ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ

Литература:

1. Нефедов В.Н., Осипова В.А. Курс дискретной математики. М.: МАИ, 1992. 262 с.

2. Кузнецов О.П., Адельсон-Вельский Г.М. Дискретная математика для инженера. М.: Энергоатомиздат, 1988.

3. Кук Д., Бейз Г. Компьютерная математика. М. Наука, 1990. 384 с.479 с.

4. Бронштейн Е.М. Множества и функции. Методические указания. Уфа: УГАТУ. 1988.

5. Житников В.П. Данина дискетка. 06.05.2004 года копирования.

Определение. Под *множеством* S будем понимать любое собрание определенных и различимых между собой объектов, мыслимое как единое целое. Эти объекты называются элементами множества S.

Существенной деталью является то, что для любого объекта можно установить, принадлежит он множеству или нет.

Множество задают (специфицируют) двумя способами:

-перечислением: A={1,2,3};

- характеристикой свойств, общих для элементов множества:

A = {X | P(X)} (A - это множество тех и только тех элементов X для которых P от X истинное предложение).

Примеры :||

A={1,2,3,4,5,6,7,8};

A- есть множество всех X, таких, что X-целое и X>0 и X<9;

A={X | X - целое, 0<X<9}.

Если элемент X принадлежит множеству A, то записывают $X \in A$, если не принадлежит, то $X \notin A$. Например, $7 \in A$, $6 \notin A$.

Определение. Множества A и B считаются *равными*, если они состоят из одинаковых элементов. Обозначение: A=B.

Например,

{1,2,3} = {2,1,3} = {2,1,1,3}

$\{\{1,2\}\} \neq \{1,2\}$ (Оболочка!)

То есть элемент не считается равным множеству, если даже множество состоит только из этого элемента.

Парадокс Рассела

Описанные выше понятия теории множеств с успехом могут быть использованы в началах анализа, алгебры, математической логики и т. д. Однако при более строгих рассмотрениях такое интуитивное восприятие может оказаться неудовлетворительным.

Приведем в качестве примера парадокс Рассела.

Можно указать такие множества, которые принадлежат самим себе как элементы, например, множество всех множеств.

Можно также указать множества, которые не являются элементами самих себя, например, множество $\{1,2\}$, элементами которого являются числа 1 и 2 (других элементов нет).

Рассмотрим теперь множество A **всех** таких множеств X, что X не есть элемент X.

Тогда, если это полученное множество A не есть элемент A (самого себя), то по определению, A также есть элемент A.

С другой стороны, если A есть элемент A, то A – одно из тех множеств X, которые не есть элементы самих себя, т.е. A не есть элемент A (не принадлежит A).

В любом случае A есть элемент A и A не есть элемент A.

Парадокс. Тем самым, интуитивная теория множеств – противоречива. Существует боле строгая формализация теории множеств.

Мы лишь укажем, что к парадоксам приводит в ряде случаев попытка объять необъятное: множество всех множеств (существующих в природе и в нашем сознании).

Отношения между множествами

Определение. Говорят, что A *содержится* в B или что A есть *подмножество* множества B, если каждый элемент множества A есть элемент множества B.

Отношение *включения* между множествами (A *содержится* в B) обозначается знаком $\subseteq$, т.е. $A \subseteq B$.

Определение. Если $A \subseteq B$ и $A \neq B$, то A есть *собственное* подмножество B и пишут $A \subset B$ ||.

Например, $\{1,2\} \subset \{1,2,3,4\}$, множество четных чисел есть собственное подмножество множества целых чисел и т.д.

Свойства отношения включения:

- $X \subseteq X$;
- если $X \subseteq Y$, $Y \subseteq Z$, то $Y \subseteq Z$, (отношение транзитивности);
- если $X \subseteq Y$, $Y \subseteq X$, то $X = Y$.

Не надо путать отношения $\subset$ и $\in$. Хотя $1 \in \{1\}$, $\{1\} \in \{\{1\}\}$, но $1 \notin \{\{1\}\}$, так как единственным элементом $\{\{1\}\}$ является $\{1\}$.

Определение. Множество, не содержащее элементов, называется *пустым* и обозначается $\varnothing$. Пустое множество есть подмножество любого множества.

Определение. Множество всех подмножеств А называют множеством - *степенью* или *Булеаном* и обозначается В(А).

Пример.

Если $A=\{1,2,3\}$, то $B(A)=\{\varnothing,\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},A\}$.

Утверждение: если А состоит из n элементов, то В(А) состоит из 2^n элементов.

Доказательство:

Перенумеруем все элементы множества А. Введем описание подмножества множества А в виде строки из n бит (ячеек, содержащих цифры 0 или 1). 0 на i-том месте означает, что i-тый элемент не принадлежит данному подмножеству, 1- что принадлежит.

0	1	0	0	…	1	0	1

Например, пустое множество обозначается строкой нулей, само А – строкой единиц.

Тогда число различных комбинаций нулей и единиц равно количеству различных двоичных чисел, которые можно записать в n битах, т.е. 2^n.

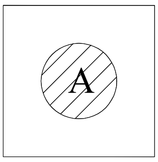
Действия над множествами

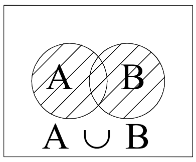
1) *Объединением* множеств А и В называется множество всех элементов, которые являются элементами А или В:

$A\cup B=\{x \mid x\in A$ <u>или</u> $x\in B\}$

Некоторые свойства: $A\subseteq A\cup B$, $B\subseteq A\cup B$.

Диаграммы Эйлера-Венна. Вводится понятие *универсального* множества U (множества, содержащего все возможные элементы). Этот *универсум* обозначается квадратом. Другие множества обозначаются кругами внутри этого квадрата.:

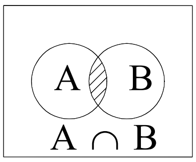




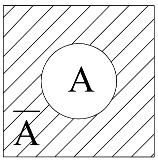
2) *Пересечением* множеств А и В называется множество всех элементов, которые являются элементами обоих множеств А и В:

$A\cap B=\{x \mid x\in A$ <u>и</u> $x\in B\}$

Некоторые свойства: $A\cap B\subseteq A\subseteq A\cup B$, $A\cap B\subseteq B\subseteq A\cup B$.

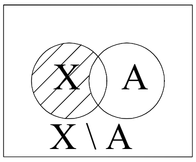


3) *Абсолютное дополнение* (множество всех элементов, не принадлежащих множеству А): $\overline{A} = \{x \mid x \notin A\}$

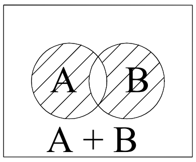


4) *Вычитание* множеств или относительное дополнение множества A до множества B: $B\backslash A=\{x \mid x\in B,\ x\notin A\}$.

Эта операция может быть осуществлена с помощью пересечения и дополнения: $B\backslash A=B\cap\overline{A}$.



5) *Симметрическая разность*: $A+B=(A\backslash B)\cup(B\backslash A)$



Свойства действий над множествами. Алгебра теории множеств

1	$A\cup B=B\cup A$ (коммутативность объединения $\cup$);	1′	$A\cap B=B\cap A$ (коммутативность пересечения);	
2	$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$ (ассоциативность $\cup$);	2′	$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$ (ассоциативность $\cap$);	
3	$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$ (дистрибутивность $\cup$ относительно $\cap$);	3′	$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$ (дистрибутивность $\cap$ относительно $\cup$);	
4	$A\cup\varnothing=A$;	4′	$A\cap U=A$;	
5	$A\cup\overline{A}=U$;	5′	$A\cap\overline{A}=\varnothing$;	
6	$A\cup A=A$;	6′	$A\cap A=A$;	
7	$A\cup U=U$;	7′	$A\cap\varnothing=\varnothing$;	
8	$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$ (закон де Моргана);	8′	$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$ (закон де Моргана);	
9	$A\cup(A\cap B)=A$ (закон поглощения);	9′	$A\cap(A\cup B)=A$ (закон поглощения).	

®

Доказательство свойства 3.

Во-первых, $A\cup(B\cap C)\subseteq(A\cup B)\cap(A\cup C)$.

Действительно, если $x\in A\cup(B\cap C)$, то $x\in A$ или $x\in B\cap C$.

Если $x \in A$, то $x \in A \cup B$ и $x \in A \cup C$. Тогда $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Если $x \in B \cap C$, то $x \in B$ и $x \in C$. Тогда $x \in B \cup A$ и $x \in C \cup A$, а значит, $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Во-вторых, $(A \cup B) \cap (A \cup C) \subseteq A \cup (B \cap C)$.

На самом деле, если $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$, то $x \in A \cup B$ и $x \in A \cup C$. Тогда $x \in A$ или $x \in B$ и (одновременно) $x \in C$, т.е. ($x \in B \cup C$). Тем самым, $x \in A \cup (B \cap C)$.

Из первого и второго следует справедливость утверждения.

Доказательство свойства 8 ($\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$).

Пусть $x \in \overline{A \cup B}$. Тогда $x \in U$ и $x \notin A \cup B$ $\Rightarrow$ $x \notin A$ и $x \notin B$ $\Rightarrow$ $x \in \overline{A}$ и $x \in \overline{B}$ $\Rightarrow$ $x \in \overline{A} \cap \overline{B}$ $\Rightarrow$ $\overline{A \cup B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$.

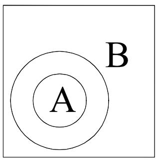
Пусть $x \in \overline{A} \cap \overline{B}$. Тогда $x \in \overline{A}$ и $x \in \overline{B}$ $\Rightarrow$ $x \in U$ и $x \notin A$ и $x \notin B$ $\Rightarrow$ $x \notin A \cup B$, т.е. $x \in \overline{A \cup B}$ $\Rightarrow$ $\overline{A} \cap \overline{B} \subseteq \overline{A \cup B}$.

В силу справедливости того и другого справедливо и доказываемое утверждение.

Задание.

1. Доказать эквивалентность соотношений

1) $A \subseteq B$;
2) $A \cap B = A$;
3) $A \cup B = B$.



2. Доказать

а) $(A \cap C) \cup (B \cap D) \subseteq (A \cup B) \cap (C \cup D)$;
б) $(B \setminus C) \setminus (B \setminus A) \subseteq A \setminus C$;
в) $A \setminus C \subseteq (A \setminus B) \cup (B \setminus C)$;

3. $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$;
$(A \setminus B) \cap C = (A \cap C) \setminus (B \cap C) = (A \cap C) \setminus B$.

4. Следует ли из $A \setminus B = C$ равенство $A = B \cup C$?
из $A = B \cup C$ равенство $A \setminus B = C$?

5. Верны ли равенства
$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \setminus C$;

$A \cup (B \setminus C) = (A \cup B) \setminus C$;

Существуют ли множества?

$A \cap B \neq \varnothing$, $A \cap C = \varnothing$, $(A \cap B) \setminus C = \varnothing$

Решение: $A \cap B \cap \overline{C} = B \cap (A \cap \overline{C}) = B \cap A \neq \varnothing$.

Доказать тождества:

а) $(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) = (A \cup B) \cap (A \cup \overline{B}) = A$

$$(A \cup B) \cap (A \cup \overline{B}) = A \cup (B \cap \overline{B}) = A$$

$$(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) = A \cap (B \cup \overline{B}) = A$$

б) $(\overline{A} \cup B) \cap A = A \cap B$

$$A \cap (B \cup \overline{A}) = (A \cap B) \cup (A \cap \overline{A}) = A \cap B$$

в) $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus C \setminus (B \setminus C)$

$$(A \cap \overline{B}) \cap \overline{C} = A \cap \overline{C} \cap (\overline{B \cap \overline{C}}) = A \cap \overline{C} \cap (\overline{B} \cup C) =$$

$$= A \cap (\overline{C} \cap \overline{B}) \cup A \cap (\overline{C} \cap C) = A \cap \overline{C} \cap \overline{B} = A \cap \overline{B} \cap \overline{C}$$

г) $A \setminus (B \cup C) = A \setminus B \setminus C$

$$A \cap (\overline{B \cup C}) = A \cap \overline{B} \cap \overline{C}$$

$$A \cap (\overline{B \cup C}) = A \cap (\overline{B} \cap \overline{C})$$

д) $A + (B + C) = (A + B) + C$

$$A + B = (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A})$$

$$A + [(B \cap \overline{C}) \cup (C \cap \overline{B})] =$$

$$= \{A \cap \overline{[(B \cap \overline{C}) \cup (C \cap \overline{B})]}\} \cup \{[(B \cap \overline{C}) \cup (C \cap \overline{B})] \cap \overline{A}\} =$$

$$= \{A \cap [\overline{(B \cap \overline{C})} \cap \overline{(C \cap \overline{B})}]\} \cup \{[(B \cap \overline{C}) \cup (C \cap \overline{B})] \cap \overline{A}\} =$$

$$= \{A \cap [(\overline{B} \cap \overline{C}) \cup (C \cap \overline{C}) \cup (B \cap \overline{B}) \cup (C \cap B)]\} \cup \{\overline{A} \cap [(B \cap \overline{C}) \cup (C \cap \overline{B})]\} =$$

$$= (A \cap \overline{B} \cap \overline{C}) \cup (A \cap B \cap C) \cup (\overline{A} \cap B \cap \overline{C}) \cup (\overline{A} \cap C \cap \overline{B})$$

Лекция №2

Отношения и функции.

Определение. Упорядоченной *парой* <x,y> называется совокупность, состоящая из двух элементов x и y, расположенных в определенном порядке.

Определение. Две пары <x, y> <u, v> считаются *равными* тогда и только тогда, когда x=u и y=v.

Определение. Бинарным или двуместным *отношением* ρ называют множество упорядоченных пар. Элементы x и y называют координатами или компонентами отношения ρ.

Записи $<x, y>\in\rho$ и $x\rho y$ означают, что пара <x, y> принадлежит бинарному отношению ρ.

Определение. *Областью определения* бинарного отношения ρ называют множество D_ρ={x | существует такое y, что $x\ \rho\ y$}. *Областью значений* ρ называют множество R_ρ={y | существует такое x, что $x\ \rho\ y$}.||

Примеры.

1. Множество {<1,2>,<2,4><3,3>,<2,1>} – бинарное отношение. D_ρ={1,2,3}, R_ρ={2,4,3,1}={1,2,3,4}.
2. {<x, y> | x, y – действительные числа и x=y} - отношение равенства на множестве действительных чисел (специальное обозначение «=»). $D_\rho=\{x \mid x\in R\}$, $R_\rho=\{y \mid y\in R\}$.
3. {<x, y> | x, y – для целых чисел x и y найдется положительное число z такое, что x+z=y} – отношение «меньше чем» на множестве целых чисел (специальное обозначение «<»). D_ρ и R_ρ - множество целых чисел.

Определение. Упорядоченным *набором* длины n или n-кой элементов называется последовательность, состоящая из n элементов $x_1, x_2, x_3,\ldots, x_n$, расположенных в определенном порядке и обозначается $<x_1, x_2, x_3,\ldots, x_n>$.

Определение. n-нарным отношением называют множество упорядоченных наборов длины n.

Произведение множеств

Определение. Пусть даны n множеств $A_1, A_2,\ldots, A_n$. Множество всех наборов $<x_1, x_2,\ldots, x_n>$ таких, что $x_1\in A_1,\ldots, x_n\in A_n$ называют прямым произведением $A_1, A_2,\ldots, A_n$ и обозначают $A_1\times A_2\times\ldots\times A_n$ или $\prod_{i=1}^{n} A_i$.

Произведение одинаковых множеств обозначается A^n.

При n=2 $X\times Y=\{<x, y> \mid x\in X, y\in Y\}$.

Каждое бинарное отношение ρ есть подмножество прямого произведения, так что $D_\rho \subseteq X$ и $R_\rho \subseteq Y$. Если $X=Y$ то говорят, что ρ есть отношение на множестве X.

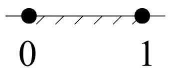
Примеры

1. Пусть $X=\{0,1\}$, $Y=\{x,y\}$. Тогда
$X\times Y=\{<0,x>, <0,y>, <1,x>, <1,y>\}$;
$Y\times X=\{<x,0>, <x,1>, <y,0>, <y,1>\}$.

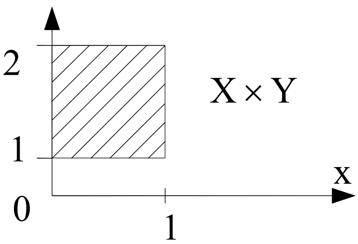
2. $X=\{1,2,3\}$, $Y=\{0,1\}$.
$X\times Y=\{<1,0>,<1,1>,<2,0>,<2,1>,<3,0>,<3,1>\}$;
$Y\times X=\{<0,1>,<0,2>,<0,3>,<1,1>,<1,2>,<1,3>\}$.
(Отметим, что $X\times Y \neq Y\times X$.)
К отношению «=» принадлежит одна пара $<1,1>$.
К отношению «$<$» в множестве $Y\times X$ принадлежат все пары, кроме $<1,1>$. В множестве $X\times Y$ таких пар нет.

3. $R\times R$ - плоскость.

4. $X = \{x \mid x \in [0,1]\}$



$Y = \{y \mid y \in [1,2]\}$
$X\times Y = \{<x, y> \mid x \in [0,1], y \in [1,2]\}$ – множество точек квадрата:



Определение. *Обратным* отношением для $\rho=\{<x,y> \mid <x,y>\in\rho\}$ называют отношение $\rho^{-1}=\{<y,x> \mid <x,y>\in\rho\}$.

Определение. *Композицией* отношений ρ_1 и ρ_2 называют отношение $\rho_2 O \rho_1=\{<x,y> \mid \exists z$ такое, что $<x, z>\in\rho_1$ и $<z, y>\in\rho_2\}$.

Свойства бинарных отношений

1) $(\rho^{-1})^{-1}=\rho$;

2) $(\rho_2 \, O \, \rho_1)^{-1}=\rho_1^{-1} \, O \, \rho_2^{-1}$.

Доказательство п. 2)

$<y,x>\in(\rho_2 \, O \, \rho_1)^{-1} \quad \Leftrightarrow \quad <x,y>\in\rho_2 O \rho_1; \quad \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \quad \exists z : <x,z>\in\rho_1$ и $<z,y>\in\rho_2 \quad \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \quad \exists z : <z,x>\in\rho_1^{-1}$ и $<y,z>\in\rho_2^{-1} \quad \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\ \exists z : \langle y,z\rangle \in \rho_2^{-1}$ и $\langle z,x\rangle \in \rho_1^{-1} \ \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\quad \langle y,x\rangle \in \rho_1^{-1} \circ \rho_2^{-1}$.

Сравнивая с исходным соотношением убеждаемся в справедливости равенства 2).

Пример: система линейных алгебраических уравнений $AB\overline{x} = \overline{y}$, где A и B - матрицы. Операция умножения матрицы на вектор устанавливает соответствие каждому вектору-операнду $\overline{x}$ результата операции $\overline{y}$. Это соответствие есть отношение $\langle \overline{x}, \overline{y} \rangle$.

С одной стороны

$\overline{x} = (AB)^{-1}\,\overline{y}$.

С другой стороны

$A^{-1}AB\overline{x} = A^{-1}\,\overline{y}$; $B^{-1}B\overline{x} = B^{-1}A^{-1}\,\overline{y}$.

Тем самым, $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Функции

Определение. Бинарное отношение f называется *функцией*, если из $\langle x,y\rangle \in f$ и $\langle x,z\rangle \in f$ следует, что y=z. (Функция является однозначной).

Две функции равны, если они состоят из одних и тех же элементов. Область определения: D_f, область значений: R_f.

Если $D_f = X$ и $R_f = Y$, то говорят, что f осуществляет *отображение* множества X на множество Y. Обозначения:

$f: X \to Y$ или $X \xrightarrow{f} Y$.

$\langle x,y\rangle \in f \ \Leftrightarrow\ y=f(x)$; y – образ, x – прообраз элемента y.

Примеры.

$\{\langle 1,2\rangle, \langle 2,3\rangle, \langle \Theta, \Delta\rangle\}$ – функция;

$\{\langle 1,2\rangle, \langle 1,3\rangle, \langle 2,4\rangle\}$ - не функция (1 отображается сразу на два элемента);

$\{\langle x, x^2+2x+1\rangle \mid x \in R\}$ - функция $y=x^2+2x+1$

Определение. n-местной функцией называют отношение f, если $f: X^n \to Y$. Обозначение $y=f(x_1,\ldots,x_n)$.

Определение. Функция $f: X \to Y$ называется *инъективной*, если

$\forall x_1, x_2, y : y=f(x_1), y=f(x_2) \Rightarrow x_1=x_2$. (То есть, одинаковые значения y могут соответствовать только одинаковым x).

Определение. Функция $f: X \to Y$ называется *сюръективной*, если

$\forall y \in Y\ \exists x \in X : y=f(x)$. (То есть, каждому значению y соответствует некоторое x).

Определение. Функция f называется *биективной*, если f одновременно сюрьективна и инъективна.

Говорят, что биективная функция f осуществляет взаимно однозначное соответствие между множествами X и Y.

Примеры.

$f(x)=e^x$ - инъективна, но не сюръективна при $x \in R$;

$f(x)=x^3-x$ - сюръективна, но не инъективна;

$f(x)=2x+1$, $f(x)=x^3+x$ – биективна.

Утверждение. Композиция двух функций есть функция.

Доказательство. Допустим, композиции gof принадлежат две пары:

$$\left.\begin{array}{l} <x,y>\in g\mathrm{o}f \\ <x,z>\in g\mathrm{o}f \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \exists u: xfu, ugy \\ \exists v: xfv, vgz \end{array}.$$

Поскольку f – функция, то u=v. Поскольку g – функция и u=v, то y=z, т.е. gof – функция.

Утверждение. Композиция двух биективных функций есть биективная функция. Следует из взаимной однозначности отображений, осуществляемых биективными функциями.

Определение. Тождественным отображением множества X в себя называется отображение

e_x: $X \to X$ такое, что $\forall x \in X$ $e_x(x)=x$. Тогда $f\mathrm{O}e_x=f$, $e_y\mathrm{O}f=f$.

Утверждение. Отображение $f:X \to Y$ имеет обратное отображение $f^{-1}:Y \to X$ тогда и только тогда, когда f – биекция.

Доказательство.

Пусть f – биекция. Поскольку f – сюръективна, то f^{-1} определена на множестве Y (каждому y соответствует определенное x).

В связи с инъективностью функции f обратное отношение f^{-1} является функцией (так как функция – однозначна, а инъективность означает невозможность соответствия различных x одному y). Прямое утверждение доказано.

