = 0,309 \cdot sin(100t - 2,4°)\ A,$$
$$i_{3y}(t) = 0,309 \cdot sin(100t + 87,6°)\ A.$$

Миттєве і початкове значення усталеної складової напруги на конденсаторі:

$$u_{Cy}(t) = 30,9 \cdot sin(100t - 2,4°)\ B, \quad u_{Cy}(0) = 30,9 \cdot sin(-2,4°) = -1,29\ B.$$

Початкове значення вільної складової напруги на конденсаторі:

$$u_{Cв}(0_+) = u_C(0_+) - u_{Cy}(0_+) = -25 + 1,29 = -23,71\ B.$$

4. Складаємо і розв’язуємо характеристичне рівняння:

$$Z(p) = \frac{1}{pC} + \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2} = 0, \quad p = -\frac{r_1 + r_2}{C r_1 r_2} = -\frac{127 + 100}{10^{-4} \cdot 173 \cdot 100} = -157,8\ c^{-1}.$$

Вільні складові струмів: $i_{1в} = A \cdot e^{pt}$, $i_{2в} = B \cdot e^{pt}$, $i_{3в} = D \cdot e^{pt}$.

5. Постійні інтегрування визначимо за еквівалентною схемою для початкового моменту часу лише для вільних складових (рис. 7.30,б):

$$A = i_{1в}(0_+) = -\frac{u_{Cв}(0_+)}{r_1} = -\frac{-23,71}{173} = 0,137;$$

$$B = i_{2в}(0_+) = \frac{u_{Cв}(0_+)}{r_2} = \frac{-23,71}{100} = -0,237;$$

$$D = i_{3в}(0_+) = i_{1в}(0_+) - i_{2в}(0_+) = 0,173 + 0,237 = 0,374.$$

6. Записуємо остаточні формули для струмів:

$$i_1(t) = i_{1y}(t) + i_{1в}(t) = 0,437 \cdot sin(100t + 42,6°) + 0,137 \cdot e^{-157,8t}\ A,$$
$$i_2(t) = i_{2y}(t) + i_{2в}(t) = 0,309 \cdot sin(100t - 2,4°) - 0,237 \cdot e^{-157,8t}\ A,$$
$$i_3(t) = i_{3y}(t) + i_{3в}(t) = 0,309 \cdot sin(100t + 87,6°) + 0,374 \cdot e^{-157,8t}\ A.$$

ЗАДАЧА 7.16. У поданій на рис. 7.31 схемі розрахувати струми. Числові дані: $u(t) = 400 \cdot sin(314t - 120°)\ B$, $r_1 = 40\ Ом$, $r_2 = 50\ Ом$, $r_3 = 70\ Ом$, $L = 0,11\ Гн$.

Побудувати графік струму з найбільшою вільною складовою.

Відповіді: $i_1(t) = 6,616 \cdot sin(314t - 147,3°) - 0,711 \cdot e^{-231,4t}\ A$,

$i_2(t) = 5,933 \cdot sin(314t - 173,6°) - 1,117 \cdot e^{-231,4t}\ A$,

$i_3(t) = 2,927 \cdot sin(314t - 83,6°) + 0,406 \cdot e^{-231,4t}\ A$.

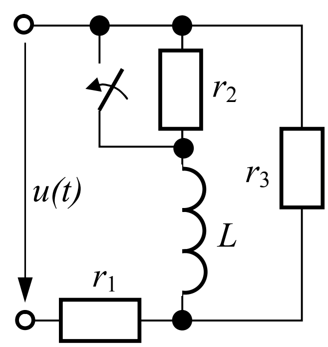

Рис. 7.31

ЗАДАЧА 7.17. У схемі рис. 7.32 розрахувати струми перехідного процесу. Параметри кола :

$$u(t) = 100 \cdot sin(314t - 90°)\ B, \quad R_1 = R_3 = 100\ Ом,$$
$$R_2 = 60\ Ом, \quad L = 0,255\ Гн.$$

Відповіді:

$i_1(t) = 0,658 \cdot sin(314t - 99,5°) - 0,101 \cdot e^{-431t}\ A$;

$i_2(t) = 0,368 \cdot sin(314t - 126,0°) - 0,202 \cdot e^{-431t}\ A$;

$i_3(t) = 0,368 \cdot sin(314t - 72,9°) + 0,101 \cdot e^{-431t}\ A$.

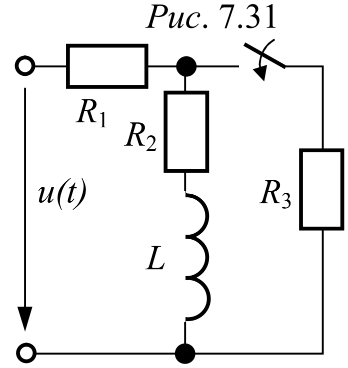

Рис. 7.32

ЗАДАЧА 7.18. На вхід схеми рис. 7.33 з параметрами $r_1 = 20$ *Ом*, $r_2 = 30$ *Ом*, $C = 50$ *мкФ* подано одиночний прямокутний імпульс амплітудою $E = 100\,В$ і тривалістю τ. Розрахувати струми перехідного процесу в колі.

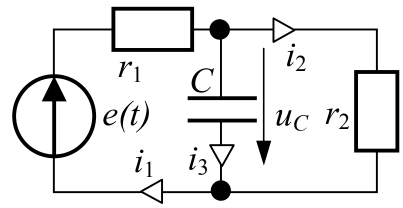

Рис. 7.33

Розв'язання

Перший спосіб. Спочатку розрахуємо напругу на конденсаторі $u_C(t)$ класичним методом, а через нього запишемо всі струми схеми.

Розглянемо інтервал часу $0 \le t \le \tau$, коли на вході кола діє напруга $100\,В$. Оскільки коло до подачі імпульсу знаходилося в стані покою, то маємо нульову незалежну початкову умову – $u_C(0_+) = u_C(0_-) = 0$.

Усталена складова напруги на конденсаторі

$$u_{Cу} = \frac{E}{r_1 + r_2} \cdot r_2 = \frac{100}{20+30} \cdot 30 = 60\ В.$$

Характеристичне рівняння і його корінь:

$$\frac{1}{pC} + \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2} = 0; \quad p = -\frac{r_1 + r_2}{C r_1 r_2} = -\frac{20+30}{50 \cdot 20 \cdot 30} \cdot 10^6 = -1667\ с^{-1}.$$

Стала часу кола $\tau = -p^{-1} = 0{,}6$ *мс*.

Вільна складова напруги на конденсаторі: $u_{Cв}(t) = A \cdot e^{pt}$.

Постійну інтегрування A визначаємо з початкових умов:

$$A = u_{Cв}(0_+) = u_C(0_+) - u_{Cу} = -60.$$

Таким чином, на інтервалі $0 \le t \le \tau$:

$$u_C(t) = u_{Cу} + u_{Cв}(t) = 60 - 60 \cdot e^{-1667t}\ В.$$

В кінці інтервалу значення напруги $u_C(\tau) = 60 - 60 \cdot e^{-1} = 37{,}93\ В$.

Закон зміни напруги на конденсаторі при $t \ge \tau$ (з урахуванням відсутності дії імпульсу на вході кола) $u_C(t) = u_C(\tau) \cdot e^{p(t-\tau)} = 37{,}93 \cdot e^{-1667(t-0{,}0006)}\ В$.

Остаточно для напруги на конденсаторі отримуємо:

$$u_C(t) = \left[\begin{array}{l} 60 - 60 \cdot e^{-1667t}\ В \quad при\ 0 \le t \le \tau = 6 \cdot 10^{-4}\ с, \\ 37{,}93 \cdot e^{-1667(t-0{,}0006)}\ В \quad при\ t \ge \tau; \end{array}\right.$$

Струми у вітках кола:

$$i_3(t) = C\frac{du_C}{dt} = \left[\begin{array}{l} 5 \cdot e^{-1667t}\ A \quad при\ 0 \le t \le \tau = 6 \cdot 10^{-4}\ с, \\ -3{,}16 \cdot e^{-1667(t-0{,}0006)}\ A \quad при\ t \ge \tau; \end{array}\right.$$

$$i_2(t) = u_C(t)/r_2 = \left[\begin{array}{l} 2 - 2 \cdot e^{-1667t}\ A \quad при\ 0 \le t \le \tau = 6 \cdot 10^{-4}\ с, \\ 1{,}26 \cdot e^{-1667(t-0{,}0006)}\ A \quad при\ t \ge \tau; \end{array}\right.$$

$$i_1(t) = i_2(t) + i_3(t) = \left[\begin{array}{l} 2 + 3 \cdot e^{-1667t}\ A \quad при\ 0 \le t \le \tau = 6 \cdot 10^{-4}\ с, \\ -1{,}90 \cdot e^{-1667(t-0{,}0006)}\ A \quad при\ t \ge \tau; \end{array}\right.$$

Розрахуємо напругу на конденсаторі $u_C(t)$ *другим способом*. Представимо заданий прямокутний імпульс напруги відповідно до принципу накладання двома увімкненнями із зміщенням у часі на проміжок, який дорівнює тривалості імпульсу, спочатку на позитивну напругу E, а потім на таку ж негативну. При увімкненні кола на позитивну напругу $E = 100\ В$ (при $0 \le t \le \tau$):

$u_C(t) = u_C'(t) = 60 - 60 \cdot e^{-1667t}$ B (див. *перший спосіб* розрахунку для $0 \le t \le \tau$).

Аналогічно при увімкненні кола у момент часу $t = \tau$ на негативну напругу $-E = -100$ B отримаємо: $u_C''(t) = -60 + 60 \cdot e^{-1667(t-\tau)}$ B.

Таким чином, на інтервалі $t \ge \tau$ маємо:

$u_C(t) = u_C'(t) + u_C''(t) = 60 \cdot (e^{-1667(t-\tau)} - e^{-1667t}) = 37{,}93 \cdot e^{-1667(t-0{,}0006)}$ B.

Далі струми обчислюються так само, як і *першим способом*.

Графіки струмів див. на рис. 7.80.

ЗАДАЧА 7.19. На вхід кола задачі 7.18 подана серія прямокутних імпульсів тривалістю τ і амплітудою $E = 100$ B. Тривалість паузи між імпульсами також дорівнює τ. Розрахувати струми ПП в колі в квазіусталеному режимі.

Розв'язання

Задачу розв'яжемо з урахуванням *невизначених початкових умов*. Момент початку відліку часу виберемо співпадаючим з початком дії одного довільно узятого імпульсу. Незалежна початкова умова ненульова:

$$u_C(0_+) = u_C(0_-) \ne 0.$$

На інтервалі часу $0 \le t \le \tau$ $u_C(t) = u_{Cy} + u_{Cв}(t) = 60 + A \cdot e^{-1667t}$ B.

Постійна інтегрування $A = u_{Cв}(0_+) = u_C(0_+) - u_{Cy} = u_C(0_+) - 60$.

Таким чином, $u_C(t) = 60 + (u_C(0_+) - 60) \cdot e^{-1667t}$ B.

У момент закінчення дії даного імпульсу напруга на конденсаторі досягає величини $u_C(\tau) = 60 + (u_C(0_+) - 60) \cdot e^{-1} = 37{,}93 + 0{,}368 u_C(0_+)$.

Закон зміни напруги на конденсаторі при $\tau \le t \le 2\tau$ (з урахуванням відсутності дії напруги на вході кола)

$$u_C(t) = u_C(\tau) \cdot e^{p(t-\tau)} = (37{,}93 + 0{,}368 u_C(0_+)) \cdot e^{-1667(t-0{,}0006)}\ B.$$

До моменту подачі наступного імпульсу шукана напруга приймає значення $u_C(2\tau) = (37{,}93 + 0{,}368 u_C(0_+)) \cdot e^{-1} = 13{,}95 + 0{,}135 u_C(0_+)$.

Врахуємо, що в колі після проходження достатньо великого числа імпульсів встановлюється так званий *квазіусталений режим*, коли процеси в колі повторюються з періодом імпульсів, що поступають. Таким чином, отримуємо рівняння $u_C(2\tau) = u_C(0_+)$ або $13{,}95 + 0{,}135 u_C(0_+) = u_C(0_+)$,

звідки $u_C(0_+) = \dfrac{13{,}95}{1 - 0{,}135} = 16{,}13$ B.

Остаточно для напруги на конденсаторі отримуємо:

$$u_C(t) = \begin{cases} 60 - 43{,}87 \cdot e^{-1667t}\ B \quad при\ 0 \le t \le \tau = 6 \cdot 10^{-4}\ c, \\ 40{,}11 \cdot e^{-1667(t-0{,}0006)}\ B \quad при\ \tau \le t \le 2\tau = 1{,}2 \cdot 10^{-3}\ c. \end{cases}$$

Струм у вітці з конденсатором

$$i_3(t) = C\frac{du_C}{dt} = \begin{cases} 3{,}655 \cdot e^{-1667t}\ A \quad при\ 0 \le t \le \tau = 6 \cdot 10^{-4}\ c, \\ -3{,}342 \cdot e^{-1667(t-6\cdot 10^{-4})}\ A \quad при\ \tau \le t \le 2\tau. \end{cases}$$

Решта струмів: $i_2(t) = u_C(t)/r_2 = \begin{cases} 2 - 1{,}462 \cdot e^{-1667t}\ A \quad при\ 0 \le t \le \tau = 6 \cdot 10^{-4}\ c, \\ 1{,}337 \cdot e^{-1667(t-6\cdot 10^{-4})}\ A \quad при\ \tau \le t \le 2\tau. \end{cases}$

$$i_1(t) = i_2(t) + i_3(t) = \begin{cases} 2 + 2{,}193 \cdot e^{-1667t}\ A \quad при\ 0 \le t \le \tau = 6 \cdot 10^{-4}\ с, \\ -2{,}006 \cdot e^{-1667(t - 6 \cdot 10^{-4})}\ A \quad при\ \tau \le t \le 2\tau. \end{cases}$$

Графіки струмів див. на рис. 7.82.

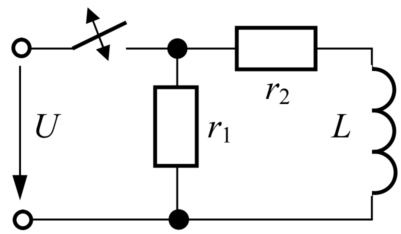

Рис. 7.34

ЗАДАЧА 7.20. У схемі рис. 7.34 ключ працює з періодом $T = 2\tau_2$ (τ_1 і τ_2 – сталі часу кола при замкненому і розімкненому ключі, відповідно). Тривалість увімкнення складає $ТУ = t_У/T = 0{,}6$. Параметри кола: $U = 60\ В$, $r_1 = 20\ Ом$, $r_2 = 40\ Ом$, $L = 0{,}6\ Гн$. Розрахувати струм і напругу індуктивного елементу.

Відповіді: $\tau_1 = 15\ мс$; $\tau_2 = 10\ мс$;

$$i_L(t) = \begin{cases} 1{,}5 - 1{,}035 \cdot e^{-t/\tau_1}\ A \quad при\ 0 \le t \le t_У = 12\ мс, \\ 1{,}035 \cdot e^{-(t-0{,}012)/\tau_2}\ A \quad при\ t_У \le t \le T = 20\ мс; \end{cases}$$

$$u_L(t) = \begin{cases} 41{,}4 \cdot e^{-t/\tau_1}\ B \quad при\ 0 \le t \le 12\ мс, \\ -62{,}09 \cdot e^{-(t-0{,}012)/\tau_2}\ B \quad при\ 12\ мс \le t \le 20\ мс. \end{cases}$$

ЗАДАЧА 7.21. У схемі рис. 7.35,а джерело струму виробляє прямокутні імпульси тривалістю $t_{дж} = \tau$ з періодом $T = 2\tau$ (рис. 7.35,б). Параметри кола: $I_m = 1\ A$, $r = 100\ Ом$, $L = 0{,}1\ Гн$. Розрахувати струми в резисторі і індуктивності.

Відповіді: $\tau = 1\ мс$; $i_L(t) = \begin{cases} 1 - 0{,}731 \cdot e^{-t/\tau}\ A \quad при\ 0 \le t \le t_{дж} = 1\ мс, \\ 0{,}731 \cdot e^{-(t-0{,}001)/\tau}\ A \quad при\ t_{дж} \le t \le T = 2\ мс; \end{cases}$

$$i_r(t) = \begin{cases} 0{,}731 \cdot e^{-t/\tau}\ A \quad при\ 0 \le t \le t_{дж} = 1\ мс, \\ -0{,}731 \cdot e^{-(t-0{,}001)/\tau}\ A \quad при\ t_{дж} \le t \le T = 2\ мс. \end{cases}$$

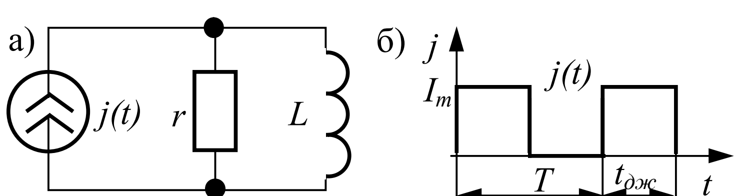

Рис. 7.35

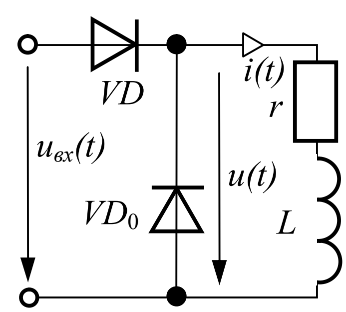

Рис. 7.36

ЗАДАЧА 7.22. Від однонапівперіодного некерованого випрямляча з нульовим діодом (рис. 7.36) живиться обмотка збудження двигуна постійного струму. Вважаючи діоди ідеальними і комутацію діодів миттєвою, розрахувати значення струму збудження *i(t)* в квазіусталеному режимі, якщо вхідна напруга

$$u_{вх}(t) = 220\sqrt{2}\, sin(\omega t)\ B, \quad частота\ мережі\ f = 50\ Гц; \quad r = 5\ Ом, \quad L = 0{,}2\ Гн.$$

Розв'язання

Розрахункова схема установки подана на рис. 7.37,а, періодична послідовність імпульсів $u(t)$ – на рис. 7.37,б, на якому вказані номери n (починаючи з моменту увімкнення навантаження) імпульсів. Період подачі імпульсів $T = f^{-1} = 0{,}02$ c, тривалість дії імпульсу $t_0 = ½T = 0{,}01$ c, тривалість паузи $t_П = ½T = 0{,}01$ c.

