МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
АВТОМОБІЛЬНО-ДОРОЖНІЙ ІНСТИТУТ
ДЕРЖАВНОГО ВИЩОГО НАВЧАЛЬНОГО ЗАКЛАДУ
«ДОНЕЦЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ»

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
з дисципліни
„Оптимізаційні методи та моделі ”
(для студентів спеціальності „Економічна кібернетика”)

Горлівка - 20138

ВВЕДЕНИЕ

В данном методическом указании рассмотрены основные типы задач линейного программирования, даны рекомендации по построению их математических моделей и поиску оптимальных решений средствами табличного редактора Microsoft Excel.

В рамках теоретических сведений поданы:

- подробные методики и конкретные примеры решения одноиндексных и двухиндексных задач линейного программирования с различными видами ограничений;
- возможные ошибки при вводе условий задач линейного программирования в MS Excel.

Практические работы содержат:

- теоретическое описание математических моделей задач линейного программирования определенного типа и методики их построения;
- примеры решения конкретных задач описанного типа или рекомендации к их решению.

Каждая практическая работа включает в себя 12 вариантов учебных задач определенного типа.

СОДЕРЖАНИЕ

1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

1.1 ТРЕБОВАНИЯ К СОДЕРЖАНИЮ ОТЧЕТА ПО ПРАКТИЧЕСКИМ РАБОТАМ

1.1.1 Отчет по отдельной практической работе

Отчет по отдельной практической работе должен иметь следующую структуру с соответствующей рубрикацией:

- ФИО, группа студента;
- название и номер задачи;
- условие;
- решение.

Решение задачи должно содержать подробное описание выполняемых действий, сопровождаемое рисунками, детально иллюстрирующими ход выполнения работы (аналогично п.1.2.1-1.2.5).

1.1.2 Отчет по практическим работам

Отчет по практическим работам в целом должен состоять из:

- титульного листа
- отчетов по каждой практической работе

Защита практических работ может проходить как отдельно по каждой практической так и по всем практическим вместе.

1.1.3 Защита работ по отдельности

При защите работ отдельно преподавателю предоставляется печатный вариант отчета по соответствующей практической работе, на которой преподаватель ставит оценку.

Оценка преподавателем ставится на первой странице отчета по результатам устного собеседования, в ходе которого задаются вопросы по защищаемой работе, а также всем работам, которые предшествуют защищаемой в учебном процессе.

1.1.4 Защита всех работ вместе

При защите работ вместе, преподавателю предоставляется печатный вариант отчета по практическим работам (п.1.1.2).

Оценка преподавателем ставится на первой странице отчета по каждой работе по результатам устного собеседования, в ходе которого задаются вопросы по защищаемой работе, а также всем работам, которые предшествуют защищаемой в учебном процессе.

1.1.5 Получение допуска к зачету/экзамену

В конце семестра, для получения допуска к зачету/экзамену студент сдает преподавателю:

- отчет по всем практическим работам (п.1.1.2) в печатном виде, где на первой странице каждой практической работы стоит оценка преподавателя;

- электронный вариант отчета по практическим работам (п.1.1.2).

1.2 ИСПОЛЬЗОВАНИЕ Microsoft Excel ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ЛП

Для того чтобы решить задачу ЛП в табличном редакторе Microsoft Excel, необходимо выполнить следующие действия.

1. **Ввести условие задачи:**
   a) ***создать экранную форму для ввода условия задачи:***
      - переменных,
      - целевой функции (ЦФ),
      - ограничений,
      - граничных условий;

   b) ***ввести исходные данные в экранную форму***:
      - коэффициенты ЦФ,
      - коэффициенты при переменных в ограничениях,
      - правые части ограничений;

   c) ***ввести зависимости из математической модели в экранную форму***:
      - формулу для расчета ЦФ,
      - формулы для расчета значений левых частей ограничений;

   d) ***задать ЦФ*** (в окне **"Поиск решения"**):
      - целевую ячейку,
      - направление оптимизации ЦФ;

   e) ***ввести ограничения и граничные условия*** (в окне **"Поиск решения"**):
      - ячейки со значениями переменных,
      - граничные условия для допустимых значений переменных,
      - соотношения между правыми и левыми частями ограничений.
2. **Решить задачу:**
   a) ***установить параметры решения задачи*** (в окне **"Поиск решения"***);*

   b) ***запустить задачу на решение*** (в окне **"Поиск решения"***);*

   c) ***выбрать формат вывода решения*** (в окне **"Результаты поиска решения"**).

1.2.1 Одноиндексные задачи ЛП

Рассмотрим пример нахождения решения для следующей одноиндексной задачи ЛП:

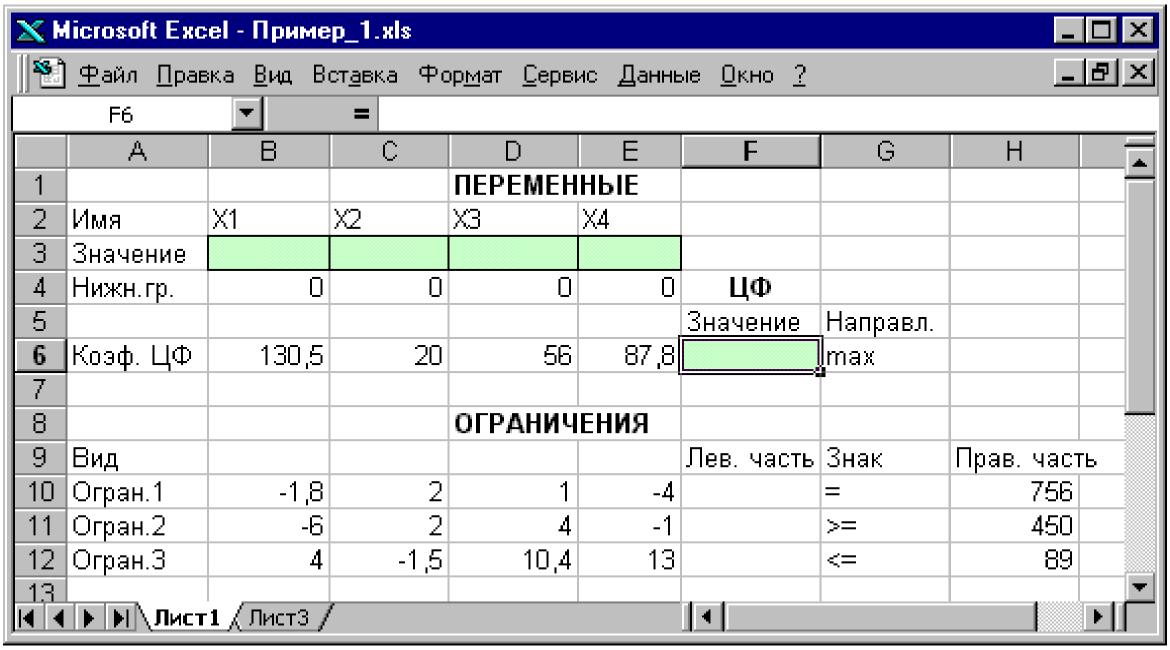
$$L(X) = 130{,}5x_1 + 20x_2 + 56x_3 + 87{,}8x_4 \rightarrow \max;$$

$$\begin{cases} -1{,}8x_1 + 2x_2 + x_3 - 4x_4 = 756, \\ -6x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 \geq 450, \\ 4x_1 - 1{,}5x_2 + 10{,}4x_3 + 13x_4 \leq 89, \\ x_j \geq 0;\ j = \overline{1,4}. \end{cases} \tag{1.1}$$

1.1.1 Ввод исходных данных

Создание экранной формы и ввод в нее условия задачи

Экранная форма для ввода условий задачи (1.1) вместе с введенными в нее исходными данными представлена на рис.1.1.



	A	B	C	D	E	F	G	H
1				ПЕРЕМЕННЫЕ				
2	Имя	X1	X2	X3	X4			
3	Значение							
4	Нижн.гр.	0	0	0	0	ЦФ		
5						Значение	Направл.	
6	Коэф. ЦФ	130,5	20	56	87,8		max	
7								
8				ОГРАНИЧЕНИЯ				
9	Вид					Лев. часть	Знак	Прав. часть
10	Огран.1	-1,8	2	1	-4		=	756
11	Огран.2	-6	2	4	-1		>=	450
12	Огран.3	4	-1,5	10,4	13		<=	89
13								

Рис.1.1. Экранная форма задачи (1.1) (курсор в ячейке F6)

В экранной форме на рис.1.1 каждой переменной и каждому коэффициенту задачи поставлена в соответствие конкретная ячейка в Excel. Имя ячейки состоит из буквы, обозначающей столбец, и цифры, обозначающей строку, на пересечении которых находится объект задачи ЛП. Так, например, переменным задачи (1.1) соответствуют ячейки **B3** (x_1), **C3** (x_2), **D3** (x_3), **E3** (x_4), коэффициентам ЦФ соответствуют ячейки **B6** ($c_1 = 130{,}5$), **C6** ($c_2 = 20$), **D6** ($c_3 = 56$), **E6** ($c_4 = 87{,}8$), правым частям ограничений соответствуют ячейки **H10** ($b_1 = 756$), **H11** ($b_2 = 450$), **H12** ($b_3 = 89$) и т.д.

Ввод зависимостей из математической модели в экранную форму

<u>Зависимость для ЦФ</u>

В ячейку **F6**, в которой будет отображаться значение ЦФ, необходимо ввести **формулу,** по которой это значение будет рассчитано. Согласно (1.1) значение ЦФ определяется выражением

$$130{,}5x_1 + 20x_2 + 56x_3 + 87{,}8x_4 . \qquad (1.2)$$

Используя обозначения соответствующих ячеек в Excel (см. рис.1.1), формулу для расчета ЦФ (1.2) можно записать как **сумму произведений** каждой из ячеек, отведенных для значений переменных задачи (**B3, C3, D3, E3**), на соответствующую ячейку, отведенную для коэффициентов ЦФ (**B6, C6, D6, E6**), то есть

$$B6 \cdot B3 + C6 \cdot C3 + D6 \cdot D3 + E6 \cdot E3 . \qquad (1.3)$$

Чтобы задать формулу (1.3) необходимо в ячейку **F6** ввести следующее выражение и нажать клавишу **"Enter"**

=СУММПРОИЗВ(B$3:E$3;B6:E6), (1.4)

где символ **$** перед номером строки 3 означает, что при копировании этой формулы в другие места листа Excel номер строки 3 не изменится;

символ **:** означает, что в формуле будут использованы **все** ячейки, расположенные между ячейками, указанными слева и справа от двоеточия (например, запись **B6:E6** указывает на ячейки **B6, C6, D6 и E6**). После этого в целевой ячейке появится 0 (нулевое значение) (рис.1.2).

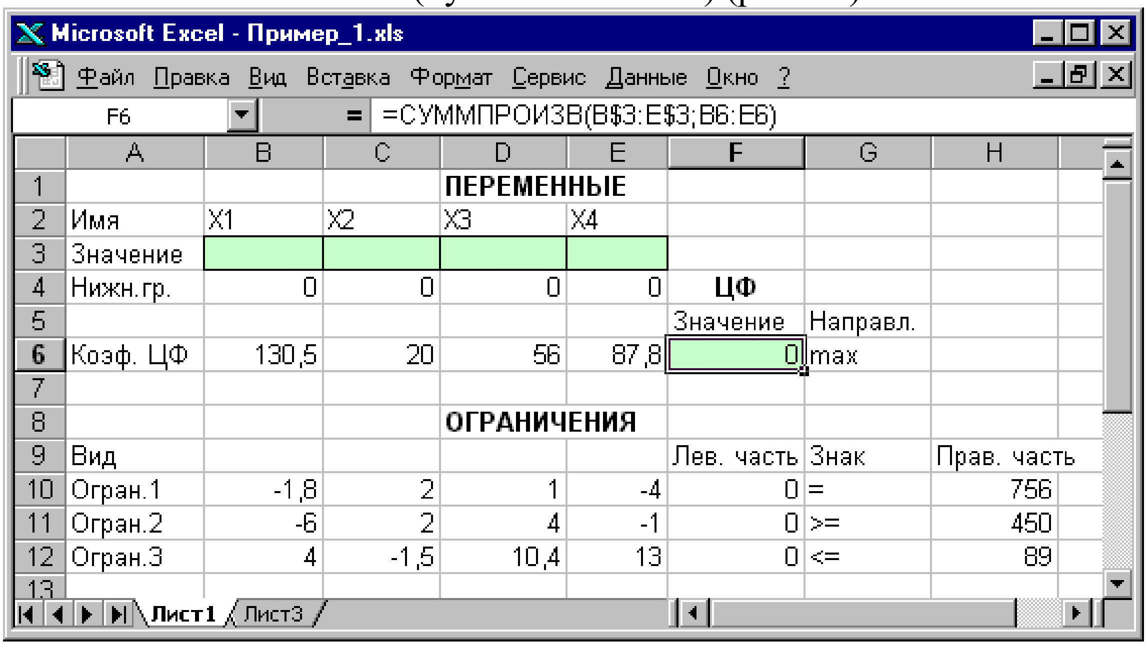


Рис.1.2. Экранная форма задачи (1.1) после ввода всех необходимых формул (курсор в ячейке F6)

Примечание 1.1. Существует другой способ задания функций в Excel с помощью режима **"Вставка функций",** который можно вызвать из меню **"Вставка"** или при нажатии кнопки "f_x" на стандартной панели инструментов. Так, например, формулу (1.4) можно задать следующим образом:

- курсор в поле **F6;**
- нажав кнопку "f_x", вызовите окно **"Мастер функций – шаг 1 из 2";**
- выберите в окне **"Категория"** категорию **"Математические";**
- в окне **"Функция"** выберите функцию **СУММПРОИЗВ*;***
- в появившемся окне **"СУММПРОИЗВ"** в строку **"Массив 1"** введите выражение **B$3:E$3**, а в строку **"Массив 2"** – выражение **B6:E6** (рис.1.3);
- после ввода ячеек в строки **"Массив 1"** и **"Массив 2"** в окне **"СУММПРОИЗВ"** появятся числовые значения введенных массивов (см. рис.1.3), а в экранной форме в ячейке **F6** появится текущее значение, вычисленное по введенной формуле, то есть 0 (так как в момент ввода формулы значения переменных задачи нулевые).