Пусть теперь отображение f имеет обратное – f^{-1}, определенное на множестве Y со значениями во множестве X. Тогда f сюръективно.

Но f также инъективно, так как f^{-1} – функция.

Утверждение доказано.

Замечание. Для того, чтобы обратное отношение f^{-1} было функцией, достаточно, чтобы функция f была инъективной. Тогда для инъективных функций выполняются следующие свойства бинарных отношений

1) $(f^{-1})^{-1}=f$; 2) $(g\mathrm{O}f)^{-1}= f^{-1}\mathrm{O}g^{-1}$.

Свойства биективных функций.

3) $f^{-1}\mathrm{O}f=e_x$; 4) $f\mathrm{O}f^{-1}=e_y$.

Лекция №3

Специальные бинарные отношения

В данном разделе рассматриваются отношения элементов одного и того же множества X.

Определение. Отношение ρ на множестве X называется *рефлексивным*, если для любого $x \in X$ выполняется $x\rho x$.

Определение. Отношение ρ на множестве X называется *антирефлексивным*, если $x\rho x$ не выполняется ни для какого $x \in X$.

Определение. Отношение ρ на множестве X называется *симметричным*, если для любых $x, y \in X$ из $x\rho y \Rightarrow y\rho x$.

Определение. Отношение ρ на множестве X называется *антисимметричным*, если для любых $x,y \in X$ из $x\rho y$ и $y\rho x \Rightarrow x=y$.

Определение. Отношение ρ на множестве X называется *строго антисимметричным*, если для любых $x,y \in X$ из $\langle x,y\rangle \in \rho \Rightarrow \langle y,x\rangle \notin \rho$.

Определение. Отношение ρ на множестве X называется *транзитивным*, если для любых $x, y, z \in X$ из $x\rho y$ и $y\rho z \Rightarrow x\rho z$.

Определение. Рефлексивное, симметричное и транзитивное отношение на множестве X называется отношением *эквивалентности* на множестве X.

Примеры. ||

1. «=» на множестве целых (действительных) чисел – отношение эквивалентности.
2. Отношение геометрического подобия на множестве треугольников – отношение эквивалентности.
3. Сравнимость по модулю 2 (или n) отношение эквивалентности на множестве целых чисел.
4. Отношение принадлежности к одной группе студентов – отношение эквивалентности на множестве всех студентов.
5. Отношение «<» не рефлексивно, не симметрично, но транзитивно.

Определение. *Классом эквивалентности*, порожденным элементом x, называется подмножество множества X, состоящее из таких элементов $y \in X$, для которых $x\rho y$. Обозначение: [x]. Т.е. $[x]=\{y \in X \mid x\rho y\}$.

Примеры.

1. Отношение равенства: $\forall x \in Z \quad [x]=\{x\}$, т.е. каждый класс эквивалентности состоит из одного элемента – числа x.
2. Отношение сравнимости по модулю n: $[x]=\{x+kn, k \in Z\}$.
3. Отношение принадлежности к одной группе студентов: класс эквивалентности – группа.

Определение. *Разбиением* множества X называется совокупность попарно не пересекающихся подмножеств X, таких, что каждый элемент множества X $\in$ одному и только одному из этих подмножеств.

Примеры.

1. $X = \{1,2,3,4,5\}$. Разбиение: $\{\{1,2\},\{3,5\},\{4\}\}$.

2. Разбиением множества студентов института может быть совокупность групп.

Утверждение. Всякое разбиение множества X определяет на X следующее отношение эквивалентности ρ:

$x\rho y$ тогда и только тогда, когда x и y принадлежат одному подмножеству разбиения.

Справедливость очевидна.

Утверждение. Всякое отношение эквивалентности ρ определяет разбиение множества X на классы эквивалентности.

Определение. Совокупность классов эквивалентности элементов любого множества X по отношению эквивалентности ρ называется *фактор-множеством* множества X по отношению ρ и обозначается X/ρ.

Пример. Множество студенческих групп данного вуза является фактор-множеством множества студентов вуза по отношению принадлежности к одной группе.

®

Определение. Рефлексивное, антисимметричное и транзитивное отношение называется отношением *нестрогого частичного порядка* на множестве X

Обозначения $\underline{\mathrm{E}}$.

Примеры.

Отношения $x \le y$, $A \subseteq B$, подчиненность должностей – отношения частичного порядка на соответствующих множествах.

Определение. Антирефлексивное, антисимметричное и транзитивное отношение называется отношением *строгого частичного порядка* на множестве X

Обозначение E.

Примеры.

Отношения $x < y$, $A \subset B$ – отношения строгого частичного порядка на соответствующих множествах.

Определение. Отношение частичного порядка на множестве X, для которого $\forall$ два элемента сравнимы (т.е. $\forall x, y \in X$ $x \underline{\mathrm{E}} y$ либо $y \underline{\mathrm{E}} x$) называется отношением *линейного порядка* (строгого или нестрогого).

Пример.

1. Отношение $x \leq y$ – отношение линейного порядка на множестве действительных чисел.

2. $A \subseteq B$ таковым не является.

3. Как можно задать отношение частичного порядка на множестве $X \times X$? Определим отношение Парето

$\Pi : < a, b > \Pi < c, d > \quad \Leftrightarrow \quad a\rho c$ и $b\rho d$,

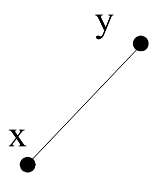
которое есть отношение частичного порядка.

?{В качестве примера рассмотрим подмножество целых чисел и в качестве ρ - отношение $\leq$. Рассмотрим две функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$. К множеству Парето принадлежат те пары (x_1, x_2), для которых справедливы неравенства $f_1(x_1) \leq f_1(x_2)$ и $f_2(x_1) \leq f_2(x_2)$}.

Определение. Говорят, что элемент x *покрывает* элемент y, если x E y и не существует такого элемента u, что x E u E y.

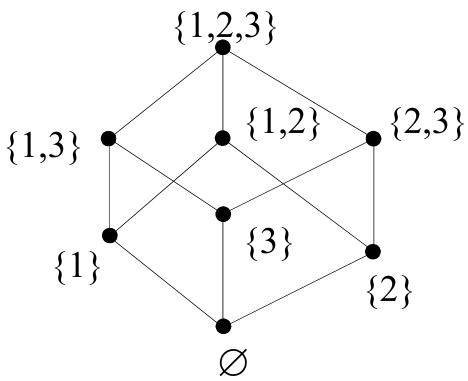
Любое частично упорядоченное множество можно представить в виде диаграммы Хассе. Если y покрывает x, то две точки, соответствующие этим элементам, соединяют отрезком, причем x располагают ниже y.

x E y



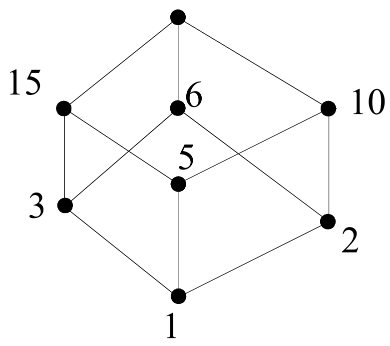
Пример. Отношение «быть подмножеством». Пусть A{1,2,3}

B(A) = {0, {1}, {2}, {3}, {1,2}, {1,3}, {2,3},{1,2,3}}



2. X = {1,2,3,5,6,10,15,30}

Отношение x E y $\Leftrightarrow$ y делится на x



3. X = {1,2,3,4,5,6,7,8}

Отношение линейного порядка $x\,\mathrm{E}\,y \Leftrightarrow x<y$.

Определение. Два частично упорядоченных множества X и Y называются *изоморфными*, если существует биективная функция $\varphi : X \to Y$ сохраняющая отношение частичного порядка. ||

Т.е $x\,\underline{\mathrm{E}}\,y \Rightarrow \varphi(x)\,\mathrm{E}\,\varphi(y)$

Задания.

1. Привести примеры отношений:

– не рефлексивного, но симметричного и транзитивного (позвонить по телефону, быть родственником);

– не симметричного, но рефлексивного и транзитивного (делимость нацело одного числа на другое, ≤);

– не транзитивного, но рефлексивного и симметричного (принадлежать одному множеству или обществу, $A \cap B \neq \varnothing$);

– не симметричного, не транзитивного, но рефлексивного (знать (узнавать) кого-то);

– не рефлексивного, не симметричного, но транзитивного (<,>);

– не рефлексивного, не транзитивного, но симметричного (≠);

2. Рассмотрим отношения (на множестве прямых на плоскости):

– параллельности прямых;

– перпендикулярности прямых.

Определить свойства этих отношений. Изменятся ли эти свойства, если рассмотреть прямые в пространстве? Плоскости в пространстве?

ЗАДАЧИ

1. В отношении большой-маленький не находятся понятия

   1. высокий-низкий
   2. глубокий-мелкий
   3. широкий-узкий
   4. долгий-короткий
   5. ™высокий-мелкий

2. В отношении целое-часть не находятся понятия

    1. год-месяц
    2. квартира-комната
    3. ™отец-ребенок
    4. страна-губерния
    5. школа-класс

3. В отношении общее-частное не находятся понятия

    1. мебель-стол
    2. время-час
    3. устройство-часы
    4. ™магазин-товар
    5. человечество-личность

4. В отношении процесс-результат не находятся понятия

    1. строительство-дом
    2. созревание-плод
    3. движение-цель
    4. обучение-квалификация
    5. ™строительство-стройка

5. В отношении объект-модель не находятся понятия

    1. одежда-выкройка
    2. движение-законы Ньютона
    3. ™лампа-свет
    4. класс-список учеников
    5. жизнь человека-биография

6. В отношении большой-маленький не находятся понятия

    1. Далекий-близкий
    2. Взрослый-ребенок
    3. Полный-худой
    4. ™богатый-бедный
    5. век-миг

7. В отношении целое-часть не находятся понятия

    1. учебник-раздел
    2. ружье-приклад
    3. ™комната-мебель
    4. кошка-хвост
    5. стадион-трибуна

8. В отношении общее-частное не находятся понятия

    1. самолет-Боинг
    2. лекарство-аспирин

3. механизм-весы
4. ™книжный шкаф-книга
5. болезнь-ангина

9. В отношении процесс-результат не находятся понятия

1. разбег-прыжок
2. питание-энергия
3. познание-истина
4. обучение-аттестат
5. ™взлет-посадка

10. В отношении объект-модель не находятся понятия

1. дом-план
2. микромир-квантовая механика
3. ™книга-текст
4. знания-оценка
5. предмет-тень

Понятие алгебры. Фундаментальные алгебры.

Литература : см. тему "Множества" и дополнительно:

1. Бронштейн Е.М. Математические этюды. Учебное пособие. Уфа: УРЭК. 1997. 64 с.

2. Горбатов В.А. Основы дискретной математики. Учебное пособие для вузов. М.: Высшая школа. 1986. 311 с.

Определение. *Алгеброй* А называется совокупность <M,S> множества М с заданными в нем операциями

$S = \{ f_1, f_2, \ldots, f_n \}$,

где множество М - *носитель*, S - *сигнатура* алгебры.
Обозначение $A = \langle M, S \rangle$.

Примеры.

1. Алгебра $\langle R, +, \times \rangle$ называется *полем действительных чисел*.
2. На множестве целых чисел определены операции сложения и умножения по модулю n (остатки от деления на n).
3. M - множество подмножеств универсума U (множество-степень или булеан). К основным операциям, определенным на нем, отнесем объединение и дополнение (пересечение определяется с помощью этих двух операций $\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \overline{\left(\overline{\mathrm{A}} \cup \overline{\mathrm{B}} \right)}$).

Определение. Алгебра вида $\langle M, f_{(2)} \rangle$ называется группоидом (индекс 2 здесь означает *местность* операции.

Если f_2 операция типа умножения (×), то группоид называют мультипликативным, если f_2 операция типа сложения (+), то аддитивным.

Обозначим f_2 как I. Тогда элемент e∈M называется *правым нейтральным элементом* группоида А, если ∀m∈M $m \mathrm{I} e = m$. Элемент e∈M группоида $A = \langle M, \mathrm{D} \rangle$ называется левым нейтральным элементом, если ∀m∈M $e \mathrm{I} m = m$. Если элемент является одновременно левым и правым нейтральным элементом, то его называют *двусторонним* нейтральным элементом или просто *нейтральным элементом*.

Утверждение. Группоид не может иметь более одного нейтрального элемента.

Действительно, если

∀m∈M $m \mathrm{I} e = e \mathrm{I} m = m$ и $m \mathrm{I} e' = e' \mathrm{I} m = m$, то $e' \mathrm{I} e = e'$, $e \mathrm{D} e' = e' \mathrm{D} e = e \Rightarrow e' = e$.

Если группоид мультипликативный, то нейтральный элемент называется *единицей* (1), если аддитивный, то нейтральный элемент называется нулем (0).

Группоид $\langle M, \mathrm{D} \rangle$, сигнатура которого удовлетворяет закону коммутативности

($\forall$x,y$\in$M xIy=yIx),

называется коммутативным или *абелевым*.

Группоид, в котором выполняется закон ассоциативности

($\forall$x,y,z$\in$M xI(yIz)=(xIy)Iz,

называется ассоциативным или *полугруппой*.

Полугруппа с единицей называется *моноидом*.

Полугруппа $\langle M, \mathrm{D} \rangle$, в которой выполнимы обратные операции:

($\forall$a,b$\in$M каждое из уравнений aIx=b, yIa=b обладает единственным решением), называется *группой*.

Группа, в которой операция коммутативна, называется *абелевой*.

Группа, все элементы которой являются степенями одного элемента a (для аддитивной группы - произведением ka), называется *циклической*. Циклическая группа всегда абелева.

Примеры.

1. Множество рациональных чисел, не содержащее нуля, с операцией умножения является абелевой группой.

2. Множество целых чисел с операцией сложения является абелевой циклической группой. Роль единицы играет 0, обратным к a является элемент -a.

3. Множество невырожденных квадратных матриц порядка n с операцией умножения является некоммутативной группой.

Определение. Алгебра $\langle M, +, \times \rangle$, которая по умножению является мультипликативным группоидом, по сложению - абелевой группой, причем умножение связано со сложением законами дистрибутивности

$$a \times (b + c) = a \times b + a \times c,$$

$$(b + c) \times a = b \times a + c \times a,$$

называется *кольцом*. Кольцо, в котором все отличные от нуля элементы составляют группу по умножению, называется *телом*. Тело, у которого мультипликативная группа абелева (коммутативна), называется *полем*.

Изоморфизм групп

В любом разделе математики одним из важнейших является вопрос, какие из рассматриваемых объектов считаются равными.

Определение. Две группы $\langle M, \circ \rangle$ и $\langle M', * \rangle$ называются изоморфными, если между множествами M и M' можно установить взаимно однозначное соответствие $a \leftrightarrow a'$ такое, что $a \circ b \leftrightarrow a' * b'$, где a и b - произвольные элементы множества M.

Лекция №5
Сравнение множеств

Литература:

1. Бронштейн Е.М. Множества и функции. Методические указания. Уфа: УГАТУ. 1988.

Определение. Множества А и В называются равномощными, если между А и В существует взаимно однозначное соответствие (т.е. биективное отображение $f : A \to B$).

Утверждение. Отношение равномощности множеств является отношением эквивалентности.

Доказательство.

1) Рефлексивность можно установить, отображая множество само на себя с помощью функции f(x)=x. То есть |A|=|A|.

2) Симметричность. Если $f : A \to B$ взаимно однозначное соответствие, то и $f^{-1} : B \to A$ - также взаимно однозначное соответствие.

3) Транзитивность $a_i \leftrightarrow b_i, b_i \leftrightarrow c_i \Rightarrow a_i \leftrightarrow c_i$. Т. е. |A|=|B|, |B|=|C| $\Rightarrow$ |A|=|C|.

Рассмотрим разные случаи.

Случай 1. А и В конечны.

Утверждение. В случае, когда А и В конечны (содержат конечное число элементов) А и В равномощны тогда и только тогда, когда количество элементов А = количеству элементов В.

Доказательство ||

а) Если количество элементов одинаково, то перенумеруем их и установим взаимно однозначное соответствие

$$
\begin{array}{l}
a_1, a_2, a_3 ... a_n \\
> \ > \ > \quad > \\
b_1, b_2, b_3 ... b_n
\end{array}
$$

Следовательно, множества равномощны.

б) Пусть множества А и В равномощны. Тогда существует взаимно однозначное соответствие между элементами А и В $a_i \leftrightarrow b_i$. Следовательно, их количество должно быть одинаковым.

Поэтому для конечных множеств А можно принять, что мощность |A|=количеству элементов А.

Случай 2. Бесконечные множества

Мощность целого может равняться мощности части. Рассмотрим множества

$\{1,2,3...\}$ $\{2,4,6...\}$

a_i b_i

Можно установить ($\leftrightarrow$) соответствие: $b_i = 2a_i$. Следовательно, множества равномощны.

Определение. Говорят, что мощность множества A не превосходит мощности множества B (пишут $|A| \le |B|$), если $\exists$ множество $B_1 \subseteq B : |A| = |B_1|$.

В частности, если $A \subseteq B$, то $B_1 = A$.

Определение. Говорят что |A| меньше |B| ($|A| < |B|$), если:

1) $|A| \le |B|$

2) $|A| \ne |B|$

Теорема. Отношение $|A| \le |B|$ на совокупности множеств есть отношение частичного порядка для мощностей множеств.

1) Рефлексивность $|A| = |A| \Rightarrow |A| \le |A|$.

2) Транзитивность $|A| \le |B|$ $|B| \le |C| \Rightarrow |A| \le |C|$.

Существуют подмножества $B_1 \subseteq B$ и $C_1 \subseteq C$ и $\leftrightarrow$ отображения такие, что $f: A \to B_1$, $g: B \to C_1$. Тогда $g \circ f$ - $\leftrightarrow$ соответствие между A и каким-то подмножеством C.

3) Антисимметричность $|A| \le |B|; |B| \le |A| \Rightarrow |A| = |B|$ (без док-ва).

Теорема. $|A| \le |B|$ $|A| < |B|$ - отношения линейного порядка (без док-ва).

Теорема Кантора. Пусть N – множество натуральных чисел, A=[0,1] – отрезок действительной оси. Тогда |N|<|A|.

Доказательство.

1) Во-первых, $|N| \le |[0,1]|$, поскольку подмножество множества A $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}...$ очевидно, равномощно N.

2) Неравенство $|N| \ne |[0,1]|$ докажем от противного.

Допустим, |N|=|A|. Тогда $\exists \leftrightarrow$ $f : N \to [0,1]$.

Любое число из A можно представить в виде бесконечной десятичной дроби

$f(1)=a_1=0,a_{11}a_{12}\ldots$

$f(2)=a_2=0,a_{21}a_{22}\ldots$

$f(3)=a_3=0,a_{31}a_{32}a_{33}\ldots$

………………..

$f(n)=a_n=0,a_{n1}a_{n2}a_{n3}\ldots a_{nn}\ldots$

………………..

Построим число $b=0,b_1b_2b_3\ldots$ следующим образом:

$b_i = \begin{cases} 1, & a_{ii} \neq 1 \\ 2, & a_{ii} = 1 \end{cases}$ $\Rightarrow$ $b\in[0,1]$ и $b\neq a_n$, поскольку b отличается от a_n в n-ном знаке.

Приходим к противоречию. Теорема доказана.

Счетные множества

Определение. Множество, равномощное множеству натуральных чисел $|A|=|N|$ называется счетным.

Примеры.

$\{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots\}$

N = 1, 2, 3, 4, 5   A = 0, 1, -1, 2, -2, 3, -3

$$f: N \to A \qquad f(N) = \begin{cases} n/2, & n - \text{четн} \\ -\dfrac{n-1}{2}, & n - \text{нечетн} \end{cases}$$

Теоремы о счетных множествах

Теорема 1. $\forall\infty$ множество содержит счетное подмножество.

Док-во.

Выберем элемент $a_1\in A$ (A не пусто, так как оно бесконечно); выберем элемент $a_2\in A\setminus\{a_1\}$ ($A\setminus\{a_1\}$ не пусто, так как A бесконечно); и т.д. В результате получим множество, каждому элементу которого сопоставлено натуральное число n.

Теорема 2. $\forall\ \infty$ подмножество B счетного множества A счетно.

Д-во. Согласно Т1 из ∞ множества B можно выделить счетное C.

Тогда $C\subseteq B\subseteq A$. В силу определения мощности $|C|\leq|B|\leq|A|$. Так как A и C – счетные, то $|A|=|C|$. Т. е. $|A|\leq|B|\leq|A|$. Отсюда следует, что $|B|=|A|$.

Тем самым, счетное множество равномощно своей ∞ части.

Т-ма 3. Объединение конечного или счетного семейства счетных множеств – есть счетное множество.

Доказательство. Пусть $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$

$A_1=\{a_{11},a_{12},\ldots\}$,

$A_2=\{a_{21},a_{22},\ldots\}$,

$A_3=\{a_{31},a_{32},a_{33},\ldots\}$,

………………..

$A_n=\{a_{n1},a_{n2},a_{n3},\ldots,a_{nn},\ldots\}$,

………………..

Расположим элементы A в следующем порядке

$a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{31}, a_{22}, a_{13}, a_{14}, a_{23}, a_{32}, a_{41}, \ldots$

Тем самым, получили взаимно однозначное отображение N на A.

Если в множествах A_1, A_2, A_3,… есть общие элементы, то их объединение A есть подмножество рассмотренной выше последовательности. Но согласно теореме 2 оно счетно.

Следствие 1. Если A и B счетные, то A x B – счетное.

Следствие 2. множество рациональных чисел – счетное

	1	2	3	4
1	1/1	1/2	1/3	1/4
2	2/1	2/2	2/3	2/4
3	3/1	3/2	3/3	3/4
4	4/1	….	….	….
	….	….	….	….

Следующая теорема позволяет утверждать, что не существует «самого большого» по мощности множества.

Теорема. Мощность булеана множества всегда больше мощности самого множества, т.е $|M|<|B(M)|$.

Доказательство.

Так как $M \subseteq B(M)$, то $|M| \leq |B(M)|$.

Допустим, что $|M|=|B(M)|$. Значит, $\exists \leftrightarrow$ соответствие $f: M \rightarrow B(M)$, т.е. каждому эл-ту $x \in M$ поставлено в соответствие некоторое множество $\{x_{i1}, x_{i2}, \ldots\}=f(x)$. Возможны ситуации, когда $x \in f(x)$ и когда $x \notin f(x)$.