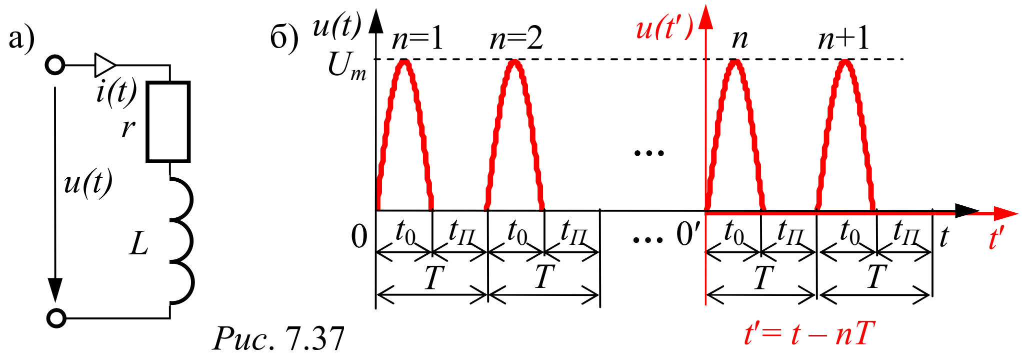

Рис. 7.37

Нижче ми розглянемо декілька способів розрахунку усталеної реакції, але для всіх них необхідно спочатку розрахувати перехідний процес в електричному колі від дії першого імпульсу. Цей розрахунок можна виконати будь-яким методом розрахунку перехідних процесів (класичним методом, операторним методом, за допомогою інтеграла Дюамеля).

Для інтервалу дії першого імпульсу $t(0 \ldots t_0)$ рис. 7.37,б

$$u(t) = U_m sin\omega t, \quad i = I_m sin(\omega t - \varphi) + I_m sin\varphi \cdot e^{-t/\tau},$$ (див. задачі 7.4, 7.5)

де $$I_m = \frac{U_m}{\sqrt{r^2 + (\omega L)^2}} = \frac{220\sqrt{2}}{\sqrt{5^2 + (314 \cdot 0{,}2)^2}} = 4{,}94\ A,$$

$$\varphi = arctg\frac{\omega L}{r} = arctg\frac{62{,}8}{5} = 85{,}45°,$$

стала часу кола $\tau = L/r = 0{,}2/5 = 0{,}04$ c,

відношення $\tau/T = 0{,}04/0{,}02 = 2$ або $\tau = 2T$.

Числовий результат розрахунку $i = 4{,}94 sin(314t - 85{,}45°) + 4{,}92 \cdot e^{-25t}$ A.

У момент $t = t_0 = ½T$ дія імпульсу закінчується, а струм досягає значення

$$i(t_0) = 4{,}94 sin(180° - 85{,}45°) + 4{,}92 \cdot e^{-25 \cdot 0{,}01} = 8{,}75\ A.$$

У момент часу t_0 діод VD рис. 7.36 закривається, а нульовий діод VD_0 відмикається, струм обмотки збудження продовжує текти по колу r-L-VD_0, для якого рівняння стану визначається за другим законом Кірхгофа $ir + L\frac{di}{dt} = 0$. Розв'язання цього рівняння для $t > t_0$

$$i = Ae^{-\frac{t-t_0}{\tau}} = 8{,}75 \cdot e^{-25(t-t_0)} A$$

(постійна інтегрування A визначена на підставі першого закону комутації $i(t_{0-}) = i(t_{0+}) = 8{,}75$ A).

Після закінчення паузи $t = T = 0{,}2$ c, $i(T) = 6{,}81$ A.

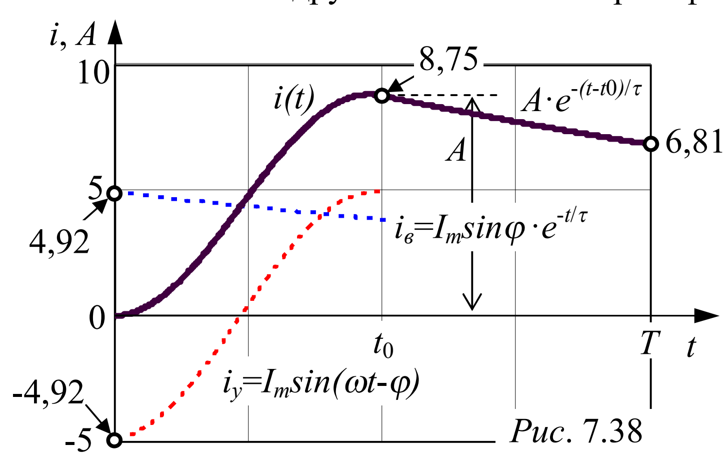

Рис. 7.38

Крива струму в період дії першого імпульсу наведена на рис. 7.38.

1. *Спосіб розрахунку усталеної реакції з урахуванням невизначених початкових умов*.

З аналізу перехідного процесу при дії першого імпульсу напруги, бачимо, що на початок наступного імпульсу (а значить, і кожного з наступних імпульсів) струм кола $i(T)\neq 0$, $i(2T)\neq 0$ і т.д.

Для розрахунку усталеної реакції перенесемо початок відліку часу у початок $(n+1)$-го імпульсу при $n\to\infty$, замінивши t' на t. Початкове значення струму на цьому інтервалі не визначене: $i(0_+)\neq 0$.

Як і при дії першого імпульсу струм перехідного процесу на інтервалі $t(0\,\ldots\,t_0)$ $i = I_m sin(\omega t-\varphi) + A\cdot e^{-t/\tau}$, а при $t = 0_+$ $i = i(0_+)$, тоді

$$i(0_+) = -I_m sin\varphi + A,$$

звідки постійна інтегрування $A = i(0_+) + I_m sin\varphi$, а закон зміни струму в межах дії імпульсу $i = I_m sin(\omega t-\varphi) + [i(0_+) + I_m sin\varphi]\cdot e^{-t/\tau}$.

На момент закінчення імпульсу струм набуває величини

$$i(t_0) = I_m sin(\omega t_0-\varphi) + [i(0_+) + I_m sin\varphi]\cdot e^{-t_0/\tau}.$$

Оскільки при $t = t_0$ струм в індуктивності не може змінитися стрибком, то в період паузи $i(t) = i(t_0)\cdot e^{-\frac{t-t_0}{\tau}}$, а наприкінці періоду $i(T) = i(t_0)\cdot e^{-\frac{T-t_0}{\tau}} = i(0_+)$, таким чином при періодичному процесі $i(T) = i(0_+)$.

У розгорненому вигляді отримуємо вираз, з якого і визначається прийняте раніше невизначеним початкове значення:

$$\left\{I_m\,sin(\omega t_0-\varphi)+[\,i(0)+I_m\,sin\varphi\,]\cdot e^{-\frac{t_0}{\tau}}\right\}\cdot e^{-\frac{T-t_0}{\tau}} = i(0_+),$$

звідки $$i(0_+) = \frac{[\,I_m\,sin(\omega t_0-\varphi)+I_m\,sin\varphi\cdot e^{-t_0/\tau}\,]\cdot e^{-(T-t_0)/\tau}}{1-e^{-T/\tau}}.$$

Для даної задачі

$$i(0_+) = \frac{[\,4{,}94\,sin(180\quad-85{,}45\quad)+4{,}92\cdot e^{-0{,}25}\,]\cdot e^{-0{,}25}}{1-e^{-0{,}5}} = 17{,}32\ A.$$

Шукане періодичне розв'язання має вигляд:

$$i = \left[\begin{array}{l} 4{,}94\,sin(314t-85{,}45\quad)+22{,}24e^{-25t}\ A\ \textit{на інтервалі}\ t(0\ldots t_0), \\ 22{,}24e^{-25(t-t_0)}\ A\ \textit{на інтервалі}\ t(t_0\ldots T). \end{array}\right.$$

Крива струму для одного періоду наведена на рис. 7.39.

2. *Спосіб розрахунку усталеної реакції шляхом накладання реакцій в області дійсної змінної t*. Розрахувавши ПП в електричному колі на інтервалі дії першого імпульсу, розрахуємо методом накладання реакцію на $(n+1)$-му інтервалі. Одночасно врахуємо, що реакції на кожний окремий імпульс однакові, але слідують із запізненням у часі, що в отриманих раніше виразах (для першого імпульсу) призводить до додаткового при t доданку $(-nT)$.

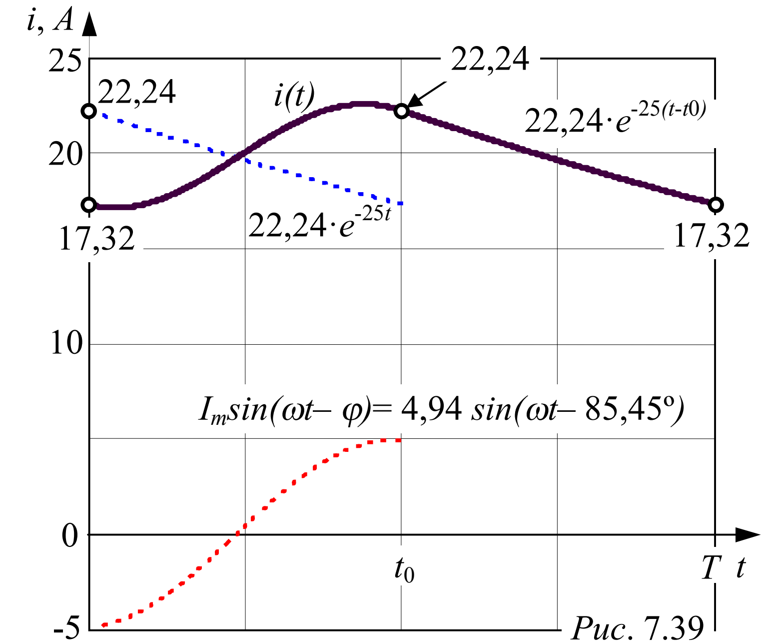

Рис. 7.39

Результат розрахунку ПП в період дії $(n+1)$-го імпульсу $nT \le t \le nT + t_0$

$$i(t) = Ae^{-\frac{t-t_0}{\tau}} + Ae^{-\frac{t-t_0-T}{\tau}} + Ae^{-\frac{t-t_0-2T}{\tau}} + \ldots + Ae^{-\frac{t-t_0-(n-1)T}{\tau}} +$$

$$+ I_m sin(\omega t - \omega nT - \varphi) + I_m sin\varphi \cdot e^{-\frac{t-nT}{\tau}}.$$

В період паузи $(n+1)$-го імпульсу $nT + t_0 \le t \le (n+1)T$

$$i(t) = Ae^{-\frac{t-t_0}{\tau}} + Ae^{-\frac{t-t_0-T}{\tau}} + Ae^{-\frac{t-t_0-2T}{\tau}} + \ldots + Ae^{-\frac{t-t_0-nT}{\tau}}.$$

У наведених виразах з експонентами винесемо спільний множник $Ae^{-\frac{t-t_0}{\tau}}$. Решта доданків утворюють геометричну прогресію із знаменником $q = e^{\frac{T}{\tau}}$.

Часткові суми прогресії $\quad 1 + e^{\frac{T}{\tau}} + e^{\frac{2T}{\tau}} + \ldots + e^{\frac{(n-1)T}{\tau}} = \dfrac{e^{nT/\tau} - 1}{e^{T/\tau} - 1},$

$$1 + e^{\frac{T}{\tau}} + e^{\frac{2T}{\tau}} + \ldots + e^{\frac{(n-1)T}{\tau}} + e^{\frac{nT}{\tau}} = \frac{e^{(nT+1)/\tau} - 1}{e^{T/\tau} - 1}.$$

В результаті в період дії $(n+1)$-го імпульсу $nT \le t \le nT + t_0$

$$i(t) = \frac{e^{nT/\tau} - 1}{e^{T/\tau} - 1} Ae^{-\frac{t-t_0}{\tau}} + I_m sin(\omega t - \omega nT - \varphi) + I_m sin\varphi \cdot e^{-\frac{t-nT}{\tau}}.$$

В період паузи на $(n+1)$-му інтервалі $nT + t_0 \le t \le (n+1)T$

$$i(t) = \frac{e^{(nT+1)/\tau} - 1}{e^{T/\tau} - 1} Ae^{-\frac{t-t_0}{\tau}}.$$

Для практичного виконання розрахунку струму на $(n+1)$-му імпульсі зручно перенести початок відліку часу t' (рис. 7.37,б) у точку початку дії

$(n+1)$-го імпульсу.

Тоді $t = nT + t'$ і $t' = t - nT$, $\quad e^{-\frac{t-t_0}{\tau}} = e^{-\frac{t'-t_0+nT}{\tau}} = e^{-\frac{nT}{\tau}} \cdot e^{-\frac{t'-t_0}{\tau}}$,

$sin(\omega t - \omega nT - \varphi) = sin(\omega t' + \omega nT - \omega nT - \varphi) = sin(\omega t' - \varphi)$.

$$i(t') = \frac{1-e^{-nT/\tau}}{e^{T/\tau}-1} A\, e^{-\frac{t'-t_0}{\tau}} + I_m sin(\omega t' - \varphi) + I_m sin\varphi \cdot e^{-\frac{t'}{\tau}} \quad \text{для} \quad nT \le t \le nT + t_0,$$

$$i(t') = \frac{e^{T/\tau} - e^{-nT/\tau}}{e^{T/\tau}-1} A\, e^{-\frac{t'-t_0}{\tau}} \quad \text{для} \quad nT + t_0 \le t \le (n+1)T.$$

Для розрахунку усталеної реакції необхідно спрямувати $n \to \infty$ і покласти $t' = t$, тобто прийняти початок відліку часу у точці $0'$.

Отримаємо для $0 \le t \le t_0$ $\quad i_y(t) = \dfrac{Ae^{\frac{t_0}{\tau}}}{e^{T/\tau}-1}\, e^{-\frac{t}{\tau}} + I_m sin(\omega t - \varphi) + I_m sin\varphi \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$,

для $t_0 \le t \le T$ $\quad i_y(t) = \dfrac{A}{1-e^{-T/\tau}}\, e^{-\frac{t-t_0}{\tau}}$.

Для даної задачі отримуємо

$$\text{для} \quad 0 \le t \le t_0 \quad i_y(t) = \frac{8{,}75e^{\frac{0{,}01}{0{,}04}}}{e^{\frac{0{,}02}{0{,}04}}-1}\, e^{-\frac{t}{0{,}04}} + 4{,}94 sin(\omega t - \varphi) + 4{,}92 \cdot e^{-\frac{t}{0{,}04}} =$$

$$= 4{,}94 sin(314t - 85{,}45°) + 22{,}24 \cdot e^{-25t}\ A,$$

для $\quad t_0 \le t \le T \quad i_y(t) = 22{,}24 \cdot e^{-25(t-t0)}\ A$,

що збігається з раніше отриманими результатами розрахунку з урахуванням невизначених початкових умов.

Розв'язання задачі операторним методом виконано в задачі 7.57.

7.1.3 Перехідні процеси в колах з двома накопичувачами

ЗАДАЧА 7.23. В схемі рис. 7.40 розрахувати струми перехідного процесу класичним методом. Параметри кола: $U = 100$ *В*, $r = 100$ *Ом*, $L = 0{,}1$ *Гн*, $C = 1{,}6$ *мкФ*.

Побудувати графік струму $i_r(t)$.

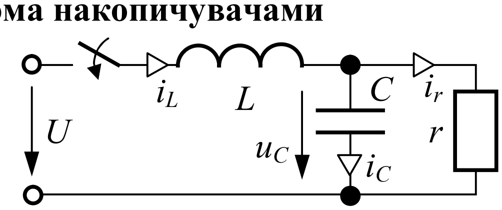

Рис. 7.40

Розв'язання

1. Незалежні початкові умови нульові: $u_C(0_+) = u_C(0_-) = 0$; $\quad i_L(0_+) = i_L(0_-) = 0$.

2. Усталені складові струмів: $\quad i_{Cy} = 0, \quad i_{Ly} = i_{ry} = \dfrac{U}{r} = \dfrac{100}{100} = 1\ A$.

