МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ТРАНСПОРТНЫХ ПОТОКОВ

Лекция 1

Общие положения. Понятие математического моделирования.

Вступительное слово о дисциплине.

Эффективность перевозок и безопасность движения в значительной мере определяются характером взаимодействий в транспортном потоке. Однако эти взаимодействия исследованы недостаточно, что ограничивает возможности управления транспортными потоками и предотвращения дорожно-транспортных происшествий. Практическое решение этой проблемы невозможно без предварительного выяснения характерных особенностей реального транспортного потока.

Основным методом изучения транспортных потоков является эмпирический метод исследования. В настоящее время при решении задач управления автомобильными перевозками и проектировании дорог инженер по организации движения исходит в основном из эмпирических данных, полученных путем наблюдения, измерения и статистического анализа.

1 Системный подход к анализу транспортного потока

Система *– по-гречески – целое, составленное из частей соединение, это совокупность взаимосвязанных объектов, процессов, объединенных единой целью и общим алгоритмом функционирования.*

Система *— это набор объектов, включающий взаимосвязи между объектами и их признаками.*

В рамках системы ВАДС под ***объектами*** *можно понимать элементы движения: автомобиль, водитель, дорога.* ***Признаки*** *— это свойства указанных объектов или элементов. К признакам относятся: зрение водителя и его время реакции, скорость автомобиля, ее приемистость и интервал между автомобилями, ширина улицы и средства регулирования движения и* *т.д.*

Единая ***цель*** *указанного объединения в виде системы ВАДС состоит в мотивации водителя, обеспечивающей безопасность движения и экономию времени и расстояния. Взаимосвязи отражают взаимодействие транспортных средств друг с другом и с окружающей средой, под которой понимают дорогу, улицу или дорожно-транспортную сеть в целом.*

Определение ***целей дорожной системы*** *— это одна из наиболее трудных задач, стоящих перед специалистом по планированию автомобильных перевозок, проектировщиком геометрических элементов дороги и инженером по организации движения.*

В рамках ***системного подхода*** *для проведения синтеза и анализа необходимо построить модель, которая связывала бы топологические свойства системы с ее входами и выходами.*

Анализ *— это разделение системы на компоненты для рассмотрения их следствий с точки зрения целей.*

Синтез *предполагает соединение частей в целое; обычно его осуществляют путем экстраполяции или интерполяции существующих методов и результатов для достижения определенных целей, которые в свою очередь подвергают анализу.*

Система «Транспортный поток – дорожные условия»:

- транспортный поток – совокупность автомобилей, движущихся по дороге;

- дорожные условия – совокупность геометрических характеристик дороги.

Таким образом, система ***«Транспортный поток – дорожные условия»*** *представляет собой совокупность автомобилей, движущихся по геометрически определенному участку дороги.*

Система «Транспортный поток условия движения»:

- условия движения – совокупность дорожных условий и всех остальных внешних условий, оказывающих воздействие на движение автомобилей.

*Таким образом, система **«Транспортный поток – условия движения»** представляет собой совокупность автомобилей, движущихся по геометрически определенному участку дороги под воздействием всех остальных внешних условий.*

2 Понятие математической модели и ее виды

*Одна из наиболее трудных проблем, стоящих перед исследователем организации движения — это превращение **реальной дорожно-транспортной обстановки**, включающей водителей, автомобили, устройства регулирования движения и дорогу, в набор **математических символов** и зависимостей, воспроизводящих их поведение. Именно модель является основой, которая позволяет рассматривать подобные взаимодействия в целом.*

*Любая **модель** является **идеализированным отображением** действительности. Строить ее следует таким образом, чтобы реальные процессы воспроизводились с приемлемой точностью; при этом необходимо помнить, что никакая абстракция не может точно совпадать с действительностью.*

*Попытку установить соответствие между задачей и рациональным мышлением можно реализовать в виде **физической** или **теоретической** модели.*

3 Понятие физической модели

***Физическая** модель может быть скалярной или аналоговой, например аэродинамическая труба для испытания самолетов и песочные часы для измерения времени.* Динамическая аналогия Кирхгофа показывает, что критическую нагрузку, действующую по оси колонны, можно определить путем изучения колебаний маятника, подвешенного на нити той же длины. Рассчитанные на численные методы аналоговые модели могут быть еще более тонкими. Логарифмическая линейка и номограф — это цифровые аналоги; автомобильный спидометр выдает значение площади, ограниченной кривой «скорость как функция времени»; с этой точки зрения он представляет собой интегрирующее устройство.

4 Понятие теоретической модели

Любая ***теоретическая*** *модель — это по сути дела гипотеза. Например, открытые Ньютоном три закона движения представляют собой теоретическую модель нашего мира. По очевидным причинам большинство теоретических моделей математизировано. Если сама гипотеза и ситуация, которую она описывает, не являются достаточно простыми, то единственный практически целесообразный путь изучения многочисленных проявлений какой-то сложной системы связан с привлечением математики.*

Цель математического описания дорожно-транспортной ситуации состоит в выявлении существенных моментов и составлении набора соотношений между ними, которые обладают достаточной простотой, но позволяют получать важные результаты.

В ***организации*** *движения многие задачи можно свести к нахождению* ***максимума*** *или* ***минимума*** *некоторой функции. Так, расчет числа полос зависит от нахождения максимальной интенсивности (пропускной способности), в то время как при расчете цикла светофора можно исходить из критерия минимальной задержки.*

Инженер лишь в небольшой степени может влиять на переменные, характеризующие движение. Правда, он может увеличить число полос с тем, чтобы уменьшить интенсивность движения по каждой полосе, может ввести ограничения скорости с тем, чтобы воспрепятствовать движению с большими скоростями, и может установить светофоры для того, чтобы регулировать движение. Однако остаются переменные, которые не зависят от его воли.

Лекция 2

Транспортные модели.

Существующие подходы и уровни анализа транспортного потока.

1 Транспортные модели и их классификация

Если математическая модель позволяет точно рассчитать поведение одной переменной при задании определенных значений другой переменной, то ее называют детерминистической.

Моделям этого типа можно противопоставить стохастические модели, которые позволяют определить вероятность получения различных значений переменной величины.

Детерминистические аспекты транспортного потока можно выявить путем изучения движения отдельного транспортного средства или всего потока в целом. Влияние движения или интервала одного автомобиля на другой относится к локальным, или микро-характеристикам движения. Кроме того, соотношение между интенсивностью движения за длительный период времени и концентрацией движения на каком-то участке дороги определяет общие, или макро-характеристики движения.

Любая последовательность опытов, которую можно подвергнуть вероятностному анализу, называется стохастическим, или случайным процессом. Подобный процесс может быть либо процессом с независимыми событиями, либо марковским. Процесс с независимыми событиями наблюдается в случае, когда эксперименты выполняют так, что исход одного эксперимента не влияет на исход любого другого. Если же исход любой конкретной пробы, или эксперимента, зависит от исхода ближайшей предыдущей пробы, то процесс называют марковским.

На рисунке 1 представлены многие транспортные модели и показана взаимосвязь между ними.

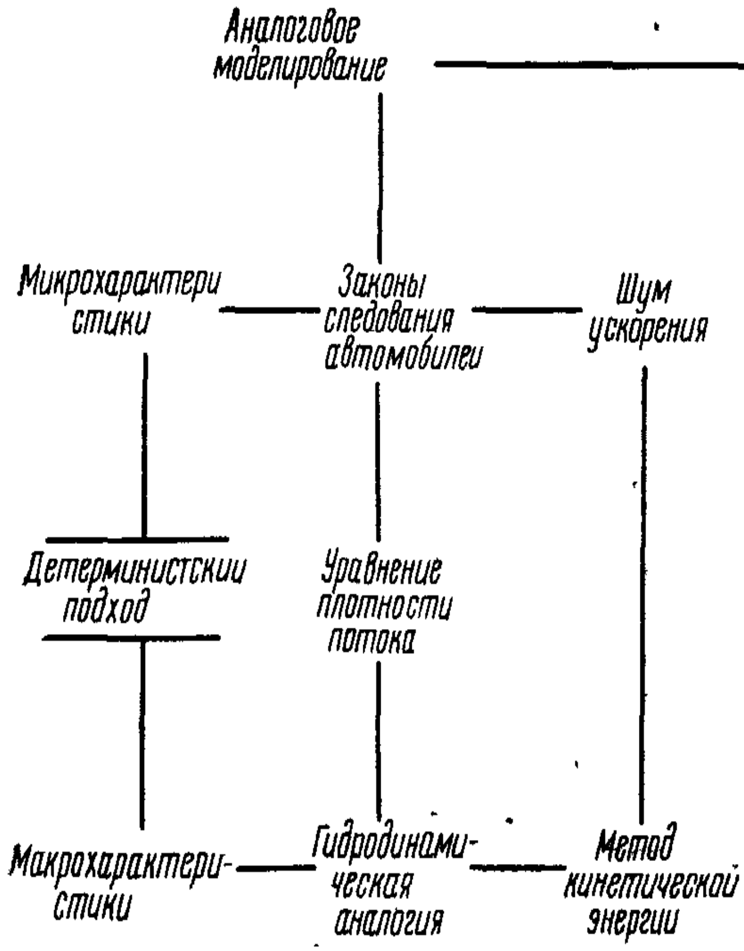


Рисунок 1 – Транспортные модели

В теоретической фазе многих исследований можно использовать либо стохастический, либо детерминистический подходы, либо и тот и другой одновременно.

На пример, рассмотрим процесс выезда на скоростную дорогу. Маневр выезда — это вероятностное событие, включающее распределение автомобилей, прибывающих к въезду, распределение интервалов между автомобилями на скоростной дороге, распределение времени ожидания для автомобилей, ожидающих возможности выполнения маневра на въезде, и даже распределение времени реакции водителей и приемистости автомобилей. После выполнения маневра выезда определенная доля въехавших на скоростную дорогу автомобилей будет перемещаться на другие полосы; этот маневр будет происходить на последующих участках дороги. Описанный процесс по своей природе соответствует марковскому процессу, который подвержен флуктуациям до перехода в стационарный процесс, или установившееся состояние.

На наружной полосе вблизи участка, где происходит выезд, возникают ударные волны, распространяющиеся на другие полосы. Наилучшие результаты в плане количественного выражения этого эффекта дает детерминистский подход, в частности метод кинетической энергии, который позволяет рационально описать как пропускную способность, так и уровень обслуживания.

2 Подходы к исследованию транспортного потока

Неотъемлемыми частями процесса исследования являются формулировка теории, проведение эксперимента и оценка результатов.

Формулировка теории включает установление критериев для оптимизации системы и построение математической модели. По своему характеру эксперимент может быть контролируемым и неконтролируемым.

Применительно к транспортным исследованиям контролируемый эксперимент может быть осуществлен в лабораторных или полевых условиях. Примером лабораторного эксперимента может служить моделирование как - аналоговое, так и цифровое. Полевые эксперименты проводят на автодромах и в меньшей степени при разработке проектов тоннелей и систем регулирования движения по скоростным дорогам.

Современный подход к изучению транспортных потоков отражает пирамида теорий рисунок 2.