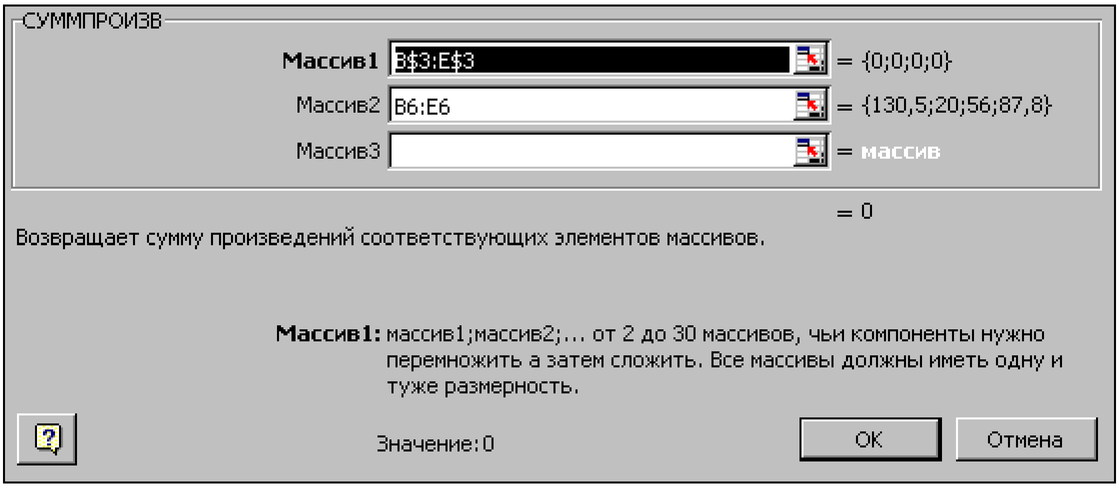


Рис.1.3. Ввод формулы для расчета ЦФ в окно **"Мастер функций"**

Зависимости для левых частей ограничений

Левые части ограничений задачи (1.1) представляют собой *сумму произведений* каждой из ячеек, отведенных для значений переменных задачи (**B3, C3, D3, E3**), на соответствующую ячейку, отведенную для коэффициентов конкретного ограничения (**B10, C10, D10, E10** – 1-е ограничение**; B11, C11, D11, E11** – 2-е ограничение и **B12, C12, D12, E12** – 3-е ограничение). Формулы, соответствующие левым частям ограничений, представлены в табл.1.1.

Таблица 1.1

Формулы, описывающие ограничения модели (1.1)

Левая часть ограничения	Формула Excel
$-1{,}8x_1 + 2x_2 + x_3 - 4x_4$ или $B10 \cdot B3 + C10 \cdot C3 + D10 \cdot D3 + E10 \cdot E3$	**=СУММПРОИЗВ(B$3:E$3;B10:E10)**
$-6x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4$ или $B11 \cdot B3 + C11 \cdot C3 + D11 \cdot D3 + E11 \cdot E3$	**=СУММПРОИЗВ(B$3:E$3;B11:E11)**

$4x_1 - 1{,}5x_2 + 10{,}4x_3 + 13x_4$ или $B12 \cdot B3 + C12 \cdot C3 + D12 \cdot D3 + E12 \cdot E3$	**=СУММПРОИЗВ(B$3:E$3;B12:E12)**

Как видно из табл.1.1, формулы, задающие левые части ограничений задачи (1.1), отличаются друг от друга и от формулы (1.4) в целевой ячейке **F6** только номером строки во втором массиве. Этот номер определяется той строкой, в которой ограничение записано в экранной форме. Поэтому для задания зависимостей для левых частей ограничений достаточно скопировать формулу из целевой ячейки в ячейки левых частей ограничений. Для этого необходимо:

- поместить курсор в поле целевой ячейки **F6** и скопировать в буфер содержимое ячейки **F6** (клавишами **"Ctrl-Insert"**);
- помещать курсор поочередно в поля левой части каждого из ограничений, то есть в **F10, F11** и **F12,** и вставлять в эти поля содержимое буфера (клавишами **"Shift-Insert"**) (при этом номер ячеек во втором массиве формулы будет меняться на номер той строки, в которую была произведена вставка из буфера);
- на экране в полях **F10**, **F11** и **F12** появится 0 (нулевое значение) (см. рис.1.2).

Проверка правильности введения формул

Для проверки правильности введенных формул производите поочередно двойное нажатие левой клавиши мыши на ячейки с формулами. При этом на экране рамкой будут выделяться ячейки, используемые в формуле (рис.1.4 и 1.5).

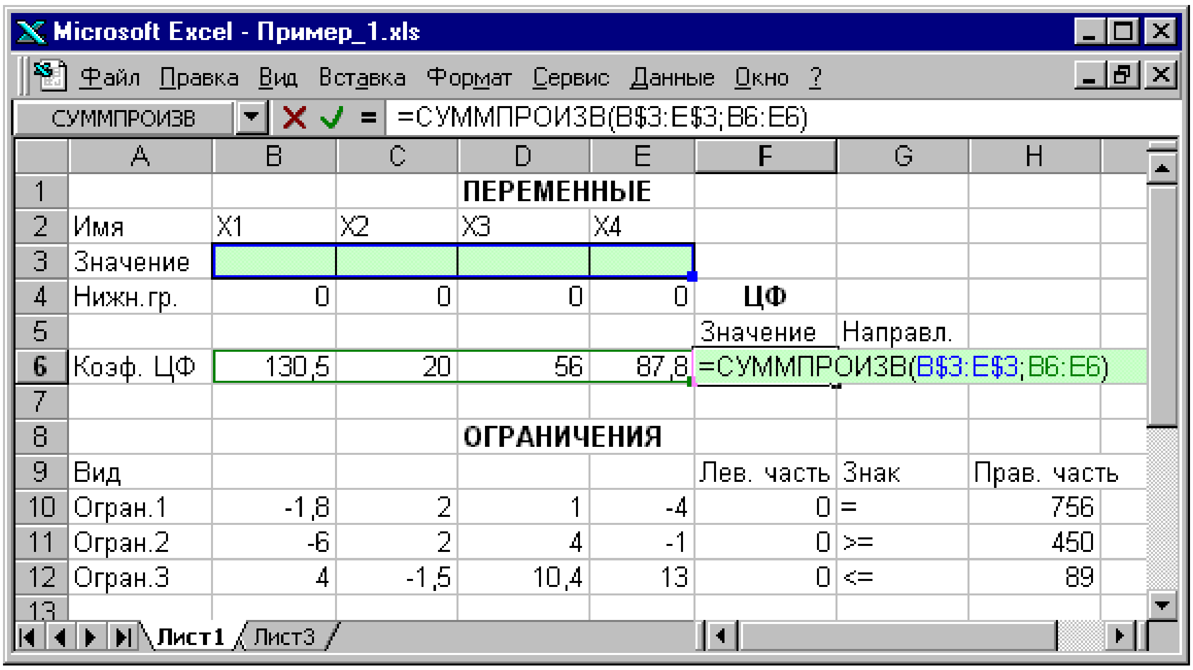


Рис.1.4. Проверка правильности введения формулы в целевую ячейку **F6**

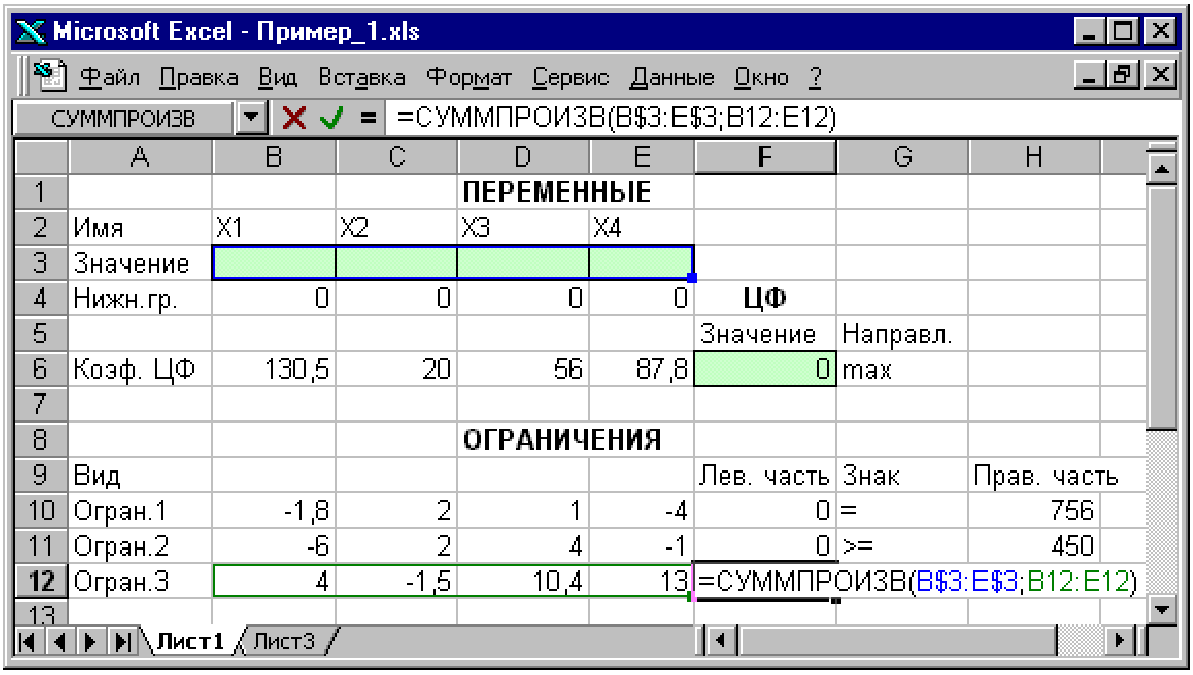


Рис.1.5. Проверка правильности введения формулы в ячейку **F12** для левой части ограничения 3

Задание ЦФ

Дальнейшие действия производятся в окне **"Поиск решения"**, которое вызывается из меню **"Сервис"** (рис.1.6):

- поставьте курсор в поле **"Установить целевую ячейку"**;
- введите адрес целевой ячейки **$F$6** или сделайте одно нажатие левой клавиши мыши на целевую ячейку в экранной форме — это будет равносильно вводу адреса с клавиатуры;
- введите направление оптимизации ЦФ, щелкнув один раз левой клавишей мыши по селекторной кнопке **"максимальному значению".**

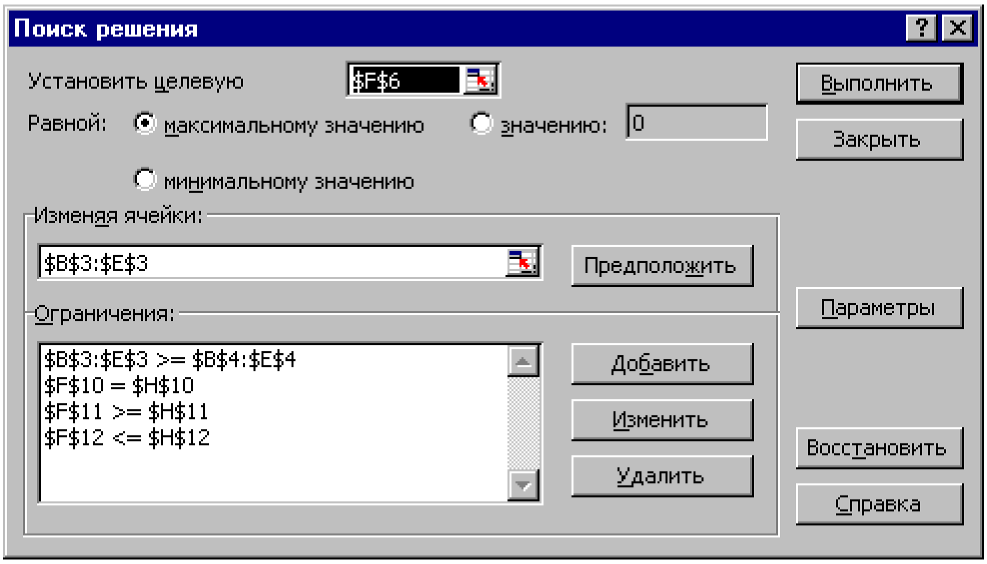


Рис.1.6. Окно **"Поиск решения"** задачи (1.1)

Ввод ограничений и граничных условий

Задание ячеек переменных

В окно **"Поиск решения"** в поле **"Изменяя ячейки"** впишите адреса **$B$3:$E$3**. Необходимые адреса можно вносить в поле **"Изменяя ячейки"** и автоматически путем выделения мышью соответствующих ячеек переменных непосредственно в экранной форме.