3. Характеристичне рівняння: $\quad \dfrac{1}{pC} + \dfrac{rpL}{r + pL} = 0$ або $LrC \cdot p^2 + L \cdot p + r = 0$.

Корені характеристичного рівняння:

$$p_{1,2} = \frac{-L \pm \sqrt{L^2 - 4r^2 LC}}{2LrC} = \frac{-0{,}1 \pm \sqrt{0{,}1^2 - 4 \cdot 100^2 \cdot 0{,}1 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-6}}}{2 \cdot 0{,}1 \cdot 100 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-6}} = \frac{-0{,}1 \pm 0{,}06}{32 \cdot 10^{-6}}\ c^{-1},$$

$$p_1 = -1250\ c^{-1},\quad p_2 = -5000\ c^{-1}.$$

4. Вільні складові:

$$i_{Lв}(t) = A_1\cdot e^{p_1 t} + A_2\cdot e^{p_2 t},\quad i_{rв}(t) = B_1\cdot e^{p_1 t} + B_2\cdot e^{p_2 t},\quad i_{Cв}(t) = D_1\cdot e^{p_1 t} + D_2\cdot e^{p_2 t}.$$

Початкові умови для вільних складових:

$i_{Lв}(0_+) = A_1 + A_2$, $\quad i_{rв}(0_+) = B_1 + B_2$, $\quad i_{Cв}(0_+) = D_1 + D_2$,

$i_{Lв}'(0_+) = p_1\cdot A_1 + p_2\cdot A_2$; $\quad i_{rв}'(0_+) = p_1\cdot B_1 + p_2\cdot B_2$; $\quad i_{Cв}'(0_+) = p_1\cdot D_1 + p_2\cdot D_2$.

5. Для визначення постійних інтегрування розрахуємо початкові умови. З цією метою складемо систему рівнянь за законами Кірхгофа для нульового моменту часу, причому врахуємо рівняння зв'язку між струмом і напругою на конденсаторі:

$$\begin{cases} i_L(0_+) - i_C(0_+) - i_r(0_+) = 0, \\ L\cdot i_L'(0_+) + u_C(0_+) = U, \\ u_C(0_+) - i_r(0_+)\cdot r = 0, \\ i_C(0_+) = C\cdot u_C'(0_+). \end{cases}$$

Звідси початкові значення струмів:

$i_r(0_+) = u_C(0_+)/r = 0$; $\quad i_C(0_+) = i_L(0_+) - i_r(0_+) = 0$.

Початкові значення похідних: $\quad u_C'(0_+) = i_C(0_+)/C = 0$;

$i_r'(0_+) = u_C'(0_+)/r = 0$; $\quad i_L'(0_+) = (U - u_C(0_+))/L = 100/0{,}1 = 1000\ A/c$;

$i_C'(0_+) = i_L'(0_+) - i_r'(0_+) = 1000\ A/c$.

Початкові умови для вільних складових:

$i_{Lв}(0_+) = i_L(0_+) - i_{Ly}(0_+) = 0 - 1 = -1\ A$, $\quad i_{Lв}'(0_+) = i_L'(0_+) - i_{Ly}'(0_+) = 1000\ A/c$,

$i_{r\,в}(0_+) = i_r(0_+) - i_{r\,y}(0_+) = 0 - 1 = -1\ A$, $\quad i_{r\,в}'(0_+) = i_r'(0_+) - i_{r\,y}'(0_+) = 0$,

$i_{Cв}(0_+) = i_C(0_+) - i_{Cy}(0_+) = 0$, $\quad i_{Cв}'(0_+) = i_C'(0_+) - i_{Cy}'(0_+) = 1000\ A/c$.

Таким чином, отримуємо і розв'язуємо наступні три системи рівнянь:

$$\begin{cases} A_1 + A_2 = -1, \\ p_1\cdot A_1 + p_2\cdot A_2 = 1000; \end{cases}\quad \begin{cases} A_2 = -1 - A_1 = -1 + 1{,}065 = 0{,}065, \\ A_1 = \dfrac{1000 + p_2}{p_1 - p_2} = \dfrac{1000 - 5000}{-1250 + 5000} = -1{,}065. \end{cases}$$

$$\begin{cases} B_1 + B_2 = -1, \\ p_1\cdot B_1 + p_2\cdot B_2 = 0; \end{cases}\quad \begin{cases} B_2 = -1 - B_1 = -1 + 1{,}33 = 0{,}33, \\ B_1 = \dfrac{p_2}{p_1 - p_2} = \dfrac{-5000}{3750} = -1{,}33. \end{cases}$$

$$\begin{cases} D_1 + D_2 = 0, \\ p_1\cdot D_1 + p_2\cdot D_2 = 0; \end{cases}\quad \begin{cases} D_2 = -D_1 = -0{,}266, \\ D_1 = \dfrac{1000}{p_1 - p_2} = \dfrac{1000}{3750} = 0{,}266. \end{cases}$$

6. Записуємо остаточні вирази для струмів відповідно до класичного методу розрахунку:

$i_L(t) = i_{Ly}(t) + i_{Lв}(t) =$

$$= 1 - 1{,}065\cdot e^{-1250t} + 0{,}065\cdot e^{-5000t}\ A,$$

$i_r(t) = i_{ry}(t) + i_{rв}(t) =$

$$= 1 - 1{,}33\cdot e^{-1250t} + 0{,}33\cdot e^{-5000t}\ A,$$

$i_C(t) = i_{Cy}(t) + i_{Cв}(t) =$

$$= 0{,}266\cdot e^{-1250t} - 0{,}266\cdot e^{-5000t}\ A.$$

7. Побудуємо графік струму $i_r(t)$ (рис. 7.41).

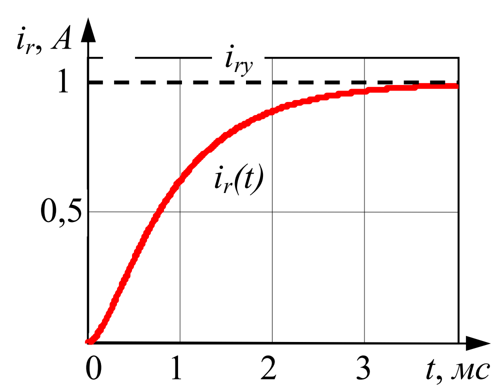

Рис. 7.41

Тривалість перехідного процесу з урахуванням того, що $|p_2| > |p_1|$

$$T_{ПП} = \frac{4}{|p_1|} = \frac{4}{1250}\ с = 3{,}2\ мс.$$

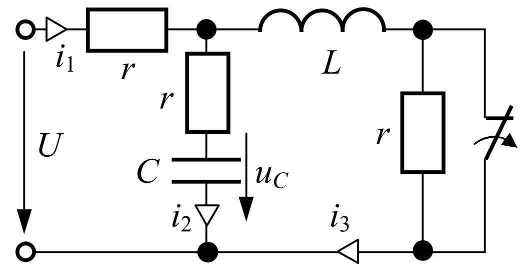

Рис. 7.42

ЗАДАЧА 7.24. У схемі рис. 7.42 розрахувати струми перехідного процесу класичним методом. Параметри кола: $U = 100\ В$, $r = 50\ Ом$, $L = 0{,}2\ Гн$, $C = 40\ мкФ$.

Побудувати графік струму $i_1(t)$.

Розв'язання

1. Незалежні початкові умови:

$$u_C(0_+) = u_C(0_-) = 0; \qquad i_3(0_+) = i_3(0_-) = \frac{U}{r} = \frac{100}{50} = 2\ А.$$

2. Усталені складові струмів: $i_{2у} = 0$, $i_{1у} = i_{3у} = \frac{U}{2r} = \frac{100}{100} = 1\ А$.

3. Характеристичне рівняння:

$$\frac{1}{pC} + r + \frac{r(pL + r)}{r + pL + r} = 0 \quad \text{або} \quad 2LrC\cdot p^2 + (L + 3r^2C)p + 2r = 0,$$

$$\text{або} \quad 2\cdot 0{,}2\cdot 50\cdot 40\cdot 10^{-6}\cdot p^2 + (0{,}2 + 3\cdot 50^2\cdot 40\cdot 10^{-6})p + 2\cdot 50 = 0,$$

$$\text{або} \quad 0{,}8\cdot 10^{-3}\cdot p^2 + 0{,}5\cdot p + 100 = 0.$$

Корені характеристичного рівняння: $p_{1,2} = -312{,}5 \pm j165{,}4\ c^{-1}$.

4. Вільні складові:

$$i_{1в}(t) = A\cdot e^{-bt}\cdot sin(\omega_0 t + \psi_1), \quad i_{2в}(t) = B\cdot e^{-bt}\cdot sin(\omega_0 t + \psi_2), \quad i_{3в}(t) = D\cdot e^{-bt}\cdot sin(\omega_0 t + \psi_3),$$

де коефіцієнт згасання $b = |\mathrm{Re}(p_1)| = 312{,}5\ c^{-1}$;

кутова частота вільних коливань $\omega_0 = \mathrm{Im}(p_1) = 165{,}4\ рад/с^{-1}$.

Початкові умови для вільних складових:

$$i_{1в}(0_+) = A\cdot sin\psi_1, \quad i_{1в}'(0_+) = -b\cdot A\cdot sin\psi_1 + \omega_0\cdot A\cdot cos\psi_1;$$

$$i_{2в}(0_+) = B\cdot sin\psi_2, \quad i_{2в}'(0_+) = -b\cdot B\cdot sin\psi_2 + \omega_0\cdot B\cdot cos\psi_2;$$

$$i_{3в}(0_+) = D\cdot sin\psi_3, \quad i_{3в}'(0_+) = -b\cdot D\cdot sin\psi_3 + \omega_0\cdot D\cdot cos\psi_3.$$

5. Для визначення постійних інтегрування розрахуємо початкові умови. З цією метою складемо систему рівнянь за законами Кірхгофа для нульового моменту часу, причому врахуємо рівняння зв'язку між струмом та напругою на конденсаторі:

$$\begin{cases} i_1(0_+) - i_2(0_+) - i_3(0_+) = 0, \\ r\cdot i_1(0_+) + r\cdot i_2(0_+) + u_C(0_+) = U, \\ r\cdot i_1(0_+) + L\cdot i_3'(0_+) + r\cdot i_3(0_+) = U, \\ i_2(0_+) = C\cdot u_C'(0_+). \end{cases}$$

Звідси початкові значення струмів: $i_1(0_+) = i_2(0_+) + 2$,

$$i_2(0_+) = \frac{U - u_C(0_+) - 2r}{2r} = \frac{100 - 0 - 2\cdot 50}{2\cdot 50} = 0; \quad i_1(0_+) = 2\ А.$$

Початкові значення похідних: $u_C'(0_+) = i_2(0_+)/C = 0$;

$$i_3'(0_+) = \frac{U - r\cdot(i_1(0_+) + i_3(0_+))}{L} = \frac{100 - 50\cdot(2 + 2)}{0{,}2} = -500\ А/с;$$

$$i_1'(0_+) = -i_2'(0_+) = i_3'(0_+)/2 = -250\ А/с.$$

Початкові умови для вільних складових:

$i_{1в}(0_+) = i_1(0_+) - i_{1y}(0_+) = 2 - 1 = 1\ A,$ $\quad i_{1в}'(0_+) = i_1'(0_+) - i_{1y}'(0_+) = -250\ A/c,$

$i_{2в}(0_+) = i_2(0_+) - i_{2y}(0_+) = 0,$ $\quad i_{2в}'(0_+) = i_2'(0_+) - i_{2y}'(0_+) = 250\ A/c,$

$i_{3в}(0_+) = i_3(0_+) - i_{3y}(0_+) = 2 - 1 = 1\ A,$ $\quad i_{3в}'(0_+) = i_3'(0_+) - i_{3y}'(0_+) = -500\ A/c.$

Таким чином, отримуємо і розв'язуємо наступні три системи рівнянь:

$$\begin{cases} A\cdot sin\psi_1 = 1, \\ -b\cdot A\cdot sin\psi_1 + \omega_0\cdot A\cdot cos\psi_1 = -250; \end{cases}$$

$$A\cdot cos\psi_1 = \frac{-250 + b\cdot Asin\psi_1}{\omega_0} = \frac{-250 + 312{,}5}{165{,}4} = 0{,}3779,$$

$$A = \sqrt{\left(Asin\psi_1\right)^2 + \left(Acos\psi_1\right)^2} = \sqrt{1^2 + 0{,}3779^2} = 1{,}069,$$

$$tg\psi_1 = \frac{Asin\psi_1}{Acos\psi_1} = \frac{1}{0{,}3779} = 2{,}646, \quad \psi_1 = 69{,}3°.$$

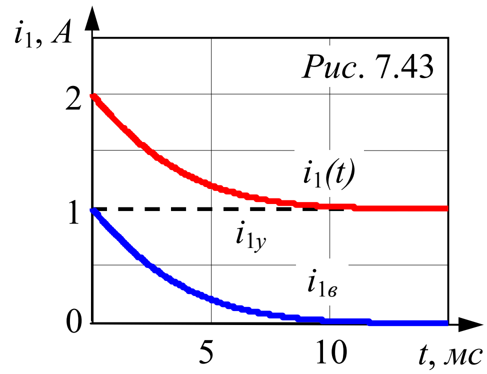

Рис. 7.43

$$\begin{cases} B\cdot sin\psi_2 = 0, \\ -b\cdot B\cdot sin\psi_2 + \omega_0\cdot B\cdot cos\psi_2 = 250; \end{cases} \quad B = 1{,}511, \quad \psi_2 = 0°.$$

$$\begin{cases} D\cdot sin\psi_3 = 1, \\ -b\cdot D\cdot sin\psi_3 + \omega_0\cdot D\cdot cos\psi_3 = -500; \end{cases}$$

$$D\cdot cos\psi_3 = \frac{-500 + 312{,}5}{165{,}4} = -1{,}134,$$

$$D = \sqrt{1^2 + 1{,}134^2} = 1{,}512, \quad tg\psi_3 = \frac{1}{-1{,}134} = -0{,}882,$$

але $cos\psi_3 < 0$, тому $\psi_3 = 180° + arctg(-0{,}882) = 138{,}6°$.

6. Записуємо остаточні вирази для струмів:

$$i_1(t) = i_{1y}(t) + i_{1в}(t) = 1 + 1{,}069\cdot e^{-312{,}5t}\cdot sin(165{,}4t + 69{,}3°)\ A,$$

$$i_2(t) = i_{2y}(t) + i_{2в}(t) = 1{,}511\cdot e^{-312{,}5t}\cdot sin(165{,}4t)\ A,$$

$$i_3(t) = i_{3y}(t) + i_{3в}(t) = 1 + 1{,}512\cdot e^{-312{,}5t}\cdot sin(165{,}4t + 138{,}6°)\ A.$$

7. Побудуємо графік струму $i_1(t)$ (рис. 7.43). Тривалість перехідного процесу

$$T_{ПП} = \frac{4}{b} = \frac{4}{312{,}5}\ c = 12{,}8\ мс.$$

Період вільних коливань $T_0 = \dfrac{2\pi}{\omega_0} = \dfrac{2\pi}{165{,}4} = 0{,}038\ c = 38\ мс.$

ЗАДАЧА 7.25. У схемі рис. 7.44 розрахувати струми перехідного процесу класичним методом. Параметри кола: $U = 200\ В$, $r_1 = r_2 = 50\ Ом$, $L = 0{,}1\ Гн$, $C = 40\ мкФ$.

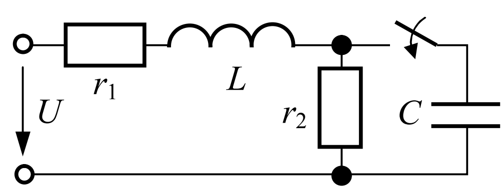

Рис. 7.44

Відповіді: $i_L(t) = 2 + 2\cdot e^{-500t} sin(500t)\ A$;
$i_{r2}(t) = 2 + 2\cdot e^{-500t} sin(500t - 90°)\ A$; $\quad i_C(t) = 2\sqrt{2}\cdot e^{-500t} sin(500t + 45°)\ A$.

ЗАДАЧА 7.26. Визначити напругу на ємності та струм у колі рис. 7.45 після розмикання рубильника, якщо $U = 100\ В$, $r = 200\ Ом$, $L = 1\ Гн$, $C = 100\ мкФ$.

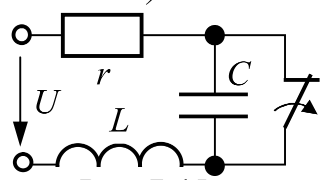

Рис. 7.45

Відповіді: $i(t) = 0{,}5e^{-100t} + 50t\cdot e^{-100t}$ *A*; $u_C(t) = 100 - 100e^{-100t} - 5000t\cdot e^{-100t}$ *B*.

ЗАДАЧА 7.27. Визначити струми перехідного процесу в колі рис. 7.46, якщо
$E = 100$ *В*, $r = 10$ *Ом*, $L = 29{,}4$ *мГн*, $C = 100$ *мкФ*.