При ***макро-подходе*** *используют такие физические аналогии, как ударные волны, поток сжимаемой жидкости, тепловой поток, метод кинетической энергии. При микро-подходе анализируют систему водитель — автомобиль. Где ее рассматривают в качестве замкнутой системы с обратной связью и применяют методы теории регулирования для изучения характеристик* *движения. Методы инженерной психологии используют для выявления механизма, посредством которого водитель выбирает определенное положение по отношению к другим автомобилям и дороге.*

Каждый из трех указанных научных подходов представлен боковой поверхностью пирамиды детерминистских теорий, поскольку все они необходимы для рационального объяснения проблем движения транспорта.

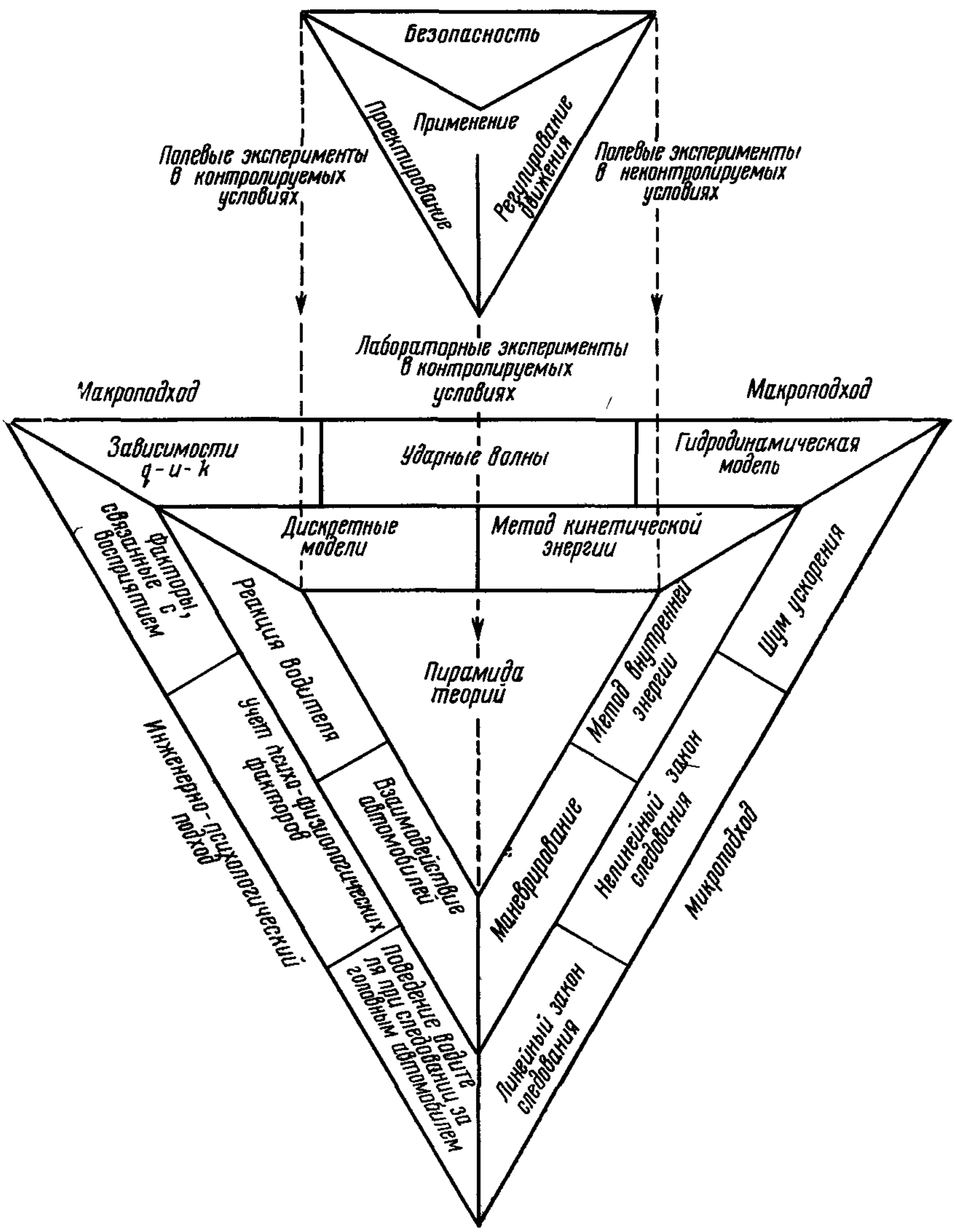


Рисунок 3 - Пирамида теорий

Микро-подход *обеспечивает наилучшие возможности для исследования устойчивости при взаимодействии автомобилей, столь важной для безопасности движения.* ***Макро-подход*** *особенно удобен для изучения установившегося состояния транспортного потока и вопросов эффективности.* ***Инженерно-психологический*** *подход применяют для исследования уникальных сенсорных и моторных характеристик водителя и соответствующих ограничений; на этой основе стремятся свести к минимуму число ситуаций, в которых водитель сказывается не в состоянии надлежащим образом управлять автомобилем, а также регулировать абсолютную и относительную скорости.*

На рисунке 3 указаны три основных экспериментальных метода, применяемые при транспортных исследованиях—лабораторный эксперимент в контролируемых условиях, полевые эксперименты в контролируемых и неконтролируемых условиях.

Приложение новой научной теории к современным сложным системам требует повышения точности теоретических положений. Первая задача, с которой сталкивается исследователь транспортных проблем,—это превращение реальной транспортной ситуации в набор математических символов и соотношений, которые воспроизводят их поведение. Вторая задача—это применение значений, полученных в результате исследования этих математических выражений.

По мере усложнения приложений должны развиваться и соответствующие разделы теории. Исследователи, занимающиеся различными вопросами, доказали ценность теоретических разработок для описания транспортных потоков. Однако между теорией и практикой организации движения существует некоторый разрыв. Для сокращения указанного разрыва необходимо выделить результаты, полученные современной теорией транспортных потоков, организовать их проверку, определение степени значимости и оценку.

Лекция 3

Стохастический подход к моделированию транспортного потока. Вероятностные распределения.

1 Сущность вероятностного подхода

Для оценки вероятности появления того или иного события, происходящего при движении автомобилей, можно использовать один из двух методов. Первый метод дает статистическую вероятность, которая имеет большое значение и широко используется в математической статистике; второй метод приводит к теоретической вероятности.

В теории вероятностей основные факторы известны, но результат нельзя предсказать с абсолютной достоверностью. В математической статистике имеется конечный результат, но причины, обусловившие его появление, неизвестны.

Одно из затруднений, возникающих при применении теории вероятностей, состоит в определении всех возможных способов появления данного события. В большинстве азартных игр игрок по существу вытаскивает тот или иной шанс из «черного ящика», где различного рода выигрыши и их относительные пропорции известны заранее. Однако *в большинстве реальных дорожно-транспортных ситуаций редко удается перечислить все возможные исходы. Необходимо также иметь в виду, что нельзя отрывать теорию вероятностей от математической статистики, так как обычный подход состоит в том, чтобы взять из «черного ящика» обоснованную экспериментальную выборку, а затем оценить, при каком доверительном уровне она представляет все содержимое «ящика».*

2 Биномиальное распределение в моделировании транспортных потоков

Первые исследования транспортных потоков носили статистический характер. Они включали методы измерения средних значений и средних квадратических отклонений таких характеристик транспортных потоков, как скорость и интенсивность движения. Однако оказалось, что для полного описания транспортного потока недостаточно знания таких показателей, как параметр сдвига и дисперсия, а необходимо рассматривать распределение вероятностей.

Бином Ньютона имеет вид

$$(p+q)^n=\sum_{x=0}^{n}\frac{n!}{x!\,(n-x)!}\,p^x q^{(n-x)}. \tag{3.1}$$

Коэффициенты данного разложения называются биномиальными коэффициентами, часто они выражаются символически как

$$\binom{n}{x}=\frac{n!}{x!\,(n-x)!}. \tag{3.2}$$

Формула (3.2) дает число сочетаний из n элементов по x. Если разделить все автомобили на пять классов: малолитражные, стандартные легковые, пикапы, грузовые и автобусы, то число сочетаний из пяти элементов по два составит

$$\frac{5!}{2!3!}=10.$$

На величины p и q никакие ограничения пока не налагаются.

Рассмотрим теперь последовательность независимых испытаний. Пусть p обозначает вероятность того, что определенное событие произойдет при данном испытании, следовательно, q=1—p — вероятность того, что это событие при одном испытании не произойдет. Поскольку p+q=1, то сумма n+1 членов ряда, записанного в правой части формулы (3.1), также должна быть равна единице. *Следовательно, каждый член биномиального разложения представляет собой некоторую вероятность, а все члены образуют так называемое биномиальное распределение. Формула для биномиального распределения имеет вид:*

$$P(x)=\binom{n}{x}p^{x}q^{(n-x)}, \tag{3.3}$$

где p — вероятность успешного исхода при любом данном испытании;

q — вероятность неудачного исхода при любом данном испытании;

n — число независимых испытаний;

x — число успешных испытаний;

P(x)—вероятность появления n успешных исходов при x испытаниях.

Рассмотрим приближение автомобилей к перекрестку, где, как показали исследования, 25% автомобилей совершают правый поворот, а левый поворот запрещен. Согласно формуле (3.3), вероятность того, что один из трех последовательно движущихся автомобилей совершит правый поворот, равна

$$P(1)=\frac{3!}{1!2!}(0{,}25)^{1}\,(0{,}75)^{2}=0{,}422.$$

3 Дискретное распределение в моделировании транспортных потоков

Моменты классической механики связаны с физическими свойствами тел, имеющих некоторую массу. Первый начальный момент связан с центром тяжести, второй момент относительно центра тяжести называется моментом инерции. *В теории вероятностей моменты также играют исключительно важную роль. Аналогия между телом с единичной массой и распределением вероятностей позволяет провести важную аналогию между свойствами моментов. Точно так же, как некоторые тела могут быть полностью описаны с помощью моментов, некоторые распределения вероятностей можно полностью описать с помощью моментов.*

k - начальный момент дискретного распределения P(x}, например *биномиального распределения, определяется как*

$$\mu_k = \sum_{x=0}^{\infty} x^k P(x). \tag{3.4}$$

Первый момент μ называется средним. Второй момент μ_2 используется для нахождения дисперсии σ^2, так как

$$\sigma^2 = \mu_2 - \mu^2. \tag{3.5}$$

Первый момент биномиального распределения находится путем подстановки выражения (3.3) в формулу (3.4). После перегруппировки членов имеем

$$\mu = np. \tag{3.6}$$

Второй момент вычисляется аналогично с помощью тождества

$$x^2 = x(x-1) + x.$$

В конечном счете, имеем

$$\mu_2 = n(n-1)p^2 + np. \tag{3.7}$$

При подстановке выражений (3.6) и (3.7) в формулу (3.5) находим дисперсию биномиального распределения

$$\sigma^2 = npq. \tag{3.8}$$

4 Пуассоновское распределение в моделировании транспортных потоков

При рассмотрении прибытия автомобилей к перекрестку, невозможно определить, сколько автомобилей не прибыло к перекрестку. В ситуациях такого рода необходимо применять пуассоновское распределение. В формуле для пуассоновского распределения используется постоянная Эйлера е

$$e = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots = 2{,}7183\ldots \tag{3.9}$$