Выделим множество $P=\{x \mid x \notin f(x)\}$. Тогда $\exists$ эл-т $y \in M$ такой, что $f(y)=P$ (поскольку соответствие $f: M \rightarrow B(M)$, между эл-тами x и подмнож-вами $\leftrightarrow$, а B(M)- булеан, то каждому подмн-ву в том числе и P поставлен в соответствие некоторый эл-т $y \in M$).

Приведем это заключение к противоречию. Возможны два случая: либо $y \in P$, либо $y \notin P$.

Пусть $y \in P$. Тогда по определению P $y \notin P$. Противоречие.

Пусть $y \notin P$. Поскольку в P входят все эл-ты $x \notin f(x)$, то $y \in P$. Опять противоречие.

Теорема доказана.

Теорема. Мощность булеана (множества-степени) счетного множества = мощности континуума: $|P(N)|=|\,[0,1]\,|$.

Доказательство.

Пусть 0,010…1… – запись любого числа из A=[0,1] в 2ой системе счисления.

Сопоставим этому числу подмножество N, состоящее из чисел, равных номерам разрядов, в которых записана единица. Этим устанавливается взаимно однозначное соответствие между B(N) и [0,1].

Примеры.

Установить равномощность или неравномощность множеств

1) $A = [0,1]$, $B \in [1,2]$

$x \in A \qquad y \in B \qquad y = x + 1$

2) $A = [0,1]$, $B = [0,2] \qquad y = 2x$

3) $A = [0,1]$, $B = [a,b] \qquad y = a + x\,(b - a)$

4) $A = [0,1)$, $B = [1, \infty) \qquad y = \dfrac{1}{1-x}$

5) $A = [0,1]$, $B = [0,1) \qquad y=x,\ x\neq 2^{-(n-1)};\ y=2^{-(n-1)}/2,\ x=2^{-(n-1)},\ n=1,2,3,\ldots$

Основные соотношения комбинаторики

Литература

1) Бронштейн Е.М. Комбинаторика в задачах. Методические указания. Уфа: УГАТУ. 1988.

1. Основной принцип комбинаторики.

1.1. От Москвы до Уфы можно добраться поездом, самолетом, теплоходом, а от Уфы до райцентра поездом, самолетом, автобусом. Сколькими способами можно в совокупности добраться от Москвы до райцентра через Уфу?

1.2. Есть конверты без марок 5 видов и марки 4 видов. Сколькими способами можно выбрать конверт с маркой?

1.3. Из 12 слов мужского рода, 9 женского и 10 среднего нужно выбрать по одному слову каждого рода. Сколькими способами можно сделать этот выбор?

1.4. Сколькими способами можно выбрать на шахматной доске белую и черную клетки, не лежащие на одной горизонтали или вертикали?

1.5. (Обобщение). Если элемент a_1 можно выбрать n_1 способами, после каждого выбора следующий за ним элемент a_2 можно выбрать n_2 способами, …, после выбора элементов a_1, …, a_{k-1} элемент a_k выбирается n_k способами, т.е.

$a_1 \to n_1$,

$a_2 \to n_2$,

………

$a_m \to n_m$,

то сколькими способами можно выбрать вектор $(a_1, \ldots, a_m)$? Ответ: $n_1 \times n_2 \times \ldots \times n_m$.

Ответ задачи 1.5 называется основным принципом комбинаторики или принципом произведения.

2. Размещение с повторениями

2.1. Замок в автоматической камере хранения содержит 4 диска, на каждом из которых записаны цифры 0,1,…,9. Сколько различных кодов можно получить?

2.2. В группе из 25 человек разыгрывается три различных приза. Призы могут достаться одному человеку, двоим, троим. Сколькими способами призы могут распределиться?

2.3. В пачке 20 экзаменационных билетов. Каждый студент получает билет, отвечает на него, билет возвращается в пачку и после этого заходит следующий студент. Сколько различных вариантов раздачи билетов существует для 10 студентов?

2.4. На складе имеется 7 рулонов ткани различных цветов и 5 различных стульев. Каждого рулона достаточно для обивки всех стульев. Сколькими способами можно обить стулья?

2.5. (Обобщение). В пачке n карточек с номерами. Исследователь достает карточку, записывает номер и возвращает карточки назад. После этого он снова достает карточку и т.д. Сколько различных записей может быть после того, как доставалось k карточек? . (Комбинации 1-2-3, 1-3-2 и т.д. считаются разными.) Ответ: n^k.

3. Размещение без повторений

3.1. Сколько словарей надо издать, чтобы можно было непосредственно выполнять переводы с любого из 5 языков на любой другой? А если языков 10?

3.2. Каков будет ответ в задаче 2.2, если каждый человек может получить лишь один приз?

3.3. Каков будет ответ в задаче 2.3, если экзаменатор не возвращает в пачку использованный билет?

3.4. Каков будет ответ в задаче 2.4, если каждого рулона ткани хватит только на один стул?

3.5. Пусть в коробке имеется n карточек. Достается одна из них, причем в коробку не возвращается. Так повторяется k раз. Сколько существует различных комбинаций выбора карточек. (Комбинации 1-2-3, 1-3-2 и т.д. также считаются разными.

3.5. (Обобщение). Пусть дано множество A, содержащее n элементов. Сколько существует различных векторов в множестве A^k, все компоненты каждого из которых различны?

Ответ: $n(n-1)(n-2)....(n-k+1)=\dfrac{n!}{(n-k)!}=A_n^k$ - число размещений из n по .k.

4. Перестановки

4.1. Сколькими способами можно сформировать очередь из 5 человек?

4.2. Каков будет ответ в задаче 3.3, если студентов 20?

4.3. Каков будет ответ в задаче 3.4, если стульев 7?

4.4. (Обобщение). Сколькими способами элементы n-элементного множества A можно расположить в цепочку?

Ответ: $P_n=n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot1=n!$ - число перестановок из n.

5. Сочетания без повторений

5.1. В шахматном турнире участвует 10 человек. Сколько партий должно состояться, если каждая пара игроков должна встретиться один раз?

5.2. Из колоды, содержащей 36 карт, игрок получает 6 штук. Сколько различных наборов карт он может получить?

5.3. Каков ответ в задаче 3.2, если все призы одинаковые?

5.4. Каков ответ в задаче 3.4, если все стулья одинаковые?

5.5. (Обобщение). Сколько различных m- элементных подмножеств содержится в n - элементном множестве?

Ответ:

$C_m^n = \frac{A_m^n}{P_n} = \frac{m!}{n!(m-n)!} = \frac{m(m+1)...(m-n+1)}{n!}$ - число сочетаний из n по m. Числа C_n^m иначе называются биномиальными коэффициентами.

Указание: Каждое сочетание расщепляется на P_m размещений.

6. Свойства биномиальных коэффициентов

$C_m^n = \frac{m!}{n!(m-n)!}$, m≥n

Принимая во внимание, что 0!=1 из определения C_m^n получим

$C_m^0 = C_m^m = 1,\ C_m^1 = m$.

Свойства биномиальных коэффициентов

1. $C_m^{m-n} = C_m^n$

$$C_m^{m-n} = \frac{m!}{(m-n)!(m-(m-n))!} = \frac{m!}{(m-n)!n!} = C_m^n$$

2. $C_m^n = C_{m-1}^n + C_{m-1}^{n-1}$

$$C_{m-1}^n + C_{m-1}^{n-1} = \frac{(m-1)!}{n!(m-n-1)!} + \frac{(m-1)!}{(n-1)!(m-1-(n-1))!} =$$

$$= \frac{(m-1)!}{n(n-1)!(m-n-1)!} + \frac{(m-1)!}{(n-1)!(m-n)(m-n-1)!} =$$

$$= (m-1)!\frac{m-n+n}{n(n-1)!(m-n)(m-n-1)!} = \frac{m!}{n!(m-n)!} = C_m^n$$

3. $C_n^i C_i^m = C_n^m C_{n-m}^{i-m}$

$$C_n^i C_i^m = \frac{n!}{i!(n-i)!}\frac{i!}{m!(i-m)!} = \frac{n!}{m!(i-m)!(n-i)!} =$$

$$= \frac{n!(n-m)!}{m!(i-m)!(n-i)!(n-m)!} = \frac{n!}{m!(n-m)!}\frac{(n-m)!}{(i-m)!(n-i)!} = C_n^m C_{n-m}^{i-m}$$

Бином Ньютона

$$\left(x+y\right)^m = \sum_{n=0}^{m} C_m^n x^n y^{m-n}$$

Доказательство методом полной математической индукции

Для m=1

$$\left(x+y\right)^1 = y + x = C_1^0 x^0 y^1 + C_1^1 x^1 y^0 = \sum_{n=0}^{m} C_m^n x^n y^{m-n}$$

Индукционный переход

$$\left(x+y\right)^m = \left(x+y\right)\left(x+y\right)^{m-1} = \left(x+y\right)\sum_{n=0}^{m-1} C_{m-1}^n x^n y^{m-n-1} =$$

$$= x\sum_{n=0}^{m-1} C_{m-1}^n x^n y^{m-n-1} + y\sum_{n=0}^{m-1} C_{m-1}^n x^n y^{m-n-1} =$$

$$= \sum_{n=0}^{m-1} C_{m-1}^n x^{n+1} y^{m-n-1} + \sum_{n=0}^{m-1} C_{m-1}^n x^n y^{m-n} =$$

$$= C_{m-1}^{m-1} x^m y^0 + \sum_{n=0}^{m-2} C_{m-1}^n x^{n+1} y^{m-n-1} + \sum_{n=1}^{m-1} C_{m-1}^n x^n y^{m-n} + C_{m-1}^0 x^0 y^m =$$

(заменим в первой сумме n на n'=n+1)

$$= C_{m-1}^0 x^0 y^m + \sum_{n'=1}^{m-1} C_{m-1}^{n'-1} x^{n'} y^{m-n'} + \sum_{n=1}^{m-1} C_{m-1}^n x^n y^{m-n} + C_{m-1}^{m-1} x^m y^0 =$$

$$= C_m^0 x^0 y^m + \sum_{n=1}^{m-1}\left(C_{m-1}^n + C_{m-1}^{n-1}\right) x^n y^{m-n} + C_m^m x^m y^0 =$$

(согласно свойству 2)

$$= C_m^0 x^0 y^m + \sum_{n=1}^{m-1} C_m^n x^n y^{m-n} + C_m^m x^m y^0 = \sum_{n=0}^{m} C_m^n x^n y^{m-n} ,$$

что и требовалось доказать.

6.3. Треугольник Паскаля есть таблица, составленная так:

			1			
		1		1		
	1		2		1	
1		3		3		1

Каждое число равно сумме двух, стоящих над ним(считаем, что на пустых местах стоят нули). Как найти m число в n строке?

$$C_n^m = C_n^{n-m}$$
$$C_{n+1}^m = C_n^m + C_n^{m+1}$$

7.Разбиения множества.

C_n – это фактически число способов, которыми можно n – элементное множество разбить на два подмножества – одно из m элементов, а второе – из (n-m) элементов.

7.1.Из группы в 25 человек 12 человек необходимо направить на практику на одно предприятие, 10 – на второе, а 3 – на третье. Каким числом способов это можно сделать?

7.2.Имеется 4 предмета 1 типа, 3 – второго, 5 – третьего. Сколько существует различных перестановок этих предметов?

7.3.(Обобщение).n элементов надо разбить на m групп пак, чтобы в первой было r_1, во второй - r_2,…,в m - r_m элементов.

Сколькими способами это можно сделать? ($r_1+\ldots+r_m = n$).

Ответ: $n!/r_1! \ldots r_m!$.

8.Сочетания с повторениями.

8.1.В магазине продаются конфеты двух видов. Сколькими способами можно купить четыре конфеты? А если надо купить 8 конфет 4 видов?

8.2.Каков будет ответ в задаче 2.4, если стулья одинаковые?

8.3.Сколько целых неотрицательных решений имеет уравнение

$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7 = 5$? (Сравните с задачей 8.2).

8.4.Сколько существует различных r – элементных множеств, составленных из предметов n видов?

Ответ: C^r_{n+r-1}

9. Разные задачи.

Вы познакомились с основными приемами элементарной комбинаторики. В следующих задачах используются эти приемы.

9.1. Сколькими способами можно сделать трехцветный флаг с горизонтальными полосами равной ширины, если имеется материя 6 цветов? А если один из цветов должен быть красным? А если допускаются полоски одноцветные?

9.2. Сколькими способами можно выбрать три краски из имеющихся шести?

9.3. Сколькими способами можно выбрать из колоды в 36 карт по одной карте каждой масти? А если среди выбранных карт не должно быть ни одной пары карт, отличающихся лишь мастью?

9.4. Пять девушек и трое юношей разбивается на две команды по 4 человека. Сколькими способами это можно сделать? А если необходимо, чтобы в каждой команде было по одному юноше?

9.5. У одного человека есть 7 книг, у другого – 9. Сколькими способами они могут обменять три книги одного на три книги другого?

9.6. Сколько различных слов можно получить, переставляя буквы слова “математика”? А слова “ингредиент”?

9.7. Из спортивного клуба, насчитывающего 30 членов, надо составить команду из 4 человек для участия в забеге на 100 м. Сколькими способами это можно сделать? А для участия в эстафете 4*100м?

9.8. Имеется 20 абонентов телефонной сети. Сколькими способами можно одновременно соединить три пары абонентов?

9.9 Сколькими способами могут встать в круг 5 юношей и 5 девушек? А если необходимо, чтобы никакие двое юношей или девушек не стояли рядом?

9.10. Сколько различных ожерелий можно составить из 10 различных бусинок? А если бусинки двух видов – 2 черных и 8 белых?

9.11. Рота состоит из 3 офицеров, 6 сержантов и 60 рядовых. Сколькими способами можно выделить из них отряд, состоящий из офицера, двух сержантов и 20 рядовых? А если в отряд должны войти командир роты и старший по возрасту из сержантов?

9.12. У ювелира есть 5 одинаковых изумрудов, 8 одинаковых рубинов и 7 одинаковых сапфиров. Сколькими способами он может выбрать из них три камня для брошки?

9.13. Труппа состоит из 10 артистов. Сколькими способами можно выбирать из нее 6 человек для участия в спектаклях так, чтобы эти составы не совпадали друг с другом?

9.14. Пусть дан n-угольник такой, что никакие три его диагонали не пересекаются в одной точке, не являющейся вершиной. Сколько точек пересечения диагоналей имеется внутри n-угольника? А всего на плоскости?

9.15 Дано m предметов одного сорта и n другого. Найти число выборок, составленных из r предметов одного сорта и S другого.

9.16 Сколькими способами можно выбрать 12 человек из 17, если данные 2 человека не могут быть выбраны вместе? А если данные три человека?

9.17. На полке находятся m+n различных книг, из которых m в черных переплетах, а n – в красных. Сколько существует перестановок книг, при которых книги в черных переплетах занимают первые m мест? Сколько ситуаций, в которых все книги в черных переплетах стоят рядом?

10. Производящие функции.

10.1.Пусть $A = \{A_1,\ldots,A_n\}$. Каков смысл коэффициента при z^k ($k \le n$) многочлена $e_n(z) = (1+A_1z)\ldots(1+A_nz)$?

Ответ: множество сочетаний из n по k.

10.2.(Продолжение). Каков смысл коэффициента при z^k многочлена $d_n(z)= (1+z)^n =(1+z) \ldots (1+z)$?

Ответ: число сочетаний C_n^k. Сравните с задачей 5.7.

Многочлены вида $e_n(z)$ называются энумераторами, а $d_n(z)$ – денумераторами сочетаний.

10.3. Исходя из задачи 10.2, найдите суммы:

1) $C_n^0+C_n^1+\ldots+C_n^n$ $(1+1)^n=2^n$.

2) $C_n^0-C_n^1+\ldots+(-1)^n C_n^n$ $(1-1)^n=0$

3) $C_{2n}^0+C_{2n}^2+\ldots+C_{2n}^{2n}$ $(=((1+1)^{2n}+(1-1)^{2n})/2)$ $(1+1)^{2n}=2^{2n}$, $(1-1)^{2n}=0$.

4) $C_{2n}^1+C_{2n}^3+\ldots+C_{2n}^{2n-1}$ $(=((1+1)^{2n}-(1-1)^{2n})/2)$.

10.4. Попробуйте найти суммы из 10.3 по определению величин C_n^m.

10.5. Получите результат задачи 6.2 из равенства $d_n(z)=d_{n-1}(z)\cdot$ $\cdot(1+z)$.

10.6. Каков смысл коэффициента при z^k произведения $e_n(z)=(1+a_1z+a_2z^2+\ldots)\ldots(1+a_nz+a_n^2z^2+\ldots)$?

10.7. (Продолжение). Каков смысл коэффициента при z^m произведения $e_n(z)=(1+z+z^2+\ldots)^n$?

Вспомните, что при $|z|<1$ $1+z+z^2+\ldots=1/(1-z)$. Тогда $d_n(z)=(1-z)^{-n}$. Разложите $d_n(z)$ вряд Маклорена. Сделайте вывод. Сравните ответ с задачей 8.4.

10.8. Запишите самостоятельно энумераторы и денумераторы для нахождения сочетаний с повторениями, в которых элемент каждого из n видов встречается:

1) хотя бы один раз;
2) четное число раз;
3) 1 вида не менее k_1, 2 – не менее k_2, … , n – не менее k_n раз;

4) 1 вида – не более k_1, 2 – не более k_2, … , n – не более k_n раз;

10.9. (Продолжение 10.2). Каков смысл коэффициентов при $z^k/k!$ В $d_n(z)$? Ответ: число размещений из n по k, поскольку размещений в k! раз больше, чем сочетаний.

10.10. Записать денумератор для размещений из n с повторениями. Ответ: $(1+z+z^2/2!+\ldots)^n$. Преобразуйте и получите коэффициенты в разложении. Сравните с задачей 2.5.

10.11. Запишите денумератор для размещений из трех с повторениями, где каждый элемент встречается не менее 1 раза. Сколько будет размещений такого вида, содержащих 5 элементов?

11. ИПОЛЬЗОВАНИЕ РЕКУРЕНТНЫХ СООТНОШЕНИЙ

Если $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ -некоторые числа, то можно построить степенной ряд $\sum a_n z^n$. Иногда удается идти обратным путем – по свойству ряда как функции от z устанавливать свойства членов последовательности.

11.1. Пусть f_n^r – число сочетаний с повторениями из n видов по r (см. задачу 8.4):

1) проверьте, что $f_n^1=n$, $f_n^0=1$;
2) докажите, что $f_n^r=f_n^{r-1}+f_{n-1}^r$;
3) пусть $A_n(z)=\sum_{r=0}^{\infty} f_n^r z^r$, докажите, что $A_n(z)=A_{n-1}(z)/(1-z)$;
4) получите формулу для $A_n(z)$, не содержащую $A_i(z)$ при $i<n$. (Сравните с задачей 10.7).

11.2. (Числа Фибоначчи). Числами Фибоначчи называются члены последовательности, заданные по правилу:

$B_0=B_1=1$, $B_n=B_{n-1}+B_{n-2}$ при $n>=2$.

Пусть $F(z)=\sum_{n=0}^{\infty} B_n z^n$

1) докажите, что $F(z)=1+zF(z)+z^2F(z)$;
2) найдите F(z);
3) воспользуйтесь разложением рациональной дроби на простейшие, разложением функции 1/(z-a) в степенной ряд и найдите B_n.

Ответ: $B_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2}\right)$

12. ФОРМУЛА ВКЛЮЧЕНИЙ И ИСКЛЮЧЕНИЙ

12.1. В группе 25 студентов. 15 занимается лыжами, 12 – коньками, а 8 – и тем и другим. Сколько студентов не занимается ни тем, ни другим.

12.2. (Обобщение). Проверьте, что если А и В- конечные множества, то $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$. Здесь $|A|$ -число элементов множества А.

12.3. Из 25 человек 15 занимается футболом, 12 – волейболом и 13 – баскетболом; 12 – футболом и баскетболом, 8 занимается всеми тремя видами спорта. Сколько человек занимается хотя бы одним видом спорта?

12.4. (Обобщение). Проверьте, что если А, В, С – конечные множества, то

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

12.5. (Обобщение). Как будет выглядеть аналог формул из задач 12.2. 12.4. для n множеств?

Ответ:

$$\left|A_1 \cup \ldots \cup A_n\right| = \sum_i \left|A_i\right| - \sum_{i<j} \left|A_i \cap A_j\right| + \ldots + (-1)^{n+1} \left|A_1 \cap \ldots \cap A_n\right|.$$

Указание: Один из путей доказательства – проверить, что каждый элемент $a \in A_1 \cup \ldots \cup A_n$ в правой части дает слагаемое 1. Для этого предположите, что $a \in A_1 \cap \ldots \cap A_k$, $a \notin A_{k+1} \cup \ldots \cup A_n$.

12.6. Сколько существует перестановок чисел 1,…, n, в которых :

1) число k расположено на k месте?
2) числа k_1, k_2 расположены на своих местах?
3) Числа k_1, …, k_m расположены на своих местах?
4) хотя бы одно из чисел 1,…, n расположено на своем месте?
5) ни одно из чисел 1 , …, n не расположено на своем месте (беспорядки)?

12.7. Пусть D_n – число беспорядков среди перестановок чисел 1, …, n (см. задачу 12.6 п.5). Найти $\lim\limits_{n \to \infty} D_n / n!$. Ответ несколько неожиданный:

1/e.

13. ПОРЯДОК КОМБИНАТОРНЫХ ЗАДАЧ

13.1. Докажите, что $(n/z)^{n/2} < n! < n^n$ при n>=2.

Докажите что C_{2n+1}^k возрастает при изменении k от 1 до n+1 и убывает – при изменении k от n+1 до 2n+1.

13.3. Докажите, что $C_{2n+1}^n > n^n / (2n+2)$

Эти результаты показывают, что комбинаторные величины очень быстро растут с ростом n.