Задание граничных условий для допустимых значений переменных

В нашем случае на значения переменных накладывается только граничное условие неотрицательности, то есть их нижняя граница должна быть равна нулю (см. рис.1.1).

- Нажмите кнопку **"Добавить"**, после чего появится окно **"Добавление ограничения"** (рис.1.7).
- В поле **"Ссылка на ячейку"** введите адреса ячеек переменных **$B$3:$E$3**. Это можно сделать как с клавиатуры, так и путем выделения мышью всех ячеек переменных непосредственно в экранной форме.
- В поле знака откройте список предлагаемых знаков и выберите ≥.
- В поле **"Ограничение"** введите адреса ячеек нижней границы значений переменных, то есть **$B$4:$E$4**. Их также можно ввести путем выделения мышью непосредственно в экранной форме.

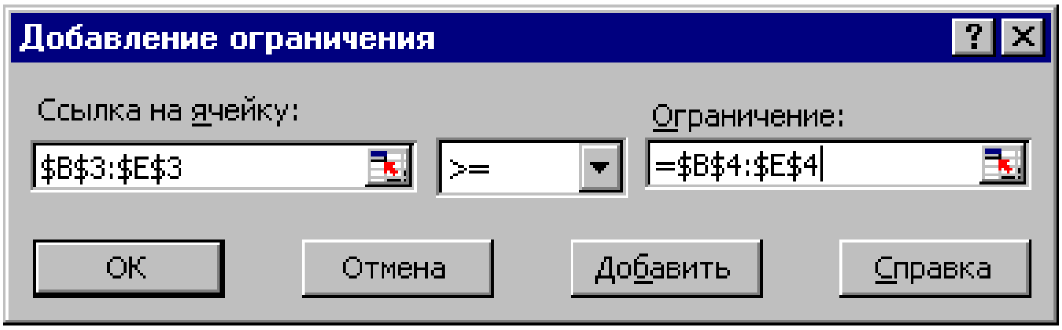


Рис.1.7. Добавление условия неотрицательности переменных задачи (1.1)

Задание знаков ограничений ≤, ≥, =

- Нажмите кнопку **"Добавить"** в окне **"Добавление ограничения"**.
- В поле **"Ссылка на ячейку"** введите адрес ячейки левой части конкретного ограничения, например **$F$10**. Это можно сделать как с клавиатуры, так и путем выделения мышью нужной ячейки непосредственно в экранной форме.
- В соответствии с условием задачи (1.1) выбрать в поле знака необходимый знак, например =.

- В поле **"Ограничение"** введите адрес ячейки правой части рассматриваемого ограничения, например **$H$10**.
- Аналогично введите ограничения: **$F$11>=$H$11**, **$F$12<=$H$12**.
- Подтвердите ввод всех перечисленных выше условий нажатием кнопки **OK**.

Окно **"Поиск решения"** после ввода всех необходимых данных задачи (1.1) представлено на рис.1.6.

Если при вводе условия задачи возникает необходимость в изменении или удалении внесенных ограничений или граничных условий, то это делают, нажав кнопки **"Изменить"** или **"Удалить"** (см. рис.1.6**)**.

1.1.2. Решение задачи

Установка параметров решения задачи

Задача запускается на решение в окне **"Поиск решения".** Но предварительно для установления конкретных параметров решения задач оптимизации определенного класса необходимо нажать кнопку **"Параметры"** и заполнить некоторые поля окна **"Параметры поиска решения"** (рис.1.8).

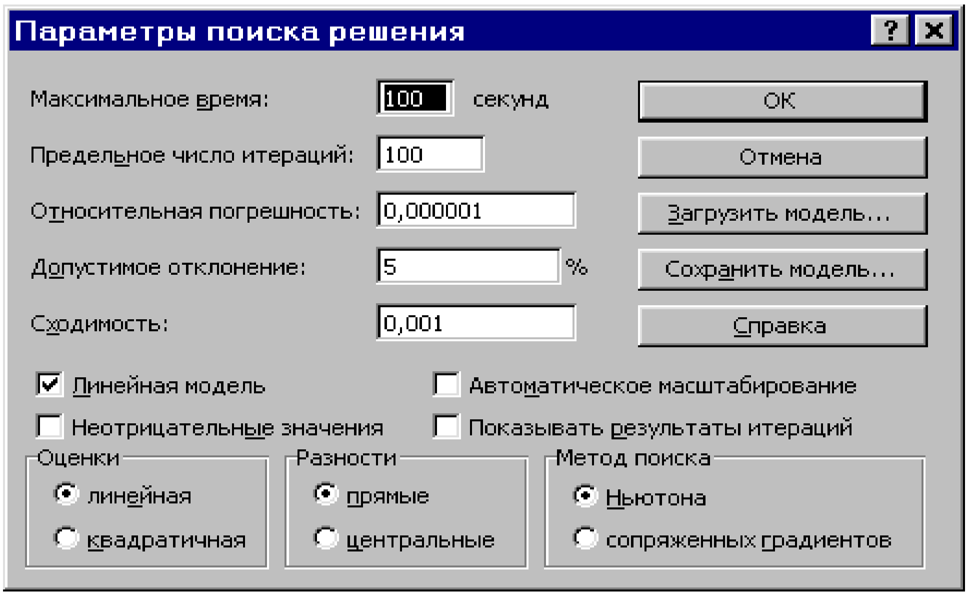


Рис.1.8. Параметры поиска решения, подходящие для большинства задач ЛП

Параметр **"Максимальное время"** служит для назначения времени (в секундах), выделяемого на решение задачи. В поле можно ввести время, не превышающее 32 767 секунд (более 9 часов).

Параметр **"Предельное число итераций"** служит для управления временем решения задачи путем ограничения числа промежуточных вычислений. В поле можно ввести количество итераций, не превышающее 32 767.

Параметр **"Относительная погрешность"** служит для задания точности, с которой определяется соответствие ячейки целевому значению или приближение к указанным границам. Поле должно содержать число из интервала от 0 до 1. Чем *меньше* количество десятичных знаков во введенном числе, тем *ниже* точность. Высокая точность увеличит время, которое требуется для того, чтобы сошелся процесс оптимизации.

Параметр **"Допустимое отклонение"** служит для задания допуска на отклонение от оптимального решения в целочисленных задачах. При указании большего допуска поиск решения заканчивается быстрее.

Параметр **"Сходимость"** применяется только при решении нелинейных задач.

Установка флажка **"Линейная модель"** обеспечивает ускорение поиска решения линейной задачи за счет применение симплекс-метода.

Подтвердите установленные параметры нажатием кнопки **"OK"**.

Запуск задачи на решение

Запуск задачи на решение производится из окна **"Поиск решения"** путем нажатия кнопки **"Выполнить".**

После запуска на решение задачи ЛП на экране появляется окно **"Результаты поиска решения"** с одним из сообщений, представленных на рис.1.9, 1.10 и 1.11.

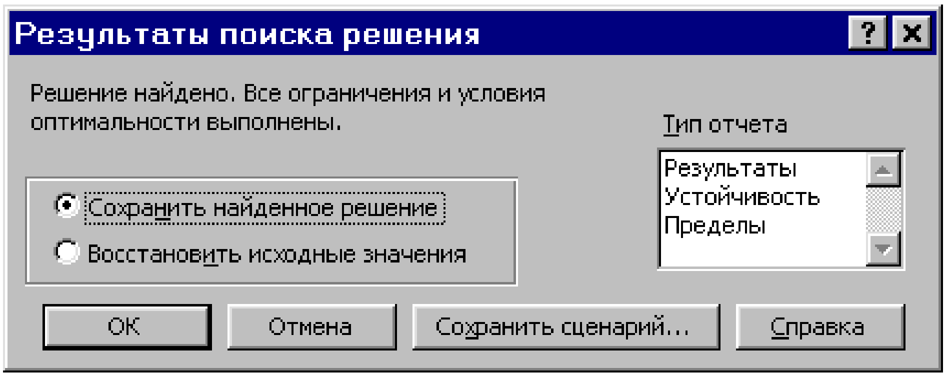


Рис.1.9. Сообщение об успешном решении задачи

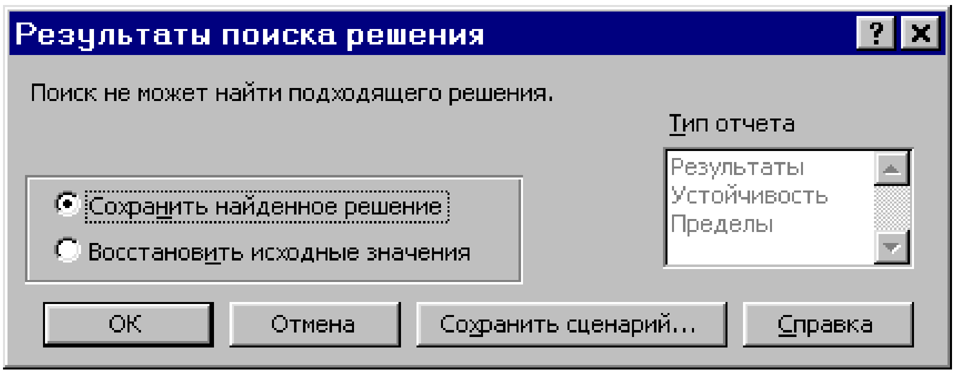


Рис.1.10. Сообщение при несовместной системе ограничений задачи

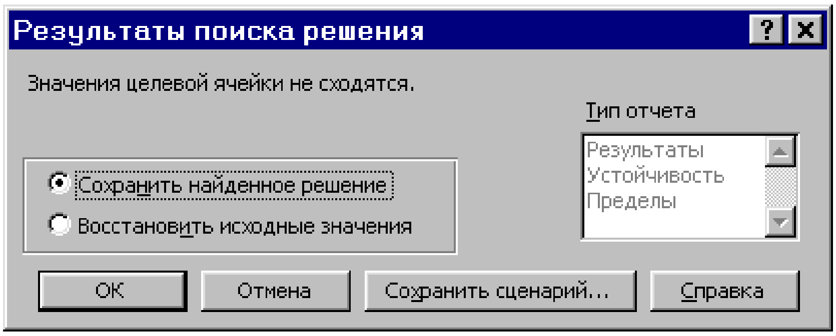


Рис.1.11. Сообщение при неограниченности ЦФ в требуемом направлении

Иногда сообщения, представленные на рис.1.10 и 1.11, свидетельствуют не о характере оптимального решения задачи, а о том, что при вводе условий задачи в Excel были допущены **ошибки**, не позволяющие Excel найти оптимальное решение, которое в действительности существует (см. ниже подразд.1.3.5).

Если при заполнении полей окна **"Поиск решения"** были допущены ошибки, не позволяющие Excel применить симплекс-метод для решения задачи или довести ее решение до конца, то после запуска задачи на решение на экран будет выдано соответствующее сообщение с указанием причины, по которой решение не найдено. Иногда слишком малое значение параметра **"Относительная погрешность"** не позволяет найти оптимальное решение. Для исправления этой ситуации увеличивайте погрешность поразрядно, например от 0,000001 до 0,00001 и т.д.

В окне **"Результаты поиска решения"** представлены названия трех типов отчетов: **"Результаты", "Устойчивость", "Пределы"**. Они необходимы при анализе полученного решения на чувствительность (см. ниже подразд.3.3). Для получения же ответа (значений переменных, ЦФ и левых частей ограничений) прямо в экранной форме просто нажмите кнопку **"ОК".** После этого в экранной форме появляется оптимальное решение задачи (рис.1.12).