Это число является основанием натуральных логарифмов. Если возвести *е в некоторую степень m, то результат также можно выразить в виде бесконечного ряда:*

$$e^m = 1 + m + \frac{m^2}{2!} + \frac{m^3}{3!} + \dots \tag{3.10}$$

Чтобы то или иное разложение можно было считать распределением вероятностей, сумма всех его членов должна равняться единице. Чтобы разложение e^m *можно было использовать в качестве распределения вероятностей, необходимо лишь разделить обе части выражения (3.10) на* e^m

$$1 = e^m \left(1 + m + \frac{m^2}{2!} + \frac{m^3}{3!} + \dots\right). \tag{3.11}$$

Формула (3.11) дает сумму членов пуассоновского распределения, следовательно, формулой для распределения будет выражение для общего члена

$$P(x) = \frac{e^{-m} m^x}{x!}, \quad x = 0,\ 1,\ 2,\ \dots \tag{3.12}$$

Это распределение весьма удовлетворительно описывает число отдельных событий x, выраженное через среднее число этих событий. Чтобы оценить среднее значение, необходимо лишь подставить выражение (3.12) в формулу (3.4):

$$\mu = 0 + me^{-m} + \frac{2m^2e^{-m}}{2!} + \frac{3m^3e^{-m}}{3!} + \dots;$$

$$\mu = me^{-m}\left(1 + m + \frac{m^2}{2!} + \dots\right).$$

Заметим, что выражение в круглых скобках равно e^m*. Так, в формуле (3.12) m есть среднее пуассоновского распределения. Дисперсия пуассоновского распределения равна среднему значению.*

Пуассоновское распределение позволяет выполнять: анализ интенсивности движения в данном пункте, определение вероятности наличия свободного места на стоянке, изучение пространственного распределения некоторых дорожно-транспортных происшествий и проектирование развязок для транспорта, совершающего левый поворот.

Лекция 4

Вероятностные модели прибытия автомобилей.

1 Распределение Пуассона в анализе прибытия автомобилей

Закон Пуассона справедлив при допущении о том, что вероятность появления события остается постоянной, однако на практике при движении транспортных потоков это довольно редкое явление. Любое изменение вероятности появления события, в частности увеличение или уменьшение вероятности появления какого-либо события под влиянием другого события, приводит к увеличению или уменьшению дисперсии распределения относительно среднего, и, получаемые данные уже нельзя описывать с помощью пуассоновского распределения.

Известно, что устройства, регулирующие движение транспорта, могут изменять число прибывающих автомобилей, что исключает случайность. Наконец, некоторые явления, наблюдаемые при движении транспортных потоков, могут быть описаны пуассоновским распределением при наблюдении их в интервале одной длины, но они могут оказаться неслучайными при наблюдении их в интервале другой длины.

2 Проверка закона распределения прибытия автомобилей

Одним из способов проверки полученных данных является принятие допущения о том, что данные следуют некоторому распределению, а затем это допущение проверяется с помощью критерия хи-квадрат. Данные о прибытии автомобилей приведенные в таблице (360 интервалов продолжительность 10 с).

Проверим гипотезу о их пуассоновском распределении.

Число автомобилей в интервале x	Эмпирическая частота f	Теоретическая частота F	Отношение квадрата эмпирической частоты к теоретической частоте f^2/F
0	139	129,6	149,1
1	128	132,4	123,7
2	55	67,7	44,7
3	25	23,1	27,1
4	13	7,2	23,5
	360	360,0	368,1

Среднее равно 1,022

$$\chi^2 = \sum \frac{f^2}{F} - n = 368,1 - 360,0 = 8,1.$$

Дисперсия равна 1,200

$$\chi^2_{0,05} = 7,81 < 8,1.$$

Следовательно, гипотеза о пуассоновском распределении отвергается.

Рассмотрим повторно этот пример, где использовано отрицательное биномиальное распределение с теми же значениями среднего и дисперсии и получено очень хорошее соответствие.

Число автомобилей в интервале x	Эмпирическая частота f	Теоретическая частота F	Отношение квадрата эмпирической частоты к теоретической частоте f^2/F
0	139	138,0	140,0
1	128	121,5	134,9
2	55	63,1	47,9
3	25	25,2	24,8
4	13	12,2	13,8
	360	360,0	361,4

Среднее равно 1,022

$$\chi^2 = \sum \frac{f^2}{F} - n = 361,4 - 360,0 = 1,4.$$

Дисперсия равна 1,200

$$\chi^2_{0,05} = 5,99 > 1,4 \cdot$$

Следовательно, гипотеза о пуассоновском распределении принимается.

Объяснение данного факта следующее.

Вероятность p<1, то дисперсия всегда больше среднего. Любое изменение параметра пуассоновского распределения, например увеличение вероятности появления одного события под влиянием другого события, приводит к увеличению дисперсии распределения относительно среднего, поэтому отрицательное биномиальное распределение обеспечивает лучшее соответствие эмпирическим данным.

Процедура подбора дискретного распределения для эмпирических данных заключается в следующем. Вначале вычисляется среднее значение $\bar{x}$ *и дисперсия* s^2. *Если среднее и дисперсия примерно одинаковы, то для вычисления теоретических вероятностей можно использовать пуассоновское распределение. Однако если дисперсия значительно больше среднего, то можно использовать отрицательное биномиальное распределение. Если же дисперсия значительно меньше среднего, то можно использовать биномиальное распределение. В последних двух случаях для оценки параметров распределения среднее и дисперсия, полученные для эмпирических данных приравниваются первым двум моментам искомого распределения.*

После того как параметры распределений определены, с помощью функции P(x) вычисляется вероятность появления x событий при любом испытании (в любом интервале времени).

Таблица 12

Распределение	Биномиальное	Пуассо-новское	Отрицательное биномиальное
Функция распределения	$\binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$	$\frac{\mu^x}{x!} e^{-\mu}$	$\binom{x+k-1}{k-1} p^k (1-p)^x$
Среднее	np	μ	$\frac{k(1-p)}{p}$
Дисперсия	$np(1-p)$	μ	$\frac{k(1-p)}{p^2}$
Отношение среднего к дисперсии	$(1-p)^{-1} > 1$	1	$p < 1$
Оценка параметров	$p = \frac{(\bar{x} - s^2)}{\bar{x}}$	$\mu = \bar{x}$	$p = \frac{\bar{x}}{s^2}$
	$n = \frac{\bar{x}^2}{(\bar{x} - s^2)}$		$k = \frac{\bar{x}^2}{(s^2 - \bar{x})}$

3 Геометрическое распределение и анализ прибытия автомобилей

Еще одна последовательность, имеющая большое значение при изучении очередей автомобилей, строится на основе *геометрической прогрессии*

$$p + pq + pq^2 + pq^3 + \dots, \tag{4.1}$$

где q — знаменатель геометрической прогрессии.

Сумма первых S+1 членов прогрессии равна

$$S_{x+1} = p + pq + pq^2 + \dots + pq^x. \tag{4.2}$$

Умножив обе части выражения (4.2) на q, получим

$$qS_{x+1} = pq + pq^2 + \dots + pq^x + pq^{x+1}. \tag{4.3}$$

$$S_{x+1} = \frac{p\,(1 - q^{x+1})}{1 - q}. \tag{4.4}$$

Если сумма всех членов прогрессии будет равна единице, то вероятности, описываемые этими членами, образуют геометрическое распределение и будут равны:

$$P(x) = pq^x, \tag{4.5}$$

Формула (4.5) показывает вероятность появления первого успешного исхода после x неудачных (x=0, 1, 2, ...). Чтобы показать важность этого распределения для описания транспортных очередей, необходимо дать случайным величинам другую интерпретацию. *Формула (4.5) дает время ожидания до появления первого успешного исхода или вероятность того, что в очереди ожидают x автомобилей, где p и q являются функциями интенсивностей прибытия и отправления автомобилей.*

Производящая функция для геометрического распределения имеет вид:

$$Z_x(\theta) = p\,(1 - \theta q)^{-1}. \tag{4.6}$$

Данное выражение представляет собой частный случай производящей функции для отрицательного биномиального распределения при k=1.

Лекция 5

Использование вероятностной модели транспортного потока для расчета пропускной способности перекрестка

1 Пропускная способность с вероятностной точки зрения

В теории транспортных потоков, как пропускная способность, так и транспортная загрузка выражаются через интенсивность движения. *Транспортная загрузка дорожного сооружения, подобно потоку воды в трубе или давлению ветра на строение, является случайной величиной, и ее можно выразить лишь через вероятности появления тех или иных значений.*

Это соотношение между пропускной способностью и транспортной загрузкой нигде не проявляется так ярко, как на дорожных сооружениях высокого класса с регулированием движения. Это может быть пересечение на одном уровне или система пересечений на одном уровне.

При проектировании дорожного сооружения, регулирующего движение на двух пересекающихся дорогах с большой интенсивностью потоков, исходя из известной транспортной нагрузки, необходимо выбрать требуемое число полос на каждом направлении движения, а затем установить режим работы светофора. *В большинстве случаев при реконструкции существующего пересечения или проектировании новой скоростной магистрали, проходящей через город, возможен ряд вариантов при выборе числа полос движения. Места пересечения существующих крупных артерий на предполагаемом маршруте скоростной магистрали обычно бывают известны, и существуют реальные ограничения на число полос движения на примыкающих въездах и съездах и дорогах, пересекающих скоростную магистраль. Таким образом, задача сводится главным образом к определению режима работы светофора при предполагаемых геометрических характеристиках дороги.*

2 Распределение прибытия автомобилей к перекрестку

Существует несколько методов распределения длительности зеленого сигнала между различными фазами цикла. Простейший метод основан на допущениях о том, что интенсивность прибытия постоянна в любом цикле в течение рассматриваемого часа и что интенсивность оттока, а следовательно, и интервалы между убывающими автомобилями постоянны в фазе зеленого сигнала.

Таким образом, отношение длительности данной фазы к общей длительности цикла равно отношению числа автомобилей, прибывающих при зеленом сигнале, к числу автомобилей, прибывающих за весь цикл.

Если предположить, что прибывающие автомобили образуют равномерный поток, то вычисление длительности цикла и определение режима работы светофора строится на рациональной основе. Максимальную пропускную способность для данной фазы можно получить путем анализа расстояний между автомобилями, учитывая некоторую потерю времени при трогании с места и остановке очереди автомобилей.

Для прогнозирования потока автомобилей, прибывающих к перекрестку, хорошо подходит пуассоновское распределение. Формула Пуассона выражает вероятность прибытия к перекрестку данного числа автомобилей за цикл работы светофора на основе среднего числа прибытий за цикл.

Допущения о равномерном или пуассоновском распределении как моделях транспортного потока имеют определенные ограничения. Допущения: транспортный поток в час «пик» имеет пуассоновское распределение; транспортный поток в час «пик» является равномерным.