Відповіді: $i_1 = 10 - 19{,}44\cdot e^{-500t} sin(300t + 31°)$ *A*;

$i_2 = -11{,}33\cdot e^{-500t} sin(300t)$ *A*;

$i_3 = 10 - 11{,}33\cdot e^{-500t} sin(300t + 62°)$ *A*.

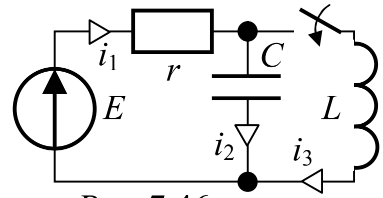

Рис. 7.46

ЗАДАЧА 7.28. У схемі рис. 7.47 визначити струм в індуктивності і напругу на ємності, якщо $E = 300$ *В*, $r_1 = r_2 = 25$ *Ом*,
$L = 20$ *мГн*, $C = 100$ *мкФ*.

Відповіді: $i_L(t) = 12 + 11{,}06e^{-200t}\cdot sin(678t - 32{,}86°)$ *A*,

$u_C(t) = 155{,}8e^{-200t}\cdot sin(678t + 74{,}27°)$ *B*.

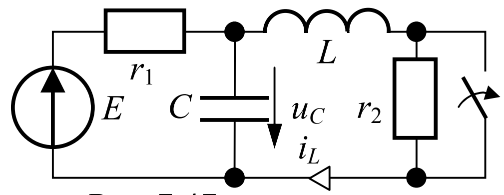

Рис. 7.47

ЗАДАЧА 7.29. Визначити струм ємності (рис. 7.48), якщо $e(t) = 400 sin(314t - 90°)$ *В*, $r_2 = 50$ *Ом*, $r_3 = 25$ *Ом*, $L = 0{,}25$ *Гн*, $C = 400$ *мкФ*.

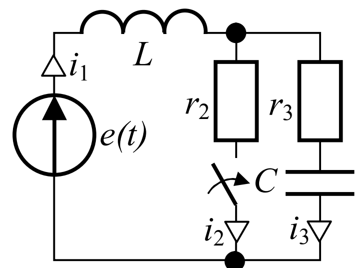

Рис. 7.48

Розв'язання

1. Незалежні початкові умови визначимо, розрахувавши струм в індуктивності і напругу на ємності до комутації символічним методом.

$$\underline{E}_m = 400\cdot e^{-j90°}\ B,$$

$$\underline{Z}_{вх} = j\omega L + r_3 - j\frac{1}{\omega C} = j314\cdot 0{,}25 + 25 - j\frac{10^6}{314\cdot 400} = 25 + j70{,}54 = 74{,}84e^{j70{,}49°}\ Ом,$$

$$\underline{I}_{1m} = \frac{\underline{E}_m}{\underline{Z}_{вх}} = \frac{400\cdot e^{-j90}}{74{,}84\cdot e^{j70{,}49}} = 5{,}34\cdot e^{-j160{,}49°}\ A,$$

$$\underline{U}_{Cm} = -j\frac{1}{\omega C}\underline{I}_{1m} = 7{,}96\cdot e^{-j90°}\cdot 5{,}34\cdot e^{-j160{,}49°} = 42{,}51\cdot e^{-j250{,}49°}\ B.$$

Миттєві значення: $i_1(t_-) = 5{,}34\cdot sin(314t - 160{,}49°)$ *A*,

$u_C(t_-) = 42{,}51\cdot sin(314t - 250{,}49°)$ *B*.

При $t = 0_-$ $i_1(0_-) = 5{,}34\cdot sin(-160{,}49°) = -1{,}78$ *A*,

$u_C(0_-) = 42{,}51\cdot sin(-250{,}49°) = 40{,}1$ *B*.

Згідно з законами комутації

$$i_1(0_+) = i_1(0_-) = -1{,}78\ A, \qquad u_C(0_+) = u_C(0_-) = 40{,}1\ B.$$

2. Схему після комутації опишемо системою лінійних диференціальних рівнянь
$$\begin{cases} i_1 - i_2 - i_3 = 0, \\ L\dfrac{di_1}{dt} + r_2 i_2 = e(t), \\ r_3 i_3 + u_C - r_2 i_2 = 0, \qquad \text{де} \quad u_C(t) = \dfrac{1}{C}\int i_3 dt\,. \end{cases}$$

3. Розрахуємо усталений режим

$\underline{E}_m = 100 \cdot e^{-j90°}$ B,

$$\underline{Z} = j\omega L + \frac{r_2 \cdot \left(r_3 - j\dfrac{1}{\omega C}\right)}{r_2 + r_3 - j\dfrac{1}{\omega C}} = j78{,}5 + \frac{50 \cdot (25 - j7{,}96)}{50 + 25 - j7{,}96} = 76{,}91 \cdot e^{j77{,}2°} \ Ом,$$

$$\underline{I}_{1ym} = \frac{\underline{E}_m}{\underline{Z}} = \frac{400 \cdot e^{-j90}}{76{,}91 \cdot e^{j77{,}2}} = 5{,}2 \cdot e^{-j167{,}2°} \ A,$$

$$\underline{I}_{2ym} = \underline{I}_{1ym} \cdot \frac{r_3 - j\dfrac{1}{\omega C}}{r_2 + r_3 - j\dfrac{1}{\omega C}} = 5{,}2 \cdot e^{-j167{,}2°} \cdot \frac{26{,}24 \cdot e^{-j17{,}66}}{75{,}42 \cdot e^{-j6{,}06}} = 1{,}81 \cdot e^{-j178{,}8°} \ A,$$

$$\underline{I}_{3ym} = \underline{I}_{1ym} - \underline{I}_{2ym} = -5{,}07 - j1{,}15 + 1{,}810 + j0{,}038 = -3{,}26 - j1{,}112 = 3{,}44e^{-j161{,}2°} \ A,$$

$$\underline{U}_{Cym} = -j\frac{1}{\omega C}\underline{I}_{3ym} = 7{,}96 \cdot e^{-j90°} \cdot 3{,}44e^{-j161{,}2°} = 27{,}38 \cdot e^{-j251{,}2°} \ B.$$

Миттєві значення усталених складових:

$i_{1y}(t) = 5{,}2 \cdot sin(314t - 167{,}2°)\ A$, $\quad i_{2y}(t) = 1{,}81 \cdot sin(314t - 178{,}8°)\ A$,

$i_{3y}(t) = 3{,}44 \cdot sin(314t - 161{,}2°)\ A$, $\quad u_{Cy}(t) = 27{,}38 \cdot sin(314t - 251{,}2°)\ B$.

4. Вільний режим.

Складемо характеристичне рівняння способом вхідного опору відносно вітки з ємністю:

$$\frac{1}{pC} + r_3 + \frac{r_2 \cdot pL}{r_2 + pL} = 0 \quad \text{або} \quad LC(r_2 + r_3) \cdot p^2 + (L + r_2 r_3 C)p + r_2 = 0,$$

$$\text{або} \quad 0{,}25 \cdot 400 \cdot 10^{-6} \cdot (50+25) \cdot p^2 + (0{,}25 + 50 \cdot 25 \cdot 400 \cdot 10^{-6})p + 50 = 0,$$

$$7{,}5 \cdot 10^{-3} \cdot p^2 + 0{,}75 \cdot p + 50 = 0.$$

Корені характеристичного рівняння: $p_{1,2} = -50 \pm j64{,}55\ c^{-1}$.

Вільна складова струму $\quad i_{3в}(t) = A_3 \cdot e^{-50t} \cdot sin(64{,}55t + \psi_3)$.

Постійні інтегрування визначимо при $t = 0_+$: $i_{3в}(0_+) = A_3 \cdot sin(\psi_3)$.

Оскільки постійних інтегрування дві, то отримаємо додаткове рівняння шляхом диференціювання вільної складової і запишемо його при $t = 0_+$:

$$\frac{di_{3в}(0_+)}{dt} = -50A_3 \cdot sin(\psi_3) + 64{,}55A_3 \cdot cos(\psi_3).$$

Система диференціальних рівнянь при $t = 0_+$ для вільних складових:

$$\begin{cases} i_{1в}(0_+) = i_{2в}(0_+) + i_{3в}(0_+), \\ Li_{1в}'(0_+) + r_2 i_{2в} = 0, \\ r_3 i_{3в}(0_+) + u_{Cв}(0_+) - r_2 i_{2в}(0_+) = 0, \end{cases}$$

де $\quad i_{1в}(0_+) = i_1(0_+) - i_{1y}(0_+) = -1{,}78 - 5{,}2sin(-167{,}2°) = -0{,}63\ A$,

$u_{Cв}(0_+) = u_C(0_+) - u_{Cy}(0_+) = 40{,}1 - 27{,}38sin(-251{,}2°) = 14{,}2\ B$.

Далі $\quad i_{2в}(0_+) = i_{1в}(0_+) - i_{3в}(0_+) = -0{,}63 - i_{3в}(0_+)$;

$25i_{3в}(0_+) + 14{,}2 - 50 \cdot (-0{,}63 - i_{3в}(0_+)) = 0$,

$$i_{3в}(0_+) = \frac{-14{,}2 - 50 \cdot 0{,}63}{25 + 50} = -0{,}61\ A, \quad i_{2cв}(0_+) = -0{,}63 + 0{,}61 = -0{,}02\ A.$$

$$i_{1в}'(0_+) = \frac{-r_2 i_{2в}(0_+)}{L} = \frac{-50\cdot(-0{,}02)}{0{,}25} = 4\ А/с, \quad i_{2в}'(0_+) = i_{1в}'(0_+) - i_{3в}'(0_+);$$

$$r_3 i_{3в}'(0_+) + \frac{1}{C} i_{3в}(0_+) - r_2 i_{1в}(0_+) + r_2 i_{3в}(0_+) = 0,$$

$$i_{3в}'(0_+) = \frac{r_2 i'_{1в}(0_+) - \frac{1}{C} i_{3в}(0_+)}{r_2 + r_3} = \frac{50\cdot 4 + \frac{0{,}61}{400\cdot 10^{-6}}}{75} = 23\ А/с.$$

Розв'язуємо систему рівнянь

$$\begin{cases} A_3\cdot sin(\psi_3) = -\,0{,}61, \\ -\,50A_3\cdot sin(\psi_3) + 64{,}55A_3\cdot\cos(\psi_3) = 23. \end{cases}$$

$$A_3\cdot\cos(\psi_3) = \frac{23 + 50\cdot(-0{,}61)}{64{,}55} = -\,0{,}12; \qquad tg\psi_3 = \frac{A_3\, sin\psi_3}{A_3\, cos\psi_3} = \frac{-0{,}61}{-0{,}12} = 5{,}08;$$

$\psi_3 = arctg5{,}08 = 78{,}87°$, $\quad sin(\psi_3) = 0{,}98$, $\quad A_3 = -\,0{,}61/0{,}98 = -\,0{,}62$.

$i_{3в}(t) = -\,0{,}62e^{-50t}\cdot sin(64{,}55t + 78{,}87°)\ А$.

5. Повний струм

$i_3(t) = 3{,}44sin(314t - 161{,}2°) - 0{,}62e^{-50t}\cdot sin(64{,}55t + 78{,}87°)\ А$.

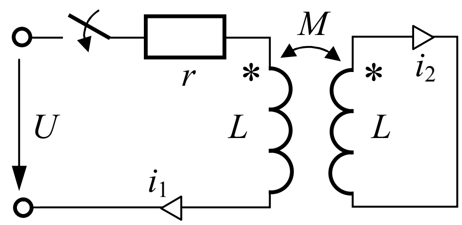

Рис. 7.49

ЗАДАЧА 7.30. Розрахувати струми перехідного процесу в схемі рис. 7.49. Числові значення: $U = 50\ В$, $r = 10\ Ом$, $L = 0{,}1\ Гн$, $M = 0{,}05\ Гн$.

Розв'язання

1. Незалежні початкові умови нульові:

$$i_1(0_+) = i_2(0_+) = 0.$$

2. Усталені струми: $i_{1у} = \frac{U}{r} = \frac{50}{10} = 5\ А$, $\quad i_{2у} = 0$.

3. Система рівнянь за законами Кірхгофа для післякомутаційного режиму кола:

$$\begin{cases} r\cdot i_1 + L\frac{di_1}{dt} - M\frac{di_2}{dt} = U, \\ -M\frac{di_1}{dt} + L\frac{di_2}{dt} = 0. \end{cases}$$

Склавши алгебризовану систему рівнянь і прирівнявши її визначник до нуля, отримаємо характеристичне рівняння:

$$\Delta(p) = \begin{vmatrix} r + pL & -pM \\ -pM & pL \end{vmatrix} = rpL + p^2L^2 - p^2M^2 = 0.$$

Корені рівняння: $p_1 = 0$, $p_2 = -\frac{rL}{L^2 - M^2} = -\frac{10\cdot 0{,}1}{0{,}1^2 - 0{,}05^2} = -\,133{,}3\ с^{-1}$.

4. Вільні складові струмів мають вигляд:

$$i_{1в}(t) = A_1\cdot e^{p_1 t} + A_2\cdot e^{p_2 t} = A_1 + A_2\cdot e^{p_2 t};$$

$$i_{2в}(t) = B_1\cdot e^{p_1 t} + B_2\cdot e^{p_2 t} = B_1 + B_2\cdot e^{p_2 t}.$$

5. Розрахуємо залежні початкові умови (значення похідних від струмів в початковий момент часу); застосуємо складену в п.3 систему рівнянь для моменту часу $t = 0_+$:

$$\begin{cases} Li_1'(0_+) - Mi_2'(0_+) = U - r\cdot i_1(0_+) = 50, \\ -Mi_1'(0_+) + Li_2'(0_+) = 0; \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} 0{,}1i_1'(0_+) - 0{,}05i_2'(0_+) = 50, \\ -0{,}05i_2'(0) + 0{,}1i_2'(0) = 0. \end{cases}$$

Розв’язання системи: $i_1'(0_+) = 667\ А/с$, $i_2'(0_+) = 333\ А/с$.

6. Початкові значення вільних струмів та їх похідних:

- з одного боку, $i_{1в}(0_+) = A_1 + A_2$, $i_{1в}'(0_+) = A_2\cdot p_2$;
  $i_{2в}(0_+) = B_1 + B_2$, $i_{2в}'(0_+) = B_2\cdot p_2$;
- з іншого боку, $i_{1в}(0_+) = i_1(0_+) - i_{1у}(0_+) = 0 - 5 = -5\ А$,
  $i_{1в}'(0_+) = i_1'(0_+) - i_{1у}'(0_+) = 667\ А/с$,
  $i_{2в}(0_+) = i_2(0_+) - i_{2у}(0_+) = 0$,
  $i_{2в}'(0_+) = i_2'(0_+) - i_{2у}'(0_+) = 333\ А/с$.

Отримуємо і розв’язуємо системи рівнянь:

$A_1 + A_2 = -5$, $A_2\cdot p_2 = 667$; $A_2 = 667/(-133{,}3) = -5$, $A_1 = 0$;

$B_1 + B_2 = 0$, $B_2\cdot p_2 = 333$; $B_2 = 333/(-133{,}3) = -2{,}5$, $B_1 = -B_2 = 2{,}5$.

7. Остаточно записуємо:

$$i_1(t) = i_{1у} + i_{1в} = 5 - 5\cdot e^{-133{,}3t}\ А, \quad i_2(t) = 2{,}5 - 2{,}5\cdot e^{-133{,}3t}\ А.$$

Той факт, що $i_2(\infty) \neq 0$, пояснюється тим, що резистивний опір вторинного контура $r_2 = 0$, що означає: вторинний контур виготовлений з надпровідника.

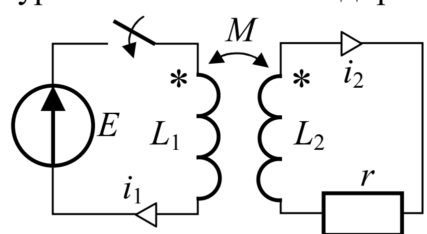

Рис. 7.50

ЗАДАЧА 7.31. Розрахувати струми перехідного процесу в схемі рис. 7.50. Числові значення:

$E = 10\ В$, $r = 1\ Ом$, $L_1 = 0{,}1\ Гн$,
$L_2 = 0{,}05\ Гн$, $M = 0{,}05\ Гн$.

Розв’язання

1. Незалежні початкові умови нульові: $i_1(0_+) = i_2(0_+) = 0$.
2. Усталені струми: $i_{1у} = E/0 = \infty$, $i_{2у} = 0$.
3. Система рівнянь за законами Кірхгофа для післякомутаційного стану кола:

$$\begin{cases} L_1\dfrac{di_1}{dt} - M\dfrac{di_2}{dt} = E, \\ -M\dfrac{di_1}{dt} + r\cdot i_2 + L_2\dfrac{di_2}{dt} = 0. \end{cases}$$

Склавши алгебризовану систему рівнянь і прирівнявши її визначник до нуля, отримаємо характеристичне рівняння:

$$\Delta(p) = \begin{vmatrix} pL_1 & -pM \\ -pM & r + pL_2 \end{vmatrix} = p^2L_1L_2 + pL_1r - p^2M^2 = 0.$$

Корені рівняння: $p_1 = 0$, $p_2 = -\dfrac{rL_1}{L_1L_2 - M^2} = -\dfrac{1\cdot 0{,}1}{0{,}1\cdot 0{,}05 - 0{,}05^2} = -40\ с^{-1}$.