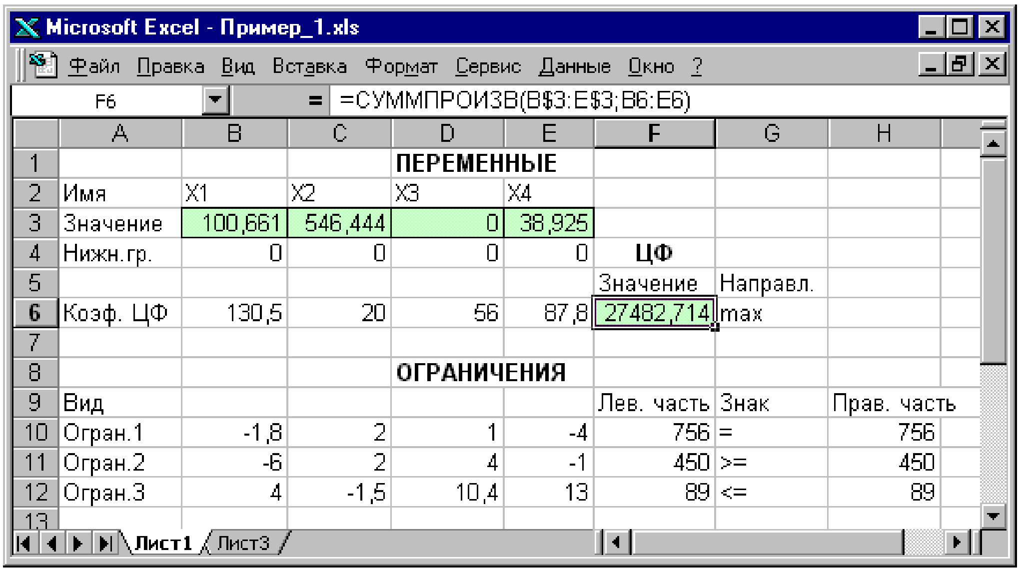


Рис.1.12. Экранная форма задачи (1.1) после получения решения

1.2.2 Целочисленное программирование

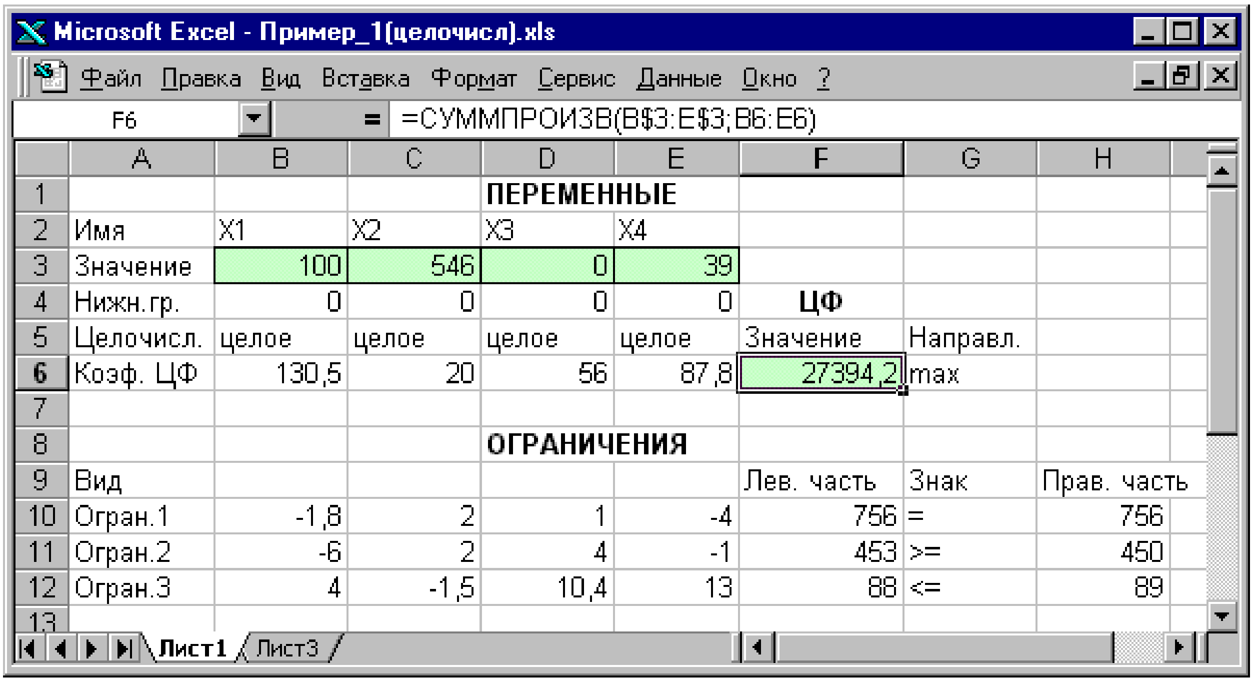
Допустим, что к условию задачи (1.1) добавилось требование целочисленности значений всех переменных. В этом случае описанный выше процесс ввода условия задачи необходимо *дополнить* следующими шагами.

- В экранной форме укажите, на какие переменные накладывается требование целочисленности (этот шаг делается для наглядности восприятия условия задачи) (рис.1.13).
- В окне **"Поиск решения"** (меню **"Сервис"→"Поиск решения"**), нажмите кнопку **"Добавить"** и в появившемся окне **"Добавление ограничений"** введите ограничения следующим образом (рис.1.14):

– в поле **"Ссылка на ячейку"** введите адреса ячеек переменных задачи, то есть **$B$3:$E$3**;

– в поле ввода знака ограничения установите **"целое"*;***

– подтвердите ввод ограничения нажатием кнопки "**OK**".



	A	B	C	D	E	F	G	H
1				ПЕРЕМЕННЫЕ				
2	Имя	X1	X2	X3	X4			
3	Значение	100	546	0	39			
4	Нижн.гр.	0	0	0	0	ЦФ		
5	Целочисл.	целое	целое	целое	целое	Значение	Направл.	
6	Коэф. ЦФ	130,5	20	56	87,8	27394,2	max	
7								
8				ОГРАНИЧЕНИЯ				
9	Вид					Лев. часть	Знак	Прав. часть
10	Огран.1	-1,8	2	1	-4	756	=	756
11	Огран.2	-6	2	4	-1	453	>=	450
12	Огран.3	4	-1,5	10,4	13	88	<=	89
13								

Рис.1.13. Решение задачи (1.1) при условии целочисленности ее переменных

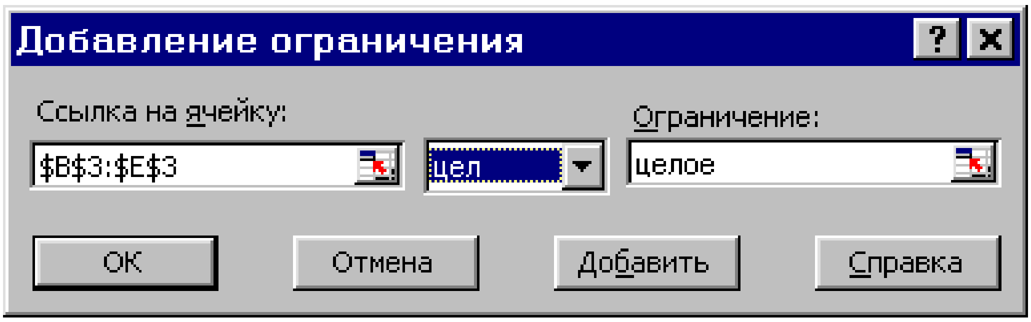


Рис.1.14. Ввод условия целочисленности переменных задачи (1.1)

На рис.1.13 представлено решение задачи (1.1), к ограничениям которой добавлено условие целочисленности значений ее переменных.

1.2.3 Двухиндексные задачи ЛП

Двухиндексные задачи ЛП вводятся и решаются в Excel аналогично одноиндексным задачам. Специфика ввода условия двухиндексной задачи ЛП состоит лишь в удобстве матричного задания переменных задачи и коэффициентов ЦФ.

Рассмотрим решение двухиндексной задачи, суть которой заключается в оптимальной организации транспортных перевозок штучного товара со складов в магазины (табл.1.2).

Таблица 1.2

Исходные данные транспортной задачи

Тарифы, руб./шт.	1-й магазин	2-й магазин	3-й магазин	Запасы, шт.
1-й склад	2	9	7	25
2-й склад	1	0	5	50
3-й склад	5	4	100	35
4-й склад	2	3	6	75
Потребности, шт.	45	90	50	

Целевая функция и ограничения данной задачи имеют вид

$$L(X) = 2x_{11} + 9x_{12} + 7x_{13} + x_{21} + 5x_{23} + 5x_{31} + \\ + 4x_{32} + 100x_{33} + 2x_{41} + 3x_{42} + 6x_{43} \to \min;$$

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} = 25, \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} = 50, \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} = 35, \\ x_{41} + x_{42} + x_{43} = 75, \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} = 45, \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} = 90, \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} = 50, \\ \forall x_{ij} \geq 0, \forall x_{ij} - \text{целые} \left(i = \overline{1,4};\ j = \overline{1,3}\right). \end{cases} \quad (1.5)$$

Экранные формы, задание переменных, целевой функции, ограничений и граничных условий двухиндексной задачи (1.5) и ее решение представлены на рис.1.15, 1.16, 1.17 и в табл.1.3.

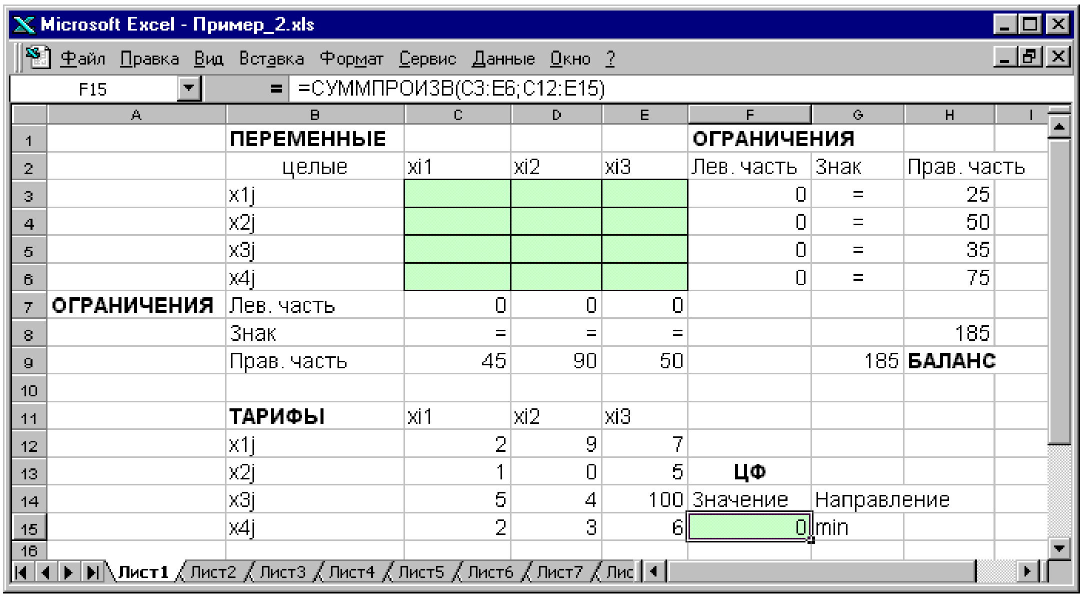


Рис.1.15. Экранная форма двухиндексной задачи (1.5)
(курсор в целевой ячейке **F15**)

Таблица 1.3

Формулы экранной формы задачи (1.5)

Объект математической модели	Выражение в Excel
Переменные задачи	**C3:E6**
Формула в целевой ячейке **F15**	**=СУММПРОИЗВ(C3:E6;C12:E15)**
Ограничения по строкам в ячейках **F3, F4, F5, F6**	**=СУММ(C3:E3)** **=СУММ(C4:E4)** **=СУММ(C5:E5)** **=СУММ(C6:E6)**
Ограничения по столбцам в ячейках **C7, D7, E7**	**=СУММ(C3:C6)** **=СУММ(D3:D6)** **=СУММ(E3:E6)**
Суммарные запасы и потребности в ячейках **H8, G9**	**=СУММ(H3:H6)** **=СУММ(C9:E9)**