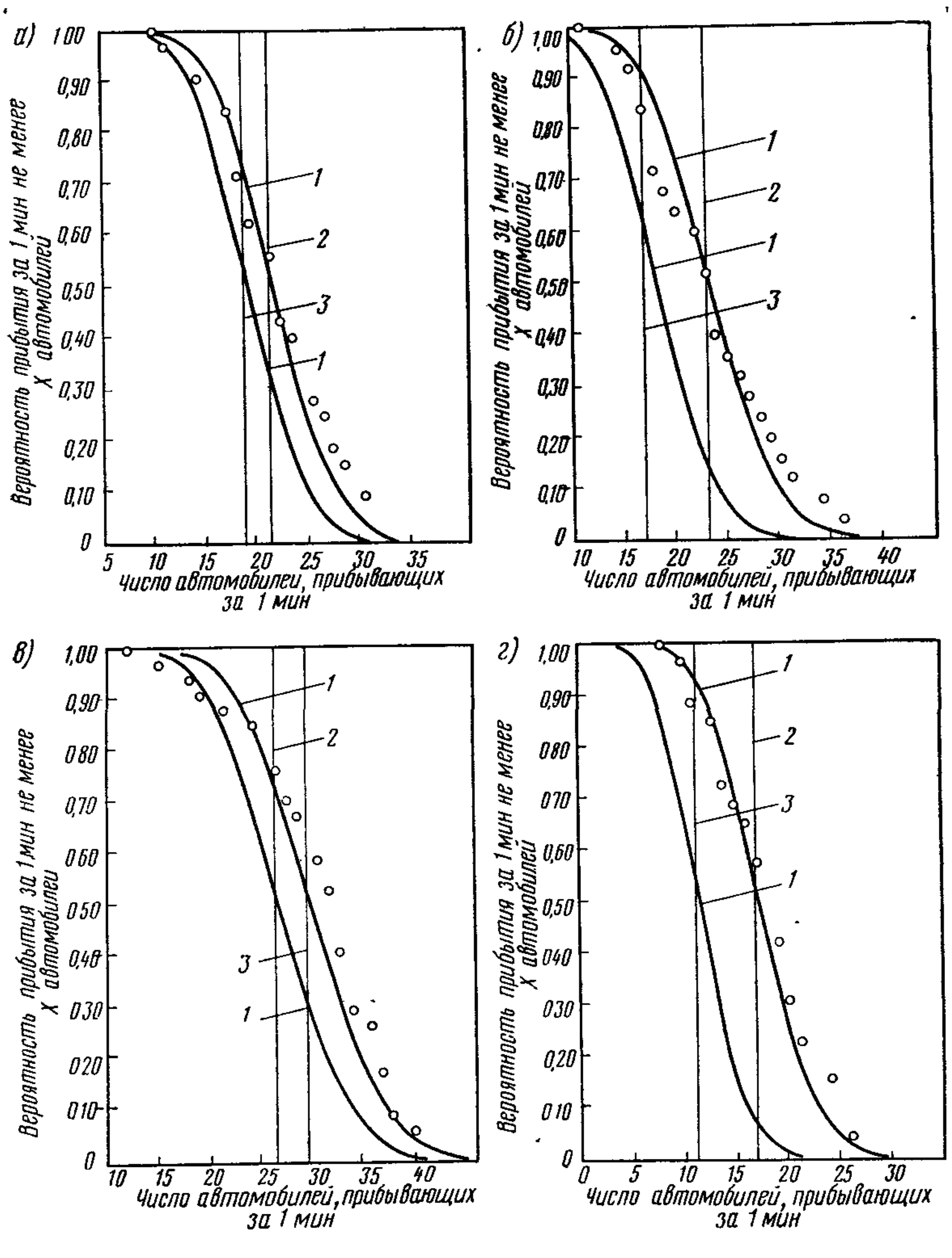


Рисунок 4 - Соотношение между наблюдаемым и прогнозируемым числом автомобилей, прибывающих к перекрестку в утренние периоды «пик»:

1 — интенсивность движения в период «пик», предсказываемая пуассоновским распределением;

2 — равномерная интенсивность движения в период «пик»;

3 — равномерная интенсивность движения и час «пик»;

о — наблюдаемая интенсивность движения в период «пик».

На рисунке 4 показаны соотношения между интенсивностями потока, предсказываемыми при принятии этих допущений, и интенсивностями, наблюдаемыми при различных других методах исследования.

Очевидно, что наилучшую оценку наблюдаемой интенсивности получим при допущении о пуассоновском распределении в периоде «пик», а наименее надежным является допущение о равномерной интенсивности движения в час «пик».

Так как проектирование дорог и дорожных сооружений по существу представляет собой систематизированную попытку найти соотношение между пропускной способностью и транспортной загрузкой, важно представлять себе, как выводятся выражения для пропускной способности и знать их ограничения.

Исторически сложилось так, что пропускная способность перекрестка определялась путем анализа расстояний между последовательными автомобилями.

3 Расчет пропускной способности пересечения

Среднее минимальное расстояние D между последовательными автомобилями определяется следующим уравнением:

$$\text{Среднее минимальное расстояние} = \frac{\text{Время}}{\text{Интенсивность}},$$

или

$$D = \frac{G - K}{x - 1},$$

где K — задержка при трогании с места всей последовательности автомобилей и время, необходимое для того, чтобы последний автомобиль проехал через перекресток.

Так как последнему автомобилю разрешается пересекать перекресток при желтом свете, то интервал D равен общей длительности зеленого и желтого сигналов. Переписывая данное выражение, получаем

$$G=(x-1)D+K$$

$$G=xD+K-D. \tag{5.1}$$

При анализе пропускной способности удобно рассматривать критическую интенсивность движения V на одной полосе для одной фазы. Эта величина характеризует максимальный объем движения за час на одной полосе, который может обеспечить перекресток при данной фазе:

$$V=\frac{C}{3600}x, \quad x=\frac{G-(K-D)}{D}. \tag{5.2}$$

Суммарная критическая интенсивность движения на одной полосе, которую может обеспечить перекресток за один час:

$$\sum V=\frac{3600}{C}\sum x, \quad \sum V=\frac{3600}{C}\cdot\frac{\Sigma G-\varphi(K-D)}{D}, \tag{5.3}$$

где C=ΣG, φ—число фаз. Следовательно,

$$\sum V=\frac{3600}{C}\cdot\frac{C-\varphi(K-D)}{D},$$

$$\sum V=\frac{3600}{D}-\frac{3600\varphi(K-D)}{CD}. \tag{5.4}$$

В итоге уравнение длительности цикла C:

$$C=\frac{3600\varphi(K-D)}{3600-D\Sigma V}. \tag{5.5}$$

Полученные формулы основаны на допущении, о равномерном движении для каждого цикла в течение часа. Разумеется, в действительности этого нет. Однако если часовую интенсивность движения умножить на некоторый поправочный коэффициент, то уравнения для пропускной способности можно применять и в случае принятия допущения о равномерном движении транспорта в часы «пик».

Формула для функции пуассоновского распределения позволяет определить вероятность прибытия в периоде «пик» не менее x+1 автомобилей за цикл, если известно среднее число m автомобилей, прибывающих за цикл:

$$P(x+1)=\sum_{x+1}^{\infty}\frac{m^{x+1}e^{-m}}{(x+1)!},\qquad m=\frac{V}{\frac{3\,600}{C}}. \tag{5.6}$$

Согласно формуле (5.1)

$$x=\frac{G-(K-D)}{D};\quad C=\sum G. \tag{5.7}$$

Методом последовательных приближений эти четыре уравнения можно привести к более простому виду. Упрощение уравнений значительно облегчается при использовании графика для функции пуассоновского распределения.

Этапы расчета:

Этап 1. Определяются численность населения, расположение дороги и объем движения, влияющие на длительность периода «пик».

Этап 2. интенсивность движения дается для произвольного времени суток, от нее необходимо перейти к интенсивности движения в часы «пик».

Этап 3. Для каждого направления движения вычисляется коэффициент Y, характеризующий длительность периода «пик».

Этап 4. Интенсивность движения в час «пик» на каждом направлении умножается на коэффициент Ỳ; получаем часовую интенсивность потока.

Этап 5. Согласно допущению о том, что рассматривается сооружение высокого класса, все пересекающиеся потоки движения должны разделяться путем чередования фаз сигнала светофора.

Этап 6. Вариант проекта выбирают путем изменения числа полос движения на рассматриваемых двух улицах. Каждой полосе назначается определенная интенсивность движения, при этом предполагается, что в период «пик» на каждой полосе поток является равномерным.

Этап 7. С помощью значений критических интенсивностей движения для одной полосы вычисляется среднее число автомобилей, прибывающих к перекрестку за цикл работы светофора

Лекция 6

Вероятностные модели непрерывных величин характеризующих транспортный поток

1 Понятие непрерывного параметра транспортного потока

Непрерывные величины получают при измерении расстояний и времени; в теории транспортных потоков непрерывными величинами являются расстояния и интервалы времени между последовательными автомобилями, а также скорости автомобилей.

В случае непрерывных величин существует бесконечное множество точек с бесконечно малыми интервалами между ними. Вместо нанесения на график отдельных вероятностей P(x) строится кривая плотности вероятностей f(x), называемая также плотностью непрерывного распределения. В случае дискретного распределения сумма вероятностей, соответствующих всем значениям x, записывается как

$$\sum_{x=0}^{\infty} P(x)=1, \tag{6.1}$$

а в случае непрерывного распределения площадь под кривой для всего интервала значении x равна

$$\int_{0}^{\infty} f(x)=1. \tag{6.2}$$

Более удобно пользоваться другими функциями, эквивалентными f(x). Две такие функции распределения имеют вид:

$$P(x<X)=\int_{0}^{X} f(x)\,dx$$

$$P(x>X)=\int_{X}^{\infty} f(x)\,dx. \tag{6.3}$$

2 Производящая функция моментов

Теоретические моменты удобно вычислять косвенным путем, используя некоторую вспомогательную функцию. Как следует из названия, производящая функция моментов позволяет находить моменты распределения. Символически она записывается в следующем виде:

$$M_x(\theta) = E(e^{\theta x}) = \sum_{x=0} e^{\theta x} f(x). \tag{6.4}$$

Для нахождения моментов с помощью функции (6.4) разложим в степенной ряд

$$M_x(\theta) = \sum_{x=0}^{\infty} \left(1 + \theta x + \frac{(\theta x)^2}{2!} + \dots \right) f(x) = $$
$$= 1 + \theta\mu + \frac{\theta^2}{2!}\mu_2 + \dots . \tag{6.5}$$

Если требуется найти определенный момент, необходимо лишь вычислить соответствующую производную при $\theta=0$:

$$\mu_k = \left. \frac{d^k M_x(\theta)}{d\theta^k} \right|_{\theta=0}. \tag{6.6}$$

Производящая функция моментов непрерывного распределения записывается как

$$M_x(\theta) = \int_0^{\infty} e^{\theta x} f(x)\, dx. \tag{6.7}$$

3 Прямоугольное распределение в моделировании непрерывных величин транспортного потока

В математической статистике весьма широкое применение находит прямоугольное распределение, имеющее удобную математическую форму. Данное распределение называется также равномерным. Плотность этого распределения постоянна в некотором интервале (а, Ь) и равна нулю за пределами этого интервала:

$$f_x = (b - a)^{-1}, \quad a < x < b. \tag{6.8}$$

Вероятность того, что некоторое наблюдение будет находиться в произвольном подинтервале c<x<d внутри интервала (а, Ь), равна произведению (Ь —а)-^{1} на длину этого подинтервала:

$$P(c < x < d) = (b - a)^{-1} \int\limits_c^d dx = \frac{d - c}{b - a}. \tag{6.9}$$

Прямоугольное распределение является простейшим непрерывным распределением, на котором удобно иллюстрировать общие формулы. В теории транспортных потоков данное распределение описывает длительность задержки при трогании автомобилей с места и длительность приемлемого интервала между автомобилями.