4. Вільні складові струмів: $i_{1в}(t) = A_1 + A_2\cdot e^{p_2t}$; $i_{2в}(t) = B_1 + B_2\cdot e^{p_2t}$.

5. Розрахуємо залежні початкові умови (значення похідних від струмів в початковий момент часу); застосуємо складену в п.3 систему рівнянь для мо

менту часу $t = 0_+$:

$$\begin{cases} L_1 i_1'(0_+) - M i_2'(0_+) = E = 10, \\ -M i_1'(0_+) + L_2 i_2'(0_+) = 0; \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} 0{,}1 i_1'(0_+) - 0{,}05 i_2'(0_+) = 10, \\ -0{,}05 i_2'(0_+) + 0{,}05 i_2'(0_+) = 0. \end{cases}$$

Розв'язок системи: $i_1'(0_+) = 200\ A/c$, $i_2'(0_+) = 200\ A/c$.

6. Початкові значення вільних струмів та їх похідних:

- з одного боку, $i_{1в}(0_+) = A_1 + A_2$, $i_{1в}'(0_+) = A_2 \cdot p_2$;

  $i_{2в}(0_+) = B_1 + B_2$, $i_{2в}'(0_+) = B_2 \cdot p_2$;
- з іншого боку, $i_{1в}(0_+) = i_1(0_+) - i_{1у}(0_+) = -\infty$,

  $i_{1в}'(0_+) = i_1'(0_+) - i_{1у}'(0_+) = 200\ A/c$,

  $i_{2в}(0_+) = i_2(0_+) - i_{2у}(0_+) = 0$,

  $i_{2в}'(0_+) = i_2'(0_+) - i_{2у}'(0_+) = 200\ A/c$.

Першу систему рівнянь: $A_1 + A_2 = -\infty$, $A_1 \cdot p_1 + A_2 \cdot p_2 = 200$ розв'язати не вдасться, тому розв'яжемо другу систему рівнянь:

$$B_1 + B_2 = 0, \quad B_2 \cdot p_2 = 200; \qquad B_2 = 200/(-40) = -5, \quad B_1 = -B_2 = 5.$$

7. Таким чином, вторинний струм: $i_2(t) = 5 - 5 \cdot e^{-40t}\ A$.

Первинний струм отримаємо з першого рівняння системи, яка складена за законами Кірхгофа:

$$\frac{di_1}{dt} = \frac{E + M\dfrac{di_2}{dt}}{L_1} = \frac{10 + 0{,}05 \cdot (-5) \cdot (-40) \cdot \mathrm{e}^{-40\mathrm{t}}}{0{,}1} = 100 + 100 \cdot e^{-40t}\ A/c;$$

$$i_1(t) = \int_0^t \frac{di_1}{dt} dt = \int_0^t (100 + 100e^{-40t})dt = 100t - 2{,}5 \cdot e^{-40t} + 2{,}5\ A.$$

Незвичний вираз для первинного струму пояснюється тим, що резистивний опір первинного контура $r_1 = 0$. Тому тут $(100t + 2{,}5)$ є не усталеною складовою, а сумою усталеної складової й однієї з двох частин вільної складової. У вторинного ж струму $5 = 5 \cdot e^{-0t}$ є не усталеною складовою, а також однією з двох частин вільної складової. Вільна складова вторинного струму не зменшується до нуля, оскільки первинний струм зростає до нескінченності. Безумовно, дана ситуація на практиці може виникнути лише приблизно і протягом деякого невеликого проміжку часу.

ЗАДАЧА 7.32. Розрахувати струми перехідного процесу в схемі рис. 7.51 з наступними числовими даними:

$U = 100\ В$, $r_1 = r_2 = 50\ Ом$, $L_1 = 0{,}1\ Гн$, $L_3 = 0{,}2\ Гн$, $M = 0{,}05\ Гн$.

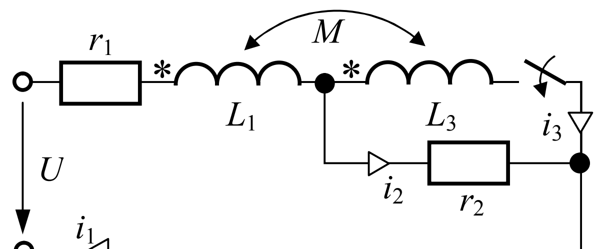

Рис. 7.51

Розв'язання

1. Незалежні початкові умови:

$$i_1(0_+) = i_1(0_-) = \frac{U}{r_1 + r_2} = \frac{100}{50 + 50} = 1\ A,$$

$$i_3(0_+) = i_3(0_-) = 0.$$

2. Усталені складові струмів: $i_{2у} = 0$, $i_{1у} = i_{3у} = \dfrac{U}{r_1} = \dfrac{100}{50} = 2\ A$.

3. Система рівнянь за законами Кірхгофа для післякомутаційного стану кола:

$$\begin{cases} i_1 - i_2 - i_3 = 0, \\ r_1 \cdot i_1 + L_1 i_1' + M i_3' + L_3 i_3' + M i_1' = U, \\ r_1 \cdot i_1 + L_1 i_1' + M i_3' + r_2 \cdot i_2 = U. \end{cases}$$

4. Характеристичне рівняння, складене на підставі рівнянь за законами Кірхгофа:

$$\Delta(p) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ r_1 + p(L_1 + M) & 0 & p(L_3 + M) \\ r_1 + pL_1 & r_2 & pM \end{vmatrix} = 0,$$

$$p^2(L_1 L_3 - M^2) + p(r_1 L_3 + r_2 L_1 + r_2 L_3 + 2r_2 M) + r_1 r_2 = 0,$$

$$p^2(0{,}1 \cdot 0{,}2 - 0{,}05^2) + p(50 \cdot 0{,}2 + 50 \cdot 0{,}1 + 50 \cdot 0{,}2 + 2 \cdot 50 \cdot 0{,}05) + 50 \cdot 50 = 0,$$

$$p^2 \cdot 0{,}0175 + p \cdot 30 + 2500 = 0,$$

$$p_{1,2} = -857{,}1 \pm 769{,}3\ c^{-1}; \quad p_1 = -87{,}8\ c^{-1}; \quad p_2 = -1626{,}4\ c^{-1}.$$

5. Вільні складові струмів:

$$i_{1в}(t) = A_1 \cdot e^{p_1 t} + A_2 \cdot e^{p_2 t}; \quad i_{2в}(t) = B_1 \cdot e^{p_1 t} + B_2 \cdot e^{p_2 t}; \quad i_{3в}(t) = D_1 \cdot e^{p_1 t} + D_2 \cdot e^{p_2 t}.$$

Початкові значення вільних складових та їх похідних:

$i_{1в}(0_+) = A_1 + A_2$; $\quad i_{2в}(0_+) = B_1 + B_2$; $\quad i_{3в}(0_+) = D_1 + D_2$;

$i_{1в}'(0_+) = A_1 p_1 + A_2 p_2$; $\quad i_{2в}'(0_+) = B_1 p_1 + B_2 p_2$; $\quad i_{3в}'(0_+) = D_1 p_1 + D_2 p_2$.

6. Початкові умови отримаємо з раніше складеної системи рівнянь для нульового моменту часу: $\quad i_2(0_+) = i_1(0_+) - i_3(0_+) = 1\ A$,

$i_1'(0_+) \cdot (L_1 + M) + i_3'(0_+) \cdot (L_3 + M) = U - r_1 \cdot i_1(0_+)$, $\quad 0{,}15 i_1'(0_+) + 0{,}25 i_3'(0_+) = 50$,

$L_1 i_1'(0_+) + M i_3'(0_+) = U - r_1 \cdot i_1(0_+) - r_2 \cdot i_2(0_+)$, $\quad 0{,}1 i_1'(0_+) + 0{,}05 i_3'(0_+) = 100 - 50 - 50 = 0$.

Розв’язання системи рівнянь:

$i_1'(0_+) = -142{,}9\ A/c$, $\quad i_3'(0_+) = 285{,}7\ A/c$, $\quad i_2'(0_+) = i_1'(0_+) - i_3'(0_+) = -428{,}6\ A/c$.

Початкові значення вільних складових та їх похідних:

$i_{1в}(0_+) = i_1(0_+) - i_{1у}(0_+) = 1 - 2 = -1\ A$, $\quad i_{1в}'(0_+) = i_1'(0_+) = -142{,}9\ A/c$,

$i_{2в}(0_+) = i_2(0_+) - i_{2у}(0_+) = 1 - 0 = 1\ A$, $\quad i_{2в}'(0_+) = i_2'(0_+) = -428{,}6\ A/c$,

$i_{3в}(0_+) = i_3(0_+) - i_{3у}(0_+) = 0 - 2 = -2\ A$, $\quad i_{3в}'(0_+) = i_3'(0_+) = 285{,}7\ A/c$.

7. Отримуємо і розв’язуємо наступні системи рівнянь:

$A_1 + A_2 = -1$, $\quad A_1 p_1 + A_2 p_2 = -142{,}9 \quad \Rightarrow \quad A_1 = -1{,}150$, $\quad A_2 = 0{,}150$;

$B_1 + B_2 = 1$, $\quad B_1 p_1 + B_2 p_2 = -428{,}6 \quad \Rightarrow \quad B_1 = 0{,}778$, $\quad B_2 = 0{,}222$;

$D_1 + D_2 = -2$, $\quad D_1 p_1 + D_2 p_2 = 285{,}7 \quad \Rightarrow \quad D_1 = -1{,}928$, $\quad D_2 = -0{,}072$.

8. Остаточно записуємо:

$$i_1(t) = i_{1у}(t) + i_{1в}(t) = 2 - 1{,}150 \cdot e^{-87{,}8t} + 0{,}150 \cdot e^{-1626{,}4 \cdot t}\ A,$$

$$i_2(t) = i_{2у}(t) + i_{2в}(t) = 0{,}778 \cdot e^{-87{,}8t} + 0{,}222 \cdot e^{-1626{,}4 \cdot t}\ A,$$

$$i_3(t) = i_{3у}(t) + i_{3в}(t) = 2 - 1{,}928 \cdot e^{-87{,}8t} - 0{,}072 \cdot e^{-1626{,}4 \cdot t}\ A.$$

ЗАДАЧА 7.33. Розрахувати потокозчеплення і струми в колі рис. 7.52, якщо $U = 180\ В$, $r_1 = r_3 = 10\ Ом$, $r_2 = 40\ Ом$, $L_1 = 1\ Гн$, $L_2 = 4\ Гн$, $k_{зв} = 1$.

Відповіді: $\Psi_1(t) = -18 + 24 \cdot e^{-2t}\ Вб$, $\Psi_2(t) = 36 - 48 \cdot e^{-2t}\ Вб$,

$i_1(t) = 18 - 4{,}8 \cdot e^{-2t}\ A$, $\quad i_2(t) = 18 - 14{,}4 \cdot e^{-2t}\ A$, $\quad i_3(t) = 9{,}6 \cdot e^{-2t}\ A$.

ЗАДАЧА 7.34. Визначити потокозчеплення і струми в колі рис. 7.53, якщо

E = 180 *В*, L_1 = 0,6 *Гн*, L_2 = 0,5 *Гн*,
$k_{зв}$ = 0,8, r_2 = 60 *Ом*, r_3 = 30 *Ом*.

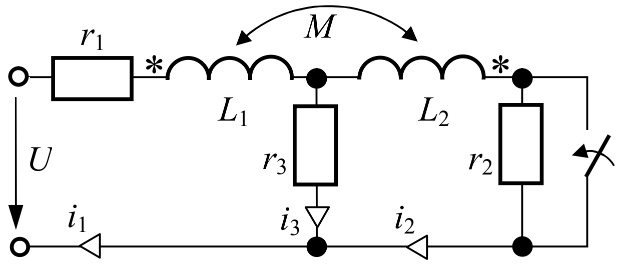

Рис. 7.52

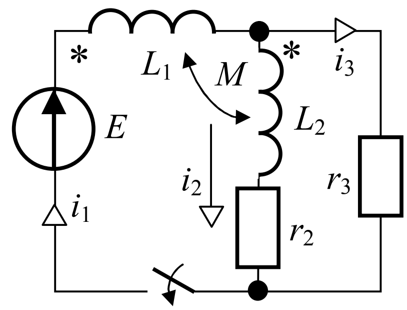

Рис. 7.53

Відповіді:
$\Psi_1(t) = 6{,}715 - 6{,}655\cdot e^{-19{,}3t} - 0{,}06\cdot e^{-863t}$ *Вб*,
$\Psi_2(t) = 5{,}444 - 5{,}57\cdot e^{-19{,}3t} + 0{,}125\cdot e^{-863t}$ *Вб*, $i_1(t) = 9 - 8{,}22\cdot e^{-19{,}3t} - 0{,}78\cdot e^{-863t}$ *А*,
$i_2(t) = 3 - 3{,}94\cdot e^{-19{,}3t} + 0{,}94\cdot e^{-863t}$ *А*, $i_3(t) = 6 - 4{,}28\cdot e^{-19{,}3t} - 1{,}72\cdot e^{-863t}$ *А*.

7.1.4 Перехідні процеси при миттєвій зміні реактивних параметрів ділянок кола (при «некоректних» комутаціях)

Під час розгляду перехідних процесів в колах з розмиканням віток, які містять індуктивності, або під час увімкнення заряджених конденсаторів паралельно струм в індуктивних елементах або напруга на ємнісних елементах теоретично можуть змінитися стрибком під час комутації, що означає порушення законів комутації у раніше прийнятому вигляді. Такі результати – наслідок ідеалізації явища. Насправді, велика напруга між контактами ключа викличе електричну іскру або дугу. Крім того, не враховуються опори проводів і контактів з'єднань, наявність розподіленої ємності між витками котушок. Різниця енергій $W(0_-) - W(0_+)$ витрачається в неврахованих опорах кола і на випромінювання при дуже високій частоті. Такі процеси розраховуються за допомогою уточнених законів комутації, які формулюються наступним чином.

Перший узагальнений закон комутації. Потокозчеплення будь-якого замкненого контура у момент комутації ($t = 0_+$) дорівнює алгебричній сумі потокозчеплень всіх котушок контуру, які вони мали безпосередньо перед комутацією ($t = 0_-$). Деякі з цих котушок перед комутацією могли одного замкненого контура і не складати, а утворили його лише після комутації.

Другий узагальнений закон комутації. Зміна зарядів на всіх паралельно з'єднаних конденсаторах за час комутації дорівнює нулю. Тобто сума зарядів конденсаторів перед комутацією ($t = 0_-$) дорівнює сумі зарядів безпосередньо після комутації ($t = 0_+$).

ЗАДАЧА 7.35. В схемі рис. 7.54 з числовими значеннями задачі 7.31 розрахувати струм i_2 у випадку, коли ключ розмикається.

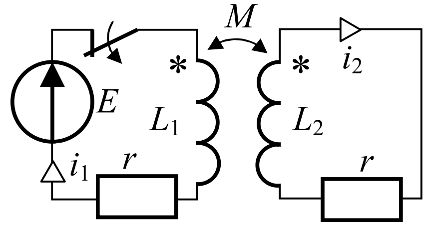

Рис. 7.54

Розв'язання

Струми до комутації:

$$i_2(t_-)=0,\quad i_1(t_-)=\frac{10}{1}=10\ A.$$

Рівняння за другим законом Кірхгофа для вторинного контура

$$-M\frac{di_1}{dt}+r\cdot i_2+L_2\frac{di_2}{dt}=0.$$

Зважаючи на стрибкоподібну зміну первинного струму с $10\ A$ до 0 похідні $\frac{di_1}{dt}$ і $\frac{di_2}{dt}$ у момент комутації досягнуть нескінченних значень, в порівнянні з якими величиною $r\cdot i_2$ можна знехтувати. Таким чином, отримуємо рівність $Mdi_1 = L_2di_2$, яку проінтегруємо за час комутації від $t = 0_-$ до $t = 0_+$. За цей час струми зміняться:

i_1 – від $i_1(0_-) = 10\ A$ до $i_1(0_+) = 0$,

i_2 – від $i_2(0_-) = 0$ до шуканого $i_2(0_+)$.

$$L_2\int_0^{i_2(0_+)}di_2 = M\int_{i_1(0_-)}^{0}di_1 \quad \text{або} \quad L_2i_2(0_+) = -Mi_1(0_-) = -0{,}05\cdot 10 = -0{,}5\ Вб.$$

Звідси $i_2(0_+) = -\frac{0{,}5}{L_2} = -\frac{0{,}5}{0{,}05} = -10\ A$.

Стала часу кола $\tau = \frac{L_2}{r} = \frac{0{,}05}{1} = 0{,}05\ c$.

Корінь характеристичного рівняння $p = -\tau^{-1} = -20\ c^{-1}$.

Струм перехідного процесу $i_2(t) = i_2(0)\cdot e^{pt} = -10\cdot e^{-20t}\ A$.

ЗАДАЧА 7.36. Розрахувати струм в схемі рис. 7.55 та побудувати його графік при наступних числових даних: $U = 100\ В$, $r_1 = 60\ Ом$, $r_2 = 40\ Ом$, $L_1 = 0{,}1\ Гн$, $L_2 = 0{,}2\ Гн$, $M = 0{,}05\ Гн$.