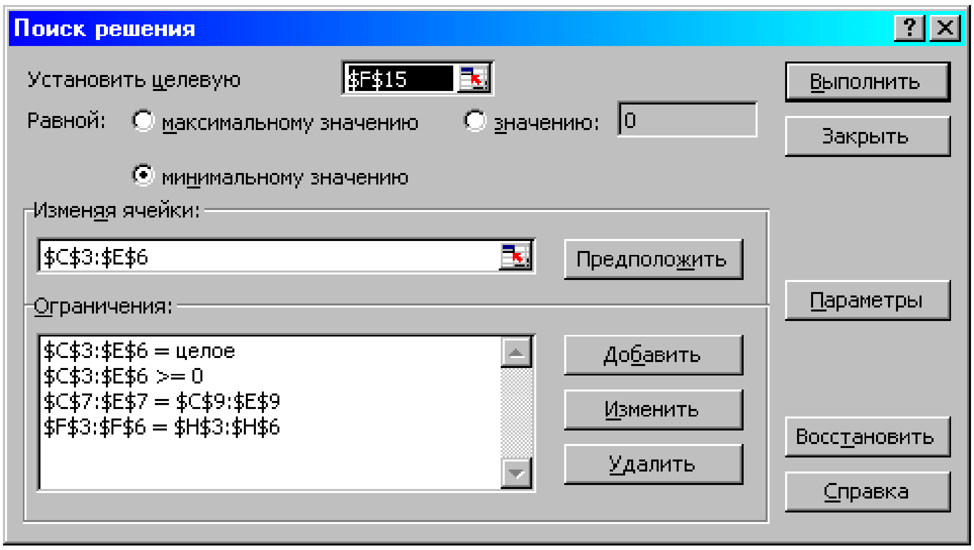
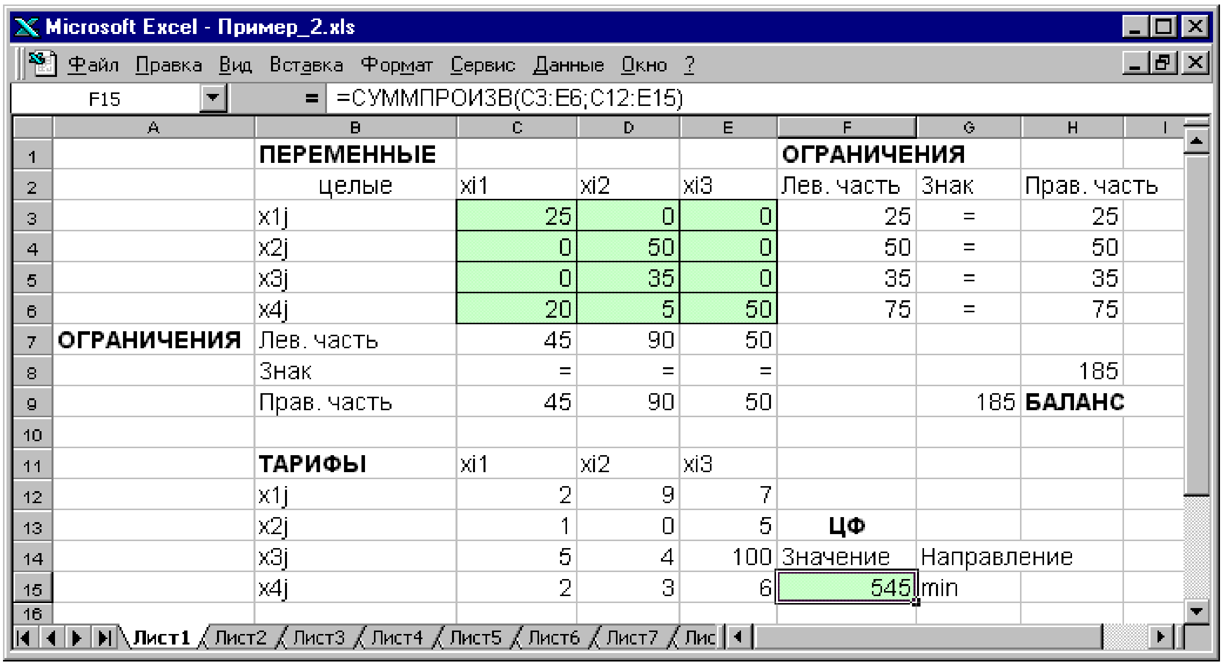


Рис.1.16. Ограничения и граничные условия задачи (1.5)



	A	B	C	D	E	F	G	H
1		**ПЕРЕМЕННЫЕ**				**ОГРАНИЧЕНИЯ**		
2		целые	xi1	xi2	xi3	Лев. часть	Знак	Прав. часть
3		x1j	25	0	0	25	=	25
4		x2j	0	50	0	50	=	50
5		x3j	0	35	0	35	=	35
6		x4j	20	5	50	75	=	75
7	**ОГРАНИЧЕНИЯ**	Лев. часть	45	90	50			
8		Знак	=	=	=			185
9		Прав. часть	45	90	50		185	**БАЛАНС**
10								
11		**ТАРИФЫ**	xi1	xi2	xi3			
12		x1j	2	9	7			
13		x2j	1	0	5	**ЦФ**		
14		x3j	5	4	100	Значение	Направление	
15		x4j	2	3	6	545	min	
16								

Рис.1.17. Экранная форма после получения решения задачи (1.5)
(курсор в целевой ячейке **F15**)

1.2.3.1 Стандартная модель транспортной задачи (ТЗ)

Задача о размещении (транспортная задача) – это РЗ, в которой работы и ресурсы измеряются в одних и тех же единицах. В таких задачах ресурсы могут быть разделены между работами, и отдельные работы могут быть выполнены с помощью различных комбинаций ресурсов. Примером типичной транспортной задачи является распределение (транспортировка) продукции, находящейся на складах, по предприятиям-потребителям.

Стандартная ТЗ определяется как задача разработки наиболее экономичного плана перевозки продукции *одного вида* из нескольких пунктов отправления в пункты назначения. При этом величина транспортных расходов прямо пропорциональна объему перевозимой продукции и задается с помощью тарифов на перевозку *единицы продукции*.

Исходные параметры модели ТЗ

a) n – количество пунктов отправления, m – количество пунктов назначения.

b) a_i – запас продукции в пункте отправления A_i $(i = \overline{1,n})$ [ед. тов.].

c) b_j – спрос на продукцию в пункте назначения B_j $(j = \overline{1,m})$ [ед. тов.].

d) c_{ij} – тариф (стоимость) перевозки единицы продукции из пункта отправления A_i в пункт назначения B_j [руб./ед. тов.].

Искомые параметры модели ТЗ

1. x_{ij} – количество продукции, перевозимой из пункта отправления A_i в пункт назначения B_j [ед. тов.].

2. $L(X)$ – транспортные расходы на перевозку всей продукции [руб.].

Этапы построения модели

I. Определение переменных.
II. Проверка сбалансированности задачи.
III. Построение сбалансированной транспортной матрицы.
IV. Задание ЦФ.
V. Задание ограничений.

Транспортная модель

$$L(X)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}c_{ij}x_{ij}\to \min ;$$

$$\begin{cases}\sum_{j=1}^{n}x_{ij}=a_i,\ i=\overline{1,n},\\ \sum_{i=1}^{n}x_{ij}=b_j,\ j=\overline{1,m},\\ \forall x_{ij}\ge 0\ \left(i=\overline{1,n};\ j=\overline{1,m}\right).\end{cases} \tag{4.1}$$

Целевая функция представляет собой транспортные расходы на осуществление всех перевозок в целом. Первая группа ограничений указывает, что запас продукции в любом пункте отправления должен быть равен суммарному объему перевозок продукции из этого пункта. Вторая группа ограничений указывает, что суммарные перевозки продукции в некоторый пункт потребления должны полностью удовлетворить спрос на продукцию в этом пункте. Наглядной формой представления модели ТЗ является транспортная матрица (табл.4.1).

Таблица 4.1

Общий вид транспортной матрицы

Пункты отправления, A_i	Пункты потребления, B_j				Запасы, [ед. прод.]
	B_1	B_2	…	B_m	
A_1	c_{11}	c_{12}	…	c_{1m}	a_1
A_2	c_{21}	c_{22}	…	c_{2m}	a_2
…	…	…	…	…	…
A_n	c_{n1}	c_{n2}	…	c_{nm}	a_n

Потребность [ед. прод.]	b_1	b_2	…	b_m	$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{j=1}^{m} b_j$

Из модели (4.1) следует, что сумма запасов продукции во всех пунктах отправления должна равняться суммарной потребности во всех пунктах потребления, то есть

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{j=1}^{m} b_j . \tag{4.2}$$

Если (4.2) выполняется, то ТЗ называется **сбалансированной**, в противном случае – **несбалансированной**. Поскольку ограничения модели (4.1) могут быть выполнены только при сбалансированной ТЗ, то при построении транспортной модели необходимо проверять условие баланса (4.2). В случае, когда *суммарные запасы превышают суммарные потребности*, необходим дополнительный **фиктивный** пункт потребления, который будет формально потреблять существующий излишек запасов, то есть

$$b_ф = \sum_{i=1}^{n} a_i - \sum_{j=1}^{m} b_j . \tag{4.3}$$

Если *суммарные потребности превышают суммарные запасы*, то необходим дополнительный **фиктивный** пункт отправления, формально восполняющий существующий недостаток продукции в пунктах отправления:

$$a_ф = \sum_{j=1}^{m} b_j - \sum_{i=1}^{n} a_i . \tag{4.4}$$

Введение фиктивного потребителя или отправителя повлечет необходимость формального задания **фиктивных** тарифов $c_{ij}^{ф}$ (реально не существующих) для фиктивных перевозок. Поскольку нас интересует определение наиболее выгодных *реальных* перевозок, то необходимо предусмотреть, чтобы при решении задачи (при нахождении опорных планов) *фиктивные* перевозки не рассматривались до тех пор, пока не будут определены все реальные перевозки. Для этого надо фиктивные перевозки сделать невыгодными, то есть дорогими, чтобы при поиске решения задачи их рассматривали в самую последнюю очередь. Таким образом, величина фиктивных тарифов должна превышать максимальный из реальных тарифов, используемых в модели, то есть

$$c_{ij}^{ф} > \max c_{ij} \left(i = \overline{1,n}; j = \overline{1,m}\right).$$

На практике возможны ситуации, когда в определенных направлениях перевозки продукции невозможны, например, по причине ремонта транспортных магистралей. Такие ситуации моделируются с помощью введения так называемых **запрещающих** тарифов $c_{ij}^{з}$. Запрещающие тарифы должны сделать невозможными, то есть совершенно невыгодными, перевозки в соответствующих направлениях. Для этого величина запрещающих тарифов должна превышать максимальный из реальных тарифов, используемых в модели:

$$c_{ij}^{з} > \max c_{ij} \left(i = \overline{1,n}; j = \overline{1,m}\right).$$

1.2.3.2 Пример построения модели ТЗ

Пусть необходимо организовать оптимальные по транспортным расходам перевозки муки с двух складов в три хлебопекарни. Ежемесячные запасы муки на складах равны 79,515 и 101,925 т, а ежемесячные потребности хлебопекарен составляют 68,5, 29,5 и 117,4 т соответственно. Мука на складах хранится и транспортируется в мешках по 45 кг. Транспортные расходы (руб./т) по доставке муки представлены в табл.4.2. Между первым складом и второй хлебопекарней заключен договор о гарантированной поставке 4,5 т муки ежемесячно. В связи с ремонтными работами временно невозможна перевозка из второго склада в третью хлебопекарню.

Таблица 4.2

Транспортные расходы по доставке муки (руб./т)

Склады	Хлебопекарни		
	Х1	Х2	Х3
С1	350	190	420
С2	400	100	530

ТЗ представляет собой задачу ЛП, которую можно решать симплекс-методом, что и происходит при решении таких задач в Excel. В то же время существует более эффективный вычислительный метод – **метод потенциалов**, в случае применения которого используется специфическая структура условий ТЗ (4.1) и, по существу, воспроизводятся шаги симплекс-алгоритма**.** Исходя из этого, в лабораторной работе необходимо построить модель задачи вида (4.1), пригодную для ее решения методом потенциалов.

Определение переменных

Обозначим через x_{ij} [меш.] количество мешков с мукой, которые будут перевезены с i-го склада в j-ю хлебопекарню.

Проверка сбалансированности задачи

Прежде чем проверять сбалансированность задачи, надо исключить объем гарантированной поставки из дальнейшего рассмотрения. Для этого вычтем 4,5 т из следующих величин:

- из запаса первого склада $a_1 = 79{,}515 - 4{,}5 = 75{,}015$ т/мес.;
- из потребности в муке второй хлебопекарни
$$b_2 = 29{,}5 - 4{,}500 = 25{,}000 \text{ т/мес.}$$

Согласно условию задачи мука хранится и перевозится в мешках по 45 кг, то есть единицами измерения переменных x_{ij} являются мешки муки. Но запасы муки на складах и потребности в ней магазинов заданы в тоннах. Поэтому для проверки баланса и дальнейшего решения задачи приведем эти величины к одной единице измерения – мешкам. Например, запас муки на первом складе равен 75,015 т/мес., или $\frac{75{,}015\,\text{т/мес.}}{0{,}045\,\text{т/меш.}} = 1667$ меш./мес., а потребность первой хлебопекарни составляет 68 т/мес., или $\frac{68{,}000\,\text{т/мес.}}{0{,}045\,\text{т/меш.}} = 1511{,}1 \approx 1512$ меш./мес. Округление при расчете потребностей надо проводить в большую сторону, иначе потребность в муке не будет удовлетворена полностью.

Для данной ТЗ имеет место соотношение

$$\underbrace{\overbrace{1667 + 2265}^{\text{склады}}}_{3932\,\text{меш./мес.}} < \underbrace{\overbrace{1512 + 556 + 2609}^{\text{хлебопекарни}}}_{4677\,\text{меш./мес.}}.$$

Ежемесячный суммарный запас муки на складах меньше суммарной потребности хлебопекарен на 4677-3932=745 мешков муки, откуда следует вывод: ТЗ не сбалансирована.

Построение сбалансированной транспортной матрицы

Сбалансированная транспортная матрица представлена в таблице 4.3. Стоимость перевозки муки должна быть отнесена к единице продукции, то есть к 1 мешку муки. Так, например, тариф перевозки из первого склада в третий магазин равен 420 руб./т $\cdot\, 0{,}045$ т/меш. $= 18{,}90$ руб./меш.