4 Нормальное распределение в моделировании непрерывных величин транспортного потока

Большое число методов, используемых в прикладной статистике, основано на применении нормального распределения. Плотность нормального распределения имеет вид:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}. \tag{6.9}$$

Эта функция описывает двухпараметрическое семейство распределений, параметрами которого являются среднее μ, и дисперсия σ^2. Производящая функция моментов имеет вид:

$$M_x(\theta) = e^{\mu\theta + (\sigma\theta)^2/2}. \tag{6.10}$$

Медиана непрерывного распределения определяется из условия

$$\int_0^{x_m} f(x)\,dx = \int_{x_m}^{\infty} f(x)\,dx = 0{,}5. \tag{6.11}$$

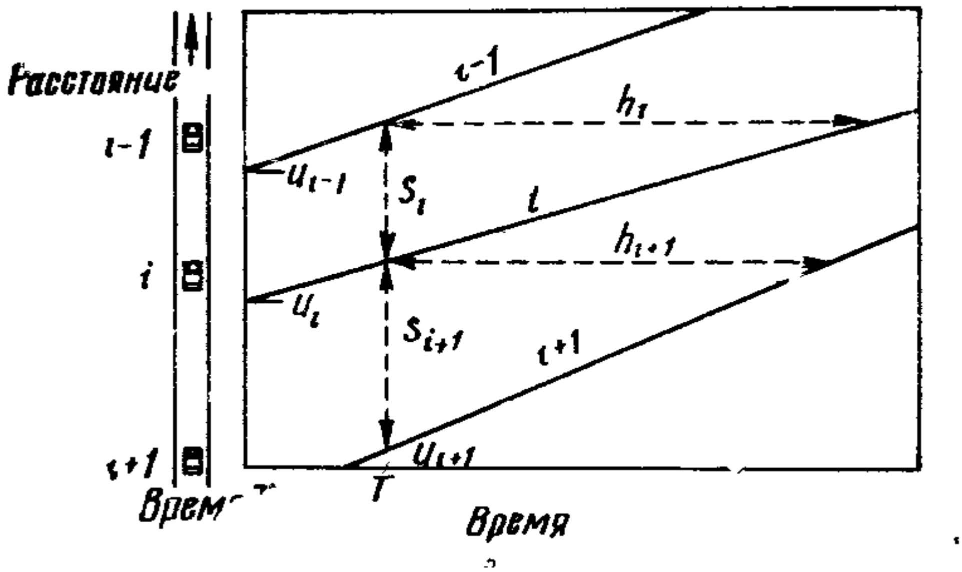
Нормальный закон широко используется в теории транспортных потоков как модель, описывающая пространственное распределение скоростей. Если полученные данные о скорости в определенных точках дороги при данных условиях движения расположить в порядке возрастания, то они образуют некоторое распределение. Средняя скорость автомобилей вычисляется умножением частоты для каждого интервала значений на среднюю скорость в этом интервале.

5 Практическое получение непрерывных параметров транспортного потока

Транспортный поток представляет собой движение дискретных объектов в двумерной системе. Регулирование движения этих объектов производится как отдельными водителями, так и системой в целом. Кроме того, транспортный поток характеризуется еще и тем, что здесь временные соотношения между параметрами потока отличаются от пространственных соотношений.

Движение потока автомобилей удобно представить в виде пространственно-временной диаграммы. По оси ординат отложено расстояние x, а по оси абсцисс — время t. Наклон линии показывает интенсивность изменения расстояния во времени или скорость автомобиля.

Кривая линия означает, что происходит изменение наклона, или изменение скорости, т. е. имеет место ускорение. Интервалы времени между последовательными автомобилями обозначаются h_i, а соответствующие расстояния — S_i. Величина, обратная среднему интервалу времени между последовательными автомобилями, называется интенсивностью потока, а величина, обратная среднему расстоянию между последовательными автомобилями, — плотностью.



Знание интервалов времени и расстояний между последовательными автомобилями более важно оно более полно отражает истинный характер транспортного потока. Интервалы времени и расстояния между последовательными автомобилями и являются теми «кирпичиками», на которых построен весь транспортный поток.

Какими бы однородными ни были условия движения транспортного потока, интервалы времени между последовательными автомобилями могут колебаться в широких пределах, это требует применения методов математической статистики и теории вероятностей.

6 Экспоненциальное распределение в моделировании непрерывных величин транспортного потока

Если t обозначает интервал времени между моментами прибытия *автомобилей, то случайная величина t имеет экспоненциальное распределение с плотностью*

$$f(t)=qe^{-qt}, \tag{6.12}$$

где q — средняя интенсивность потока;

Вероятность того, что интервал времени между последовательными автомобилями заключен в промежутке (t_1, t_2), равна вероятности того, что прибытие первого автомобиля происходит в промежутке (t_1, t_2).

В символьном виде

$$P(t_1 < h < t_2)=e^{-qt_1}-e^{-qt_2}. \tag{6.13}$$

Экспоненциальное распределение можно получить из пуассоновского. Между этими двумя распределениями существует следующее соотношение: распределение интервалов времени между автомобилями, образующими пуассоновский поток, является экспоненциальным. Среднее и дисперсия экспоненциального распределения равны соответственно:

$$\bar{t}=\frac{1}{q},$$

$$\sigma^2=\frac{1}{q^2}. \tag{6.14}$$

Естественно, что t и q должны выражаться в соразмерных единицах. Средний интервал между последовательными автомобилями в однорядном транспортном потоке интенсивностью 1800 авт/ч равен 1/1 800 ч, или 2 сек.

Экспоненциальное распределение представляет собой удовлетворительную модель для описания интервалов времени между последовательными автомобилями в потоке небольшой интенсивности, однако при большой интенсивности движения, значения, предсказываемые с помощью этого распределения отличаются. Каждый автомобиль имеет определенную длину, поэтому интервалы между последовательными автомобилями не могут быть бесконечно малыми.

Лекция 7

Вероятностные модели приемлемости интервалов между автомобилями

1 Понятие приемлемости интервалов между автомобилями

Одним из наиболее важных аспектов, связанных с движением транспортных потоков, является взаимодействие между автомобилями. Это может быть взаимодействие между автомобилями одного потока или взаимодействие между двумя отдельными транспортными потоками. Такое взаимодействие имеет место, когда автомобиль переходит в соседний ряд, вливается в транспортный поток или пересекает его. При взаимодействии автомобилей выполнение этих основных маневров связано с понятием приемлемости интервала между автомобилями.

Лучше всего это понятие можно проиллюстрировать путем анализа движения на участке вхождения на магистраль с примыкающего въезда. Не случайно процесс выезда автомобиля с примыкающего въезда на магистраль изучался рядом исследователей. Большинство работ носило эмпирический характер, и на их основе вырабатывались методы проектирования и эксплуатации дорожных сооружений. Предпринимались также попытки получить математическое описание процесса выезда на магистраль, правда, они имели несколько ограниченный успех вследствие сложной картины взаимодействий между автомобилями. Разработано несколько программ для цифровых вычислительных машин, моделирующих выезд на магистраль, однако отсутствие точных критериев выбора приемлемого расстояния между автомобилями и логики выезда на магистраль препятствуют прогрессу в этой области.

Можно назвать следующие три основных маневра, выполняемых автомобилями:

1 изменение ряда, т. е. переход автомобиля из данного ряда в соседний;

2 слияние потоков - процесс, когда автомобили двух самостоятельных

потоков, движущихся в общем направлении, объединяются и образуют единый поток;

3 пересечение одного потока другим под острым углом. В этом случае оба потока сливаются в один, а затем этот общий поток снова разделяется на два самостоятельных потока.

Выполнение указанных маневров происходит на следующих элементах магистрали:

полоса разгона;

примыкающий въезд (или съезд);

фронтальная дорога—дорога, параллельная скоростной магистрали и несущая транспорт, выходящий на магистраль или покидающий ее, и обеспечивающая, таким образом, доступ к прилегающим районам.

При описании взаимодействия автомобилей в процессе слияния потоков используются следующие переменные:

интервал времени между последовательными автомобилями— промежуток времени между передними частями автомобилей, следующих друг за другом в одном ряду, измеряемый в некоторой точке дороги;

расстояние между автомобилями — расстояние между передними частями последовательных автомобилей, движущихся в одном ряду, измеряемое в данный момент времени;

интервал между автомобилями, движущимися по внешней полосе магистрали, оцениваемый водителем автомобиля второстепенного потока, желающим влиться в основной поток или пересечь его. Это может быть расстояние либо промежуток времени;

интервал запаздывания — промежуток времени между моментами прибытия автомобиля второстепенного потока и автомобиля основного потока в контрольную точку (или точки) на участке слияния или пересечения этих потоков;

расстояние запаздывания—разность между расстоянием от автомобиля второстепенного потока до контрольной точки, где второстепенный *поток вливается в основной поток или пересекает его, и расстоянием от автомобиля основного потока до этой же точки. Оба расстояния измеряются в определенный момент времени.*

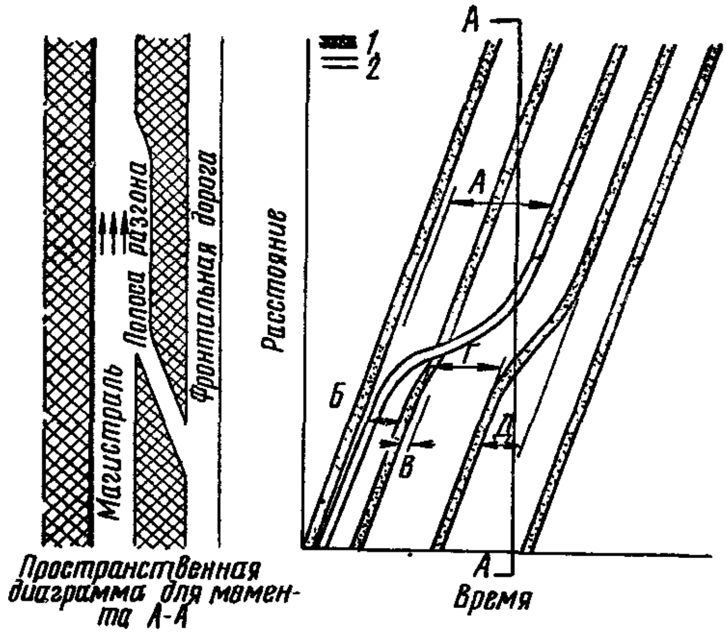


Рисунок 5 Пространственно-временные соотношения при выезде на магистраль с примыкающего въезда:

1 — внешняя полоса магистрали; 2 — въезд, А — время ожидания для автомобиля 2, Б — неприемлемый интервал запаздывания, В — время ожидания для автомобиля 3, Г—приемлемый интервал времени между автомобилями, Д—время ожидания для автомобиля 4.

На рисунке 5 показана пространственно-временная диаграмма, построенная для иллюстрации соотношения между геометрическими характеристиками участка, где происходит слияние потоков, и параметрами основного и второстепенного потоков на этом участке. По оси ординат откладывается расстояние, а по оси абсцисс — время. Наклон прямых характеризует скорость движения.