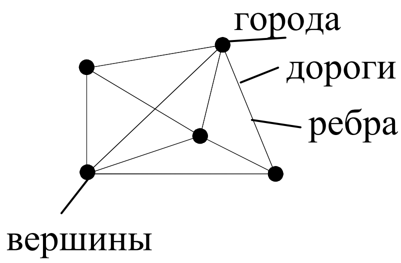
Для n! известна весьма точная приближенная формула Стирлинга: $n!\approx\sqrt{2\pi+1}(n/e)^n$, причем отношение этих величин имеет предел 1 при $n\to\infty$. Поразительно, что здесь участвует число π - отношение длины окружности к диаметру.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Виленкин И.Я. Комбинаторика. –М.:Наука, 1969. –328с.
2. Виленкин И.Я. Популярная комбинаторика. –М.:Наука, 1975.-208с.
3. Ежов И.И., Скороход А.В., Ядренко М.И. Элементы комбинаторики. –М.:Наука, 1977. –80с.
4. Кофман А. Введение в прикладную комбинаторику. М.:Наука, 1975. – 480с.
5. Холл М. Комбинаторика. –М.:Мир, 1970. –424с.

Лекция №7

Теория графов



V – множество точек – вершины;

X – множество линий – ребра;

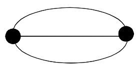
v - номер вершины;

{v,w} – обозначение ребра;

{v,v} – петли;

Одинаковые пары - параллельные или кратные ребра;

Кратностью ребер называют количество одинаковых пар.

Пример:  кратность = 3.

Если в графе есть петли и/или кратные ребра, то такой граф называют псевдографом.

Псевдограф без петель называется мультиграфом.

Мультиграф в котором ни одна пара не встречается более одного раза называется графом.

Если пары (v,w) являются упорядоченными, граф называется ориентированным (орграфом).

Ребра ориентированного графа называются дугами.

Неориентированный граф - {v,w}.

Ориентированный граф - (v,w).

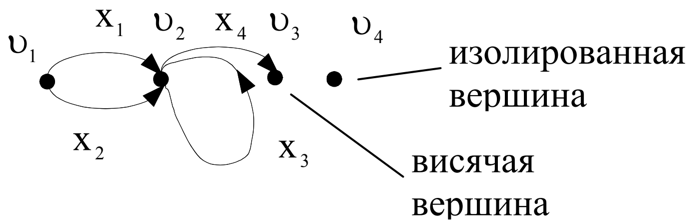
G, G_0 - неориентированный граф, D, D_0 – ориентированный.

Обозначают v,w - вершины, x,y,z – дуги и ребра.

Пример

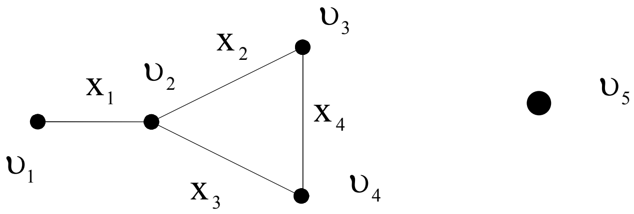
1) $V=\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$,

$X=\{x_1=(v_1,v_2), x_2=(v_1,v_2), x_3=(v_2,v_2), x_4=(v_2,v_3)\}$.



2) $V=\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$,

$X=\{x_1=\{v_1,v_2\}, x_2=\{v_2,v_3\}, x_3=\{v_2,v_4\}, x_4=\{v_3,v_4\}\}$.



Понятия смежности, инцидентности, степени

опр || Если $x=\{v,w\}$ - ребро, то v и w - концы ребра x.

опр || Если $x=(v,w)$ - дуга орграфа, то v - начало, w – конец дуги.

опр || Если вершина v является концом ребра x неориентированного графа (началом или концом дуги x орграфа), то v и x называются инцидентными.

опр || Вершины v, w называются смежными, если $\{v,w\}\in X$.

опр || Степенью вершины v графа G называется число $\delta(v)$ ребер графа G, инцидентных вершине v.

опр || Вершина графа, имеющая степень 0 называется изолированной, а степень 1 – висячей

замеч || В неориентированном псевдографе вклад каждой петли инцидентной вершине v в степень вершины v равен 2.

опр || Полустепенью исхода (захода) вершины v орграфа D называется число $\delta^+(v)$ $(\delta^-(v))$ дуг орграфа D, исходящих из v (заходящих в v).

Замечание || в случае ориентированного псевдографа вклад каждой петли инцидентной вершине v равен 1 как в $\delta^{+}(v)$, так и в $\delta^{-}(v)$.

Обозначение: n(G), n(D) количество вершин графа, m(G) - количество ребер, m(D) - количество дуг.

Утверждение. Для каждого псевдографа G выполняется равенство

$$\sum_{v \in V} \delta(v) = 2m(G).$$

Для каждого ориентированного псевдографа

$$\sum_{v \in V} \delta^{+}(v) = \sum_{v \in V} \delta^{-}(v) = m(D)$$

Изоморфизм, гомеоморфизм.

опр || Графы $G_1=(V_1,X_1)$, $G_2=(V_2,X_2)$ называются изоморфными, если $\exists$ биективное (взаимно однозначное) отображение φ: $V_1 \to V_2$, сохраняющее смежность, т.е.

$\{v,w\} \in X_1 \Leftrightarrow \{\varphi(v), \varphi(w)\} \in X_2$.

опр || Орграфы $D_1=(V_1,X_1)$ и $D_2=(V_2,X_2)$ называются изоморфными, если $\exists$ биективное отображение φ: $V_1 \to V_2$, такое, что

$(v,w) \in X_1 \Leftrightarrow (\varphi(v), \varphi(w)) \in X_2$.

Замечание || Изоморфные графы и орграфы отличаются лишь обозначением вершин.

Свойства изоморфных графов:

1) Если G_1, G_2 изоморфны и φ: $V_1 \to V_2$ биективное отображение, сохраняющее смежность то:

а) $\forall v \in V_1$ $\delta(v)=\delta(\varphi(v))$,

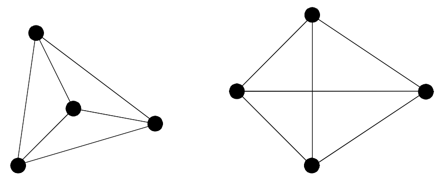
б) $m(G_1) = m(G_2)$ - количество вершин,

$n(G_1) = n(G_2)$ - количество дуг.

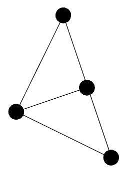
Аналогично, если D_1, D_2 изоморфны и φ: $V_1 \to V_2$ биективное отображение, сохраняющее смежность то выполняется а) $\forall v \in V_1\ \delta^+(v)=\delta^+(\varphi(v)),\ \delta^-(v)=\delta^-(\varphi(v))$

б) $\begin{matrix} m(D_1)=m(D_2) \\ n(D_1)=n(D_2) \end{matrix}$

Замечание ||
Для псевдографов и мультиграфов нужно сохранять кратность ребер или дуг
Примеры

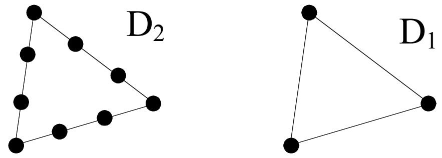


Два графа изоморфны



не изоморфный первым двум, так как нет ребра между крайними вершинами.

Изоморфизм графов (орграфов) является отношением эквивалентности на множестве графов (орграфов).
опр || Операцией подразбиения дуги (u,v) в орграфе D=(V,X) называется операция, которая состоит в удалении из X дуги (u,v), добавлении к V новой вершины w и добавлении к X\{(u,v)}, двух дуг (u,w) и (w,v).
Аналогично для ребер графа.
опр || Орграф D_2 называется подразбиением графа D_1 если D_2 получается из D_1 путем последовательного применения операции подразбиения дуг.
Пример.



опр || Орграфы D_1, D_2 (графы G_1, G_2) называются гомеоморфными, если $\exists$ их подразбиения, которые являются изоморфными.

Определение. Если степени всех вершин графа = k, то граф наз. регулярным степени k.

Граф, состоящий из 1 вершины, называется тривиальным.

Двудольным называется граф G(V,X), такой, что множество вершин V разбито на 2 подмножества V_1 и V_2 ($V_1 \cup V_2 = V$, $V_1 \cap V_2 = \varnothing$), причем каждое ребро инцидентно вершине из V_1 и V_2.

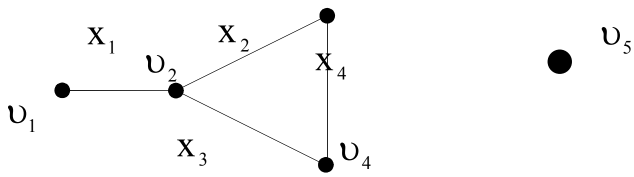
Лекция 8

Маршруты и пути

опр || Последовательность

$v_1x_1v_2x_2v_3...x_kv_{k+1}$, (где $k \geq 1$, $v_i \in V$, $i=1,...,k+1$, $x_i \in X$, $j=1,...,k$)
в которой чередуются вершины и ребра (дуги) и для каждого $j=1,...,k$ ребро (дуга) x_j имеет вид $\{v_j,v_{j+1}\}$ (для орграфа (v_j,v_{j+1})), называется маршрутом, соединяющим вершины v_1 и v_{k+1} (путем из v_1 в v_{k+1}).

Пример



$v_1x_1v_2x_2v_3x_4v_4x_3v_2$ - маршрут,

$x_1x_2x_4x_3$ - маршрут можно восстановить и по этой записи,

$v_1v_2v_3v_4v_2$ - если кратности ребер (дуг) равны 1, то можно и так.

$v_2x_2v_3x_4v_4$ - подмаршрут.

Число ребер в маршруте (дуг в пути) называется длиной маршрута (пути).

Маршрут (путь) называется замкнутым, если начальная вершина совпадает с конечной $v_1=v_{k+1}$.

Незамкнутый маршрут (путь), в котором все ребра (дуги) попарно различны называется цепью.

Цепь, в которой все вершины попарно различны называется простой цепью.

Замкнутый маршрут (путь), в котором все ребра (дуги) попарно различны, называется циклом (контуром).

Цикл (контур), в котором все вершины попарно различны называется простым.

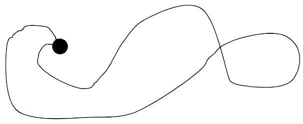
Теорема. В псевдографе G (в ориентированном псевдографе D) из всякого цикла (контура) можно выделить простой цикл (простой контур).

Доказательство (индукцией).

Пусть k – количество ребер, k+1 – количество вершин в цикле (или контуре).

При k=1 цикл всегда является простым.

Пусть утверждение верно для цикла длиной k-1. Допустим, в цикле имеются совпадающие вершины: $v_i=v_j$, (если их нет, то цикл - простой). Тогда удалим из цикла часть, заключенную между v_iи v_j (вместе с v_j). Получившийся цикл имеет меньшую длину и в силу индуктивного предположения из него можно выделить простой цикл.



Теорема ||

Из всякого незамкнутого маршрута (пути) можно выделить простую цепь с теми же начальной и конечной вершинами.

Доказательство || аналогично предыдущему.

Определение. Композицией путей (маршрутов)

$\Pi_1=v_1x_1v_2...x_{k-1}v_k$, $\Pi_2=v_kx_kv_{k+1}...x_{L-1}v_L$ называется путь (маршрут) $\Pi_1 \sqsubset \Pi_2=v_1x_1v_2...x_{k-1}v_kx_kv_{k+1}x_{k+1}...x_{L-1}v_L$.

Матрицы смежности и инцидентности

Пусть $D=(V,X)$ орграф, $V=\{v_1,...,v_n\}$, $X=\{x_1,...,x_m\}$.

Матрицей смежности орграфа D называется квадратная матрица

$A(D)=[a_{ij}]$ порядка n, где

$$a_{ij}=\begin{cases}1, & \left(v_i,v_j\right)\in X\\ 0, & \left(v_i,v_j\right)\notin X\end{cases}$$

Матрицей инцидентности называется матрица $B(D)=[b_{ij}]$ порядка $n\times m$, где

$$b_{ij}=\begin{cases}1, & v_i-\text{конец дуги } x_j,\\ -1, & v_i-\text{на} \div \text{ало дуги } x_j,\\ 0, & v_i-\text{неинцидентна дуге } x_j.\end{cases}$$

Для неориентированных графов $G=(V,X)$

Матрицей смежности графа G называется квадратная симметричная матрица $A(G)=[a_{ij}]$ порядка n, где

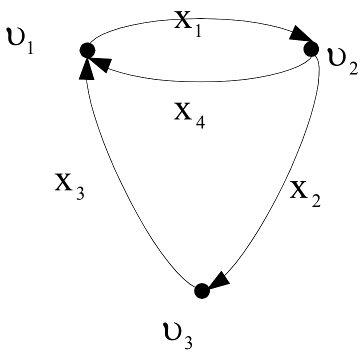
$$a_{ij}=\begin{cases}1, & \left\{v_i,v_j\right\}\in X\\ 0, & \left\{v_i,v_j\right\}\notin X\end{cases}$$

Матрицей инцидентности графа G называется матрица $B(G)=[b_{ij}]$ порядка $n\times m$, где

$$b_{ij}=\begin{cases}1, & v_i-\textit{инцидентна ребру } x_j,\\ 0, & v_i-\textit{неинцидентна ребру } x_j.\end{cases}$$

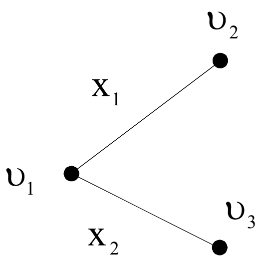
Примеры.

1. Для орграфа, изображенного на рис.



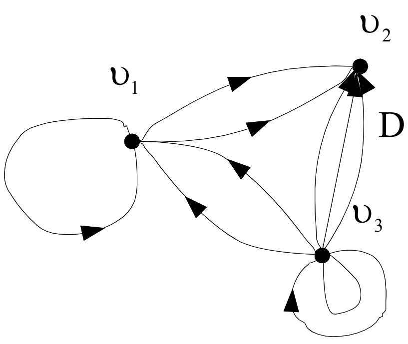
$$A(D)=\begin{array}{c|ccc} & \upsilon_1 & \upsilon_2 & \upsilon_3 \\ \hline \upsilon_1 & 0 & 1 & 0 \\ \upsilon_2 & 1 & 0 & 1 \\ \upsilon_3 & 1 & 0 & 0 \end{array} \qquad B(D)=\begin{array}{c|cccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ \hline \upsilon_1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ \upsilon_2 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ \upsilon_3 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}$$

2. Для графа, изображенного на рис.



$$A(G)=\begin{array}{c|ccc} & \upsilon_1 & \upsilon_2 & \upsilon_3 \\ \hline \upsilon_1 & 0 & 1 & 1 \\ \upsilon_2 & 1 & 0 & 0 \\ \upsilon_3 & 1 & 0 & 0 \end{array}, \quad B(G)=\begin{array}{c|cc} & x_1 & x_2 \\ \hline \upsilon_1 & 1 & 1 \\ \upsilon_2 & 1 & 0 \\ \upsilon_3 & 0 & 1 \end{array}$$

Ориентированный псевдограф



$$A(D) = \begin{array}{c} \\ \upsilon_1 \\ \upsilon_2 \\ \upsilon_3 \end{array} \begin{array}{ccc} \upsilon_1 & \upsilon_2 & \upsilon_3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \end{array}$$

С помощью этих матриц графы задаются на ЭВМ.

Свойства матриц смежности и инцидентности.

Для ориентированного мультиграфа D=(V,X), $V=\{v_1,...,v_n\}$, $X=\{x_1,...,x_m\}$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = \delta^{+}(v_i)$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = \delta^{-}(v_j)$$

- сумма строк матрицы B(D) является нулевой строкой (дуга один раз входит и один раз выходит);
- любая строка матрицы B(D) является линейной комбинацией остальных строк (вследствие предыдущего);
- ранг матрицы B(D) не превосходит n(D)-1 (также вследствие предыдущего);
- для любого контура в D сумма столбцов матрицы B(D), соответствующих дугам, входящим в этот контур, равна нулевому столбцу.

Для неориентированного мультиграфа G=(V,X), $V=\{v_1,...,v_n\}$, $X=\{x_1,...,x_m\}$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} = \delta(v_i)$$

- сумма строк матрицы B(G) по модулю 2 является нулевой строкой (дуга один раз входит и один раз выходит, а вместе четно);
- любая строка матрицы B(G) является суммой по модулю 2 остальных строк (вследствие предыдущего);
- для любого цикла в G сумма по модулю 2 столбцов матрицы B(G), соответствующих ребрам, входящим в этот цикл, равна нулевому столбцу.

Определение. Матрица $C=[c_{ij}]$, у которой $c_{ij} \in \{0,1\}$ наз. булевой.

Если G – псевдограф без кратных ребер, матрица смежности – булева.

Лекция 9

Связность. Компоненты связности

Определения.

Подграфом графа G называется граф, все вершины и ребра которого содержатся среди вершин и ребер графа G. (Для орграфа то же).

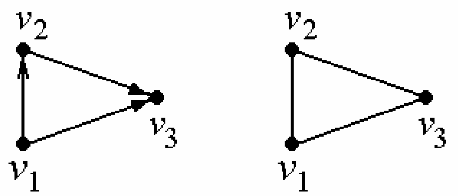
Подграф наз. собственным, если он отличен от самого графа.

Говорят, что вершина w орграфа D (графа G) достижима из верш. v, если либо w=v, либо существует путь (маршрут) из v в w.

Граф (орграф) наз связным (сильно связным), если для любых двух его вершин v, w существует маршрут (путь), соединяющий v и w.

Орграф наз односторонне связным, если для любых двух его вершин по крайней мере одна достижима из другой.

Псевдографом, ассоциированным с ориентированным псевдографом D=(V,X) наз. псевдограф $G=(V,X_0)$, в котором X_0 получается из X заменой всех упорядоченных пар (v,w) на неупорядоченные {v,w}.

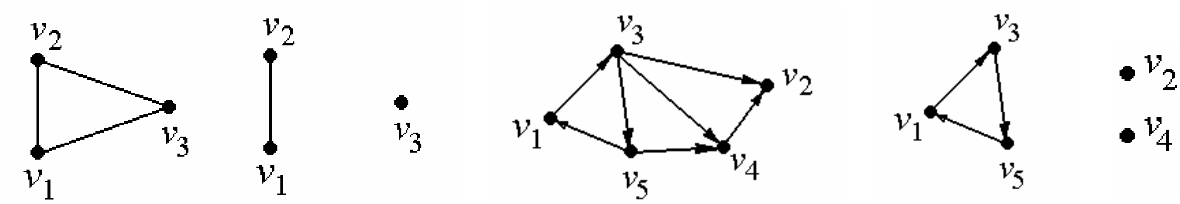


Орграф наз слабо связным, если связным является ассоциированный с ним псевдограф.

Если граф (орграф) не является связным (слабо связным), то он наз. несвязным.

Компонентой связности графа G (сильной связности орграфа D) наз. его связный (сильно связный) подграф, не являющийся собственным подграфом никакого другого связного (сильно связного) подграфа графа G (орграфа D).

Примеры.



Матрицы достижимости и связности

Пусть A(D) – матрица смежности ориентированного псевдографа D=(V,X) (или псевдографа G=(V,X)), где $V=\{v_1,\ldots, v_n\}$. Обозначим через $A^k=[a^{(k)}_{ij}]$ k-ю степень матрицы смежности A(D).

Утверждение. Элемент $a^{(k)}_{ij}$ матрицы A^k ориентированного псевдографа D=(V,X) (псевдографа G=(V,X)) равен числу всех путей (мапшрутов) длины k из v_i в v_j.

Д-во

Для k=1 очевидно в силу построения матрицы A(D).

Пусть это справедливо для n=k-1. Т.е. в матрице A^{k-1} в i-той строке на l-том месте стоит число, означающее кол-во маршрутов из v_i в v_l длины k–1. Столбец под номером j матрицы A содержит числа, означающие кол-во дуг (ребер) из v_l в v_j (l-номер строки). Тогда скалярное произведение i-той строки матрицы A^{k-1} на j-тый столбец матрицы A равен сумме произведений. Каждое произведение означает кол-во путей из v_i в v_j, проходящих через v_l на предпоследнем шаге. В сумме получается общее кол-во.

Утверждение. Для того, чтобы n-вершинный орграф D с матрицей смежности A=A(D) имел хотя бы один контур, $\Leftrightarrow$ чтобы матрица $K=A^2+A^3+\dots\ A^n$ имела ненулевые диагональные элементы (следствие предыдущего).

Пусть ρ-отношение достижимости на множестве V всех вершин (неориентированного) графа G. (либо v=w, либо $\exists$ маршрут, соединяющий v и w).

Тогда

1) ρ-отношение эквивалентности;
2) $v\rho w \Leftrightarrow$ вершины v,w принадлежат одной компоненте связности;
3) для $\forall$ класса эквивалентности V_1 псевдограф G_1, порожденный множеством V_1, является компонентой связности псевдографа G.

Для орграфа.

Пусть ρ_1-отношение достижимости на множестве V всех вершин ориентированного псевдографа D. Пусть ρ_2-отношение двусторонней достижимости на множестве V. ($\rho_2=\rho_1\cap\rho_1^{-1}$). Тогда

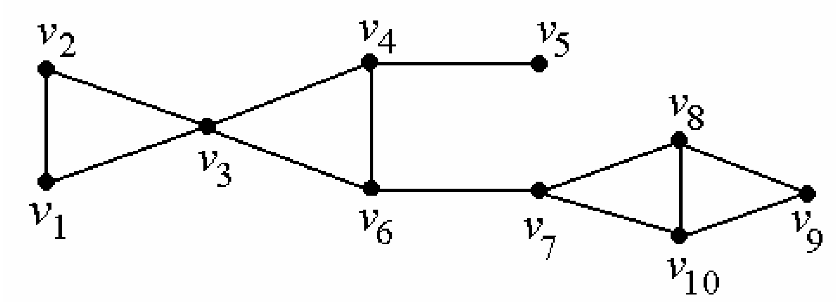
1) ρ_1 - рефлексивно, транзитивно;
2) ρ_2 – эквивалентность на V;
3) $v\rho_2 w \Leftrightarrow$ когда вершины v,w $\in$ одной компоненте сильной связности;
4) для $\forall$ класса эквивалентности V_1 ориент. псевдограф D_1, порожденный множеством V_1, является компонентой связности ор. псевдографа G.

Число компонент связности орграфа D обозначается P(D). (для неор. - P(G).

Определение. Под операцией удаления вершины из графа (орграфа) будем понимать операцию, заключающуюся в удалении некоторой вершины вместе с с инцидентными ей ребрами (дугами).

Определение. Вершина графа, удаление которой увеличивает число компонент связности, называется точкой сочленения.

Пример.



Утверждение. Если D' – орграф, полученный в результате удаления нескольких вершин из орграфа D, то A(D') получается из A(D) в результате удаления строк и столбцов, соответствующих удаленным вершинам. (Для неор. графа то же самое).