Для установления баланса необходим дополнительный *фиктивный* склад, то есть дополнительная строка в транспортной таблице задачи. Фиктивные тарифы перевозки зададим таким образом, чтобы они были дороже реальных тарифов, например, $c_{3j}^{ф} = 50{,}00$ руб./меш.

Невозможность доставки грузов со второго склада в третью хлебопекарню задается в модели с помощью *запрещающего* тарифа, который должен превышать величину *фиктивного* тарифа, например, $c_{23}^{з} = 100{,}00$ руб./меш.

Таблица 4.3

Транспортная матрица задачи

	Хлебопекарни			Запас, мешки
Склады	X_1	X_2	X_3	
C_1	15,75	8,55	18,90	1667
C_2	18,00	4,50	100,00	2265
$C_ф$	50,00	50,00	50,00	745
Потребность, мешки	1512	556	2609	$\sum = 4677$

Задание ЦФ

Формальная ЦФ, то есть суммарные затраты на все возможные перевозки муки, учитываемые в модели, задается следующим выражением:

$$\begin{aligned} L(X) = {} & 15{,}75x_{11} + 8{,}55x_{12} + 18{,}90x_{13} + \\ & + 18{,}00x_{21} + 4{,}50x_{22} + 100{,}00x_{23} + \\ & + 50{,}00x_{31} + 50{,}00x_{32} + 50{,}00x_{33} \to \min \text{ (руб./мес.).} \end{aligned} \tag{4.5}$$

При этом следует учитывать, что вследствие использования фиктивных тарифов **реальная** ЦФ (то есть средства, которые в действительности придется заплатить за транспортировку муки) будет меньше **формальной** ЦФ (4.5) на стоимость найденных в процессе решения фиктивных перевозок.

Задание ограничений

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} = 1667, \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} = 2265, \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} = 745, \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} = 1512, \quad \text{(меш./мес.)} \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} = 556, \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} = 2609, \\ x_{ij} \geq 0 \left(\forall i = \overline{1,3}; \forall j = \overline{1,3}\right). \end{cases}$$

1.2.4 Задачи с булевыми переменными

Частным случаем задач с целочисленными переменными являются задачи, в результате решения которых искомые переменные x_j могут принимать только одно из двух значений: 0 или 1. Такие переменные в честь предложившего их английского математика Джорджа Буля называют булевыми. На рис.1.18 представлена экранная форма с решением некоторой двухиндексной задачи с булевыми переменными.

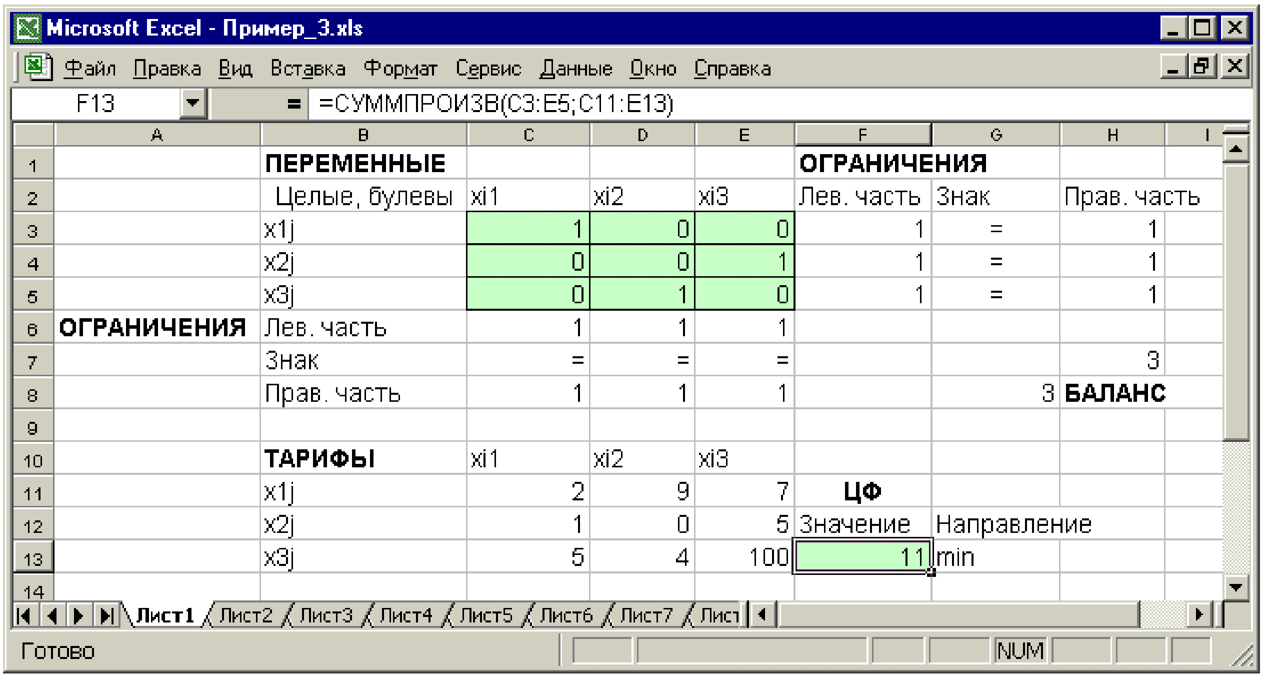


Рис.1.18. Решение двухиндексной задачи с булевыми переменными

Помимо задания требования целочисленности (см. подразд.1.3.2) при вводе условия задач с булевыми переменными необходимо:

- для наглядности восприятия ввести в экранную форму слово "булевы" в качестве характеристики переменных (см. рис.1.18);
- в окне **"Поиск решения"** добавить граничные условия, имеющие смысл ограничения значений переменных по их *единичной* верхней границе (рис.1.19).

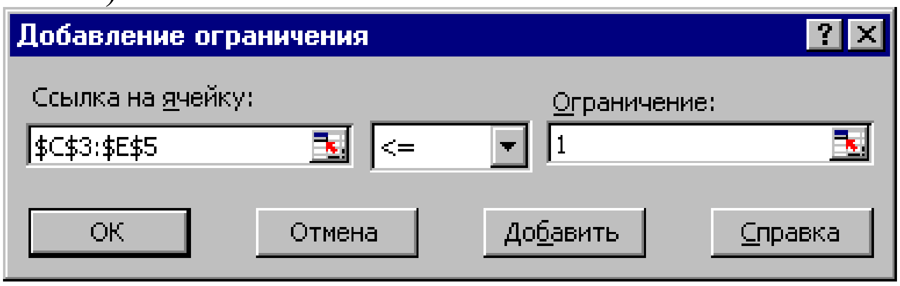


Рис.1.19. Добавление условия единичной верхней границы значений переменных двухиндексной задачи с булевыми переменными

Вид окна **"Поиск решения"** для задачи с булевыми переменными, представленной на рис.1.18, приведен на рис.1.20.

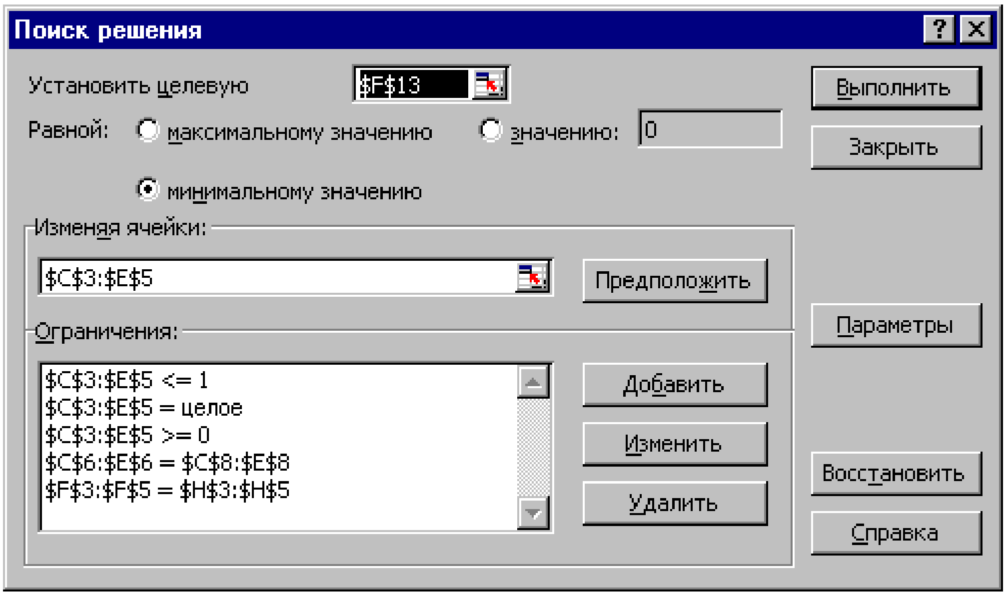


Рис.1.20. Окно **"Поиск решения"** для задачи с булевыми переменными, представленной на рис.1.18

1.2.5 Возможные ошибки при вводе условий задач ЛП

Если при решении задачи ЛП выдается сообщение о невозможности нахождения решения, то возможно, что причина заключается в ошибках ввода условия задачи в Excel. Поэтому, прежде чем делать вывод о принципиальной невозможности нахождения оптимального решения задачи, ответьте на вопросы из табл.1.4.

Таблица 1.4 **Список вопросов, позволяющих выявить ошибки ввода условия задачи в Excel**

№	Вопрос	Месторасположение в Excel
1	Правильно ли Вы ввели численные значения и знаки (+, —) коэффициентов целевой функции и ограничений, правых частей ограничений ?	Экранная форма
2	Сбалансирована ли двухиндексная задача?	Экранная форма
3	Правильны ли формулы в целевой ячейке и в ячейках левых частей ограничений? Для наглядности проверки поставьте курсор на ячейку с формулой и сделайте двойной щелчок левой клавишей мыши. Рамкой в экранной форме будут выделены ячейки, участвующие в данной формуле (см. рис.1.4, 1.5).	Экранная форма
4	Правильно ли указан адрес целевой ячейки?	Окно **"Поиск решения"**
5	Правильно ли указано направление оптимизации ЦФ?	Окно **"Поиск решения"**
6	Правильно ли указаны адреса ячеек переменных?	Окно **"Поиск решения"** Поле **"Изменяя ячейки"**
7	Правильно ли введены знаки ограничений (<=, >=, =) ?	Экранная форма, Окно **"Поиск решения"** Поле **"Ограничения"**
8	Правильно ли указаны адреса ячеек левых и правых частей ограничений?	Окно **"Поиск решения"** Поле **"Ограничения"**
9	Не забыли ли Вы задать требование неотрицательности переменных?	Окно **"Поиск решения"** Поле **"Ограничения"**
10	Не забыли ли Вы задать требования по единичному значению верхней границы переменных (для задач с булевыми переменными)	Окно **"Поиск решения"** Поле **"Ограничения"**
11	Не забыли ли Вы задать условие целочисленности переменных (согласно условию задачи)?	Окно **"Поиск решения"** Поле **"Ограничения"**
12	Проверьте правильность установки параметров (см. подразд.1.3.1.2)	Окно **"Параметры поиска решения"**

2. ПРАКТИЧЕСКИЕ РАБОТЫ

2.1 ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №1 «ЗАДАЧА ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ»

2.1.1 Цель работы

Приобретение навыков решения задач линейного программирования (ЛП) в табличном редакторе Microsoft Excel.

2.1.2 Порядок выполнения работы

1. Согласно номеру своего варианта выберите условие задачи.
2. Постройте модель задачи ЛП.
3. Найдите оптимальное решение задачи в Excel и продемонстрируйте его преподавателю.
4. Оформите отчет по практической работе.

2.1.3 Варианты заданий

Вариант задания определяется в соответствии с порядковым номером в журнале.