На рисунке показаны траектории движения автомобилей, движущихся по магистрали, и автомобилей, вливающихся в основной поток. Автомобиль считается входящим в основной поток до тех пор, пока на полосе разгона остается хотя бы его некоторая часть.

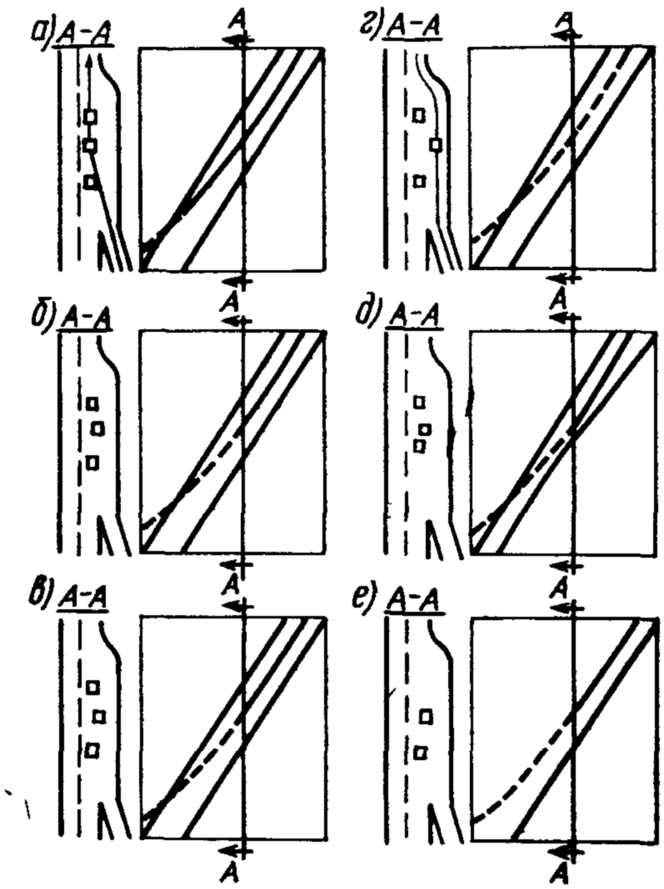


Рисунок 6 - Виды маневров вхождения в основной поток:

а — произвольное вхождение, б — идеальное вхождение, в—вхождение при оценке интервала между автомобилями, г — вынужденное вхождение, д — принудительное вхождение, е — вхождение при оценке интервала запаздывания.

2 Параметры, характеризующие вхождение в основной поток

К указанным параметрам относятся: интенсивность, пропускная способность, критический интервал, процент автомобилей, ожидающих при выезде на магистраль, средняя длительность ожидания остановившимся *автомобилем приемлемого интервала, средняя длина очереди и суммарное время ожидания на въезде.*

Рассматриваются некоторые «критические» параметры:

- *приемлемый средний минимальный интервал времени между автомобилями, как интервал, приемлемый для половины водителей;*
- *критический интервал запаздывания, имеет длительность, при которой число приемлемых интервалов запаздывания меньше числа неприемлемых интервалов запаздывания, длительность которых превышает данную;*

Указанные параметры называют медианой критического интервала между автомобилями и медианой критического интервала запаздывания.

Применение параметров, характеризующих приемлемость интервалов между автомобилями, позволяет упростить вычисление длительности ожидания при выезде на магистраль, поскольку предполагается, что все интервалы (интервалы между автомобилями или интервалы запаздывания), меньшие критического, являются неприемлемыми, а все интервалы, имеющие большую длительность, считаются приемлемыми.

Очевидно, что при оценке критического интервала между автомобилями данный интервал должен быть либо принят, либо отвергнут данным водителем. Для каждого водителя приемлемым может оказаться только один интервал, но могут наблюдаться несколько неприемлемых интервалов. Это означает, что если всем неприемлемым интервалам задается тот же вес, что и приемлемым, то процент интервалов определенной длины, оказавшихся приемлемыми, не будет истинным показателем процента водителей, считающих данный интервал приемлемым. Чтобы при вычислении процента водителей, считающих такой интервал приемлемым, можно было использовать процент приемлемых интервалов, для каждого водителя необходимо рассматривать одинаковое число интервалов.

Критический интервал

$$T = t + \frac{(c-a)\,\Delta t}{(b+c)-(a+d)}.$$

где t – необходимая длительность интервала;

Δt – допуск необходимой длительности интервала;

a, b – верхний и нижний предел числа приемлемых интервалов меньше t;

c, d - верхний и нижний предел числа не приемлемых интервалов больших t.

3 Идеальное вхождение в основной поток

Наиболее желательным является произвольное и идеальное вхождение в основной поток, поскольку в этих случаях водитель не выезжает на полосу разгона и не оказывает никакого воздействия на автомобили, движущиеся по магистрали. Такие условия выезда на магистраль служат подтверждением взаимодействия, существующего между основными элементами транспортного потока (водитель и автомобиль) и основными характеристиками транспортного потока (расстояния или интервалы времени межу последовательными автомобилями и скорости движения).

Если допустить, что в среднем нормальное ускорение автомобиля, выезжающего на магистраль, обратно пропорционально его скорости, то можно записать следующее дифференциальное уравнение:

$$\frac{du}{dt} = a - bu,$$

где u—скорость автомобиля при выезде на магистраль;

t – время;

а и Ь — постоянные.

После некоторых преобразований можно получить следующую зависимость ускорения от времени при выезде на магистраль:

$$\frac{du}{dt} = (a - bu_r)\,e^{-bt}.$$

где u_r *– безопасная скорость при выезде;*

a – максимальное ускорение;

a/b – скорость свободного движения на участке выезда на магистраль.

Теоретически минимальный интервал между автомобилями для идеального вхождения в основной поток состоит из трех частей:

- T_r *интервал безопасности между автомобилями;*
- T_L *время разгона при выезде;*
- T_f *интервал безопасности.*

Теоретический минимальный интервал, необходимый для идеального вхождения составляет

$$T = \frac{L_f + L_r}{u} + 2\tau + \frac{u + u_r}{bu} + \frac{\frac{a}{b} - u}{bu} \ln \frac{a - bu}{a - bu_r},$$

где L_f *– длина автомобиля, движущегося по магистрали;*

L_r *- длина автомобиля, выезжающего на магистраль.*

4 Длина полосы разгона

Влияние длины полосы разгона на скорости автомобилей, выезжающих на магистраль, иллюстрируется с помощью функций распределения, изображенных на рисунке 7. Здесь показаны кривые для въездов с определенной длиной полосы разгона. Приводятся различные скорости движения в точке примыкания въезда, различные скорости движения в точке вхождения и различные изменения скорости на участке от точки примыкания въезда до точки вхождения. Все указанные скорости наблюдались в условиях свободного движения потока на магистрали со скоростями свыше 64 км/ч.

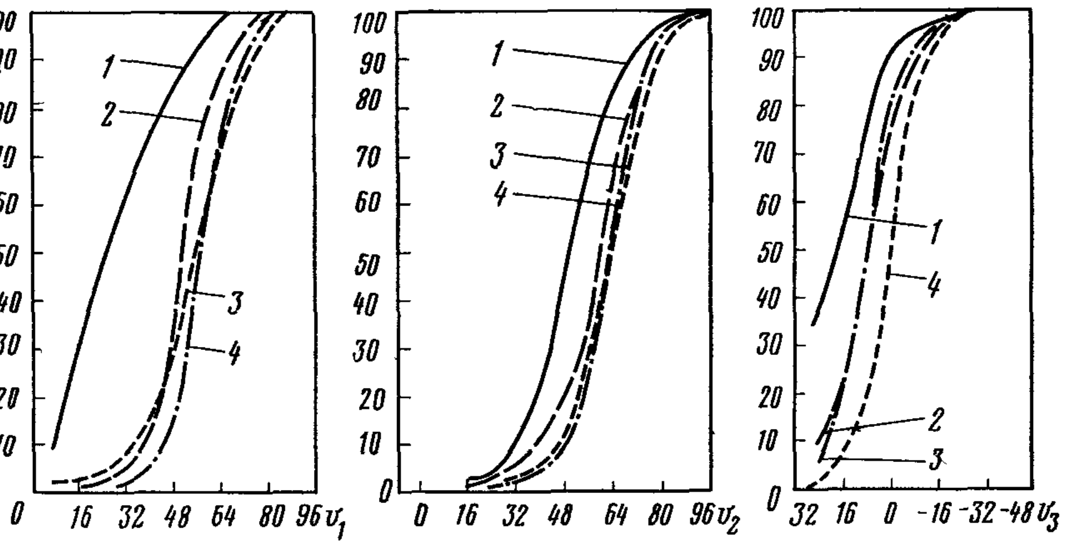


Рисунок 7 - Влияние длины полосы разгона на скорость движения на примыкающем въезде (%, км/ч):

1 – длина полосы разгона 0…105 м; 2 – 120…180 м; 3 – 180…240 м; 4 – 285…360 м. V_1 – скорость в точке примыкания съезда; V_2 – скорость в точке вхождения; V_3 – скорость в промежутке от точки примыкания до точки вхождения.

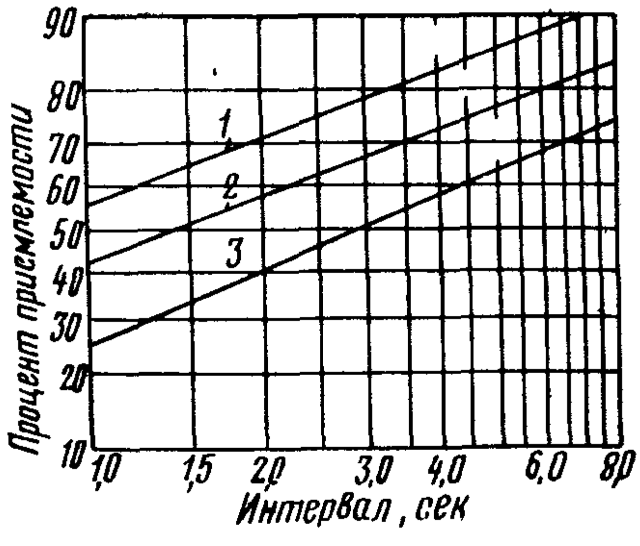


Рисунок 8 - Влияние длины полосы разгона на приемлемость интервалов между автомобилями при угле вхождения 3—6°:

Последовательный регрессионный анализ дает следующее уравнение для углового коэффициента прямой, характеризующей длительность приемлемого интервала как зависимой переменной:

$$B = 1{,}394 + 0{,}289\theta - 0{,}027L\theta,$$

где θ - угол вхождения, град;

L - *длина полосы разгона;*

В - *тангенс угла наклона прямой, выражаемой как $У=A+B_1X$;*

У – пробит вероятности (создает возможность линейного анализа);

X - *логарифм длительности интервала между автомобилями.*

При увеличении угла вхождения увеличивается наклон прямой, характеризующей длительность приемлемых интервалов и, следовательно, уменьшается дисперсия распределения критических интервалов. Длина полосы разгона оказывает обратное влияние при фиксированном угле вхождения.