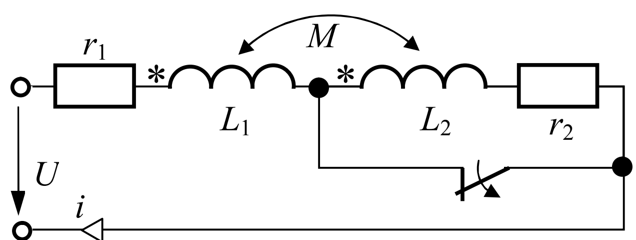

Рис. 7.55

Розв'язання

1. До комутації струми в котушках були різні: у першій котушці – $i_1(0_-) = \frac{U}{r_1} = \frac{100}{60} = 1{,}667\ A$, у другій котушці струму не було – $i_2(0_-) = 0$.

Таким чином, потокозчеплення кола до комутації, яке складається з суми потокозчеплень котушок,

$$\Psi(0_-) = \Psi_1(0_-) + \Psi_2(0_-) = L_1i_1(0_-) + Mi_2(0_-) + L_2i_2(0_-) + Mi_1(0_-) =$$
$$= 0{,}1\cdot 1{,}667 + 0 + 0 + 0{,}05\cdot 1{,}667 = 0{,}25\ Вб.$$

Незалежна початкова умова відповідно до першого закону комутації: $\Psi(0_+) = \Psi(0_-) = 0{,}25\ Вб$. Але потокозчеплення кола після комутації з урахуванням того, що котушки з'єднані послідовно та узгоджено і по них протікає один струм, дорівнює $\Psi(0_+) = i(0_+)\cdot(L_1 + L_2 + 2M)$. Звідси

$$i(0_+) = \frac{\Psi(0_+)}{L_1+L_2+2M} = \frac{0{,}25}{0{,}1+0{,}2+2\cdot 0{,}05} = 0{,}625\ A.$$

2. Усталена складова струму: $i_y = \dfrac{U}{r_1 + r_2} = \dfrac{100}{60+40} = 1\ A.$

3. Характеристичне рівняння: $p\cdot(L_1 + L_2 + 2M) + r_1 + r_2 = 0,$

$$p = -\frac{r_1 + r_2}{L_1 + L_2 + 2M} = -\frac{60+40}{0{,}1 + 0{,}2 + 2\cdot 0{,}05} = -250\ c^{-1}.$$

4. Вільна складова струму $i_в = A\cdot e^{pt},$
де постійна інтегрування
$A = i_в(0_+) = i(0_+) - i_y = 0{,}625 - 1 = -0{,}375.$

5. Остаточно отримуємо:
$i(t) = i_y(t) + i_в(t) = 1 - 0{,}375\cdot e^{-250t}\ A.$

6. Графік струму наведено на рис. 7.56.

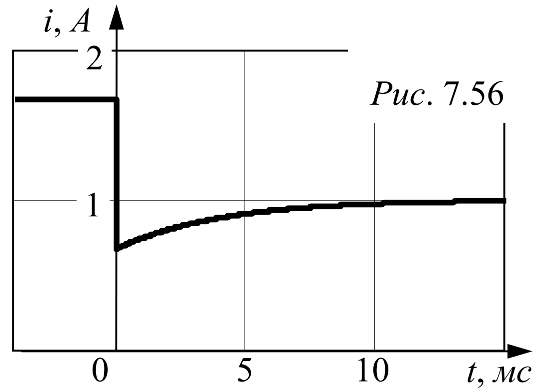

Рис. 7.56

ЗАДАЧА 7.37. Розрахувати струм другої котушки в схемі рис. 7.57 з наступними числовими даними:

$E = 11{,}7\ В,\ r_1 = 1\ Ом,\ r_2 = 9\ Ом,\ r = 3\ Ом,$
$L_1 = 10\ мГн,\ L_2 = 20\ мГн,\ M = 10\ мГн.$

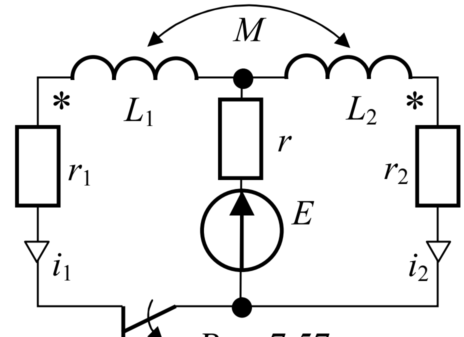

Рис. 7.57

Розв'язання

1. До комутації

$$R = r + \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2} = 3 + \frac{1\cdot 9}{1+9} = 3{,}9\ Ом,$$

$$i_1(0_-) = \frac{E}{R}\cdot\frac{r_2}{r_1 + r_2} = \frac{11{,}7\cdot 9}{3{,}9\cdot 10} = 2{,}7\ A,$$

$$i_2(0_-) = \frac{E}{R}\cdot\frac{r_1}{r_1 + r_2} = \frac{11{,}7\cdot 1}{3{,}9\cdot 10} = 0{,}3\ A.$$

2. Рівняння для контура з другою котушкою за другим законом Кірхгофа для моменту комутації:

$$r\cdot(i_1 + i_2) + r_2\cdot i_2 + L_2\frac{di_2}{dt} + M\frac{di_1}{dt} = E \text{ або } L_2 di_2 = -M di_1$$

$$\text{або } L_2\cdot(i_2(0_+) - i_2(0_-)) = -M\cdot(i_1(0_+) - i_1(0_-)).$$

Але $i_1(0_+) = 0$, тоді $i_2(0_+) = \dfrac{M}{L_2} i_1(0_-) + i_2(0_-) = \dfrac{10}{20}\cdot 2{,}7 + 0{,}3 = 1{,}65\ A.$

3. Усталена складова струму $i_{2y} = \dfrac{E}{r + r_2} = \dfrac{11{,}7}{12} = 0{,}975\ A.$

4. Корінь характеристичного рівняння

$$p = -\frac{r + r_2}{L_2} = -\frac{3+9}{0{,}02} = -600\ c^{-1}.$$

5. Вільна складова струму $i_{2в} = A\cdot e^{pt},$
де постійна інтегрування $A = i_{2в}(0_+) = i_2(0_+) - i_{2y} = 1{,}65 - 0{,}975 = 0{,}675.$

6. Остаточно отримуємо: $i_2(t) = i_{2y}(t) + i_{2в}(t) = 0{,}975 + 0{,}675\cdot e^{-600t}\ A.$

ЗАДАЧА 7.38. Розрахувати перехідний струм $i_1(t)$ у схемі рис. 7.58 з наступними числовими даними: $E_1 = 36$ *В*, $E_2 = 6$ *В*, $r_1 = 300$ *Ом*, $r_2 = r_3 = 600$ *Ом*, $C_1 = 300$ *мкФ*, $C_2 = 200$ *мкФ*.

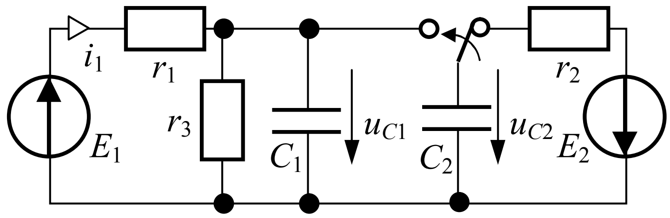

Рис. 7.58

Розв'язання

До комутації напруги і сумарний заряд конденсаторів:

$$u_{C1}(0_-) = \frac{E_1}{r_1 + r_3} \cdot r_3 = \frac{36 \cdot 600}{300 + 600} = 24\ В, \qquad u_{C2}(0_-) = -E_2 = -6\ В.$$

$$q(0_-) = C_1 u_{C1}(0_-) + C_2 u_{C2}(0_-) = (300 \cdot 24 - 200 \cdot 6) \cdot 10^{-6} = 60 \cdot 10^{-4}\ Кл.$$

Після комутації конденсатори знаходитимуться під однією напругою $u_C(0_+) = u_{C1}(0_+) = u_{C2}(0_+)$. Тому заряд конденсаторів після комутації $q(0_+) = (C_1 + C_2) \cdot u_C(0_+)$. Але відповідно до другого закону комутації $q(0_+) = q(0_-)$. Звідси

$$u_C(0_+) = \frac{q(0_+)}{C_1 + C_2} = \frac{60 \cdot 10^{-4}}{(300 + 200) \cdot 10^{-6}} = 12\ В.$$

Початкове значення шуканого струму

$$i_1(0_+) = \frac{E_1 - u_C(0_+)}{r_1} = \frac{36 - 12}{300} = 0{,}08\ А = 80\ мА.$$

Усталений струм $i_{1у} = \dfrac{E_1}{r_1 + r_3} = \dfrac{36 \cdot 10^{-3}}{300 + 600} = 40\ мА.$

Вільний струм $i_{1в} = A \cdot e^{pt}$, де корінь характеристичного рівняння

$$p = -\frac{r_1 + r_3}{(C_1 + C_2) r_1 r_3} = -\frac{(300 + 600) \cdot 10^6}{(300 + 200) \cdot 300 \cdot 600} = -10\ с^{-1},$$

постійна інтегрування $A = i_{1в}(0_+) = i_1(0_+) - i_{1у} = 80 - 40 = 40.$

Остаточно записуємо: $i_1(t) = i_{1у}(t) + i_{1в}(t) = 40 + 40 \cdot e^{-10t}$ *мА*.

ЗАДАЧА 7.39. У схемі рис. 7.59 знайти закон зміни струму джерела ЕРС при замиканні контакту. Числові дані: $E = 60$ *В*, $r_1 = r_2 = 1$ *кОм*, $C_1 = 1$ *мкФ*, $C_2 = 2$ *мкФ*.

Відповіді: $u_{C1}(0_+) = u_{C2}(0_+) = 20$ *В*,

$i(t) = 30 + 10 \cdot e^{-667t}$ *мА*.

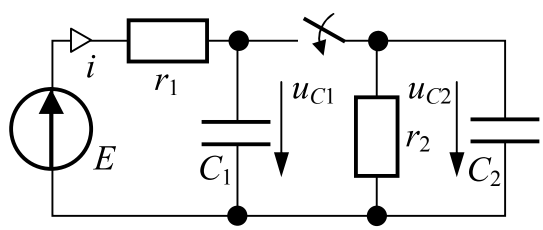

Рис. 7.59

7.1.5 Метод змінних стану (МЗС)

Рівняннями стану можна назвати будь-яку систему рівнянь, які визначають режим кола. У більш вузькому сенсі – це система диференціальних рівнянь першого порядку, розв'язана відносно похідних. МЗС – це аналіз кола, заснований на розв'язанні рівнянь стану, записаних у формі Коші.

У електричних колах струми в індуктивностях та напруги на ємностях визначають енергетичний стан кола, тому їх доцільно взяти за змінні стану.

Хай **[*X*]** – матриця-стовпець (розміру k) змінних стану.

Діючі джерела називаються вхідними величинами – $F_l(t)$, а **[*F*]** – матриця-стовпець (розміру l) ЕРС і струмів джерел струму; шукані величини (решта струмів і напруг) – $W_m(t)$: **[*W*]** – матриця-стовпець розміру m.

Скорочено диференціальні рівняння стану записуються в матричній формі наступним чином: $[\dot{X}] = [K]\times[X] + [L]\times[F]$,
де **[*K*]** – квадратна матриця порядку k (основна), **[*L*]** – матриця зв'язку розміру $k\times l$. Елементи цих матриць визначаються топологією та параметрами кола.

Для шуканих величин: $[W] = [M]\times[X] + [N]\times[F]$,
де **[*M*]** – матриця зв'язку розміру $m\times k$, **[*N*]** – матриця зв'язку розміру $m\times l$.

Розв'язання рівнянь стану може виконуватися різними методами. При застосуванні класичного методу струми і напруги шукаються у вигляді суми усталених та вільних складових:

$$i_L(t) = i_{Ly}(t) + i_{Lв}(t); \qquad u_C(t) = u_{Cy}(t) + u_{Cв}(t).$$

Методика визначення усталених складових наступна:

- якщо джерела постійні, то похідні від усталених складових дорівнюють нулю: $\dfrac{di_{L\,y}}{dt} = 0$, $\dfrac{du_{C\,y}}{dt} = 0$. Рівняння стану приймають вид:

$$0 = [K]\times[X_y] + [L]\times[F],$$

- якщо джерела синусоїдні – зручно перейти до комплексів:

$$j\omega[\underline{X}_y] = [K]\times[\underline{X}_y] + [L]\times[\underline{F}].$$

Система рівнянь дає можливість зручно скласти характеристичне рівняння. Для цього систему потрібно алгебризувати і її визначник, що складається з коефіцієнтів при змінних стану, прирівняти до нуля. Складати характеристичне рівняння через вхідний опір в операторній формі доцільно лише в схемах кіл, де немає мостикових з'єднань віток і індуктивних зв'язків. Безпосередньо з системи рівнянь можна отримати початкові значення похідних від змінних стану, підставивши в систему незалежні початкові умови. Ці початкові значення використовуються при знаходженні постійних інтегрування.

Система рівнянь стану може бути також розв'язана у матричний спосіб за допомогою програмованої обчислювальної техніки. Приклади – див. задачі 7.43 і 7.44.

ЗАДАЧА 7.40. Розрахувати струми перехідного процесу в схемі рис. 7.60 методом змінних стану. Числові значення: $E = 100\,В$, $J = 5\,А$,
$r_1 = 20\,Ом$, $r_2 = 30\,Ом$, $r_3 = 10\,Ом$, $L = 0{,}09\,Гн$, $C = 100\,мкФ$.

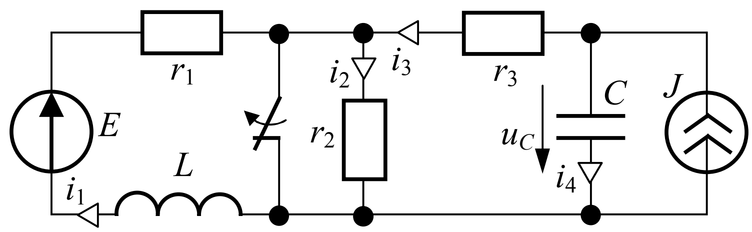

Рис. 7.60

Розв'язання

1. Змінними стану призначаємо струм в індуктивності і напругу на конденсаторі – $i_1(t)$ і $u_C(t)$. Змінні на виході – решта струмів: $i_2(t)$, $i_3(t)$, $i_4(t)$.

2. Незалежні початкові умови: $i_1(0_+) = i_1(0_-) = \dfrac{E}{r_1} = \dfrac{100}{20} = 5\ A,$

$$u_C(0_+) = u_C(0_-) = J{\cdot}r_3 = 5{\cdot}10 = 50\ B.$$

3. Для змінних стану складемо систему диференціальних рівнянь у формі Коші. Похідні $i_1'(t)$ і $u_C'(t)$ отримаємо із виразів $u_L = Li_1'(t)$ і $i_4 = Cu_C'(t)$, відповідно. Для знаходження u_L і i_4 у вихідній схемі замінимо індуктивність джерелом струму i_1, а ємність – джерелом напруги u_C. У резистивному колі рис. 7.61 визначимо u_L і i_4, а також шукані змінні $i_3(t)$ і $i_2(t)$. Це можна зробити будь-яким методом розрахунку складних кіл постійного струму. Виконаємо розрахунок методом контурних струмів. Маємо три незалежні контури з двома відомими струмами i_1 і J і з одним невідомим i_3, тому складаємо одне рівняння: $(r_2 + r_3){\cdot}i_3 + r_2{\cdot}i_1 = u_C$.

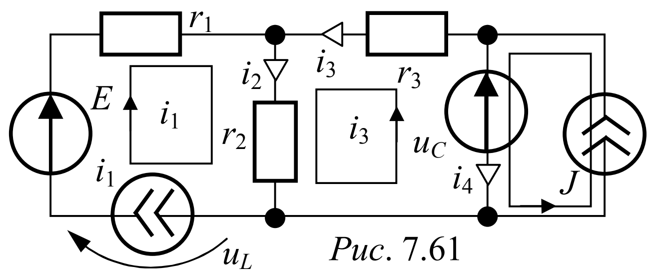

Рис. 7.61

Розв'язання рівняння: $i_3 = \dfrac{u_C - r_2 i_1}{r_2 + r_3} = \dfrac{-r_2}{r_2 + r_3}{\cdot}i_1 + \dfrac{1}{r_2 + r_3}{\cdot}u_C.$

Решта розрахункових величин:

$$i_2 = i_1 + i_3 = \frac{r_3}{r_2 + r_3}{\cdot}i_1 + \frac{1}{r_2 + r_3}{\cdot}u_C;$$

$$i_4 = C\frac{du_C}{dt} = J - i_3 = \frac{r_2}{r_2 + r_3}{\cdot}i_1 - \frac{1}{r_2 + r_3}{\cdot}u_C + J;$$

$$u_L = L\frac{di_1}{dt} = E - r_1{\cdot}i_1 - r_2{\cdot}i_2 = -\left(r_1 + \frac{r_2 r_3}{r_2 + r_3}\right){\cdot}i_1 - \frac{r_2}{r_2 + r_3}{\cdot}u_C + E.$$

З останніх двох рівнянь отримуємо рівняння стану у формі Коші:

$$\begin{cases} \dfrac{di_1}{dt} = -\dfrac{1}{L}\left(r_1 + \dfrac{r_2 r_3}{r_2 + r_3}\right){\cdot}i_1 - \dfrac{r_2}{r_2 + r_3}\cdot\dfrac{1}{L}u_C + \dfrac{1}{L}E; \\ \dfrac{du_C}{dt} = \dfrac{r_2}{r_2 + r_3}\cdot\dfrac{1}{C}i_1 - \dfrac{1}{r_2 + r_3}\cdot\dfrac{1}{C}u_C + \dfrac{1}{C}J. \end{cases}$$

Решта отриманих рівнянь називаються *рівняннями зв'язку*. Вони потрібні для знаходження шуканих змінних.