Таблица 2.1.1

Варианты задач к лабораторной работе №1

№ варианта	Математическая модель
1	$L(X) = 5x_1 + 7x_2 - 6x_3 + 9x_4 + 8x_5 \to \max;$ $\begin{cases} 0{,}7x_1 + 0{,}9x_2 + 1{,}5x_3 + 2{,}3x_4 + 1{,}8x_5 \le 50000, \\ 0{,}4x_1 + 1{,}1x_2 - 0{,}5x_3 + 1{,}3x_4 - 2{,}8x_5 \ge 32000, \\ 0{,}5x_1 + 1{,}8x_3 + 0{,}7x_4 + 2x_5 \le 40000, \\ 2{,}2x_1 - 1{,}4x_2 - 0{,}8x_3 + 0{,}9x_4 = 15000, \\ x_j \ge 0 \left(j = \overline{1{,}5}\right). \end{cases}$
2	$L(X) = x_1 + 4x_3 + 8x_4 - 12x_5 \to \min;$ $\begin{cases} x_1 + 9x_2 + 2x_3 - 4x_4 = 250, \\ 0{,}4x_1 + x_2 - 5x_3 + 3x_4 + 8x_5 \le 460, \\ 0{,}5x_1 + 10x_2 - 8x_3 + 6x_4 + 2x_5 \le 190, \\ 11x_2 - 8{,}5x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 210, \\ x_j \ge 0 \left(j = \overline{1{,}5}\right). \end{cases}$

3	$L(X) = -45x_1 + 65x_2 + 2x_4 - 3x_5 \to \max;$ $\begin{cases} 15x_1 + 18x_2 + 34x_4 - 22x_5 = 56, \\ 2x_1 + 7x_3 - 4x_4 + 3x_5 \ge 91, \\ 0{,}2x_1 + 0{,}8x_2 + 1{,}5x_3 + 0{,}9x_4 + 4x_5 \le 26, \\ 1{,}8x_1 - 42x_2 + 6{,}4x_3 + 3x_5 = 15, \\ x_j \ge 0 \left(j = \overline{1{,}5}\right). \end{cases}$
4	$L(X) = 14x_1 - 9x_2 - x_4 + 6{,}4x_5 \to \min;$ $\begin{cases} 0{,}9x_1 + 10x_2 - 28x_4 + 5x_5 \le 245, \\ 0{,}8x_1 + 1{,}7x_2 - 0{,}2x_3 - 0{,}5x_4 = 9, \\ 6x_1 + 4x_3 - 7x_4 + 6{,}3x_5 \le 54, \\ 8x_1 + 6{,}2x_2 - 4{,}8x_4 + 2{,}9x_5 \ge 17, \\ x_j \ge 0 \left(j = \overline{1{,}5}\right). \end{cases}$
5	$L(X) = 46x_1 + 2{,}3x_2 + 9{,}4x_3 - 4x_5 \to \max;$ $\begin{cases} 3x_1 + 7{,}8x_3 + 12x_4 + 9x_5 \ge 49, \\ 2{,}3x_2 + 5x_3 + 5{,}6x_4 - x_5 \le 86, \\ 16x_1 - 40x_4 + 29x_5 = 50, \\ 190x_1 - 98x_2 - 4x_4 + 150x_5 \ge 300, \\ x_j \ge 0 \left(j = \overline{1{,}5}\right). \end{cases}$
6	$L(X) = 0{,}5x_1 + 1{,}8x_3 - 9{,}2x_4 + 14x_5 \to \min;$ $\begin{cases} 9{,}6x_2 + 15{,}7x_3 + 24x_4 - 8x_5 \le 74, \\ 0{,}8x_1 + 11{,}1x_2 - 4{,}5x_3 + 1{,}5x_4 - 6{,}3x_5 = 22, \\ 14x_1 + 45x_2 - 38x_4 + 26x_5 \le 46, \\ 220x_1 - 148x_2 - 7x_3 + 95x_5 \ge 150, \\ x_j \ge 0 \left(j = \overline{1{,}5}\right). \end{cases}$
7	$L(X) = 12x_2 + 89x_3 - 5x_5 \to \max;$ $\begin{cases} 2x_1 + 9{,}6x_2 + 15{,}7x_3 + 22x_4 - 8x_5 \le 73, \\ 0{,}9x_1 + 11{,}1x_2 - 4{,}3x_3 + 1{,}5x_4 + 6{,}4x_5 = 19, \\ 14x_1 + 45x_2 - 38x_4 + 26x_5 \le 49, \\ 220x_1 - 150x_2 + 3x_3 + 95x_5 = 133, \\ x_j \ge 0 \left(j = \overline{1{,}5}\right). \end{cases}$

8	$L(X)=4x_1+6x_2-14x_3+49x_5 \to \min;$ $\begin{cases} 21x_1+9x_2-2x_4-12x_5 \ge 58, \\ 110x_2-60x_3+80x_4-45x_5=290, \\ 5x_2+27x_3-14x_4+x_5 \le 72, \\ 87x_1-6{,}4x_2+130x_4=140, \\ x_j \ge 0 \left(j=\overline{1,5}\right). \end{cases}$
9	$L(X)=-38x_1+60x_2+x_3+4x_4+8x_5 \to \max;$ $\begin{cases} 18x_1+4x_2+2x_3-12x_5 \le 86, \\ 2x_2+19x_3-7x_4+10x_5=130, \\ 0{,}4x_1+3x_2-4{,}2x_3+2x_4-5x_5 \le 34, \\ 2{,}1x_1+13x_2-20x_3+6x_4=18, \\ x_j \ge 0 \left(j=\overline{1,5}\right). \end{cases}$
10	$L(X)=10x_1+40x_3+13x_4+56x_5 \to \min;$ $\begin{cases} 7x_1+16x_3+5x_4+25x_5 \le 600, \\ 8x_1+1{,}7x_2-0{,}5x_4+4{,}7x_5=890, \\ 6x_1+4x_3-7x_4+6{,}3x_5 \le 270, \\ 84x_1+62x_2+80x_3+14x_5 \ge 2300, \\ x_j \ge 0 \left(j=\overline{1,5}\right). \end{cases}$
11	$L(X)=84x_1+5{,}7x_2+10x_4-3x_5 \to \max;$ $\begin{cases} 4x_1+8{,}5x_2+16x_3+10x_5 \ge 50, \\ 10{,}4x_1+6x_3+2x_4+4x_5 \le 120, \\ 19x_1+18x_2-20x_4+30x_5=600, \\ 200x_1+45x_2-8x_3+3{,}4x_4 \ge 210, \\ x_j \ge 0 \left(j=\overline{1,5}\right). \end{cases}$
12	$L(X)=0{,}84x_2-4x_3+3{,}8x_4+12x_5 \to \min;$ $\begin{cases} 15x_1+9{,}6x_2+34x_4-8x_5 \le 180, \\ 0{,}6x_1+11{,}1x_2-2{,}6x_3+1{,}5x_4-6{,}3x_5=68, \\ 14x_1+64x_3-38x_4+12x_5 \le 81, \\ 190x_1-148x_2-7x_3+84x_5 \ge 230, \\ x_j \ge 0 \left(j=\overline{1,5}\right). \end{cases}$

2.2 ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №2 «*ДВУХИНДЕКСНЫЕ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ. СТАНДАРТНАЯ ТРАНСПОРТНАЯ ЗАДАЧА*»

2.2.2 Порядок выполнения работы

1. Согласно номеру своего варианта выберите условие задачи.
2. Постройте модель задачи, включая транспортную таблицу.
3. Найдите оптимальное решение задачи в Excel и продемонстрируйте его преподавателю.
4. Оформите отчет по практической работе.

2.2.1 Цель работы

Приобретение навыков построения математических моделей стандартных транспортных задач ЛП и решения их в Microsoft Excel.

2.2.3 Варианты заданий

Вариант задания определяется в соответствии с порядковым номером в журнале.

Постановка задачи

На складах хранится мука, которую необходимо завезти в хлебопекарни. Номера складов и номера хлебопекарен выбираются в соответствии с вариантами табл.2.2.1. Текущие тарифы перевозки муки [руб./т], ежемесячные запасы муки [т/мес.] на складах и потребности хлебопекарен в муке [т/мес.] указаны в табл.2.2.2.

При этом необходимо учитывать, что из-за ремонтных работ временно нет возможности перевозить муку с некоторых складов в некоторые хлебопекарни. В табл.2.2.1 это показано в графе "Запрет перевозки" в формате № склада х № хлебопекарни. Например, «2х3» обозначает, что нельзя перевозить муку со склада №2 в хлебопекарню №3.

Кроме того, необходимо учесть, что некоторые хлебопекарни имеют договоры на гарантированную поставку муки с определенных складов. В табл.2.2.1 это показано в графе "Гарантированная поставка" в формате № склада х № хлебопекарни = объем поставки. Например, «1х4=40» обозначает, что между складом №1 и магазином №4 заключен договор на обязательную поставку 40 т муки.

Необходимо организовать поставки наилучшим образом, учитывая, что мука хранится и транспортируется в мешках весом по 50 кг.

Таблица 2.2.1

Номера складов, хлебопекарен, запрещенные и гарантированные поставки

№ Варианта	№ Складов	№ Хлебопекарен	Запрет перевозки	Гарантированная поставка, т/мес.
1	1, 2, 3	1, 2, 3, 4	2x2, 3x4	3x3=50
2	2, 3, 4, 5	1, 2, 5	2x2, 3x5	3x2=40
3	1, 2, 4	1, 2, 3, 5	1x5, 2x3	4x3=45
4	1, 2, 3, 4	3, 4, 5	3x3, 4x5	3x5=40
5	1, 2, 5	2, 3, 4, 5	1x4, 5x3	1x5=60
6	1, 2, 3, 5	2, 3, 5	5x5, 2x2	3x5=30
7	2, 3, 4	2, 3, 4, 5	3x3, 2x5	4x3=45
8	1, 2, 3, 5	1, 2, 4	1x2, 5x4	3x2=20
9	2, 3, 5	1, 2, 3, 5	5x1, 3x5	5x2=30
10	2, 3, 4, 5	2, 3, 4	5x4, 3x2	4x3=35
11	3, 4, 5	1, 2, 3, 4	3x4, 5x1	4x1=40
12	1, 2, 3, 4	1, 2, 3	3x2, 4x1	2x2=50

Таблица 2.2.2

Запасы, потребности и тарифы перевозок

Склады	Хлебопекарни					
	1	2	3	4	5	Запас, т/мес.
1	400	600	800	200	200	80
2	300	100	500	600	500	70
3	500	200	100	600	300	60
4	300	700	200	400	900	55
5	200	500	800	200	400	65
Спрос, т/мес.	77,86	56,78	58,88	62,44	73,92	

2.3 ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №3 «*ДВУХИНДЕКСНЫЕ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ. ЗАДАЧА О НАЗНАЧЕНИЯХ*»

2.3.1 Цель работы

Приобретение навыков построения математических моделей задач о назначении и решения этих задач в Microsoft Excel.

2.3.2 Порядок выполнения работы

1. Согласно номеру своего варианта выберите условие задачи.
2. Постройте модель задачи, включая транспортную таблицу.
3. Найдите оптимальное решение задачи в Excel и продемонстрируйте его преподавателю.
4. Оформите отчет по практической работе.

2.3.3 Варианты заданий

Вариант задания определяется в соответствии с порядковым номером в журнале.

Таблица 2.3.1

Номера сотрудников и мест их работы для конкретного варианта

№ варианта	Новые сотрудники (НС)	Места работы прежних сотрудников (ПМ)	Новые места (НМ)
1	3, 4, 7, 8	1, 2, 3	1, 2
2	1, 2, 5, 6	2, 5, 6	2, 3
3	5, 6, 7, 8	1, 2, 5	3, 4
4	3, 4, 5, 6	4, 5, 6	1, 4
5	1, 2, 3, 4	2, 3, 4	2, 4
6	2, 4, 6, 8	3, 4, 6	1, 3
7	1, 3, 5, 7	2, 3, 6	1, 4
8	2, 3, 6, 7	3, 4, 5	2, 3
9	1, 4, 5, 8	2, 3, 5	3, 4
10	2, 3, 4, 5	1, 2, 6	1, 2
11	4, 5, 6, 7	1, 3, 5	2, 4
12	1, 2, 7, 8	2, 4, 6	1, 3

Таблица 2.3.2

Компетентность новых сотрудников

	НМ1	НМ2	НМ3	НМ4	ПМ1	ПМ2	ПМ3	ПМ4	ПМ5	ПМ6
НС1	6	5	7	6	5	6	7	6	7	5
НС2	5	5	8	8	7	6	4	5	8	8
НС3	6	7	5	6	4	5	4	5	6	6
НС4	7	8	7	6	5	7	6	8	5	5

НС5	7	6	6	5	5	4	5	5	4	6
НС6	8	8	9	7	6	7	8	7	9	8
НС7	9	8	9	9	8	7	8	9	8	7
НС8	7	7	8	9	7	8	9	6	7	8

Таблица 2.3.3

Компетентность прежних сотрудников

	НМ1	НМ2	НМ3	НМ4	Занимаемое место
ПС1	7	6	6	7	7
ПС2	8	9	7	7	8
ПС3	6	5	6	6	6
ПС4	7	9	6	8	8
ПС5	8	7	8	8	7
ПС6	4	5	6	4	5

2.3.4 Теоретическая часть

2.3.4.1 Общие сведения о задаче

Задача о назначениях – это РЗ, в которой для выполнения каждой работы требуется один и только один ресурс (один человек, одна автомашина и т.д.), а каждый ресурс может быть использован на одной и только одной работе. То есть ресурсы не делимы между работами, а работы не делимы между ресурсами. Таким образом, задача о назначениях является частным случаем ТЗ. Задача о назначениях имеет место при назначении людей на должности или работы, автомашин на маршруты, водителей на машины, при распределении групп по аудиториям, научных тем по научно-исследовательским лабораториям и т.п.

Исходные параметры модели задачи о назначениях

1. n – количество ресурсов, m – количество работ.

2. $a_i = 1$ – единичное количество ресурса A_i $(i = \overline{1,n})$, например: один работник; одно транспортное средство; одна научная тема и т.д.

3. $b_j = 1$ – единичное количество работы B_j $(j = \overline{1,m})$, например: одна должность; один маршрут; одна лаборатория.

4. c_{ij} – характеристика качества выполнения работы B_j с помощью ресурса A_i. Например, компетентность i-го работника при работе на j-й должности; время, за которое i-е транспортное средство перевезет груз по j-му маршруту; степень квалификации i-й лаборатории при работе над j-й научной темой.