Лекция 8

Вероятностные модели формирования очередей в транспортном потоке

1 Применение теории систем массового обслуживания

Описанием поведения систем, обслуживающих случайно прибывающие объекты (требования), занимается теория массового обслуживания. Модели массового обслуживания широко применяют в теории транспортных потоков. Для полного описания системы массового обслуживания должны быть заданы: распределение входящего потока; источник входящего потока (конечный или бесконечный); дисциплина обслуживания («первым прибыл — первым обслужен», обслуживание с приоритетами или случайный выбор на обслуживание); структура системы (одноканальная или многоканальная), многоканальная система может быть с последовательными или параллельными каналами; распределение времени обслуживания в каждом канале.

Совокупность требований, ожидающих обслуживания, образует очередь. Число требований, ожидающих обслуживания в момент t, называется длиной очереди. При изучении систем массового обслуживания важное значение имеют: распределение длины очереди, распределение времени ожидания в очереди, процент времени, когда система обслуживания свободна. Ответ на эти вопросы зависит непосредственно от характера распределения входящего потока и распределения времени обслуживания.

Одноканальную систему массового обслуживания с чисто случайным (пуассоновским) входящим потоком и чисто случайным (экспоненциальным) временем обслуживания обозначают следующим образом M/M/1.

Система массового обслуживания находится в состоянии n, если в ней имеется ровно n требований (n>0) как ожидающих, так и обслуживаемых. Если интенсивность входящего потока n меньше интенсивности обслуживания 0, то система находится в устойчивом состоянии и *существует конечная не зависящая от времени вероятность того, что система может находиться в любом состоянии. Однако если отношение интенсивности входящего потока к интенсивности обслуживания больше единицы, то длина очереди неограниченно увеличивается и состояние системы уже не будет независимым от времени.*

2 Конечные очереди

Если максимальное число требований, находящихся в системе, не может превышать N и требования, прибывающие при n=N, не присоединяются к очереди, то уравнения состояния системы массового обслуживания принимают вид:

$$P_1 = \rho P_0;$$
$$(1+\rho) P_n = P_{n+1} + \rho P_{n-1}; \quad 0 < n < N,$$
$$P_n = \rho P_{n-1}, \quad n = N.$$

где P_n (t) – вероятность, что в момент в момент времени t в системе находится n требований;

P_0 – вероятность, что в системе находится 0 требований;

Для нахождения вероятности того, что в системе с конечной длиной очереди находится определенное число требований, используем уравнение

$$\sum_{n=0}^{N} P_n = 1 = P_0 + \rho P_0 + \rho^2 P_0 + \ldots + \rho^N P_0.$$

Отсюда находим

$$1 = P_0 \frac{1-\rho^{N+1}}{1-\rho}.$$

Решая данное уравнение относительно Po и подставляя полученный результат в формулу P1, получаем вероятность того, что в системе с конечной очередью находится определенное число требований:

$$P_n = \frac{1-\rho}{1-\rho^{N+1}}\,\rho^n.$$

Математическое ожидание числа требований, находящихся в системе, определяется по формуле

$$E(n) = \sum_{n=0}^{N} n P_n.$$

Можно показать, что

$$E(n) = \frac{\rho}{1-\rho}\cdot\frac{1-(N+1)\rho^N + N\rho^{N+1}}{1-\rho^{N+1}}.$$

Системы с конечной или ограниченной длиной очереди находят важное применение в теории транспортных потоков как модели регулирования движения на примыкающих въездах. Если интенсивность вхождения в основной поток снижается вследствие установки светофора на примыкающем въезде, то часть потока на этот въезд не поступит. Важно знать, какая часть потока не поступит на данный въезд, так как возможно возникновение перегрузок на следующем по ходу движения въезде или на других улицах.

Эта отсекаемая часть потока определяется как разность между Наблюдаемой интенсивностью движения на примыкающем въезде и транспортной нагрузкой въезда.

Поведение водителей на примыкающем въезде контролируется путем измерения значений Рп для автомобилей, образующих очередь. Эти вероятности равны некоторой постоянной величине, умноженной на некоторое число, меньшее единицы.

3 Время ожидания

При выполнении маневров: вхождение в транспортный поток и пересечение его, важную роль играет распределение времени ожидания до *поступления на обслуживание и распределение общего времени пребывания в системе. Распределение времени ожидания от момента прибытия до начала обслуживания рассмотрим в два этапа. Во-первых, существует конечная вероятность того, что время ожидания будет равно нулю, равная вероятности того, что система свободна*

$$P(w=0)=P_0=1-\rho, \quad n=0.$$

Во-вторых, существует вероятность того, что время ожидания T заключено в интервале:

$$P(w<T<w+dw)=f(w)\,dw, \quad n>0.$$

Плотность распределения времени ожидания, заданная данными формулами изображена на рисунке 8.1.

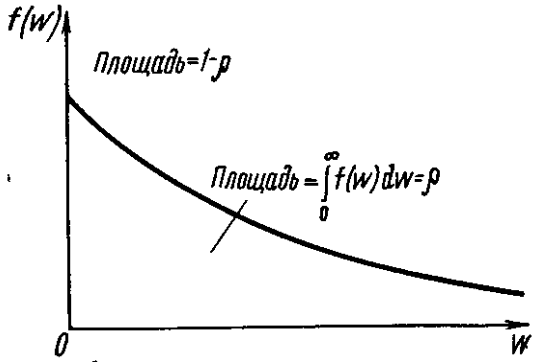


Рисунок 8.1 - Плотность распределения времени ожидания

Необходимо определить все возможные комбинации, при которых время ожидания находится в указанном интервале. Теоретически такая задержка требования возможна, если уже имеется обслуживаемое требование. Символически это условие можно выразить как

$$P(n\geqslant 1)=\sum_{n=1}^{\infty} P_n.$$

Однако, чтобы время ожидания требования А в точности лежало в интервале, все впереди стоящие требования, кроме одного, непосредственно предшествующего требованию А, должны покинуть систему. Это произведение двух вероятностей имеет вид:

$$P_{n-1}(w)=\frac{(Qw)^{n-1}e^{-Qw}}{(n-1)!}$$

$$P_1(dw)=Qdw.$$

После суммирования всех вероятностей по формуле и подстановки результата получаем

$$f(w)=\rho(Q-q)\,e^{-w(Q-q)},\quad w>0.$$

Функции распределения времени ожидания имеют вид:

$$P(T>w)=\int_w^\infty f(w)\,dw=\rho e^{-(Q-q)w}$$

$$P(0<T<w)=\int_0^w f(w)\,dw=\rho-\rho e^{-(Q-q)w}.$$

Таким образом, среднее время ожидания определяется по формуле

$$M'_w(0)=E(w)=\frac{q}{Q(Q-q)}.$$

Среднее время ожидания для требований, вынужденных ожидать, составляет

$$E(w|w>0)=\frac{1}{Q-q}.$$

Среднее время пребывания в системе составляет

$$E(v)=\frac{1}{Q-q}.$$

4 Движущиеся очереди

С увеличением интенсивности движения автомобили образуют колонны или движущиеся очереди. Четкие критерии, позволяющие определить, когда *именно два автомобиля образуют движущуюся очередь, отсутствуют. Критерии, позволяющие определить, когда именно два неподвижных объекта образуют очередь в классических системах массового обслуживания, также произвольны, поскольку такое понятие, как расстояние, в предыдущих параграфах при выводе формул теории массового обслуживания не рассматривалось.*

Существует ряд характеристик потока автомобилей, указывающих на транспортную перегрузку дорожного сооружения: низкая скорость движения, большое отношение интенсивности потока к пропускной способности, высокая пространственная и временная плотности движения (занятость полосы).

Логическим показателем перегрузки дорожного сооружения, как и в случае обычных систем массового обслуживания, является матожидание. Длина движущейся очереди может служить более чувствительным показателем перегрузки, чем плотность потока.

Если предполагается, что интервалы между последовательными автомобилями независимы, то вероятность наличия очереди, Состоящей из одного автомобиля, составляет

$$P_1 = 1 - p,$$

где 1 — p — вероятность того, что интервал между первым и вторым автомобилем больше произвольного интервала очереди.

Аналогично, вероятность образования очереди, состоящей из двух автомобилей, находится как комбинация одного «неудачного исхода», за которым следует один «удачный исход», или

$$P_2 = p(1 - p),$$

где p — вероятность того, что интервал между первым и вторым автомобилями больше произвольного интервала, при котором происходит образование очереди.

Длина очереди следует геометрическому распределению:

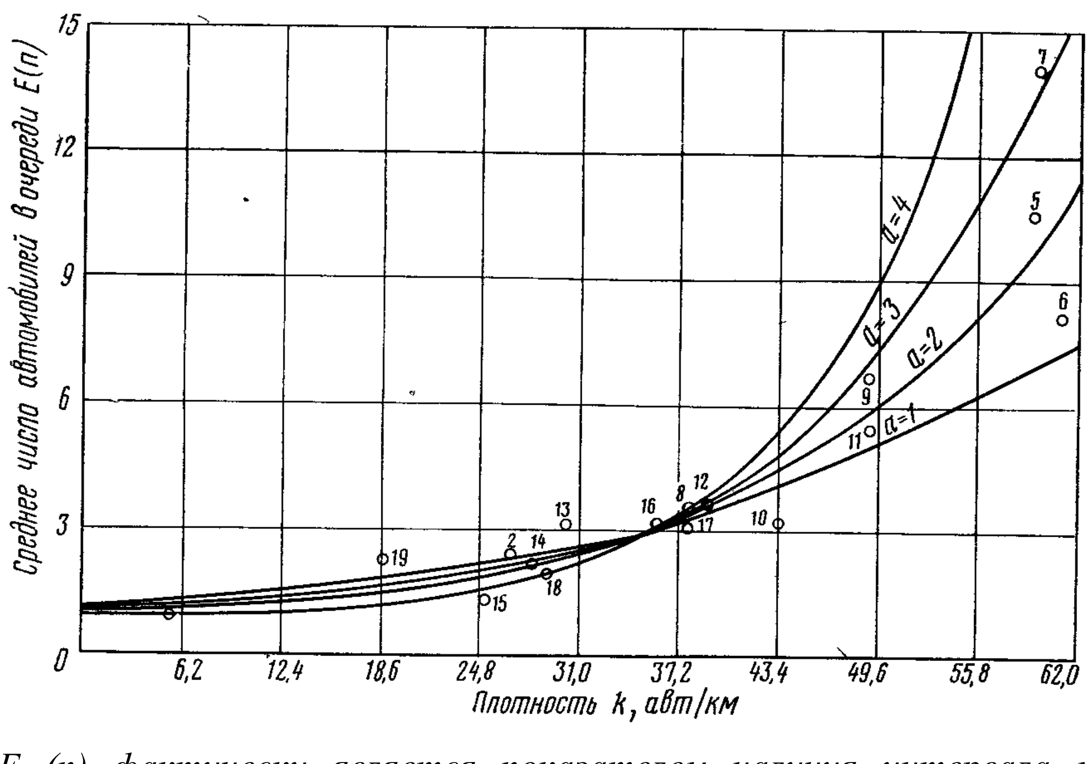
$$P_n = p^{n-1}(1-p), \quad n = 1, 2, \ldots .$$

Математическое ожидание длины очереди Е(п) имеет вид:

$$E(n) = \sum_{n=1}^{\infty} nP_n,$$

$$E(n) = (1-p)^{-1}.$$

В тех местах, где плавное движение транспортного потока прерывается вследствие наличия того или иного сужения дороги, последующий поток обычно принимает вид колонн автомобилей или движущихся очередей. Поскольку водителям известно, что при сужении проезжей части затрудняется возможность выбора скорости движения и ряда, естественная тенденция к образованию колонн автомобилей и увеличению их длины служит логическим показателем транспортной перегрузки.