Определение. Матрицей достижимости орграфа D называется квадратная матрица $T(D)=[t_{ij}]$ порядка n, элементы которой равны

$$t_{ij}=\begin{cases}1, & v_j \text{ достижима из } v_i,\\ 0 & \text{в противном случае.}\end{cases}$$

Определение. Матрицей сильной связности орграфа D называется квадратная матрица $S(D)=[s_{ij}]$ порядка n, элементы которой равны

$$s_{ij}=\begin{cases}1, & v_j \text{ достижима из } v_i \text{ и } v_i \text{ достижима из } v_j\\ 0 & \text{в противном случае.}\end{cases}$$

Определение. Матрицей связности графа G называется квадратная матрица $S(G)=[s_{ij}]$ порядка n, элементы которой равны

$$s_{ij}=\begin{cases}1, & \text{если } \exists \text{ маршрут, соединяющий } v_j \text{ и } v_i,\\ 0 & \text{в противном случае.}\end{cases}$$

Утверждение. Пусть G=(V,X) – граф, $V=\{v_1,\ldots, v_n\}$, A(G) – его матрица смежности. Тогда

$S(G)=\mathrm{sign}[E+A+A^2+A^3+\ldots A^{n-1}]$ (E- единичная матрица порядка n).

(Следует из предыдущего).

Утверждение. Пусть D=(V,X) – орграф, $V=\{v_1,\ldots, v_n\}$, A(D) – его матрица смежности. Тогда

1) $T(D)=\mathrm{sign}[E+A+A^2+A^3+\ldots A^{n-1}]$,
2) $S(D)=T(D)\&T^T(D)$ (T^T-транспонированная матрица, &-поэлементное умножение).

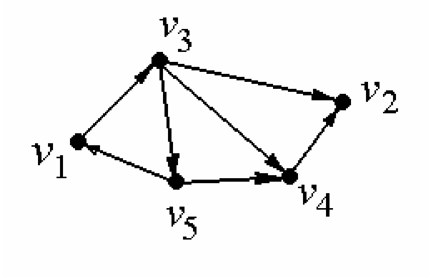
Алгоритм выделения компонент сильной связности.

1. Присваиваем p=1, $S_1=S(D)$.

2. Включаем в множество вершин V_p компоненты сильной связности D_p вершины, соответствующие единицам первой строки матрицы S_p. В качестве матрицы $A(D_p)$ возьмем подматрицу матрицы A(D), состоящую из элементов матрицы A, находящихся на пересечении строк и столбцов, соответствующих вершинам из V_p.

3. Вычеркиваем из S_p строки и столбцы, соответствующие вершинам из V_p. Если не остается ни одной строки (и столбца), то p- кол-во компонент сильной связности. В противном случае обозначим оставшуюся после вычеркивания срок и столбцов матрицу S_{p+1}, присваиваем p:=p+1 и переходим к п. 2.

Пример.



$$A(D)=\begin{pmatrix}0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0\\0&1&0&1&1\\0&1&0&0&0\\1&0&0&1&0\end{pmatrix},$$

$$A^2=\begin{pmatrix}0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0\\0&1&0&1&1\\0&1&0&0&0\\1&0&0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0\\0&1&0&1&1\\0&1&0&0&0\\1&0&0&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&0&1&1\\0&0&0&0&0\\1&1&0&1&0\\0&0&0&0&0\\0&1&1&0&0\end{pmatrix},$$

$$A^3=A^2A=\begin{pmatrix}0&1&0&1&1\\0&0&0&0&0\\1&1&0&1&0\\0&0&0&0&0\\0&1&1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0\\0&1&0&1&1\\0&1&0&0&0\\1&0&0&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&0&1&0\\0&0&0&0&0\\0&1&1&0&0\\0&0&0&0&0\\0&1&0&1&1\end{pmatrix},$$

$$A^4=A^3A=\begin{pmatrix}1&1&0&1&0\\0&0&0&0&0\\0&1&1&0&0\\0&0&0&0&0\\0&1&0&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0\\0&1&0&1&1\\0&1&0&0&0\\1&0&0&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&1&0&0\\0&0&0&0&0\\0&1&0&1&1\\0&0&0&0&0\\1&1&0&1&0\end{pmatrix},$$

$$\mathrm{T(D)=sign[E+A+A^2+A^3+A^4]}=\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\0&1&0&0&0\\1&1&1&1&1\\0&1&0&1&0\\1&1&1&1&1\end{pmatrix},$$

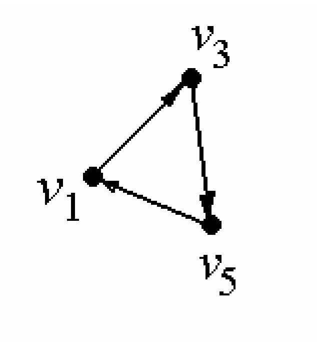
$$\mathrm{S(D)=T\&T^T}=\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\0&1&0&0&0\\1&1&1&1&1\\0&1&0&1&0\\1&1&1&1&1\end{pmatrix}\wp\begin{pmatrix}1&0&1&0&1\\1&1&1&1&1\\1&0&1&0&1\\1&0&1&1&1\\1&0&1&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&1&0&1\\0&1&0&0&0\\1&0&1&0&1\\0&0&0&1&0\\1&0&1&0&1\end{pmatrix}.$$

Выделение компонент связности.

1. p=1, $S_1 = S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

2. $V_1=\{v_1, v_3, v_5\}$, $A(D_1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

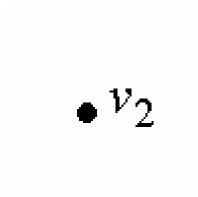
D_1



3. $S_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,

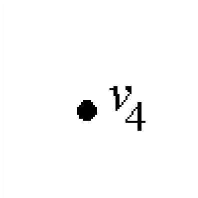
2'. $V_2=\{v_2\}$, $A(D_2) = (1)$

D_2



3. $S_1 = (1)$,

D_3



Лекция №10

Задача поиска маршрутов в графе (путей в орграфе)

Алгоритм Тэрри поиска маршрута в связном графе, соединяющего вершины υ и ω $\upsilon \neq \omega$.

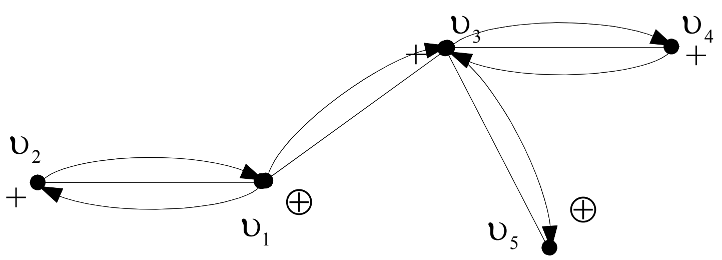
Правила.

1) Идя по произвольному ребру всегда отмечать направление его прохождения.

2) Исходя из некоторой вершины υ' всегда следовать по тому ребру, которое не было пройдено или было пройдено в противоположном направлении.

3) Для всякой вершины $\upsilon' \neq \upsilon$ отмечать ребро по которому в вершину υ' попали в первый раз

4) Исходя из некоторой вершины $\upsilon' \neq \upsilon$ идти по первому заходящему в υ' ребру лишь тогда, когда нет других возможностей.



Найти маршрут соед. υ_1 и υ_5
+, значит прошли

Замечание: из полученного пути можно выделить простую цепь.

Поиск оптимального пути (маршрута) (т.е пути с наименьшим числом дуг или ребер)

Утверждения:

1) каждый минимальный путь (маршрут) является простой цепью

Доказательство.

Пусть $\Pi = \upsilon_1\upsilon_2...\upsilon_k$ $\upsilon_1 \neq \upsilon_k$ минимальный путь в орграфе D, не являющийся простой цепью. Тогда $\exists$ i и j такие, что $1 \leq i < j \leq k$ и $v_i=v_j$. Рассмотрим путь $\upsilon_1...\upsilon_i\upsilon_{j+1}...\upsilon_k$. Его длина меньше, чем П, что противоречит предположению.

2) (о минимальности подпути минимального пути). Пусть $\Pi = \upsilon_1\upsilon_2...\upsilon_k$ $\upsilon_1 \neq \upsilon_k$ - минимальный путь (маршрут) в орграфе D (в графе G). Тогда для $\forall$ i и j таких, что $1 \leq i < j \leq k$ путь (маршрут) $\Pi_0 = \upsilon_i\upsilon_{i+1}...\upsilon_j$ тоже является минимальным.

Доказательство. Предположим, что Π_0 не является оптимальным, тогда $\exists \Pi_1 = \upsilon_i...\upsilon_j$ т.ч. он короче чем Π_0. Если в Π_1 вошли вершины из

$(\Pi - \Pi_0)$, то этот путь не является простой цепью. Тогда исключив из него циклы, можно найти еще более короткий путь $\Rightarrow \Pi$ не является минимальным. Пришли к противоречию.

Пусть $D = (V, X)$ орграф $\upsilon \in V$ - некоторая вершина $\upsilon \in V$, $V_1 \subseteq V$.

Обозначим $D(\upsilon) = \{\omega \in V \mid (\upsilon, \omega) \in X\}$ - образ вершины υ;

$D^{-1}(\upsilon) = \{\omega \in V \mid (\omega, \upsilon) \in X\}$ - прообраз вершины υ;

$D(V_1) = \bigcup\limits_{\upsilon \in V_1} D(\upsilon)$ - образ множества вершин V_1;

$D^{-1}(V_1) = \bigcup\limits_{\upsilon \in V_1} D^{-1}(\upsilon)$ прообраз множества вершин V_1.

Для неориентированного графа образ и прообраз совпадают.

Пусть $G = (V, X)$ граф $\upsilon \in V$, $V_1 \subseteq V$.

Обозначим $G(\upsilon) = \{\omega \in V \mid \{\upsilon, \omega\} \in X\}$ - образ вершины υ;

$G(V_1) = \bigcup\limits_{\upsilon \in V_1} G(\upsilon)$ - образ множества вершин V_1.

Пусть $D = (V, X)$ орграф с $n \geq 2$ вершинами и v,w ($v \neq w$) – заданные вершины из V

Алгоритм поиска минимального пути из υ в ω в орграфе D

(алгоритм фронта волны).

1) Помечаем вершину υ индексом 0, затем помечаем вершины $\in$ образу вершины υ индексом 1. Обозначаем их FW_1 (v). Полагаем k=1.

2) Если $FW_k(\upsilon) = \varnothing$ или k=n-1, и одновременно $\omega \notin FW_k(\upsilon)$ то вершина ω не достижима из υ. Работа алгоритма заканчивается.

В противном случае продолжаем:

3) Если $\omega \notin FW_k(\upsilon)$, то переходим к шагу 4.

В противном случае мы нашли минимальный путь из υ в ω и его длина =k. Последовательность вершин

$\upsilon\omega_1\omega_2\omega_3 ... \omega_{k-1}\omega$

$\omega_{k-1} \in FW_{k-1}(\upsilon) \cap D^{-1}(\omega)$

$\omega_{k-2} \in FW_{k-2}(\upsilon) \cap D^{-1}(\omega_{k-1})$

....

$\omega_1 \in FW_1(\upsilon) \cap D^{-1}(\omega_2)$

есть этот минимальный путь. Работа завершается.

4) Помечаем индексом k+1 все непомеченные вершины, которые принадлежат образу множества вершин с индексом k. Множество вершин

с индексом k+1 обозначаем $FW_{k+1}(\upsilon)$. Присваиваем k:=k+1 и переходим к 2).

Замечания

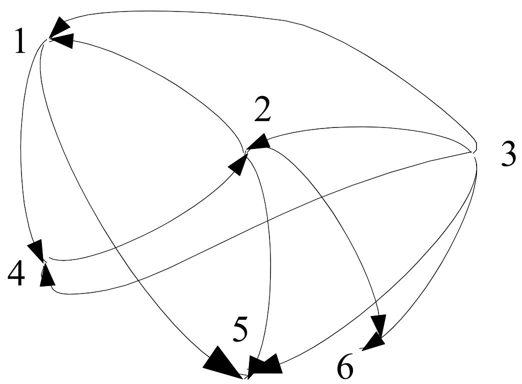
Множество $FW_k(\upsilon)$ называется фронтом волны $k^{го}$ уровня.

Вершины $\omega_1\omega_2\omega_3...\omega_{k-1}$ могут быть выделены неоднозначно, что соответствует случаю, если $\exists$ несколько min путей из υ в ω.

Пример 1. Дана матрица смежности. Найти минимальный путь из v_1 в v_6.

Исх\вход	$П_0$	υ_2	υ_3	υ_4	υ_5	υ_6
υ_1	0	0	0	1	1	0
υ_2	1	0	0	1	1	1
$П_0$	1	1	0	1	1	1
υ_4	0	1	1	0	1	0
υ_5	1	1	1	1	0	0
υ_6	1	1	1	1	1	0
	0	2	2	1	1	3

Пример 2. Дан орграф.



Задание. Найти минимальный путь из v_1 в v_6.

Расстояния в графе

Пусть $G=(V,X)$ - граф (или псевдограф).

Расстоянием между вершинами $d(\upsilon,\omega)$ наз. min длина пути между ними. $d(\upsilon,\upsilon)=0$. $d(\upsilon,\upsilon)=\infty$ в орграфе, если не $\exists$ пути

Расстояние в графе удовл. аксиомам метрики

1) $d(\upsilon,\omega)\ge 0$, $d(\upsilon,\omega)=0 \Leftrightarrow \upsilon=\omega$
2) $d(\upsilon,\omega)=d(\omega,\upsilon)$ (не орграф)
3) $d(\upsilon,\omega)\le d(\upsilon,\omega_1)+d(\omega_1,\upsilon)$
4) $d(\upsilon,\omega)<\infty$ в связном графе (не орграфе).

Пример ???

	1	2	3	4	5	6
1	0	2	2	1	1	3
2	1	0	1	1	1	1
3	1	1	0	1	1	1
4	2	1	1	0	1	2
5	1	1	1	1	0	2
6	1	1	1	1	1	0

Из 1 в 6.

1 2 3 4 5 6

0 2 2 1 1 3

Из 4 в 5

1 2 3 4 5 6

1 1 0 1

опр || Пусть $G = (V, X)$ связный граф (или псевдограф).

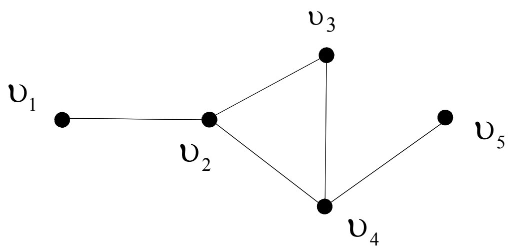
Величина $d(G) = \max\limits_{\upsilon,\omega\in V} d(\upsilon,\omega)$ - называется диаметром графа G.

Пусть $\upsilon \in V$.

Величина $r(\upsilon) = \max\limits_{\omega\in V} d(\upsilon,\omega)$ - называется максимальным удалением (эксцентриситетом) в графе G от вершины υ.

Радиусом графа G наз. величина $r(G) = \min\limits_{\upsilon\in V} r(\upsilon)$

Любая верш. $\omega \in V$ такая, что $r(\upsilon) = r(G)$ наз. центром графа G.



Матрица смежности

	υ_1	υ_2	υ_3	υ_4	υ_5
υ_1	0	1	0	0	0
υ_2	1	0	1	1	0
υ_3	0	1	0	1	0
υ_4	0	1	1	0	1
υ_3	0	0	0	1	0

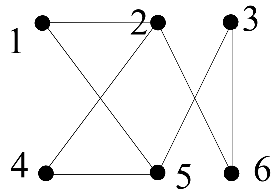
Матрица расстояний

	υ_1	υ_2	υ_3	υ_4	υ_5
υ_1	0	1	2	2	3
υ_2	1	0	1	1	2
υ_3	2	1	0	1	2
υ_4	2	1	1	0	1
υ_5	3	2	2	1	0

$d(G) = 3 \quad r(G) = 2$

Центры в вершинах 2,3,4

Примеры.



Матрица смежности

	1	2	3	4	5	6
1	0	1	0	0	1	0
2	1	0	0	1	0	1
3	0	0	0	0	1	1
4	0	1	0	0	1	0
5	1	0	1	1	0	0
6	0	1	1	0	0	0

Матрица расстояний

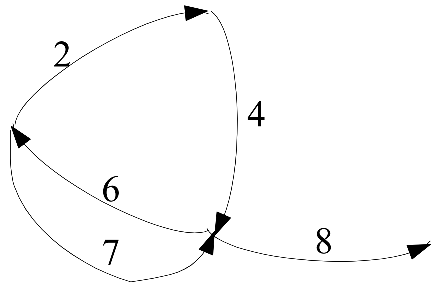
	1	2	3	4	5	6
1	0	1	2	2	1	2
2	1	0	2	1	2	1
3	2	2	0	1	1	1
4	2	1	1	0	1	2
5	1	2	1	1	0	2
6	2	1	1	2	2	0

$d(G) = 2 \quad V(G) = 2$, центр - все вершины

Лекция №11

Минимальные пути, (маршруты) в нагруженных орграфах (графах)

опр || назовем орграф D=(V,X) нагруженным, если на множестве дуг X определена некоторая функция $l : X \to R$, которую называют весовой функцией



Цифры – вес дуги, (цена дуги).

Для любого пути П нагруженного орграфа D обозначим через *l*(П) сумму длин дуг, входящих в путь П. (Каждая дуга считается столько раз, сколько она входит в путь П).

Величина *l* называется длиной пути. Если выбрать веса равными 1, то придем к ненагруженному графу.

Опр. Путь в нагр. орграфе из вершины v в верш. w, где v≠w, называется минимальным, если он имеет наименьшую длину.

Аналогично определяется минимальный маршрут в нагр. графе.

Задачи на min П имеет смысл ставить тогда, когда нет отрицательных замкнутых путей (иначе можно повторять цикл многократно, уменьшая «длину»).

Свойства min путей в нагруженном орграфе

1) Если для $\forall$ дуги $x \in X$ $l(x) > 0$, то $\forall$ min путь (маршрут) является простой цепью;

2) если $\upsilon_1, \upsilon_2, ..., \upsilon_k$ min путь (маршрут) то для $\forall$ i,j : $1 \le i < j \le k$ путь (маршрут) $\upsilon_i \upsilon_{i+1} ... \upsilon_{j-1} \upsilon_j$ тоже является min

Доказывается аналогично св-вам ненагруж. графа.

3) если $v...uw$ min путь (маршрут) среди путей (марш.) из v в w, содержащих не более k+1 дуг (ребер), то $v...u$ min путь (маршрут) из v в u среди путей (марш.), содержащих не более k дуг (ребер).

Поиск min пути.

Пусть D=(V,X) – нагр. орграф, V={v_1,… v_n}, n>1. Введем величины $\lambda_i^{(k)}$, где i=1,…,4, k=1,2,…

Для каждого фиксированного i и k $\lambda_i^{(k)}$ равна длине min пути среди путей из v_1 в v_i содержащих не более k дуг. Если путей нет, то $\lambda_i^{(k)} = \infty$.

Положим также $\lambda_1^{(0)} = 0, \quad \lambda_i^{(0)} = \infty, i = 2,...n$.

Введем матрицу длин дуг C(D)=[c_{ij}] порядка n, причем

$$c_{ij} = \begin{cases} l(v_i, v_j), & (v_i, v_j) \in X, \\ \infty & (v_i, v_j) \notin X. \end{cases}$$

Утверждение. При i=2,…,n, k≥0 выполняется равенство $\lambda_i^{(k+1)} = \min\limits_{1 \le j \le n} \left\{ \lambda_j^{(k)} + c_{ji} \right\}$ (Принцип динамического программирования. Использовать его позволяют свойства 2,3 min путей).

Алгоритм Форда-Беллмана нахождения min пути в нагруженном орграфе D из v_1 в v_i.(i≠1).

($\lambda_i^{(k)}$ записываем в виде матрицы, i- строка, k-столбец).

1) Составляем табл. $\lambda_i^{(k)}$, i=1,…,n, k=0,…,n-1. Если $\lambda_i^{(n-1)} = \infty$, то пути из v_1 в v_i нет. Конец алгоритма.

2) Если $\lambda_i^{(n-1)} < \infty$ то это число выражает длину любого min пути из v_1 в v_i. Найдем min $k_1 \ge 1$, при котором $\lambda_i^{(k_1)} = \lambda_i^{(n-1)}$. По определению $\lambda_i^{(k)}$ получим, что k_1- min число дуг в пути среди всех min путей из v_1 в v_i.

3) Затем определяем номера $i_2, \ldots, i_{k_1+1}$ такие, что

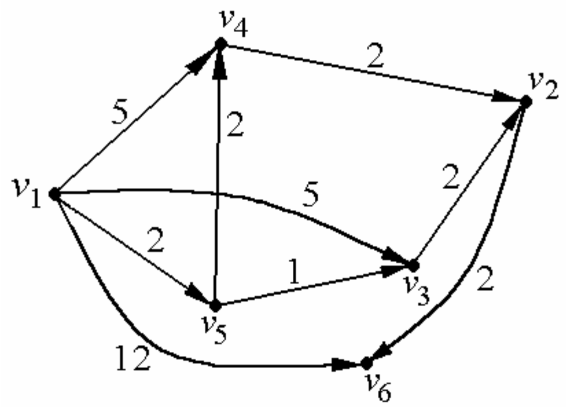
$$\lambda_{i_2}^{(k_1-1)} + c_{i_2,i} = \lambda_i^{(k_1)},$$

$$\lambda_{i_3}^{(k_1-2)} + c_{i_3,i_2} = \lambda_{i_2}^{(k_1)},$$

. . . .

$$\lambda_{i_{k_1+1}}^{(0)} + c_{i_{k_1+1},i_{k_1}} = \lambda_{i_{k_1}}^{(1)},$$

Пример. $v_1 \to v_6$



	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6
v_1	∞	∞	5	5	2	12
v_2	∞	∞	∞	∞	∞	2
v_3	∞	2	∞	∞	∞	∞
v_4	∞	2	∞	∞	∞	∞
v_5	∞	∞	1	2	∞	∞
v_6	∞	∞	∞	∞	∞	∞

$\lambda_i^{(0)}$	$\lambda_i^{(1)}$	$\lambda_i^{(2)}$	$\lambda_i^{(3)}$	$\lambda_i^{(4)}$	$\lambda_i^{(5)}$
0	0	0	0	0	0
∞	∞	7	5	5	5
∞	5	3	3	3	3
∞	5	4	4	4	4
∞	2	2	2	2	2
∞	12	12	9	7	7

Путь $v_1 \to v_6$

7=5+2 (2-ая стр.)