4. Систему рівнянь стану розв'яжемо класичним методом:

$$i_1(t) = i_{1у}(t) + i_{1в}(t); \quad u_C(t) = u_{Cу}(t) + u_{Cв}(t).$$

Оскільки у колі діють джерела постійного струму, усталені складові є також постійними, а похідні від них дорівнюють нулю. Відповідно до принципу накладання система рівнянь стану виявляється справедливою не лише для повних $i_1(t)$ і $u_C(t)$, але й для їх складових. Система рівнянь стану для усталених складових, таким чином, має вид:

$$\begin{cases} -(r_1+\dfrac{r_2r_3}{r_2+r_3})\cdot i_{1y}-\dfrac{r_2}{r_2+r_3}\cdot u_{Cy}=-E; \\ \dfrac{r_2}{r_2+r_3}\cdot i_{1y}-\dfrac{1}{r_2+r_3}\cdot u_{Cy}=-J. \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} -27{,}5\cdot i_{1y}-0{,}75\cdot u_{Cy}=-100; \\ 0{,}75\cdot i_{1y}-0{,}025\cdot u_{Cy}=-5. \end{cases}$$

Розв'язання системи: $i_{1y}=-1\ A$, $u_{Cy}=170\ B$.

5. Алгебризувавши рівняння стану і прирівнявши визначник системи рівнянь до нуля, отримаємо характеристичне рівняння:

$$\Delta(p)=\begin{vmatrix} \dfrac{1}{L}\left(r_1+\dfrac{r_2r_3}{r_2+r_3}\right)+p & \dfrac{r_2}{L(r_2+r_3)} \\ \dfrac{-r_2}{C(r_2+r_3)} & \dfrac{1}{C(r_2+r_3)}+p \end{vmatrix}=$$

$$=p^2+\left(\frac{1}{L}\left(r_1+\frac{r_2r_3}{r_2+r_3}\right)+\frac{1}{C(r_2+r_3)}\right)\cdot p+\frac{r_1+r_2}{LC(r_2+r_3)}=p^2+555{,}6p+138900=0.$$

Корені характеристичного рівняння: $p_{1,2}=-277{,}8\pm j248{,}5\ c^{-1}$.

Вільні складові мають вид:

$i_{1в}(t)=A\cdot e^{-b\cdot t}\cdot sin(\omega_0t+\psi_1)$; $u_{Cв}(t)=B\cdot e^{-b\cdot t}\cdot sin(\omega_0t+\psi_u)$,

Тут $b=|\mathrm{Re}(p_1)|=-277{,}8\ c^{-1}$ – коефіцієнт згасання,

$\omega_0=\mathrm{Im}(p_1)=248{,}5\ c^{-1}$ – кутова частота вільних коливань.

Початкові значення вільних складових і їх похідних:

$i_{1в}(0_+)=A\cdot sin\psi_1$; $i_{1в}'(0_+)=-b\cdot A\cdot sin\psi_1+\omega_0\cdot A\cdot cos\psi_1$;

$u_{Cв}(0_+)=B\cdot sin\psi_u$; $u_{Cв}'(0_+)=-b\cdot B\cdot sin\psi_u+\omega_0\cdot B\cdot cos\psi_u$.

6. Незалежні початкові умови: $i_1(0_+)=5\ A$, $u_C(0_+)=50\ B$.

Початкові значення похідних отримаємо з рівнянь стану:

$$i_1'(0_+)=-\frac{1}{L}(r_1+\frac{r_2r_3}{r_2+r_3})\cdot i_1(0_+)-\frac{r_2}{r_2+r_3}\cdot\frac{1}{L}u_C(0_+)+\frac{1}{L}E=$$

$$=-\frac{1}{0{,}09}\cdot 27{,}5\cdot 5-0{,}75\cdot\frac{1}{0{,}09}\cdot 50+\frac{1}{0{,}09}\cdot 100=-833{,}3\ A/c.$$

$$u_C'(0_+)=\frac{r_2}{r_2+r_3}\cdot\frac{1}{C}i_1(0_+)-\frac{1}{r_2+r_3}\cdot\frac{1}{C}u_C(0_+)+\frac{1}{C}J=$$

$$=0{,}75\cdot 10^4\cdot 5-0{,}025\cdot 10^4\cdot 50+10^4\cdot 5=75000\ B/c.$$

Початкові значення вільних складових і їх похідних:

$i_{1в}(0_+)=i_1(0_+)-i_{1y}=5+1=6\ A$, $i_{1в}'(0_+)=i_1'(0_+)-i_{1y}'=-833{,}3\ A/c$,

$u_{Cв}(0_+)=u_C(0_+)-u_{Cy}=50-170=-120\ B$, $u_{Cв}'(0_+)=u_C'(0_+)-u_{Cy}'=75000\ B/c$.

Отримуємо і розв'язуємо наступні системи рівнянь:

$$\begin{cases} A\cdot sin\psi_1=6, \\ -b\cdot A\cdot sin\psi_1+\omega_0\cdot A\cdot cos\psi_1=-833{,}3; \end{cases} \qquad \begin{cases} B\cdot sin\psi_u=-120, \\ -b\cdot B\cdot sin\psi_u+\omega_0\cdot B\cdot cos\psi_u=75000. \end{cases}$$

$A=6{,}874$, $\psi_1=60{,}8°$, $B=452{,}1$, $\psi_u=-15{,}4°$.

7. Остаточні вирази для змінних стану:

$i_1(t)=i_{1y}(t)+i_{1в}(t)=-1+6{,}874\cdot e^{-277{,}8t}\cdot sin(248{,}5t+60{,}8°)\ A$;

$u_C(t)=u_{Cy}(t)+u_{Cв}(t)=170+452{,}1\cdot e^{-277{,}8t}\cdot sin(248{,}5t-15{,}4°)\ B$.

8. Шукані змінні:

$$i_2(t) = \frac{r_3}{r_2 + r_3} \cdot i_1 + \frac{1}{r_2 + r_3} \cdot u_C = 0{,}25 \cdot i_1 + 0{,}025 \cdot u_C =$$

$$= 4 + 11{,}83 \cdot e^{-277{,}8t} \cdot sin(248{,}5t - 7{,}29°)\ A;$$

$$i_3(t) = \frac{-r_2}{r_2 + r_3} \cdot i_1 + \frac{1}{r_2 + r_3} \cdot u_C = -0{,}75 \cdot i_1 + 0{,}025 \cdot u_C =$$

$$= 5 + 11{,}25 \cdot e^{-277{,}8t} \cdot sin(248{,}5t - 41{,}83°)\ A;$$

$$i_4(t) = \frac{r_2}{r_2 + r_3} \cdot i_1 - \frac{1}{r_2 + r_3} \cdot u_C + J = 0{,}75 \cdot i_1 - 0{,}025 \cdot u_C + 5 =$$

$$= 11{,}25 \cdot e^{-277{,}8t} \cdot sin(248{,}5t + 138{,}17°)\ A.$$

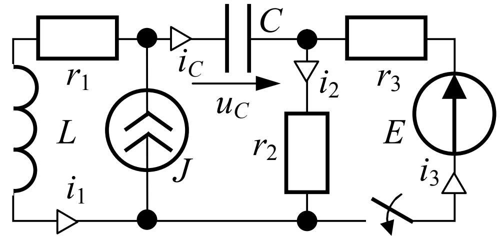

Рис. 7.62

ЗАДАЧА 7.41. Розрахувати струми перехідного процесу, напруги на індуктивності і ємності в колі рис. 7.62, якщо $E = 240$ *В*, $J = 4$ *А*, $r_1 = 80$ *Ом*, $r_2 = 120$ *Ом*, $r_3 = 120$ *Ом*, $L = 0{,}5$ *Гн*, $C = 10$ *мкФ*.

Відповіді: $u_C(t) = 200 + 126{,}3 \cdot e^{-140t} \cdot sin(424{,}7t + 71{,}75°)\ B$;
$i_1(t) = 4 - 0{,}565 \cdot e^{-140t} \cdot sin(424{,}7t)\ A$; $i_2(t) = 1 - 0{,}283 \cdot e^{-140t} \cdot sin(424{,}7t)\ A$;
$i_3(t) = 1 + 0{,}283 \cdot e^{-140t} \cdot sin(424{,}7t)\ A$; $i_C(t) = -0{,}565 \cdot e^{-140t} \cdot sin(424{,}7t)\ A$;
$u_L(t) = 120{,}1 \cdot e^{-140t} \cdot sin(424{,}7t + 92{,}7°)\ B$.

ЗАДАЧА 7.42. Визначити струми перехідного процесу в колі рис. 7.63, якщо $r_1 = r_4 = 200$ *Ом*, $r_2 = r_5 = 100$ *Ом*, $C_1 = C_3 = 100$ *мкФ*, $E = 300$ *В*, $J = 1$ *А*.

Відповіді: $i_1(t) = 0{,}8 \cdot e^{-16{,}67t} - 0{,}3 \cdot e^{-100t}\ A$; $i_2(t) = 1 - 0{,}8 \cdot e^{-16{,}67t} + 0{,}3 \cdot e^{-100t}\ A$;
$i_3(t) = 0{,}4 \cdot e^{-16{,}67t} + 0{,}6 \cdot e^{-100t}\ A$; $i_4(t) = -1 + 1{,}2 \cdot e^{-16{,}67t} + 0{,}3 \cdot e^{-100t}\ A$.

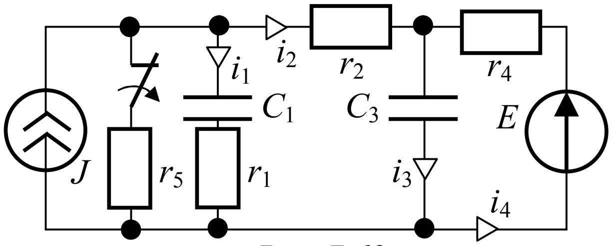

Рис. 7.63

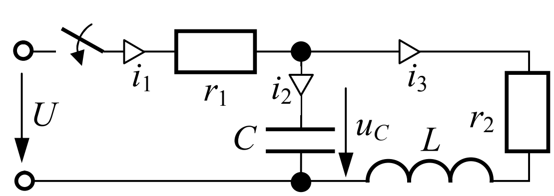

Рис. 7.64

ЗАДАЧА 7.43. Побудувати графіки струмів $i_1(t)$ і $i_3(t)$ схеми рис. 7.64, за умови $r_1 = 60$ *Ом*, $r_2 = 40$ *Ом*, $C = 100$ *мкФ*, $L = 0{,}1$ *Гн*, $U = 100$ *В*.

Розв'язання

Задачу розв'яжемо МЗС матричним способом. У цьому випадку доцільно застосувати програмовану обчислювальну техніку. Розв'яжемо задачу в середі MathCAD.

1. Призначаємо змінними стану струм в індуктивності і напругу на ємності – $i_3(t)$ і $u_C(t)$. Шукана змінна – струм $i_1(t)$.

2. Незалежні початкові умови є нульовими:

$$i_3(0_+) = i_3(0_-) = 0, \qquad u_C(0_+) = u_C(0_-) = 0.$$

3. Складемо систему рівнянь стану з використанням законів Кірхгофа:

$$L\frac{di_3}{dt}=u_L=u_C-r_2\cdot i_3;\quad i_1=\frac{U-u_C}{r_1};\quad C\frac{du_C}{dt}=i_2=i_1-i_3=\frac{U-u_C}{r_1}-i_3.$$

Таким чином, система рівнянь стану має вигляд:

$$\begin{cases}\dfrac{di_3}{dt}=-\dfrac{r_2}{L}i_3+\dfrac{1}{L}u_C,\\[2mm] \dfrac{du_C}{dt}=-\dfrac{1}{C}i_3-\dfrac{1}{r_1C}u_C+\dfrac{1}{r_1C}U.\end{cases}$$

Ця ж система у матричному вигляді: $\left[\overset{\bullet}{X}\right]=$ **[*K*]**×**[*X*]** + **[*L*]**×**[*F*]**. (7.1)

Отже, матриця змінних стану **[*X*]**, матриця коефіцієнтів **[*K*]**, матриця стовпець вільних членів **[*L*]**×**[*F*]** і матриця незалежних початкових умов **[*X*(0)]** мають вигляд:

$$[\boldsymbol{X}]=\begin{bmatrix}i_3\\u_C\end{bmatrix},\quad [\boldsymbol{K}]=\begin{bmatrix}-\dfrac{r_2}{L} & \dfrac{1}{L}\\ -\dfrac{1}{C} & -\dfrac{1}{r_1C}\end{bmatrix},\quad [\boldsymbol{L}]\times[\boldsymbol{F}]=\begin{bmatrix}0\\ \dfrac{U}{r_1C}\end{bmatrix},\quad [\boldsymbol{X}(0_+)]=\begin{bmatrix}i_3(0_+)\\u_C(0_+)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}.$$

Розв’язання системи рівнянь стану (7.1):

$$\boldsymbol{X}(t)=e^{\boldsymbol{K}t}\cdot\boldsymbol{\Phi}(t),\quad \text{де}\quad \boldsymbol{\Phi}(t)=\int\limits_{-\infty}^{t}e^{-K\Theta}\cdot\boldsymbol{L}\times\boldsymbol{F}(\theta)\cdot d\theta,\quad \text{тобто}$$

$$\boldsymbol{X}(t)=e^{\boldsymbol{K}t}\int\limits_{-\infty}^{0}e^{-K\Theta}\cdot\boldsymbol{L}\times\boldsymbol{F}(\theta)\cdot d\theta+e^{\boldsymbol{K}t}\int\limits_{0}^{t}e^{-K\Theta}\cdot\boldsymbol{L}\times\boldsymbol{F}(\theta)\cdot d\theta=$$

$$=e^{\boldsymbol{K}t}\cdot\boldsymbol{X}(0)+e^{\boldsymbol{K}t}\int\limits_{0}^{t}e^{-K\Theta}\cdot\boldsymbol{L}\times\boldsymbol{F}(\theta)\cdot d\theta. \qquad (7.2)$$

4. Отримаємо матричну експоненціальну функцію $e^{\boldsymbol{K}t}$.

Спочатку визначимо власні значення λ матриці **[*K*]**, тобто корені рівняння $det(\boldsymbol{[K]}-\lambda\cdot\boldsymbol{1})=0$, де $\boldsymbol{1}=\boldsymbol{E}$ – одинична матриця порядку *K*:

$$\begin{vmatrix}K_{11}-\lambda & K_{12} & K_{13} & ... & K_{1k}\\ K_{21} & K_{22}-\lambda & K_{23} & ... & K_{2k}\\ ... & ... & ... & ... & ...\\ K_{k1} & K_{k2} & K_{k3} & ... & K_{kk}-\lambda\end{vmatrix}=0.$$

У даному випадку характеристичне рівняння: $\begin{vmatrix}K_{11}-\lambda & K_{12}\\ K_{21} & K_{22}-\lambda\end{vmatrix}=0.$

При двох коренях характеристичного рівняння матрична експонента шукається у вигляді $e^{\boldsymbol{K}t}=\alpha_0\,\boldsymbol{E}+\alpha_1[\boldsymbol{K}]$,
де коефіцієнти α_i знаходять з наступної системи рівнянь:

$$\begin{cases}\alpha_0+\lambda_1\,\alpha_1=e^{\lambda 1\cdot t}, & \alpha_0=\dfrac{\lambda_2}{\lambda_2-\lambda_1}e^{\lambda 1\cdot t}+\dfrac{\lambda_1}{\lambda_1-\lambda_2}e^{\lambda 2\cdot t},\\[3mm] \alpha_0+\lambda_2\,\alpha_1=e^{\lambda 2\cdot t}. & \alpha_1=\dfrac{1}{\lambda_1-\lambda_2}e^{\lambda 1\cdot t}+\dfrac{1}{\lambda_2-\lambda_1}e^{\lambda 2\cdot t}.\end{cases}$$

5. Змінні стану можна визначити за формулою (7.2), а шукану змінну $i_1(t)$ за формулою $i_1 = \dfrac{U - u_C}{r_1}$.