Искомые параметры

1. x_{ij} – факт назначения или неназначения ресурса A_i на работу B_j:

$$x_{ij} = \begin{cases} 0, \text{ если } i\text{-й ресурс не назначен на } j\text{-ю работу}, \\ 1, \text{ если } i\text{-й ресурс назначен на } j\text{-ю работу}. \end{cases}$$

2. $L(X)$ – общая (суммарная) характеристика качества распределения ресурсов по работам.

Таблица 2.3.4

Общий вид транспортной матрицы задачи о назначениях

Ресурсы, A_i	Работы, B_j				Количество ресурсов
	B_1	B_2	…	B_m	
A_1	c_{11}	c_{12}	…	c_{1m}	1
A_2	c_{21}	c_{22}	…	c_{2m}	1
…	…	…	…	…	…
A_n	c_{n1}	c_{n2}	…	c_{nm}	1
Количество работ	1	1	…	1	$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{j=1}^{m} b_j$

Модель задачи о назначениях

$$L(X) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} c_{ij} x_{ij} \to \min \; ;$$

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \; \left(i = \overline{1,n}\right), \\ \sum\limits_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \left(j = \overline{1,m}\right), \\ x_{ij} = \begin{cases} 0, \\ 1, \end{cases} \left(i = \overline{1,n};\; j = \overline{1,m}\right). \end{cases} \tag{5.1}$$

Специфическая структура задачи о назначениях позволила разработать так называемый **"Венгерский метод"** ее решения. Поэтому, хотя в Excel такие задачи решаются обычным симплекс-методом, в лабораторной работе требуется построить модель задачи о назначениях вида (2.3.4). В некоторых случаях, например, когда c_{ij} – это компетентность, опыт работы, или квалификация работников, условие задачи может требовать максимизации ЦФ, в отличие от (2.3.4). В этом случае ЦФ $L(X)$ заменяют на $L_1(X) = -L(X)$ и решают задачу с ЦФ $L_1(X) \to \min$, что равносильно решению задачи с ЦФ $L(X) \to \max$.

2.3.4.2 Постановка задачи о назначениях

Отдел кадров предприятия устроил конкурсный набор специалистов на две вакантные должности. На эти новые места (НМ) претендуют 3 прежних сотрудника (ПС), уже работающие в других отделах, и 4 новых сотрудника

(НС). Номера новых сотрудников, новых и прежних мест выбираются по вариантам из табл. 2.3.1. Номера прежних мест являются номерами прежних сотрудников.

Отдел кадров оценил по десятибалльной шкале компетентность новых сотрудников (табл. 2.3.2) и прежних сотрудников (табл. 2.3.3) для работы и на новых местах, и на прежних местах (ПМ), то есть занимаемых прежними сотрудниками. Необходимо учесть, что руководство предприятия, во-первых, предпочитает, чтобы прежние сотрудники не претендовали на места друг друга, и, во-вторых, не намерено увольнять прежних сотрудников.

Необходимо распределить сотрудников по должностям наилучшим образом.

2.3.4.3 Рекомендации к решению задачи о назначениях

1. Процесс приведения задачи о назначениях к сбалансированному виду имеет свои особенности по сравнению с ТЗ. Если условие сбалансированности задачи не выполняется из-за нехватки работ или исполнителей в количестве k_{ab}, то для создания баланса надо ввести такое же количество k_{ab} фиктивных строк или столбцов.

2. Особенностью решения данной задачи является моделирование системы предпочтений, сложившейся у руководства предприятия по описанному в условии задачи кадровому вопросу.

3. В задаче о назначениях увольнение прежнего сотрудника или непринятие на работу нового сотрудника моделируется попаданием единицы в фиктивный столбец матрицы решений задачи, поэтому для запрещения или разрешения таких ситуации необходимо использовать соответствующие "тарифы".

4. Значения "тарифов" $c_{ij}^{з}$ выбираются в зависимости от направления оптимизации ЦФ задачи о назначениях ($L(X) \to \max$ или $L(X) \to \min$). При этом руководствуются принципом "невыгодности" запрещенных назначений. Так, если $L(X)$ – это общая компетентность работников, то в качестве запрещающих надо выбирать нулевые компетентности $c_{ij}^{з}$. А если $L(X)$ – это общее время прохождения машинами транспортных маршрутов, то в качестве запрещающих надо выбирать значения $c_{ij}^{з}$, превосходящие по величине максимальные реальные значения c_{ij}.

5. При решении задач о назначении в Excel необходимо учитывать, что переменные x_{ij} являются булевыми.

2.4 ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №4 «ДВУХИНДЕКСНЫЕ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ. ОРГАНИЗАЦИЯ ОПТИМАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ СНАБЖЕНИЯ»

2.4.1 Цель работы

Приобретение навыков адаптации транспортной модели ЛП для оптимизации системы снабжения, допускающей транзитные перевозки.

2.4.2 Порядок выполнения работы

1. Согласно номеру своего варианта выберите условие задачи.
2. Постройте модель задачи, включая транспортную таблицу.
3. Решите в Excel все подзадачи, сделайте выбор оптимальной системы снабжения.
4. Оформите отчет по практической работе.

2.4.3 Варианты заданий

Ежемесячный спрос на продукцию [шт.], емкость оптовых баз [шт.] и тарифы [руб./шт.] за доставку продукции с оптовых баз к потребителям приведены в табл. 2.4.1. Ежемесячные объемы производства [шт.], емкость оптовых баз [шт.] и суммарные затраты [руб./шт.] на производство и доставку продукции от изготовителей к оптовым базам приведены в табл. 2.4.2. Ежемесячные объемы производства [шт.], спрос на продукцию [шт.] и суммарные затраты [руб./шт.] на производство и доставку продукции от изготовителей к потребителям приведены в табл. 2.4.3. Номер варианта состоит из двух цифр. Первая цифра (0 или 1) выбирается в табл. 2.4.1 и 2.4.3 по вертикали, а в табл. 2.4.2 – по горизонтали. Вторая цифра (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6) выбирается в табл. 2.4.1 и 2.4.3 по горизонтали, а в табл. 2.4.2 – по вертикали. Таким образом, номера вариантов имеют вид 01, 02, …, 06, 11, 12, …, 16.

Таблица 2.4.1

Параметры перевозок из оптовых баз к потребителям

			Потр-ль А		Потр-ль Б		Потр-ль В		Потр-ль Г		Потр-ль Д		Запас
			Вариант		Вариант		Вариант		Вариант		Вариант		
			0	**1**	**0**	**1**	**0**	**1**	**0**	**1**	**0**	**1**	
Оптовая база 1	Вариант	**1**	15	18	12	12	11	14	10	16	20	14	300
		2	12	20	32	28	14	25	22	19	36	40	540
		3	20	12	15	10	28	20	30	22	17	11	720
		4	20	35	32	25	36	18	20	34	25	15	620
		5	14	20	25	14	18	22	15	30	21	14	560
		6	22	14	20	10	25	32	30	35	24	18	780
Оптовая база 2	Вариант	**1**	20	10	14	16	25	30	24	32	15	24	420
		2	16	15	20	11	31	18	20	40	17	30	380
		3	21	28	12	20	24	35	15	21	24	45	460
		4	16	16	27	14	20	20	21	25	28	38	350
		5	15	31	34	20	14	15	18	30	20	22	410
		6	14	30	10	26	18	16	24	36	34	25	450

Оптовая база 3	Вариант	**1**	12	20	36	18	20	27	16	18	36	35	730
		2	16	12	26	10	32	42	34	14	10	16	690
		3	20	15	20	16	36	28	30	20	18	10	620
		4	18	28	15	26	28	31	18	40	20	27	580
		5	15	24	35	35	40	34	10	35	35	40	740
		6	22	32	28	14	25	20	35	24	20	35	610
Спрос на товар			600	480	550	750	420	360	780	200	400	180	

Таблица 2.4.2

Параметры перевозок от изготовителей к оптовым базам

Изг-ль	Вари ант	Оптовая база 1						Оптовая база 2						Оптовая база 3						Произ-во
		В А Р И А Н Т						В А Р И А Н Т						В А Р И А Н Т						
		1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	
Изг-ль 1	**0**	27	18	12	20	24	10	10	14	9	8	12	16	31	27	20	25	17	22	510
	1	14	25	29	30	12	11	7	20	12	17	19	8	28	30	24	18	10	12	480
Изг-ль 2	**0**	15	19	24	28	17	30	21	14	20	15	17	7	25	36	21	17	31	12	620
	1	20	27	14	10	29	21	14	10	9	16	20	6	24	18	30	26	18	31	570
Изг-ль 3	**0**	11	7	26	20	9	6	22	18	10	19	24	14	27	30	15	10	19	21	660
	1	15	7	22	18	10	13	17	12	19	21	15	10	27	18	10	21	30	14	280
Изг-ль 4	**0**	26	10	28	15	7	19	20	15	11	18	12	27	20	15	19	25	11	20	420
	1	20	25	14	9	11	18	16	27	19	10	14	20	21	32	36	25	18	12	390
Запас		300	540	720	620	560	780	420	380	460	350	410	450	730	690	620	580	740	610	450

Таблица 2.4.3

Параметры перевозок от изготовителей к потребителям

			Потр-ль А		Потр-ль Б		Потр-ль В		Потр-ль Г		Потр-ль Д		Произ-во
			Вариант		Вариант		Вариант		Вариант		Вариант		
			0	**1**	**0**	**1**	**0**	**1**	**0**	**1**	**0**	**1**	
Изготовитель 1	Вариант	**1**	10	2	2	12	1	14	10	6	20	14	510
		2	26	37	12	45	10	24	39	14	35	42	200
		3	11	28	6	10	18	20	22	34	16	14	550
		4	25	8	12	17	5	40	25	32	38	30	720
		5	24	14	27	40	48	35	21	30	12	40	200
		6	16	24	14	30	42	50	35	22	30	52	420
Изготовитель 2	Вариант	**1**	24	8	18	30	20	35	14	40	26	30	400
		2	10	12	50	58	8	58	20	58	48	26	800
		3	32	16	45	34	10	16	32	8	25	16	250
		4	26	35	42	52	35	30	30	22	38	20	480
		5	16	20	30	38	26	48	50	50	48	52	900
		6	20	12	48	44	30	22	25	18	15	20	420
Изготовитель 3	Вариант	**1**	32	28	54	40	16	28	28	24	10	20	460
		2	10	30	60	30	20	35	38	50	44	28	650
		3	8	24	25	21	52	42	50	48	48	22	800
		4	15	40	38	28	25	10	20	15	12	10	160
		5	18	37	16	32	40	35	9	10	25	16	360
		6	26	34	20	46	45	30	14	26	24	10	480
Изготовитель 4	Вариант	**1**	16	41	30	17	55	45	45	50	46	30	790
		2	24	30	24	35	23	28	38	30	30	25	510
		3	30	25	37	20	30	32	35	28	25	9	560
		4	16	20	18	33	48	50	48	52	50	20	800
		5	22	36	10	42	36	48	40	48	45	24	700
		6	28	40	40	25	18	20	28	16	18	15	400
Спрос на товар			600	480	550	750	420	360	780	200	400	180	

2.4.4 Теоретическая часть

2.4.4.1 Постановка задачи

По заказу пяти потребителей А, Б, В, Г, Д на четырех предприятиях-изготовителях производится продукция. В процессе доставки к потребителям продукция может храниться на трех оптовых базах. Существуют следующие три способа организации снабжения потребителей продукцией:

1) ИЗГОТОВИТЕЛЬ $\rightarrow$ ОПТОВАЯ БАЗА $\rightarrow$ ПОТРЕБИТЕЛЬ,

то есть вся продукция, произведенная изготовителями, сначала складируется на оптовых базах и только потом развозится потребителям;

2) ИЗГОТОВИТЕЛЬ $\rightarrow$ ПОТРЕБИТЕЛЬ,

то есть вся продукция, произведенная изготовителями, напрямую доставляется потребителям, минуя оптовые базы;

$$\begin{tikzcd} \text{3) ИЗГОТОВИТЕЛЬ} \arrow[r] \arrow[dr] & \text{ОПТОВАЯ БАЗА} \arrow[d] \\ & \text{ПОТРЕБИТЕЛЬ,} \end{tikzcd}$$

то есть продукция, произведенная изготовителем, доставляется к потребителям частично напрямую, а частично транзитом через оптовые базы.

Необходимо выбрать оптимальный способ организации снабжения потребителей продукцией предприятий-изготовителей.

2.4.4.2 Общие рекомендации к решению задачи

1. Общий подход к решению этой задачи заключается в построении транспортной модели каждого из способов организации снабжения, анализе затрат на доставку продукции и выборе минимальной по затратам системы снабжения.

2. При моделировании различных систем снабжения необходимо учитывать следующее. В транспортной таблице системы 1 и в транспортной таблице системы 3 **пунктами отправления** являются как изготовители, так и оптовые базы; **пунктами потребления** являются как потребители, так и оптовые базы. Транспортные таблицы систем 1 и 3 отличаются расстановкой **реальных** и **запрещающих** тарифов (см. 1.2.3.1).