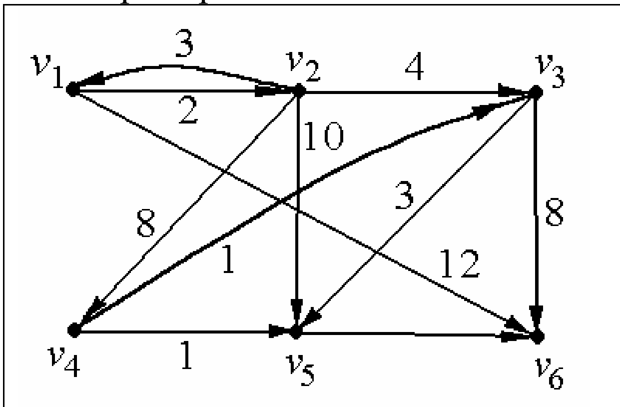
5=3+2 (3-я стр.)

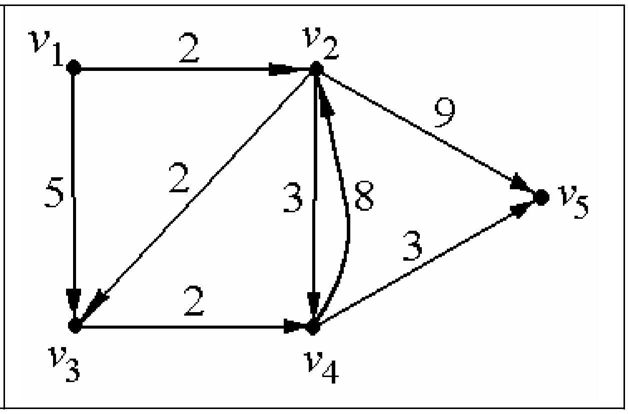
3=1+2 (5-я стр.)

2=0+2 (1-я стр.)

Путь $v_1 \to v_5 \to v_3 \to v_2 \to v_6$

Примеры





Специальные пути в орграфах (маршруты в графах).

Рассмотрим орграфы.

Определение. Свойство α называется латинским, если из того, что путь $\pi=\pi_1 \sqsubset \pi_2$, где π_1, π_2 $\in \Pi$ (множество всех путей в орграфе) обладает свойством α, следует, что пути π_1, π_2 также обладают свойством α.

Примеры латинских свойств.

1) Не проходить через данную вершину (или через множество вершин).
2) Не проходить через данную дугу (или через множество дуг).
3) Быть простой цепью (или простым контуром).
4) Быть цепью или контуром.
5) Не проходить через каждую вершину более k раз.

Определение. Матричный способ перечисления путей в орграфе, обладающих заданным латинским свойством α называют методом латинской комбинации.

Введем бинарную операцию $\overset{\alpha}{\circ}$. Пусть $\pi_1=u_1u_2\ldots u_k\in\Pi_\alpha$ (мн-во путей, обладающих свойством α), $\pi_2=w_1w_2\ldots w_l\in\Pi_\alpha$. Положим

$$\pi_1\overset{\alpha}{\circ}\pi_2=\begin{cases}\pi_1\circ\pi_2, & \text{если } u_k=w_1 \text{ и путь } \pi_1\circ\pi_2 \text{ обладаетсвойством } \alpha\text{б}\\ \varnothing, & \text{в противном случае.}\end{cases}$$

Положим $\varnothing\overset{\alpha}{\circ}\pi=\pi\overset{\alpha}{\circ}\varnothing=\varnothing$.

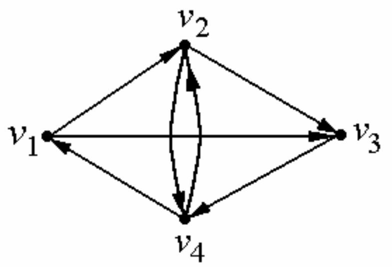
Введем латинскую матрицу $L_\alpha^{(k)}=\left[l_{ij}^{(k)}\right]$ размерности $n\times n$ такую, что $l_{ij}^{(k)}$ - множество путей длины k из v_i в v_j обладает свойством α ($l_{ij}^{(k)}=\varnothing$, если таких путей нет).

Под результатом комбинации $C=L_\alpha^{(k)}\overset{\alpha}{\circ}L_\alpha^{(m)}$ будем понимать квадратную матрицу $C=[c_{ij}]$ порядка n с элементами

$c_{ij}=\bigcup\limits_{r=1}^{n} l_{ir}^{(k)}\overset{\alpha}{\circ}l_{rj}^{(m)}$ (аналогично произведению матриц: строка на столбец).

Утверждение. При любом $k\geq1$ выполняется $L_\alpha^{(k)}=L_\alpha^{(1)}\overset{\alpha}{\circ}L_\alpha^{(1)}\overset{\alpha}{\circ}\ldots\overset{\alpha}{\circ}L_\alpha^{(1)}$

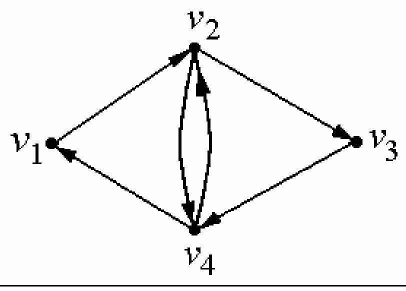
Пример. Найти все простые цепи длины 3 в орграфе D:



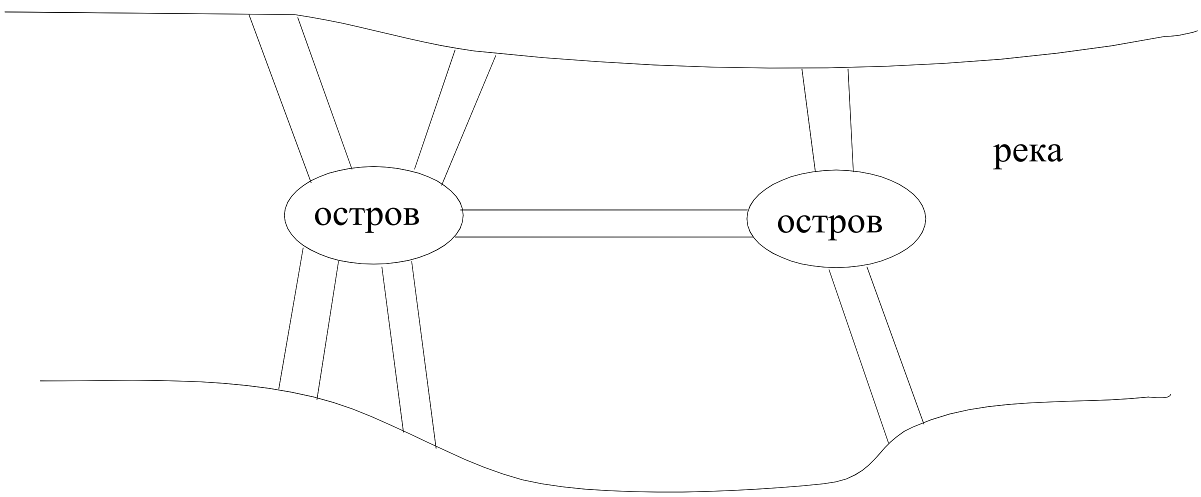
∅	v_1v_2	v_1v_3	∅
∅	∅	v_2v_3	v_2v_4
∅	∅	∅	v_3v_4
v_4v_1	v_4v_2	∅	∅

∅	∅	$v_1v_2v_3$	$v_1v_2v_4$ $v_1v_3v_4$
$v_2v_4v_1$	∅	∅	$v_2v_3v_4$
$v_3v_4v_1$	$v_3v_4v_2$	∅	∅
∅	$v_4v_1v_2$	$v_4v_1v_3$ $v_4v_2v_3$	∅

∅	$v_1v_3v_4v_2$	∅	$v_1v_2v_3v_4$
$v_2v_3v_4v_1$	∅	$v_2v_4v_1v_3$	∅
∅	$v_3v_4v_1v_2$	∅	∅
∅	∅	$v_4v_1v_2v_3$	∅

Пример 2.	

Лекция №12
Эйлеровы циклы и цепи



Нужно пройти по всем мостам по одному разу и вернуться обратно..

Утв. Если в псевдографе G имеется хотя бы одно ребро и отсутствуют висячие вершины, то G содержит хотя бы один простой цикл.

Доказательство ||

Если в G имеется петля, то это уже цикл, если в G есть кратные ребра, то это тоже цикл. Допустим, что петель и кратных ребер нет.

Пусть v_1 и v_2 – произвольные смежные вершины. Будем строить последовательность v_1, v_2, v_3… такую, что для любого i>2 вершины v_i, v_{i-1} смежны и $v_1 \neq v_2$ (т.к. в G нет висячих вершин, то эту последовательность можно продолжать неограниченно). Но рано или поздно какая-то из вершин повторится. Это и будет искомый цикл.

Утв. Для того чтобы связный псевдограф G обладал эйлеровым циклом необходимо и достаточно чтобы степени всех его вершин были четными.

См. алгоритм.

Утв. Для того чтобы связный псевдограф G обладал эйлеровой цепью необходимо и достаточно, чтобы он имел ровно 2 вершины нечетной степени.

(Нужно соединить начало и конец. Тогда задача сводится к предыдущей).

Алгоритм выделения эйлерова цикла в связном мультиграфе с четными степенями вершин

1) Выделим из G цикл μ_1. (т.к. степени верш. четны, то висячие верш. отсутств.). Положим l=1, G'=G.

2) Удаляем из G' ребра, принадлежащие выделенному циклу. Полученный псевдограф снова обозначаем G'. Если в G' отсутствуют

ребра, то переходим к шагу 4. Если ребра есть, то выделяем из G’ цикл и переходим к шагу 3.

3) Присваиваем l:=l+1 и переходим к шагу 2.

4) По построению выделенные циклы содержат все ребра по одному разу. Если l:=1, то искомый эйлеров цикл найден (конец работы алгоритма). В противном случае находим циклы, содержащие хотя бы по одной общей вершине (в силу связности графа это всегда можно сделать). Склеиваем эти циклы. Повторяем эти операции, пока не останется один цикл. Он и является искомым.

Пример. Задача о Кенигсбергских мостах не имеет решения, т.к. есть вершины с нечетными степенями.

Гамильтоновы циклы и цепи

Опр || Пусть G псевдограф. Цепь и цикл в G называются гамильтоновыми если они проходят через каждую вершину ровно один раз.

Задача коммивояжера: в нагруженном графе G определить гамильтонов цикл минимальной длины.

Решение этой задачи проводится с помощью метода ветвей и границ.

Гамильтоновы цепи и циклы относятся к числу специальных маршрутов в графах. Очевидно, что свойство маршрутов: проходить через каждую вершину не более одного раза является латинским, а следовательно, все гамильтоновы циклы и цепи можно получить применяя метод латинской композиции.

В этом случае все гамильтоновы цепи будут перечислены в непустых элементах матрицы $L_\alpha^{n-1}(G)$, за исключением элементов главной диагонали, а все гамильтоновы циклы – в каждом диагональном элементе матрицы $L_\alpha^{n}(G)$.

Деревья и циклы

Опр. Граф G называется деревом если он является связным и не имеет циклов.

Опр. Граф G называется лесом если все его компоненты связности - деревья.

Свойства деревьев:

Следующие утверждения эквивалентны

1) Граф G есть дерево.

2) Граф G является связным и не имеет простых циклов.

3) Граф G является связным и число его ребер ровно на 1 меньше числа вершин.

4) $\forall$ две различные вершины графа G можно соединить единственной (и при этом простой) цепью.

5) Граф G не содержит циклов, но, добавляя к нему любое новое ребро, получаем ровно один и притом простой цикл

Утв. Если у дерева G имеется, по крайней мере, 1 ребро, то у него найдется висячая вершина.

Предположим, что в графе G нет висячей вершины, тогда найдется цикл (в начале лекции это было доказано), тогда граф - не дерево.

Утв. Пусть G связный граф, а υ висячая вершина в G, граф G' получается из G в результате удаления вершины υ и инцидентного ей ребра. Тогда G' тоже является связным.

Д-во: иллюстрация.

Утв. Пусть G - дерево с n-вершинами и m-ребрами. Тогда $m(G)=n(G)-1$.

Если $m<n-1$ то граф не связный.

Если $m>n-1$, и висячих вершин в графе нет, то можно выделить цикл, а следовательно, это – не дерево. В противном случае удалим висячую вершину вместе с инцидентным ей ребром. Повторяя эту операцию n-2 раза, придем к графу с двумя вершинами и более чем одним ребром $\Rightarrow$ это не дерево.

Утв. Пусть G – дерево. Тогда любая цепь в G будет простой.

Если цепь – не простая, то в G есть циклы $\Rightarrow$ G – не дерево.

Цепь единственна по той же причине.

Опр. Остовным деревом связного графа G называется любой его подграф, содержащий все вершины графа G и являющийся деревом.

Пусть G – связный граф. Тогда остовное дерево графа G должно содержать n(G)-1 ребер. Значит, для получения остовного дерева из графа G нужно удалить $m(G)-(n-1)$ ребер. Число $v(G)=m(G)-n(G)+1$ называется цикломатическим числом графа G.

Алгоритм выделения остовного дерева

1) Выберем в G произвольную вершину u_1, которая образует подграф, являющийся деревом. Положим i=1.

2) Если i=n(G), то задача решена и G_i – искомое остовное дерево графа G. Иначе переходим к п. 3.

3) Пусть уже построено дерево G_i являющееся подграфом графа G, в которое входят вершины $u_1,u_2,...,u_i$, где $1 \le i \le n-1$. Строим граф G_{i+1}, добавляя к графу G_i новую вершину $u_{i+1} \in V$, смежную с некоторой вершиной u_i графа G_i и новое ребро $\{u_{i+1},u_i\}$. Во-первых, это можно всегда сделать, поскольку граф связен. Во-вторых, G_{i+1} - дерево, т.к. если в G_i не было циклов, то и в G_{i+1} их не могло появиться.

Присваиваем i:=i+1 и переходим к шагу 2).

Замечание. Остовное дерево может быть выделено, вообще говоря, не единственным способом.

Если граф – нагруженный, то можно выделить остовное дерево с минимальной суммой длин содержащихся в нем ребер.

Алгоритм выделения минимального остовного дерева нагруженного графа

1) Выберем в графе G ребро минимальной длины. Вместе с инцидентными ему двумя вершинами оно образует подграф G_2 графа G. Положим i=2.

2) Если i=n(G), то задача решена и G_i – искомое минимальное ост. дерево графа G. Иначе переходим к шагу 3).

3) Строим граф G_{i+1}, добавляя к графу G_i новое ребро минимальной длины из оставшихся, которое инцидентно какой-нибудь верш. графа G_i и одновременно вершине, не содержащейся в G_i. Вместе с этим ребром включаем в G_{i+1} и эту инцидентную ему верш. Присваиваем i:=i+1 и переходим к шагу 2).

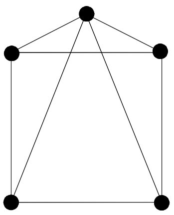
Лекция №15

Планарность и раскраска графов

опр || мультиграф называется планарным если его можно нарисовать на плоскости так, что $\forall$ 2 дуги (ребра) либо не имеют общих точек, либо имеют общие точки, совпадающие с вершинами графа.

В $\forall$ точках пересечения сходятся лишь дуги инцидентные вершине, совпадаюшей с точками пересечения.

Такая функция называется плоским мультиграфом.



граф не является плоским

Внутренние грани плоского мультиграфа называется конечная плоскость окруженная простым циклом и не содержащая внутри себя никаких ребер.

Простой цикл ограничен. Называется её границей.

Часть плоскости состоящая из точек принадлежащих графу и какой либо её плоскости называется её высшей степенью.

Для связанных плоских мультиграфов выполняется соотношение Эйлера $n - m + \gamma = 2$

n – количество вершн

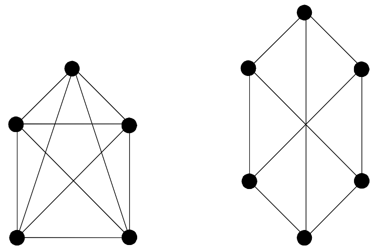
m – количество ребер

λ - гр. внеш

Критерий планарности

Теорема Плантрагина-Куратовского

Теорема || Граф планарен тогда и только тогда, когда ни одна из его подграфов не гомопотрофна следующим графам



Раскраской вершин графа (или ребер мультиграфа) называется сопоставление вершинам определенных цветов.

Раскраска называется правильной если смежные вершины (ребра) окрашены в разные цвета.

Наименьшее число цветов для каждого $\exists$ прав. раскраски графа G называется хроматическим числом и обозначается X(G)

$G-(u,x)$

1) $X(G)\geq\omega(G),\omega(G)$

2) $X(G)\geq\dfrac{n^2}{n^2-2m}$ $\quad n=n(G)-$вершины $\quad m=m(G)-$ребра

3) $X(G)\leq\Delta(G)+d,\quad \Delta(G)=\max d(\upsilon)\quad \upsilon\in V$

Для хроматического индекса свойства:

1) $\Delta(G)\leq X'(G)\leq\dfrac{3}{2}\Delta(G)$

2) G граф

$\Delta(G)\leq X'(G)\leq\Delta(G)+\gamma$

Транспортные сети

Транспортной сетью называется орт граф $D=(u,x)$

$U=\{\upsilon_1,\upsilon_2,...,\upsilon_n\}$ для которого выражаются условия:

1) $\exists$ одна и только одна вершина называется источником $D^{-1}(\upsilon_1) = 0$

$D^{-1}(\upsilon_1)$ множество дуг заходящих в точку υ

2) $\exists$ -//- верш . υ называется истоком т.ч. $D(\upsilon_n) = 0$

3) Каждой дуге $x \in X$ сопоставляется число (целое и не отрицательное) т.ч. $C(x) = 0$ называемое пропускной способностью дуги

4) Вершины отличные от источника и истока называются промежуточными

опр || потока

Функция $\varphi(x)$ определенная на множестве X граф D и принимающая целочисленные значения называется потоком транспортной сети D, если

1) для $\forall$ дуги $x \in X \quad 0 \le \varphi(x) \le C(x)$

2) для $\forall$ промежуточной дуги x

2,5) для $\forall$ промежуточной вершины υ

$\sum \varphi(\omega, \upsilon) = \sum \varphi(\upsilon, \omega)$

$\omega \in D^{-1}(\upsilon) \quad \omega \in D(\upsilon)$

Сколько вышло столько и вошло.

$\sum \varphi(\upsilon_1, \upsilon) = \sum \varphi(\upsilon_1, \upsilon_n) = \overline{\varphi}$

$\upsilon \in D(\upsilon_1) \quad \upsilon \in D^{-1}(\upsilon_n)$

опр || $x \in X$ называется насыщенным, если поток по ней равен ее пропускной способности $\varphi(x) = C(x)$

опр || поток φ называется полным, если его путь из υ_1 в υ_n содержит хотя бы одну насыщенную дугу

опр || Поток называется максимальным, если $\overline{\varphi}$ принимает максимальное значение по сравнению с другим допустимым потоком.

Замечан || максимальный поток является полным, но обратно не верно.

Алгоритм построения полного потока

1) $\varphi(x) = 0 \quad x \in X$

2) из D' удаляем дуги являющиеся насыщенными $D' \to D'$

3) ищем в D' простую цепь

$\eta : \upsilon_1 \to \upsilon_n$, если не находим, то конец.

φ - искомый поток по определению

4) Увеличим поток по всем дугам на одинаковую величину т.ч. хотя бы одна дуга из η является насыщенной, потоки по остальным не превышают их пропускных способностей

Лекция №14 (14.03.00)

Булева алгебра, математическая логика, алгебра логики.

Литература:

1. Яблонский. Введение в дискретную математику. 1986, Москва, “Наука”
2. Гаврилов, Сапоженко. Задачи и упражнения по курсу дискретной математики.

опр || набор $\tilde{\alpha}^n=(\alpha_1, \alpha_2,\ldots, \alpha_n)$ где $\alpha_i \in \{0,1\}$, $i=1,\ldots,n$ называется Булевым (двоичным) набором.

- α_i - компоненты набора (координаты вектора)
- n – длина набора (размерность).

опр || нормой вектора называют сумму его координат.

$$\|\tilde{\alpha}^n\| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$$

опр || множество всех двоичных наборов длины n образуют n-мерный булев (или двоичный) куб B^n. Наборы $\tilde{\alpha}^n$ называют вершинами куба B^n.

Каждому двоичному набору $\tilde{\alpha}^n$ можно сопоставить число (номер)

$$\tilde{\alpha}^n \leftrightarrow \nu(\tilde{\alpha}^n) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i 2^{n-i}$$

опр || расстоянием Хемминга между вершинами $\tilde{\alpha}^n$ и $\tilde{\beta}^n$ куба B^n называется число

$$\rho(\tilde{\alpha}^n, \tilde{\beta}^n) = \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i - \beta_i|$$

опр || наборы $\tilde{\alpha}^n$ и $\tilde{\beta}^n$ называются соседними если $\rho(\tilde{\alpha}^n, \tilde{\beta}^n) = 1$ и противоположными если $\rho(\tilde{\alpha}^n, \tilde{\beta}^n) = n$ (все координаты разные).

опр || набор $\tilde{\alpha}^n$ предшествует (или не больше) набора $\tilde{\beta}^n$ ($\tilde{\alpha}^n \preceq \tilde{\beta}^n$), если $\alpha_i \le \beta_i$, $i=1,\ldots,n$.

Если $\tilde{\alpha}^n \preceq \tilde{\beta}^n$, $\tilde{\alpha}^n \ne \tilde{\beta}^n$, то набор $\tilde{\alpha}^n$ строго меньше (строго предшествует) набору $\tilde{\beta}^n$ ($\tilde{\alpha}^n \prec \tilde{\beta}^n$).

опр || наборы $\tilde{\alpha}^n$ и $\tilde{\beta}^n$ называются сравнимыми, если $\tilde{\alpha}^n \preceq \tilde{\beta}^n$ или $\tilde{\beta}^n \preceq \tilde{\alpha}^n$.