6. Далі наводиться програма розрахунків в середі MathCAD з побудованими графіками $i_1(t)$ і $i_3(t)$.

$$j:=\sqrt{-1} \qquad \text{ORIGIN}:=1 \quad U:=100 \quad r1:=60 \quad r2:=40 \quad L:=0.1 \quad C:=10^{-4}$$

$$E:=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad x0:=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad K:=\begin{pmatrix} \dfrac{-r2}{L} & \dfrac{1}{L} \\ \dfrac{-1}{C} & \dfrac{-1}{r1 \cdot C} \end{pmatrix} \qquad LF(\theta):=\begin{pmatrix} 0 \\ \dfrac{U}{r1 \cdot C} \end{pmatrix}$$

$$|K - \lambda \cdot E| \left| \begin{matrix} simplify \\ float,4 \end{matrix} \right. \rightarrow .1667e6 + 566.7 \cdot \lambda + \lambda^2$$

$$|K - \lambda \cdot E| = 0 \left| \begin{matrix} solve,\lambda \\ float,4 \end{matrix} \right. \rightarrow \begin{bmatrix} (-283.3) - 293.9 \cdot i \\ (-283.3) + 293.9 \cdot i \end{bmatrix}$$

Перезадання коренів характеристичного рівняння $\lambda:=\begin{bmatrix} (-283.3) - 293.9 \cdot i \\ (-283.3) + 293.9 \cdot i \end{bmatrix}$

$$\alpha 0(t):= \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} \cdot e^{\lambda_1 \cdot t} + \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2} \cdot e^{\lambda_2 \cdot t} \qquad \alpha 1(t):= \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \cdot e^{\lambda_1 \cdot t} + \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \cdot e^{\lambda_2 \cdot t}$$

$$\alpha 0(t) \left| \begin{matrix} \text{simplify} \\ \text{float},4 \end{matrix} \right. \rightarrow (.5000 - .4820 \cdot i) \cdot \left[e^{[(-283.3)+293.9 \cdot i] \cdot t} + .3672e\text{-}1 \cdot e^{[(-283.3)-293.9 \cdot i] \cdot t} + .9993 \cdot i \cdot e^{[(-283.3)-293.9 \cdot i] \cdot t} \right]$$

$$\alpha 1(t) \left| \begin{matrix} \text{simplify} \\ \text{float},4 \end{matrix} \right. \rightarrow (-.1701e\text{-}2) \cdot i \cdot \left[(-1.000) \cdot e^{[(-283.3)-293.9 \cdot i] \cdot t} + 1.000 \cdot e^{[(-283.3)+293.9 \cdot i] \cdot t} \right]$$

$$eK(t):= \alpha 0(t) \cdot E + \alpha 1(t) \cdot K \qquad i3(t):= (eK(t) \cdot x0)_1 + \left[\int_0^t (eK(t-\theta) \cdot LF(\theta))_1 \, d\theta \right]$$

$$i3(t) \left| \begin{matrix} \text{simplify} \\ \text{float},4 \end{matrix} \right. \rightarrow [(-.5001) - .4821 \cdot i] \cdot \left[e^{[(-283.3)-293.9 \cdot i] \cdot t} + .3672e\text{-}1 \cdot e^{[(-283.3)+293.9 \cdot i] \cdot t} - .9993 \cdot i \cdot e^{[(-283.3)+293.9 \cdot i] \cdot t} - 1.037 + .9993 \cdot i \right]$$

$$uC(t):= (eK(t) \cdot x0)_2 + \left[\int_0^t (eK(t-\theta) \cdot LF(\theta))_2 \, d\theta \right] \qquad i1(t):=\frac{U - uC(t)}{r1}$$

$$i1(t) \left| \begin{matrix} \text{simplify} \\ \text{float},4 \end{matrix} \right. \rightarrow (.3333 - .1513 \cdot i) \cdot \left[e^{[(-283.3)-293.9 \cdot i] \cdot t} + .6585 \cdot e^{[(-283.3)+293.9 \cdot i] \cdot t} + .7526 \cdot i \cdot e^{[(-283.3)+293.9 \cdot i] \cdot t} + 2.488 + 1.129 \cdot i \right]$$

Примітка. Відповіді для коефіцієнтів α_0, α_1, шуканих струмів $i_1(t)$ і $i_3(t)$ (те ж саме стосується і матричної експоненти $e^{\mathbf{K}t}$) містять комплексні числа. Це пояснюється комплексністю коренів характеристичного рівняння. Проте, завдяки тому, що корені є комплексними спряженими числами, значення вказаних величин у будь-який момент часу виявляються дійсними, у зв'язку з чим можлива побудова графіків струмів. Приведення ж відповідей для струмів до стандартного вигляду із синусоїдою, яка затухає, вимагає додаткових дій. У цьому полягає недолік даного методу. Графіки шуканих струмів показані на рис. 7.65.

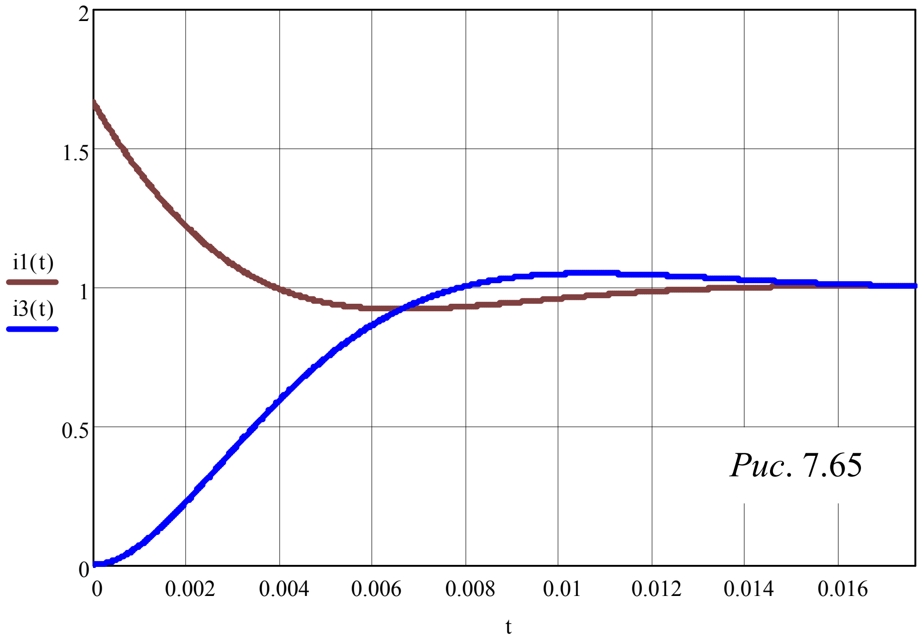

Рис. 7.65

ЗАДАЧА 7.44. Побудувати графік напруги на конденсаторі $u_C(t)$ схеми рис. 7.66, за умови $r_1 = 60$ *Ом*, $L_1 = 0{,}2$ *Гн*, $r_2 = 40$ *Ом*, $L_2 = 0{,}1$ *Гн*, $C = 100$ *мкФ*, $U = 100$ *В*.

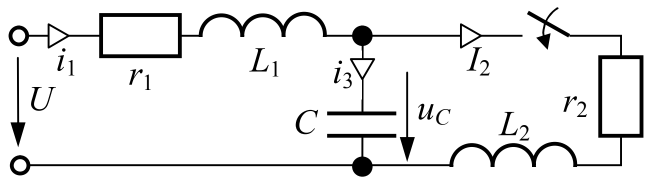

Рис. 7.66

Коментарі і відповіді.

Задачу 7.44 розв’яжемо за тією ж самою методикою, що і задачу 7.43.

Вихідні дані: $j := \sqrt{-1}$ ORIGIN:= 1

U:= 100 r1:= 60 r2:= 40 L:= 0.1 C:= 10^{-4}

Змінні стану: i_1, i_2, u_C. Незалежні початкові умови:

$$i_1(0_+) = i_1(0_-) = 0, \quad i_2(0_+) = i_2(0_-) = 0, \quad u_C(0_+) = u_C(0_-) = U = 100\ B \qquad x0 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ U \end{pmatrix}$$

Система рівнянь стану:
$$\frac{di_1}{dt} = -\frac{r_1}{L_1} i_1 - \frac{1}{L_1} u_C + \frac{1}{L_1} U,$$

$$\frac{di_2}{dt} = -\frac{r_2}{L_2} i_2 + \frac{1}{L_2} u_C, \qquad \frac{du_C}{dt} = \frac{1}{C} i_1 - \frac{1}{C} i_2.$$

$$E := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad K := \begin{pmatrix} \frac{-r1}{L1} & 0 & \frac{-1}{L1} \\ 0 & \frac{-r2}{L2} & \frac{1}{L2} \\ \frac{1}{C} & \frac{-1}{C} & 0 \end{pmatrix} \qquad LF(\theta) := \begin{pmatrix} \frac{U}{L1} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$|K-\lambda\cdot E|\ \Big|\begin{matrix} simplify \\ float,4\end{matrix} \to (-.2700e6)\cdot\lambda - 700\cdot\lambda^2 - .5000e8 - 1.\cdot\lambda^3$$

$$|K-\lambda\cdot E| = 0\ \Big|\begin{matrix} solve,\lambda \\ float,4\end{matrix} \to \begin{bmatrix} -338.7 \\ (-180.7)-339.1\cdot i \\ (-180.7)+339.1\cdot i \end{bmatrix}$$

Перезадання коренів характеристичного рівняння $\lambda := \begin{bmatrix} -338.7 \\ (-180.7)-339.1\cdot i \\ (-180.7)+339.1\cdot i \end{bmatrix}$

Коефіцієнти α_i отримують з наступної системи рівнянь:

$$\begin{cases} \alpha_0 + \lambda_1\,\alpha_1 + \lambda_1^2\,\alpha_2 = e^{\lambda 1\cdot t}, \\ \alpha_0 + \lambda_2\,\alpha_1 + \lambda_2^2\,\alpha_2 = e^{\lambda 2\cdot t}, \\ \alpha_0 + \lambda_3\,\alpha_1 + \lambda_3^2\,\alpha_2 = e^{\lambda 3\cdot t}. \end{cases}$$

$$\Delta := \left\| \begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 & (\lambda_1)^2 \\ 1 & \lambda_2 & (\lambda_2)^2 \\ 1 & \lambda_3 & (\lambda_3)^2 \end{bmatrix} \right\|$$

$$\alpha 0(t) := \frac{\left\|\begin{bmatrix} \lambda_2 & (\lambda_2)^2 \\ \lambda_3 & (\lambda_3)^2 \end{bmatrix}\right\|}{\Delta}\cdot e^{\lambda_1\cdot t} + \frac{-\left\|\begin{bmatrix} \lambda_1 & (\lambda_1)^2 \\ \lambda_3 & (\lambda_3)^2 \end{bmatrix}\right\|}{\Delta}\cdot e^{\lambda_2\cdot t} + \frac{\left\|\begin{bmatrix} \lambda_1 & (\lambda_1)^2 \\ \lambda_2 & (\lambda_2)^2 \end{bmatrix}\right\|}{\Delta}\cdot e^{\lambda_3\cdot t}$$

$$\alpha 1(t) := \frac{-\left\|\begin{bmatrix} 1 & (\lambda_2)^2 \\ 1 & (\lambda_3)^2 \end{bmatrix}\right\|}{\Delta}\cdot e^{\lambda_1\cdot t} + \frac{\left\|\begin{bmatrix} 1 & (\lambda_1)^2 \\ 1 & (\lambda_3)^2 \end{bmatrix}\right\|}{\Delta}\cdot e^{\lambda_2\cdot t} + \frac{-\left\|\begin{bmatrix} 1 & (\lambda_1)^2 \\ 1 & (\lambda_2)^2 \end{bmatrix}\right\|}{\Delta}\cdot e^{\lambda_3\cdot t}$$

$$\alpha 2(t) := \frac{\left\|\begin{bmatrix} 1 & \lambda_2 \\ 1 & \lambda_3 \end{bmatrix}\right\|}{\Delta}\cdot e^{\lambda_1\cdot t} + \frac{-\left\|\begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 \\ 1 & \lambda_3 \end{bmatrix}\right\|}{\Delta}\cdot e^{\lambda_2\cdot t} + \frac{\left\|\begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 \\ 1 & \lambda_2 \end{bmatrix}\right\|}{\Delta}\cdot e^{\lambda_3\cdot t}$$

Відповідь, наприклад, для коефіцієнта α0(t):

$$\alpha 0(t)\ \Big|\begin{matrix} simplify \\ float,4\end{matrix} \to 1.055\cdot e^{(-338.7)\cdot t} - .2747e\text{-}1\cdot e^{[(-180.7)-339.1\cdot i]\cdot t} + .5122\cdot i\cdot e^{[(-180.7)-339.1\cdot i]\cdot t} - .2747e\text{-}1\cdot e^{[(-180.7)+339.1\cdot i]\cdot t} - .5122\cdot i\cdot e^{[(-180.7)+339.1\cdot i]\cdot t}$$

У разі трьох коренів характеристичного рівняння матрична експонента шукається у вигляді $e^{\boldsymbol{K}t} = \alpha_0\,\boldsymbol{E} + \alpha_1[\boldsymbol{K}] + \alpha_2[\boldsymbol{K}]^2$,

eK(t):= α0(t)·E + α1(t)·K + α2(t)·K²

$$uC(t) := (eK(t)\cdot x0)_3 + \left[\int_0^t (eK(t-\theta)\cdot LF(\theta))_3\, d\theta\right]$$

Спробуємо отримати відповідь $u_C(t)$:

$$uC(t)\ \Big|\begin{matrix} simplify \\ float,4\end{matrix} \to (34.08 - 14.08\cdot i)\cdot\left[e^{[(-180.7)+339.1\cdot i]\cdot t} + .7060\cdot i\cdot e^{[(-180.7)-339.1\cdot i]\cdot t} + .7082\cdot e^{[(-180.7)-339.1\cdot i]\cdot t} - .2046\cdot e^{(-338.7)\cdot t} - .8454e\text{-}1\cdot i\cdot e^{(-338.7)\cdot t} + 1.003 + .4144\cdot i\right]$$

За даною формулою MathCAD відмовляється давати значення напруги в окремі моменти часу. Тому зробимо перезадання $u_C(t)$:

$$uC(t) := (34.08 - 14.08\cdot i)\cdot\begin{bmatrix} e^{[(-180.7)+339.1\cdot i]\cdot t} + .7060\cdot i\cdot e^{[(-180.7)-339.1\cdot i]\cdot t} + .7082\cdot e^{[(-180.7)-339.1\cdot i]\cdot t} \ldots \\ + 0 - .2046\cdot e^{(-338.7)\cdot t} - .8454\cdot 10^{-1}\cdot i\cdot e^{(-338.7)\cdot t} + 1.003 + .4144\cdot i \end{bmatrix}$$

Значення напруги, наприклад, у момент часу t = 0,01 c:

$$uC(0.01) = 27.758 - 1.1i \times 10^{-3}$$

Примітка. Як і в задачі 7.43 значення α_0, α_1, e^{Kt} і, звичайно ж, u_C мають бути у будь-який момент часу дійсними числами. Але значення $u_C(0{,}01)$ виявилося комплексним. Це пояснюється тим, що при перезаданні коренів характеристичного рівняння λ_i було зроблено округлення відповідей до чотирьох значущих цифр, що внесло до подальших обчислень деяку похибку. Наприклад, у значенні напруги на конденсаторі з'явилася уявна частина. Проте, вона мала і нею можна знехтувати. Можна стверджувати, що реальне значення напруги на конденсаторі практично дорівнює модулю від отриманого комплексного значення. У зв'язку з цим будуємо графік модуля напруги u_C у функції часу t (рис. 7.67).

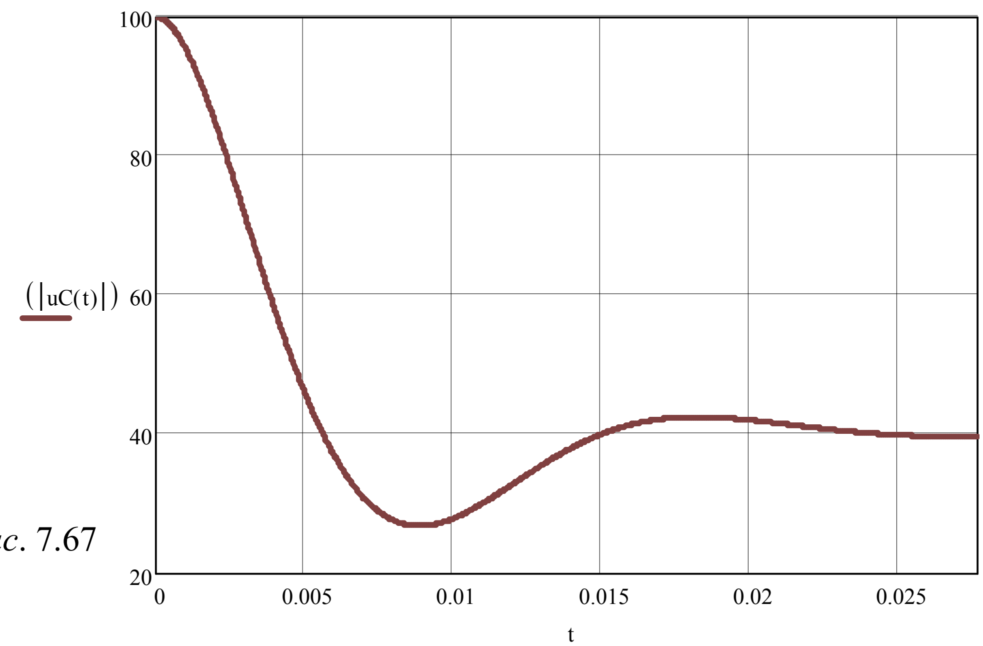

Рис. 7.67