опр || набор $\tilde{\alpha}^n$ непосредственно предшествует $\tilde{\beta}^n$ если $\tilde{\alpha}^n \prec \tilde{\beta}^n$ и $\rho(\tilde{\alpha}^n, \tilde{\beta}^n) = 1$

утв || отношение $\preceq$ является отношением частичного порядка на множестве B^n.

опр || функция $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ определенная на множестве $B_n = \{0,1\}^n = \{\{0,1\} \times \{0,1\} \times \ldots \times \{0,1\}\}$ и принимающая значения из множества $\{0,1\}$ называется функцией алгебры логики (булевой функцией).

Множество всех булевых функций, зависящих от $x_1 \ldots x_n$ будем обозначать $P_2(X)$.

При n = 0 функция называется ноль местной (const) f=0 или f=1.

В произвольном случае f можно задать таблицей

x_1	x_2	x_3	…	x_n	f
0	0	0		0	0
0	0	0		0	1
0	0			1	0
0	0	0		1	1
…	…	…	…	…	…
1	1	1	…	1	1

в которой наборы выписываются в порядке возрастания их номеров.
Имея в виду такое расположение наборов функцию можно задать вектором ее значений
$(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k)$, $k=2^n-1$.

Элементарные функции

0 и 1 - местные

x	f=0	f=1	f_1	f_2
0	0	1	0	1
1	0	1	1	0

f=0 - тождественный ноль,

f=1 - тождественная единица,

$f_1(x)=x$ – тождественная функция

$f_2(x)=\overline{x}; \neg x$; - отрицание x, не x, not x

Двуместные функции

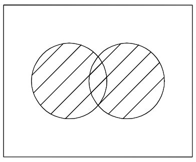
x_1	x_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}
0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	1
0	1	0	1	1	0	1	1	0	0	1
1	0	0	1	1	0	0	1	0	1	0
1	1	1	1	0	1	1	0	0	1	0

f_3 - называется конъюнкция

$f_3(x_1, x_2) = x_1 \,\&\, x_2;\ x_1 \cdot x_2;\ MIN(x_1, x_2);\ x_1\ и\ x_2;\ x_1\ and\ x_2;\ x_1 \wedge x_2$

f_4 - дизъюнкция

$x_1 \vee x_2;\ x_1 + x_2;\ \mathrm{MAX}(x_1, x_2);\ x_1$ или x_2; x_1 or x_2



$A_1 \cup A_2$

f_5 - сложение по модулю 2

$x_1 \oplus x_2$, $(x_1 + x_2) \bmod 2$

f_6 - эквиваленция (когда $x_{i1} = x_{i2}$)

$x_1 \sim x_2$ $x_1 \equiv x_2$ $x_1 \leftrightarrow x_2$

f_7 - импликация

$x_1 \to x_2; x_1 \supset x_2$ из правды $\to$ правда, из лжи $\to$ правда/ложь

f_8 - штрих Шеффера, (антиконъюнкция, не-и)

$x_1 \mid x_2;$

f_9 стрелка Пирса, антидизъюнкция, функция Вебба, не или

$x_1 \downarrow x_2$

Символы … называются логическими связками.

опр || $f = f(x_1, x_2, ..., x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, ..., x_n)$ зависит существенным образом от аргумента x_i, если $\exists$ такие значения $\alpha_1, ...\alpha_{i-1}, \alpha_i, \alpha_{i+1}, ...\alpha_n$ переменных $x_1...x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, ..., x_n$, что $f(\alpha_1...\alpha_{i-1}, \alpha_i, \alpha_{i+1}, ..., \alpha_n) \neq f(\alpha, ...\alpha_{i-1}, \overline{\alpha}_i, \alpha_{i+1}, ..., \alpha_n)$.

опр || Если для всех наборов $\alpha_1, ...\alpha_{i-1}, \alpha_i, \alpha_{i+1}, ...\alpha_n$ $f(\alpha_1...\alpha_{i-1}, \alpha_i, \alpha_{i+1}, ..., \alpha_n) \neq f(\alpha, ...\alpha_{i-1}, \overline{\alpha}_i, \alpha_{i+1}, ..., \alpha_n)$ то переменная x_i называется фиктивной переменной.

опр || функции f_1 и f_2 называются равными, если f_1 получается из f_2 добавлением или изъятием фиктивных элементов.

Формулы

опр ||Формулой над множеством Ф функциональных символов будем называть всякое (и только такое) выражение вида

1) 0, 1- константы;

2) x-любая переменная из множества X;

3) выражения вида (U•B), где U,B – формулы, • - символ любой двуместной связки (&,∨,⊕,↔,→,|↓).

4) $\overline{x}, \overline{U}$ - отрицание;

Для сокращения записи формул принимаются следующие соглашения:

а) внешние скобки опускаются;

б) считается, что операция отрицания выполняется в первую очередь;

в) следующей по старшинству считается операция конъюнкции; затем – все остальные.

Примеры:

$x_1 \& (x_2 \& x_1)$

$x_1 \to \overline{(x_2 \to x_1)}$

$U_1 = x \to (y \& z($ - не есть формула, так как неправильно стоят скобки,

$x \to y \vee z$ - не стоят скобки вообще

Сопоставим формуле $\mathrm{U}(\mathrm{x}_1,\ldots,\mathrm{x}_\mathrm{m})$ функцию $f(x_1,\ldots,x_n)$

опр || Функцию $f\gamma(x_1,\ldots,x_n)$ называют симметричной по переменным $(\mathrm{x}_1,\ldots,\mathrm{x}_\mathrm{k})$ $2 \le \mathrm{k} \le \mathrm{n}$, если для $\forall$ подстановки $\begin{pmatrix} 1,\ldots,\mathrm{k} \\ \mathrm{j}_1,\ldots,\mathrm{j}_\mathrm{k} \end{pmatrix}$

$f(x_1,\ldots,x_k, x_{k+1},\ldots x_n) = f(x_{j1},\ldots,x_{jk}, x_{k+1},\ldots,x_n)$

Основные эквивалентности алгебры логики

Свойства:

1) коммутативность $x \, \mathrm{D} y = y \, \mathrm{D} x \quad \mathrm{D} \in \{\&, \vee, \oplus, \sim, |, \downarrow\}$

2) ассоциативность $(x \, \mathrm{D} y) \, \mathrm{D} z = x \, \mathrm{D} (y \, \mathrm{D} z), \quad \mathrm{D} \in \{\&, \vee, \oplus, \sim\}$

3) дистрибутивность

а) $\mathrm{x} \& (\mathrm{y} \vee \mathrm{z}) = (\mathrm{x} \& \mathrm{y}) \vee (\mathrm{x} \& \mathrm{z})$

б) $\mathrm{x} \vee (\mathrm{y} \& \mathrm{z}) = (\mathrm{x} \vee \mathrm{y}) \& (\mathrm{x} \vee \mathrm{z})$

в) $\mathrm{x} \& (\mathrm{y} \oplus \mathrm{z}) = (\mathrm{x} \& \mathrm{y}) \oplus (\mathrm{x} \& \mathrm{z})$

4) правила Деморгана

а) $\overline{\mathrm{x} \& \mathrm{y}} = \overline{\mathrm{x}} \vee \overline{\mathrm{y}}$

б) $\overline{\mathrm{x} \vee \mathrm{y}} = \overline{\mathrm{x}} \& \overline{\mathrm{y}}$

5) правила поглощения

а) $\mathrm{x} \vee (\mathrm{x} \& \mathrm{y}) = \mathrm{x}$

б) $\mathrm{x} \& (\mathrm{x} \vee \mathrm{y}) = \mathrm{x}$

6)

а) $\mathrm{x} \vee (\overline{\mathrm{x}} \& \mathrm{y}) = \mathrm{x} \vee \mathrm{y}$

б) $\mathrm{x} \& (\overline{\mathrm{x}} \vee \mathrm{y}) = \mathrm{x} \& \mathrm{y}$

7

а) $\mathrm{x} \& \overline{\mathrm{x}} = 0, \mathrm{x} \& 0 = 0, \mathrm{x} \oplus \mathrm{x} = 0$

б) $\mathrm{x} \vee \overline{\mathrm{x}} = 1, \mathrm{x} \vee 1 = 1, \mathrm{x} \sim \mathrm{x} = 1, \mathrm{x} \to \mathrm{x} = 1$

в) $x \vee x = x,\ x \,\&\, x = x,\ x \,\&\, 1 = x,\ x \vee 0 = x,\ x \oplus 0 = x$

г) $x \oplus 1 = \bar{x},\ x \to 0 = \bar{x},\ x \sim 0 = \bar{x},\ x \,|\, x = \bar{x},\ x \downarrow x = \bar{x}$

д) $\bar{\bar{x}} = x$

8)

а) $x \oplus y = (x \,\&\, \bar{y}) \vee (\bar{x} \,\&\, y) = (x \vee y) \,\&\, (\bar{x} \vee \bar{y})$

б) $x \sim y = \overline{x \oplus y} = (x \,\&\, y) \vee (\bar{x} \,\&\, \bar{y}) = (x \vee \bar{y}) \,\&\, (\bar{x} \vee y)$

в) $x \to y = \bar{x} \vee y = ((x \,\&\, y) \oplus x) \oplus 1$

9)

а) $x \,|\, y = \overline{x \,\&\, y} = \bar{x} \vee \bar{y}$

б) $x \downarrow y = \overline{x \vee y} = \bar{x} \,\&\, \bar{y}$

Примеры

Доказать эквивалентность формул

$U = (xy) \vee (x \to yz) \sim (\bar{x} \to \bar{y}) \to z$

$B = (x \to y) \oplus (y \oplus z)$

$x \to y = \bar{x} + y$

$y \oplus z = y\bar{z} + \bar{y}z$

$(\bar{x} + y) \oplus (y\bar{z} + \bar{y}z) = (\bar{x} + y)\overline{(y\bar{z} + \bar{y}z)} + \overline{(\bar{x} + y)}(y\bar{z} + \bar{y}z) =$

$= (\bar{x} + y)(\overline{y\bar{z}} \cdot \overline{\bar{y}z}) + (x \cdot \bar{y})(y\bar{z} + \bar{y}z) = (\bar{x} + y)(\bar{y} + z)(y + \bar{z}) + (x \cdot \bar{y})(y\bar{z} + \bar{y}z) =$

$= (\bar{x} + y)(y\bar{y} + yz + \bar{y}\bar{z} + \bar{z}z) + (x\bar{y})(y\bar{z} + \bar{y}z) = (\bar{x} + y)(yz + \bar{y}\bar{z}) + x\bar{y}(y\bar{z} + \bar{y}z) =$

$= \bar{x}yz + \bar{x}\bar{y}\bar{z} + yyz + y\bar{y}\bar{z} + xy\bar{y}z + x\bar{y}\bar{y}z = \bar{x}yz + \bar{x}\bar{y}z + yz + x\bar{y}z =$

$= \bar{x}(\bar{y}\bar{z} + yz) + z(y + x\bar{y}) = \bar{x}\bar{y}\bar{z} + z(\bar{x}y + x + y) = \bar{x}\bar{y}\bar{z} + z(y(\bar{x} + 1) + x) =$

$= \bar{x}\bar{y}\bar{z} + zx + zy$

$(x + yz) \sim (\bar{x}y + z) = (x + yz)(\bar{x}y + z) + \overline{(x + yz)}\overline{(\bar{x}y + z)} =$

$= x\bar{x}y + xz + \bar{x}yyz + yzz + (\bar{x}(\bar{y} + \bar{z}))((x + \bar{y}) \cdot \bar{z}) =$

$= xz + \bar{x}yz + yz + (\bar{x}\bar{y} + \bar{x}\bar{z})(xz + \bar{y}\bar{z}) =$

$= xz + yz + \bar{x}yz + x\bar{x}\bar{y}\bar{y} + \bar{x}\bar{y}\bar{y}\bar{z} + \bar{x}\bar{z}x\bar{z} + \bar{x}\bar{z}\bar{y}\bar{z} =$

$= xz + \bar{x}zy + yz + \bar{x}\bar{y}\bar{z} = z(x + \bar{x}y + y) + \bar{x}\bar{y}\bar{z} = \bar{x}\bar{y}\bar{z} + zx + zy$

Двойственные функции

опр || функция $[f(x_1, x_2,..., x_n)]^* = \bar{f}(\overline{x_1}, \overline{x_2},..., \overline{x_n})$ называется двойственной функцией к функции $f(x_1, x_2,..., x_n)$.

Пример.

x_1	x_2	x_3	$\gamma(x_1, x_2, x_3)$	$[\gamma(x_1, x_2, x_3)]^*$
0	0	0	1	0
0	0	1	1	1
0	1	0	0	0
0	1	1	0	1
1	0	0	0	1
1	0	1	1	1
1	1	0	0	0
1	1	1	1	0

Правило ||

Чтобы получить двойственную функцию нужно инвертировать $f(x_1,..., x_n) \quad (0 \to 1; 1 \to 0)$, а затем перевернуть таблицу.

Соответствие элементарных функций

f 0, 1, x, $\bar{x}$, $x_1 \& x_2$, $x_1 \vee x_2$

f* 1, 0, x, $\bar{x}$, $x_1 \vee x_2$, $x_1 \& x_2$

Из определения двойственности следует, что

$\gamma^{**} = (\gamma^*)^* = \gamma$

Теорема || Пусть

$$\Phi(x_1,..., x_n) = \gamma(\gamma_1(x_{11},..., x_{1p_1}),..., \gamma_m(x_{m1},..., x_{mp_m}))$$

Тогда

$$\Phi^*(x_1,..., x_n) = \gamma^*(\gamma_1^*(x_{11},..., x_{1p_1}),..., \gamma_m^*(x_{m1},..., x_{mp_m}))$$

Доказательство ||

$$\Phi^*(x_1,..., x_n) = \bar{\Phi}(\bar{x}_1,..., \bar{x}_n) = \bar{f}(f_1(\bar{x}_{11},..., \bar{x}_{1p_1}),..., f_m(\bar{x}_{m1},..., \bar{x}_{mp_m})) =$$

$$= \bar{f}(\bar{\bar{f}}_1(\bar{x}_{11},..., \bar{x}_{1p_1}),..., \bar{\bar{f}}_m(\bar{x}_{m1},..., \bar{x}_{mp_m})) =$$

$$= \bar{f}(\bar{f}_1^*(x_{11},..., x_{1p_1}),..., \bar{f}_m^*(x_{m1},..., x_{mp_m})) =$$

$$= f^*(f_1^*(x_{11},..., x_{1p_1}),..., f_m^*(x_{m1},..., x_{mp_m}))$$

Отсюда вытекает **принцип двойственности**: двойственной к формуле $U = C(f_1,..., f_n)$ является формула $U^* = C(f_1^*,..., f_n^*)$.

Пусть формула содержит только символы &, ∨, ¬. Тогда для получения U^* из U нужно заменить:

$0 \quad 1 \quad \& \quad \vee$

\>   \>   \>   \>

$1 \quad 0 \quad \vee \quad \&$

Из принципа двойственности вытекает, что

$$U(x_1,...,x_n) = B(x_1,...,x_n)$$

\>   .

$$U^*(x_1,...,x_n) = B^*(x_1,...,x_n)$$

В частности,

$$\overline{x_1 \& x_2} = \overline{x_1} \vee \overline{x_2}$$

?   .

$$\overline{x_1 \vee x_2} = \overline{x_1} \& \overline{x_2}$$

Лекция №15

Разложение булевых функций по переменным.

Возникают вопросы:

1) всякая ли функция может быть записана с помощью формулы?

2) как это сделать?

Совершенная дизъюнктивная нормальная форма.

Обозначим $x^{\delta}=x^{\delta}+\overline{x}\overline{\delta}$, где δ равен либо 0, либо 1. Тогда

$$x^{\delta}=\begin{cases}\overline{x}, & \delta=0\\ x, & \delta=1\end{cases}.$$

Поскольку

$$\alpha^{\alpha}=\alpha\alpha+\overline{\alpha}\cdot\overline{\alpha}=\alpha+\overline{\alpha}=1$$
$$\alpha^{\overline{\alpha}}=\alpha\overline{\alpha}+\overline{\alpha}\overline{\overline{\alpha}}=0$$
,

то $x^{\delta}=1 \Leftrightarrow x=\delta$.

Теорема о разложении функции по переменным || Каждую функцию Булевой алгебры $f(x_1,...,x_n)$ при любом $m\,(1\le m\le n)$ можно представить в следующей форме:

$$f(x_1,...,x_m,x_{m+1},...,x_n)=$$
$$=\bigvee_{(\delta_1,5\ ,\delta_m)} x_1^{\delta 1}\,\&...\&\,x_m^{\delta m}\,\&\,f(\delta_1,...,\delta_m,x_{m+1},...,x_n),$$

где дизъюнкция берется по всем наборам значений переменных $x_1,...,x_n$. ||

опр || Это представление называется разложением функции по m переменным $x_1,\ldots x_m$.||

Доказательство.

1) Рассмотрим произвольный набор значений $(\alpha_1,...,\alpha_n)$. Левая часть равенства имеет вид $f(\alpha_1,...,\alpha_n)$. Правая часть

$$\bigvee_{(\delta_1,5\ ,\delta_m)} \alpha_1^{\delta_1}\,\&...\&\,\alpha_m^{\delta_m}\,\&\,f(\delta_1,...,\delta_m,\alpha_{m+1},...,\alpha_n)=$$

(в сумме только одно произведение отлично от нуля: то в котором $\delta_j=\alpha_j$)

$$=\alpha_1^{\alpha_1}\,\&...\&\,\alpha_m^{\alpha_m}\,\&\,f(\alpha_1,...,\alpha_m,\alpha_{m+1},...,\alpha_n)=$$
$$=f(\alpha_1,...,\alpha_m,\alpha_{m+1},...,\alpha_n).$$

Теорема доказана.

Разложение по одной переменной

1) $f(x_1,...,x_{n-1},x_n)=x_n\,\&\,f(x_1,...,x_{n-1},1)\vee\overline{x}_n\,\&\,f(x_1,...,x_{n-1},0)$

Разложение по всем n переменным

2) $f(x_1,...,x_n)=\bigvee\limits_{(\delta_1,...,\delta_n)} x_1^{\delta_1}\&...\&x_n^{\delta_n}\&f(\delta_1,...,\delta_n)$

При $f\neq 0$

$$f(x_1,...,x_n)=\bigvee\limits_{\substack{(\delta_1,...,\delta_n)\\ f(\delta_1,...,\delta_n)=1}} x_1^{\delta_1}\&...\&x_n^{\delta_n}$$

Опр. Это разложение называется совершенной дизъюнктивной нормальной формой.

Теорема || Каждая функция алгебры логики может быть выражена в виде формулы, содержащей только отрицание, конъюнкцию и дизъюнкцию. ||

Доказательство ||

1) Если $f(x_1,...,x_n)\equiv 0$, то $f(x_1,...,x_n)=x_1\overline{x_1}$

2) Если $f(x_1,...,x_n)\not\equiv 0$, то

$$f(x_1,...,x_n)=\bigvee\limits_{\substack{(\delta_1,...,\delta_n)\\ f(\delta_1,...,\delta_n)=1}} x_1^{\delta_1}\&...\&x_n^{\delta_n}$$

Примеры

$x_1\to x_2$

x_1	x_2	f
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

$f(x_1,x_2)=\overline{x}_1\overline{x}_2+\overline{x}_1x_2+x_1x_2=$

(это СДНФ; теперь преобразуем)

$=\overline{x}_1(\overline{x}_2+x_2)+x_1x_2=\overline{x}_1+x_1x_2=\overline{x}_1+x_2$

Следующий пример. Дана таблица

x_1	x_2	x_3	f
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

$$\gamma(x_1,x_2,x_3)=\overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3+\overline{x}_1\overline{x}_2x_3+x_1\overline{x}_2x_3+x_1x_2x_3=$$
$$=\overline{x}_1\overline{x}_2(\overline{x}_3+x_3)+x_1x_3(\overline{x}_2+x_2)=\overline{x}_1\overline{x}_2+x_1x_3$$

Пусть $f\not\equiv 1$

$$f^*(x_1,\ldots,x_n)=\bigvee_{\substack{(\delta_1,5\ ,\delta_n)\\ f^*(\delta_1,5\ ,\delta_n)=1}} x_1^{\delta_1}\,\&\ldots\&\,x_n^{\delta_n}=$$
$$=\mathop{\&}_{\substack{(\delta_1,5\ ,\delta_n)\\ f(\overline{\delta}_1,5\ ,\overline{\delta}_n)=0}}\left(x_1^{\delta_1}\vee\ldots\vee x_n^{\delta_n}\right)=$$
$$=\mathop{\&}_{\substack{(\delta_1,5\ ,\delta_n)\\ f(\delta_1,5\ ,\delta_n)=0}}\left(\overline{x}_1^{\delta_1}\vee\ldots\vee \overline{x}_n^{\delta_n}\right)=$$

Это разложение называется совершенной конъюнктивной нормальной формой.

Примеры.

1) $f(x_1,x_2)=x_1\to x_3=\overline{x}_1+x_2$

2)
$$\gamma(x_1,x_2,x_3)=(x_1+\overline{x}_2+\overline{x}_3)(x_1+\overline{x}_2+\overline{x}_3)(\overline{x}_1+x_2+x_3)(\overline{x}_1+\overline{x}_2+x_3)$$

$$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2)\to x_3=\overline{x_1}\,\overline{x_2}+x_3=\overline{x_1}\,\overline{x_2}(x_3+\overline{x_3})+x_3(x_1+\overline{x_1})=$$
$$=\overline{x_1}\,\overline{x_2}x_3+\overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3}+x_1x_2x_3+\overline{x_1}x_2x_3+x_1\overline{x_2}x_3=$$

x_1	x_2	x_3	x_4	f
0	0	0	0	0
0	0	0	1	1
0	0	1	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	0	1
0	1	0	1	0
0	1	1	0	0
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	0	1	1
1	0	1	0	0
1	0	1	1	0
1	1	0	0	0
1	1	0	1	0
1	1	1	0	1
1	1	1	1	0

$$\tilde{\gamma}(x^4) = (0100100011000010)$$

$$\overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3}x_4 + \overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3}\,\overline{x_4} + x_1\overline{x_2}\,\overline{x_3}\,\overline{x_4} + x_1\overline{x_2}\,\overline{x_3}x_4 + x_1x_2x_3\overline{x_4}$$

x_1	x_2	γ
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

$$f = (x_1 + x_2)(\overline{x_1} + \overline{x_2}) = x_1\overline{x_2} + \overline{x_1}x_2 + x_1\overline{x_2} + \overline{x_2}x_2 = \overline{x_1}x_2 + x_1\overline{x_2}$$

$$\tilde{f}(x^4) = (1000011100110001)$$

x_1	x_2	x_3	X_4	γ
0	0	0	0	0
0	0	0	1	1
0	0	1	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	0	1
0	1	0	1	0
0	1	1	0	0
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	0	1	1
1	0	1	0	0
1	0	1	1	0
1	1	0	0	0
1	1	0	1	0
1	1	1	0	1
1	1	1	1	0

$$\tilde{\gamma}(x^4) = (x_1 + x_2 + x_3 + x_4)(x_1 + x_2 + \overline{x_3} + x_4)(x_1 + \overline{x_2} + x_3 + \overline{x_4}) \cdot$$
$$\cdot (x_1 + \overline{x_2} + \overline{x_3} + \overline{x_4})(\overline{x_1} + x_2 + \overline{x_3} + x_4)(x_1 + x_2 + \overline{x_3} + \overline{x_4})(\overline{x_1} + \overline{x_2} + x_3 + x_4) \cdot$$
$$\cdot (\overline{x_1} + \overline{x_2} + x_3 + \overline{x_4})(\overline{x_1} + \overline{x_2} + \overline{x_3} + \overline{x_4})$$

$$\tilde{\gamma}(x^3) = (\overline{x_1} + x_2 + \overline{x_3})(x_1 + x_2 + x_3) =$$
$$= \overline{x_1}x_1x_3 + \overline{x_2}x_1x_2 + \overline{x_3}x_3 + \overline{x_1}x_3 + \overline{x_2}x_3 + \overline{x_3}x_1x_2 =$$
$$= \overline{x_1}x_3(x_2 + \overline{x_2}) + \overline{x_2}x_3(x_1 + \overline{x_1}) + \overline{x_3}x_1x_2 =$$
$$= \overline{x_1}x_2x_3 + x_1\overline{x_2}x_3 + \overline{x_1}\,\overline{x_2}x_3 + x_1x_2\overline{x_3}$$

$$\gamma(\tilde{x}^3) = (x_1 + x_2\overline{x_3})(x_1\overline{x_2} + x_3)(\overline{x_1 x_2} + x_3) =$$
$$= (x_1\overline{x_2} + x_2\overline{x_3}x_1\overline{x_2} + x_1x_3 + x_2x_3\overline{x_3})(\overline{x_1} + \overline{x_2} + x_3) =$$
$$= x_1\overline{x_2} + x_1\overline{x_2}x_3 + x_1\overline{x_2}x_3 + x_1x_3 = x_1\overline{x_2}(x_3 + \overline{x_3}) + x_1\overline{x_2}x_3 + x_1x_3(x_2 + \overline{x_2}) =$$
$$= x_1\overline{x_2}x_3 + x_1\overline{x_2}\,\overline{x_3} + x_1x_2x_3 = x_1\overline{x_2}x_3 + x_1\overline{x_2}\,\overline{x_3} + x_1x_2x_3$$

$$\gamma(\tilde{x}^4) = (x_1 \to x_4)(x_2 \to \overline{x_3})(x_3 \to x_1\overline{x_4}) =$$
$$= (\overline{x_1} + x_2)(\overline{x_2} + \overline{x_3})(\overline{x_3} + x_1\overline{x_4}) = \overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3} + x_2\overline{x_3} + x_1x_2\overline{x_4} + x_1x_2\overline{x_3}\,\overline{x_4} =$$
$$= \overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3}(x_4 + \overline{x_4}) + x_2x_3(x_1 + \overline{x_1})(x_4 + \overline{x_4}) + x_1x_2\overline{x_3}\,\overline{x_4} = \overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3}x_4 +$$
$$+ \overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3}\,\overline{x_4} + x_1x_2x_3x_4 + \overline{x_1}x_2x_3 \ldots\ldots$$

Лекция № 9 (11.04.00)

Полнота и замкнутость

Опр || система функций $\{f_1, f_2, ..., f_n\}$ из P_2 (множества всех булевых функций) называется функционально полной, если любая булева функция может быть записана в виде формулы через функции этой системы.

Пример: 1) Само множество P_2;

2) $B = \{\bar{x}_1, x_1 \& x_2, x_1 \vee x_2\}$;

3) $B = \{0,1\}$ - не полна.

Теорема || Пусть даны две системы функций из P_2

$B = \{f_1, f_2, ...\}$, (I)

$C = \{g_1, g_2, ...\}$. (II)

Известно, что система I полная и каждая функция системы I выражается через функции системы II. Тогда система II является полной.

Доказательство || Пусть $h \in P_2$. В силу полноты сист. I функцию h можно выразить в виде формулы $h = C[f_1, f_2, ...]$. По условию теоремы

$f_1 = C_1[g_1, g_2, ...]$

$f_2 = C_2[g_1, g_2, ...]$

....

Поэтому

$h = C[C_1[g_1, g_2, ...], C_2[g_1, g_2, ...], ...] = C'[g_1, g_2, ...]$ ч. и т.д.

Примеры ||

1) $B_0 = \{\overline{x_1}, x_1 \& x_2, x_1 \vee x_2\}$ - полная.

2) $B_1 = \{\overline{x_1}, x_1 \& x_2\}$ - тоже полная, так как $x_1 \vee x_2 = \overline{\overline{x_1} \& \overline{x_2}}$.

3) $B_2 = \{\overline{x_1}, x_1 \vee x_2\}$ - тоже полная.

4) $B_3 = \{x_1 | x_2\}$ - тоже полная, так как

$x | y = \overline{x \& y} = \bar{x} \vee \bar{y}$,

$x | x = \overline{x \& x} = \bar{x}$,

$(x_1 | x_2) | (x_1 | x_2) = \overline{x_1 | x_2} = \overline{\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2} = x_1 \& x_2$.

(3) – I)

5) $B = \{0, 1, x_1 \cdot x_2, x_1 \oplus x_2\}$

$\bar{x} = x \oplus 1$

$x_1 x_2 = x_1 \& x_2$ тогда взяв в качестве сист. I сист. 2 можно заключить, сист. функций 5) – полная. Тем самым, справедлива

Теорема Жегалкина || Каждая функция из P_2 может быть выражена при помощи полинома по модулю 2 – (полинома Жегалкина):

$$\sum_{(i_1, ..., i_s)} a_{i_1 ... i_s} x_{i_1} ... x_{i_s}.$$

Имеем: число разных сочетаний $x_{i_1},\dots,x_{i_s}$ равно числу подмн-в мн-ва из n элементов. Каждое a_{ik} может принимать одно из 2-х значений {0,1}. Тогда число разных пол. Жег. равно 2^{2^n}, т.е. равно числу различных булевых функций.

Т. о. получаем единственность представления функций через пол. Жег.

Примеры

$$x_1 \vee x_2 = a\,x_1x_2 \oplus b\,x_1 \oplus c\,x_2 \oplus d$$

$$x_1 = 0,\, x_2 = 0 \Rightarrow 0 = d,$$

$$x_1 = 0,\, x_2 = 1 \Rightarrow 1 = c,$$

$$x_1 = 1,\, x_2 = 0 \Rightarrow 1 = b,$$

$$x_1 = 1,\, x_2 = 1 \Rightarrow 1 = a \oplus b \oplus c \Rightarrow a = 1,$$

Следовательно,

$$x_1 \vee x_2 = x_1x_2 \oplus x_1 \oplus x_2$$

Пока опустим

2 способ Т-преобразов. вектора функции

$$T(\alpha_0, \alpha_1) = (\alpha_0, \alpha_0 \oplus \alpha_1)$$

$$\gamma(\tilde{x}) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$$

X_1	x_2	x_3	γ
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

$$\tilde{\alpha}_\gamma = (000|0|||)$$

$$\gamma_0 = (0,0) \quad \gamma_1 = (0,1) \quad \gamma_2 = (0,1) \quad \gamma_3 = (1,1)$$

$$T(\gamma_0) = (0,0 \oplus 0) = (0,0)$$

$$T(\gamma_1) = (0,0 \oplus 1) = (0,1)$$

$$T(\gamma_2) = (0,1)$$

$$T(\gamma_3) = (1,1 \oplus 1) = (1,0)$$

$$T(\gamma_0, \gamma_1) = T(T(\gamma_0), T(\gamma_0) \oplus T(\gamma_1)) = ((0,0),(0,0) \oplus (0,1)) = (0,0,0,1)$$

$$T(\gamma_2, \gamma_3) = T(T(\gamma_2), T(\gamma_2) \oplus T(\gamma_3)) = ((0,1),(0,1) \oplus (1,0)) = (0,1,1,1)$$

$$T(\gamma_0,\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3) = T\gamma_0\gamma_1, T(\gamma_1,\gamma_1) + T(\gamma_2,\gamma_3) = (0,0,0,1),(0,0,0,1) \oplus (0,1,1,1) =$$
$$= (0,0,0,1,0,1,1,0) = \tilde{B}$$
$$\gamma(\tilde{x}) = 0\cdot K_0 \oplus 0\cdot K_1 \oplus 0K_2 \oplus 1\cdot K_3 \oplus 0K_4 \oplus 1\cdot K_5 \oplus 1\cdot K_6 \oplus 0K_7 =$$
$$= 0\cdot 1 \oplus 0\cdot x_3 \oplus 0\cdot x_3 \oplus 1\cdot x_2x_3 \oplus 0x_1 \oplus 1\cdot x_1x_3 \oplus 1\cdot x_1x_2 \oplus 0\cdot x_1x_2x_3 =$$
$$= x_1x_3 \oplus x_1x_3 \oplus x_1x_2$$

3 способ – алгебраических преобразований

$$\bar{x} = x \oplus 1$$
$$f(x,y) = x \to y = \bar{x} \vee y = \overline{x\bar{y}} = x(y \oplus 1) \oplus 1 = xy \oplus x \oplus 1$$

Опр. Пусть M – некоторое подмножество функций из P_2. Замыканием M называется мн-во всех булевых функций, предстпвимых в виде формул через функции мн-ва M. Обозначается [M].

Замечание. Замыкание инвариантно относ. операций введения и удаления фиктивных перем.

Примеры.

1) $M=P_2$, $[M]=P_2$.

2) $M=\{1,x_1\oplus x_2\}$, [M] – мн-во L всех линейных ф-й вида
$f(x_1,...,x_n) = c_0 \oplus c_1x_1 \oplus ... \oplus c_nx_n$, ($c_i$=0,1).

Свойства замыкания:

1) [M]=M;
2) [[M]]=[M];
3) $M_1 \subseteq M_2 \Rightarrow [M_1] \subseteq [M_2]$;
4) $[M_1 \cup M_2] \supseteq [M_1] \cup [M_1]$.

Опр. Класс (мн-во) M называется (функционально) замкнутым, если [M]=M.

Примеры.

1) Класс $M=P_2$ функционально замкнут;
2) Класс $\{1,x_1\oplus x_2\}$ не замкнут;
3) Класс L замкнут (линейное выражение, составленное из линейных выражений линейно).

Новое определение полноты. M – полная система, если $[M]=P_2$.

Лекция № 17 (18.04.00)
Замкнутые классы

1) Обозначим через T_0 - класс всех булевых функций $f(x_1,...,x_n)$, сохраняющих константу 0, т.е. функций, для которых выполняется равенство $f(0,...,0)=0$.

При добавлении несущественной переменной равенство не меняется.

Функции $\{0, x_1, x_1 \& x_2, x_1 \vee x_2, x_1 \oplus x_2\} \subset T_0$,

$\{1, \overline{x}\} \not\subset T_0$.

Количество таких функций $T_2 = \frac{1}{2} \cdot 2^{2^n}$ (n – число переменных) т.к. в первой строке всегда содержит 0. (У второй половины 1).

T_0 – замкнутый класс, т.к. если

$\Phi = f(f_1,...,f_n)$, $\{f_1,...,f_n\} \subseteq T_0$, то

$\Phi(0,...,0) = f(f_1(0,...,0),...,f_n(0,...,0)) = f(0,...,0) = 0 \Rightarrow \Phi \in T_0$.

2) Обозначим через T_1 - класс всех булевых функций $f(x_1,...,x_n)$, сохраняющих константу 1, т.е. функций, для которых выполняется равенство $f(1,...,1)=1$.

Класс вместе с любой функцией содержит равную ей функцию.

Функции $\{1, x, x_1 \& x_2, x_1 \vee x_2\} \subset T_1$,

$\{0, \overline{x}, x_1 \oplus x_2\} \not\subset T_1$.

Класс T_1 состоит из функций двойственных классу T_0 (следует из определения).

Поэтому все свойства класса T_0 переносятся на класс T_1.

$|T_1| = \frac{1}{2} \cdot 2^{2^n}$.

3) S – класс – класс всех самодвойственных функций, т.е. $f^* = f$.

Функции $\{x, \overline{x}\} \subset S$,

$h = x_1x_2 \vee x_1x_3 \vee x_2x_3 \in S$, т.к.

$$h^*(x_1,x_2,x_3) = (x_1 \vee x_2)(x_1 \vee x_3)(x_2 \vee x_3) =$$
$$= x_1x_1x_2 \vee x_1x_1x_3 \vee x_1x_2x_3 \vee x_1x_3x_3 \vee x_1x_2x_3 \vee x_1x_2x_2 \vee x_2x_2x_3 \vee x_2x_3x_3 =$$
$$= x_1x_2 \vee x_1x_3 \vee x_1x_2x_3 \vee x_2x_3 = x_1x_2(1 \vee x_3) \vee x_1x_3 \vee x_2x_3 =$$
$$= x_1x_2 \vee x_1x_3 \vee x_2x_3 = h(x_1,x_2,x_3)$$

Для самодвойственной функции имеет место тождество

$$\overline{f}(\overline{x_1},...,\overline{x_n}) = f(x_1,...,x_n).$$

Тем самым на наборах $(\alpha_1,...,\alpha_n)$ и $(\overline{\alpha_1},...,\overline{\alpha_n})$ ф-я принимает противоположные значения (определяется половиной комбинаций x_i).

Поэтому число самодвойственных функций равно $2^{\left(\frac{2^n}{2}\right)} = 2^{2^{n-1}}$.

Докажем, что класс S замкнут.

Пусть $\Phi = f(f_1,...,f_n)$, $(f, f_1,...,\gamma_n) \subset S$, т.е. $f_i^* = f_i$. Тогда

$\Phi^* = f^*(f_1^*,...,f_n^*) = f(f_1,...,f_n) = \Phi$.

4. Обозначим

$\tilde{\alpha} = (\alpha_1,...,\alpha_n)$, $\tilde{\beta} = (\beta_1,...,\beta_n)$, $f(\alpha_1,...,\alpha_n) = f(\tilde{\alpha})$.

опр || Для 2^x наборов $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\beta}$ выполнено отношение предшествования $\tilde{\alpha} \underline{E} \tilde{\beta}$, если $\alpha_1 \le \beta_1,...,\alpha_n \le \beta_n$.

Пример. $(0,1,0,1)\underline{E}(1,1,0,1)$

Очевидно, что если $\tilde{\alpha}\underline{E}\tilde{\beta}, \tilde{\beta}\underline{E}\tilde{\gamma} \Rightarrow \tilde{\alpha}\underline{E}\tilde{\gamma}$.

Таким образом, множество всех наборов длины n по отношению к операции предшествования $\underline{E}$ является частично упорядоченным.

Опр. || функция $f(x_1,...,x_n)$ называется монотонной, если для любых 2^x наборов $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}$ таких, что $\tilde{\alpha}\underline{E}\tilde{\beta}$ выполняется неравенство

$f(\tilde{\alpha}) \le f(\tilde{\beta})$.

Монотонные функции:

$\{0, 1, x, x_1 \& x_2, x_1 \vee x_2\}$,

$x_1 \oplus x_2$ - не монотонная

Обозначим M – множество всех монотонных функций. Нужно доказать, что этот класс замкнутый.

Пусть $\Phi = f(f_1,...,f_n)$, $\{f, f_1,...,f_n\} \subset M$, $\tilde{x} = (x_1,...,x_n)$.

Будем считать, что все f_i зависят от x_1, x_n.

Пусть $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}$ два набора переменных длины n, причем $\tilde{\alpha}\underline{E}\tilde{\beta}$. Тогда $f_1(\tilde{\alpha}) \le f_1(\tilde{\beta})$,

………………

$f_m(\tilde{\alpha}) \le f_m(\tilde{\beta})$, следовательно

$(f_1(\tilde{\alpha}),...,f_m(\tilde{\alpha}))\underline{E}(f_1(\tilde{\beta}),...,f_m(\tilde{\beta}))$, тогда и

$f(f_1(\tilde{\alpha}),...,f_m(\tilde{\alpha})) \le f(f_1(\tilde{\beta}),...,f_m(\tilde{\beta}))$.

Тем самым $\Phi(\tilde{\alpha}) \le \Phi(\tilde{\beta})$.

5) L – класс всех линейных функций

$\{0, 1, x, \bar{x}, x_1 \oplus x_2\} \subset L$

$\{x_1 \,\&\, x_2, x_1 \vee x_2\} \not\subset L$

О полноте этого класса мы упоминали ранее.

Эти замкнутые классы не тождественны и они не полны, что следует из таблицы

	T_0	T_1	S	M	L
0	+	-	-	+	+
1	-	+	-	+	+
$\bar{x}$	-	-	+	-	+

Теорема о функциональной полноте.

Для того, чтобы система функций $B = \{f_1, f_2, ..., f_s, ...\}$ была полной, необходимо и достаточно, чтобы она целиком не содержалась ни в одном из 5 замкнутых классов T_0, T_1, S, M, L.

(Без док-ва).

Опр. Класс R из P_2 (множество всех булевых функций) называется предполным или максимальным, если для любой ф-ции f ($f \in P_2, f \notin R$) класс $R \cup \{f\}$ полный.

В алгебре логики $\exists$ только 5 предполных классов: T_0, T_1, S, M, L.

Пример.

$f_1 = x_1 x_2, f_2 = 0, f_3 = 1, f_4 = x_1 \oplus x_2 \oplus x_3$

$f_3 \notin T_0, f_2 \notin T_1, f_2 \notin S, f_4 \notin M, f_1 \notin L$ $\Rightarrow$система полна.

С другой стороны, удаление любой из функций приводит к неполной системе

$\{f_2, f_3, f_4\} \subset L,$

$\{f_1, f_3, f_4\} \subset T_1,$

$\{f_1, f_2, f_4\} \subset T_0,$

$\{f_1, f_2, f_3\} \subset M.$

Пример 2.

Система функций B=$\{x_1|x_1\}$, полна так как $x_1 \mid x_2 = \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 = x_1 x_2 \oplus 1$ не сохраняет константы, не линейна, не самодвойственна ($[\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2]^* = \bar{x}_1 \,\&\, \bar{x}_2$) и не монотонна (последний ноль – после 1).

Теорема || из всякой полной в P_2 системы функций B можно выделить полную подсистему, содержащую не более 4^x функций.

(Без док-ва).

Понятия многозначной логики.

Оценка погрешности.

$|\Delta x| < \varepsilon$

$P\{|\Delta x| < \varepsilon\} \geq P_{\text{доверия}} = 1 - P_{\text{ошибки}}$

$$\downarrow$$

$$0{,}1 - 0{,}001$$

k – знач. логика

k – катур. Число $\supset Z$

E_k множество значений, которые может принимать функция

$E_k = \{0,1,...,k-1\}$

опр || $\gamma(\tilde{x}^n) = \gamma(x_1, x_2, ..., x_n)$ называется k-значной логикой, если в $\bigcup$ наборе $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ значения переменных $x_1, x_2, ..., x_n$, где $\alpha_i \in E_k$ значение $\gamma(\tilde{\alpha}) \in E_k$

Элемент функции k-значной логики

1) константы: 0,1,…,k-1

2) отрицание Роста: $x + 1(\text{mod}\, k) = \overline{x}$

3) отрицание Лукасевича: $k - 1 - x = \sim x \,|\, (Nx)$

4) Характеристическая функция I$^{\text{го}}$ рода $\gamma_i(x) = \begin{cases} 1, & x = i \\ 0, & x \neq i, i = 0,...,k-1 \end{cases}$

5) Характеристическая функция 2$^{\text{го}}$ рода:

$$J_i(x) = \begin{cases} k = 1, & x = i \\ 0, & x \neq i, i = 0,...,k-1 \end{cases}$$

6) $\min(x, y) = x \,\&\, y$

7) $\max(x, y) = x \vee y$

8) $x + y(\bmod k)$ сумма по модулю k

9) $x \cdot y(\bmod k)$ произведение

10) усеченная разность $x \underset{\&}{-} y = \begin{cases} 0, & 0 \le x < y \le k-1 \\ x - y, & 0 \le y \le x \le k-1 \end{cases}$

11) $x \supset y = \begin{cases} k-1, & 0 \le x < y \le k-1 \\ k-1-x+y, & 0 \le y \le x \le k-1 \end{cases}$

12) Функция Вебба:

$\max(x, y) + 1(\bmod k) = \vartheta k(x, y)$

13) $x - y = \begin{cases} x - y, & 0 \le y \le x \le k-1 \\ k - y + x, & 0 \le x < y \le k-1 \end{cases}$

Свойство функций:

выполняются свойства коммутативности и ассоциативности, дистрибутивность, умножение относительно сложения

$(x + y)z = (x \cdot z)(y \cdot z)$

Дистрибутивность операции max относительно min

$\max(\min(x, y), z) = \min(\max(x, z), \max(y, z))$

x	y	z	I	II
1	2	3	z	z
1	3	2	z	z
2	1	3	z	z
2	3	1	x	x
3	1	2	z	z
3	2	1	y	y
1	1	1	1	1
1	2	2	2	2
2	1	2	2	2
3	2	1	2	2

Дистрибутивность операции min относительно max

$$\min(\max(x, y), z) = \max(\min(x, z), \min(y, z))$$

$$\max(x, x) = x \; \min(x, x) = x$$

$$\min(\sim x, \sim y) = \sim \max(x, y)$$

$$\max(\sim x, \sim y) = \sim \min(x, y)$$

$$\max(x_1, x_2, ..., x_n) = \max\begin{pmatrix} \max(x_1, ..., x_{n-1}) x_n \\ n \geq 3 \end{pmatrix}$$

$$\min(x_1, x_2, ..., x_n) = \min\begin{pmatrix} \min(x_1, ..., x_{n-1}) x_n \\ n \geq 3 \end{pmatrix}$$

$$-x = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ k - x, & x \neq 0 \end{cases}$$

З.Ы.: Надеюсь, моя деятельность кому-нибудь помогла.