E (п) фактически является показателем наличия интервала между автомобилями. Это свойство данного показателя делает его исключительно важным средством для рационального проектирования геометрических характеристик дороги, анализа пропускной способности дороги и регулирования движения на примыкающем въезде.

Лекция 9

Процесс вероятностного моделирования

1 Этапы моделирования

При моделировании некоторой системы необходимо проделать определенную последовательность этапов:

1. Конкретная формулировка задачи в знакомых терминах и символах с указанием необходимых ограничений.

2. Построение модели, включая формулировку допущений, выбор критериев оптимизации и выбор рабочей процедуры или правил движения транспорта.

3. Построение блок-схемы, устанавливающей функциональное соотношение между элементами моделируемой системы.

4. Определение входных параметров для моделирующей программы.

5. Подготовка моделирующей программы для вычислительной машины.

6. Проведение экспериментальных проверок моделируемой системы, включая планирование эксперимента с целью определения числа опытов и значений используемых параметров, а также задание доверительных пределов.

7. Оценка и проверка моделируемой системы.

Наиболее важным этапом является построение модели. При построении модели важную роль играют упрощающие допущения.

Второй важной особенностью при построении модели является установление основных правил, по которым можно измерить моделируемое улучшение структуры и функционирования дорожного сооружения. Лучше всего этого можно добиться построением модели так, чтобы качественные показатели выражались как функции параметров изучаемой системы. К таким показателям эффективности относятся: время в пути и скорость движения— средние значения, дисперсии и распределения; процент автомобилей, которые должны двигаться со скоростью, составляющей некоторую произвольную часть требуемой скорости; шум ускорения в исследуемой системе; число переходов в соседний ряд на автомобиль в секунду.

С построением модели неразрывно связано определение значимых входных и выходных переменных. Входные переменные можно разделить на четыре категории: геометрические характеристики дороги, параметры транспортного потока, поведение водителя и характеристики автомобиля.

Три основных параметра—скорость, интенсивность и плотность—определяют условия движения транспортного потока. Скорость маневрирующего автомобиля оказывает существенное влияние на выполняемый им маневр — пересечение потока, вхождение в поток или изменение ряда.

Важность моделирования как метода исследования транспортных проектов состоит в возможности учесть случайный характер транспортного потока.

2 Программа моделирования

Логическую схему моделирования процесса прохождения автомобилей через систему при известных входных параметрах можно разделить на три части:

логика беспрепятственного движения автомобилей;

логика следования за головным автомобилем в случае образования движущейся очереди;

логика маневрирования.

Успех цифровых вычислительных машин объясняется тем, что выполняемые ими обширные вычисления могут быть представлены как повторные циклы.

Программа должна быть достаточно общей, чтобы путем ввода соответствующих геометрических характеристик можно было моделировать транспортную систему любой конфигурации.

Автомобиль может занимать ограниченное число дискретных положений. Каждый автомобиль перемещают путем перехода к записи, показывающей положение, которое будет занимать автомобиль через одну единицу времени. Для этого скорость автомобиля умножают на приращение времени и полученный результат прибавляют к координате, характеризующей положение автомобиля в данный момент.

При другой методике вся транспортная система изображается в виде трехмерного массива. Такое измерение, как длина, соответствует относительному положению автомобиля на дороге. По вертикали размещаются все характеристики каждого определенного автомобиля, а ширина массива определяется числом полос. При данной методике, помимо цилиндрического массива, используются два специальных регистра для каждой дорожной полосы, в которых хранятся показатель положения головного автомобиля и число автомобилей на полосе.

3 Калибровка модели

Если программа составлена правильно, то реальность результатов, получаемых при помощи вычислительной машины, зависит только от реальности модели и ее входных данных. Модель по существу представляет собой некоторую гипотезу, и поэтому, прежде чем принимать как реальный факт, ее необходимо проверить. Проверяется правдоподобие, реальность и справедливость модели.

Поскольку исследователя обычно интересует установившееся состояние, необходимо уделять определенное внимание начальному состоянию системы.

Проверка модели представляет собой процесс, когда модель оценивается с целью определить, удовлетворительно ли она отражает реальный характер транспортного потока. Поскольку моделирование не ставит своей целью воспроизвести все мелкие детали реальной системы, вначале необходимо *установить, какие именно характеристики реального транспортного потока должна отражать модель, чтобы ее можно было считать полезной, или, другими словами, какие критерии необходимо применять при проверке модели.*

Каждый отдельный конкретный проект требует выбора соответствующих критериев на основе инженерной оценки.

4 Применение моделирования

К моделированию прибегают в тех случаях, когда изучаемые системы нельзя анализировать с помощью прямых или формальных аналитических методов. Существует также ряд других причин, заставляющих обращаться к моделированию, большинство которых справедливо в случае моделирования транспортных систем.

1. Построение модели и выполнение моделирования является хорошим способом систематического накопления необходимых данных и позволяет получить обширную информацию о характеристиках транспортных потоков и функционировании дорожных сооружений.

2. Моделирование сложных процессов движения транспорта позволяет определить, какие переменные являются важными и каким образом они взаимосвязаны. В конечном счете это может привести к выводу аналитических выражений.

3. В некоторых задачах нужна информация о распределении выходной величины, например, такой, как число автомобилей в очереди, а не только знание средних значений и дисперсии. Если рас-' сматривается взаимодействие транспортных потоков, то метод Монте-Карло является, по-видимому, единственным способом, позволяющим получить полное распределение.

4. Моделирование может выполняться для проверки неоднозначного аналитического решения.

5. Моделирование дешевле многих других экспериментов.

6. Моделирование дает интуитивное представление об исследуемой *транспортной системе.*

7. Моделирование обеспечивает контроль над временем.

8. Моделирование—безопасный способ исследования

По форме моделирование можно сравнить с анализом, связанным с использованием детерминированных и вероятностных моделей, и с методом проб и ошибок, связанным с нахождением некоторого пробного решения и проверкой его на реальном транспортном потоке.

В прошлом исследование транспортных потоков проводилось как аналитическими методами, так и методом проб и ошибок. Моделирование по существу является комбинацией этих двух методов, но позволяет исследовать большинство сложных процессов (что не под силу анализу) и не оказывает влияния на транспортный поток до получения решения (а при применении метода проб и ошибок оказывает определенное воздействие на транспортный поток). Как показано в табл. 23, почти всегда моделирование находится где-то между анализом и методом проб и ошибок. Однако по мере того, как изучаемая ситуация становится более сложной (как в задачах движения транспорта), различия между методами, выражаемые через затраты, время и т. д., становятся все более ощутимыми, и, наконец, аналитические методы и Метод проб и ошибок становятся неприемлемыми, а моделирование оказывается единственно возможным методом исследования.

При моделировании нельзя принимать ни одного допущения, пока не будут четко определены его последствия, нельзя включать ни одну переменную в действующую систему, пока каждая из них не будет правильно объяснена, и не будут установлены и поняты ее связи с другими переменными.

В большинстве случаев цели, которые ставятся при моделировании процесса движения автомобилей, четко сформулированы и позволяют получить хорошие результаты. Моделирование представляет собой идеальный метод исследования транспортных потоков.

Лекция 10

Детерминированный подход к моделированию транспортного потока

1 Понятие детерминированного подхода к анализу транспортного потока

Термин «оптимизация» означает выбор наилучших условий движения исходя из возможностей транспортной системы и ограничений, свойственных водителю и окружающей среде, для достижения определенных целей.

Чтобы сделать вывод о том, что та или иная транспортная система является оптимальной, необходимо установить критерий, позволяющий определить качество ее функционирования в этом конкретном отношении.

Показатель эффективности, вытекающий из этого критерия оптимизации, необходимо выразить как некоторую функцию переменных, характеризующих транспортный поток и входящих в задачу. Теперь задача будет состоять в том, чтобы выбрать значения управляющих переменных, оптимизирующие функцию эффективности.

При детерминированном подходе к задачам движения транспорта предполагается, что между входными переменными существует функциональная зависимость, а параметры, характеризующие эффективность, постоянны. Другими словами, для любого данного множества значений входных переменных существует одно и только одно значение функции эффективности. Это допущение не принималось в стохастических моделях.

2 Детерминированная модель и ее особенности

Конечная цель инженера-транспортника состоит в том, чтобы оптимизировать работу существующих транспортных систем и проектирование новых дорожно-транспортных сооружений, его непосредственной задачей является получение рационального описания транспортных средств.

Транспортные потоки, фактически представляют собой последовательности дискретных событий, состоящих в появлении автомобилей, хотя существует много теорий, где транспортный поток рассматривается как непрерывный процесс.

Анализ размерностей показывает, что между скоростью движения, расстоянием и интервалом времени между последовательными автомобилями существует соотношение

$$\text{Скорость, } м/сек = \frac{\text{Расстояние между автомобилями, } м}{\text{Интервал времени между автомобилями, } сек}.$$

Между скоростью, плотностью и интенсивностью потока существует следующая зависимость:

$$\text{Скорость, } м/сек = \frac{\text{Интенсивность, } сек^{-1}}{\text{Плотность, } м^{-1}}.$$

Общее уравнение транспортного потока обычно выражается в виде:

$$q = ku,$$

где q — средняя интенсивность потока; и — средняя -скорость; k — средняя плотность.

Если известны любые две из этих трех переменных, характеризующих транспортный поток, то третья переменная определяется однозначно.

Переменной, которую легче всего определить, является интенсивность, а затем, по-видимому, скорость. Не удивительно поэтому, что плотность обычно рассматривается как зависимая переменная, поскольку две другие являются измеримыми или независимыми переменными.

При рассмотрении основного уравнения транспортного потока целесообразно рассмотреть поверхность, образуемую при графическом построении уравнения на взаимно перпендикулярных осях. *Попытки связать различные пары этих трех основных элементов, основаны на применении следующих методов:*

построение кривой по точкам; вывод на основе граничных условий;

применение физических аналогий.

3 Метод граничных условий в детерминированном моделировании

Дифференцируя общее уравнение по значению плотности получим зависимость:

$$\frac{dq}{dk} = k\frac{du}{dk} + u.$$

В условиях максимальной плотности движения можно записать:

$$0 = k_m \frac{du}{dk} + u.$$

Разделяя переменные и интегрируя обе части этого уравнения, получаем

$$\ln u = -\frac{k}{k_m} + C,$$

где C — некоторая постоянная интегрирования.

После перегруппировки членов имеем

$$k = k_m \ln \frac{u_f}{u}.$$

Подставляя этот результат в общее уравнение, получаем

$$q = uk_m \ln\frac{u_f}{u}$$

Получен этот же результат, дифференцируя уравнение потока по скорости.

Существуют три зоны, которые могут быть определены как зона постоянной скорости, зона постоянной интенсивности движения и зона постоянного изменения интенсивности при изменении плотности. В зоне 1 скорость автомобиля определяется характером дороги, а объем движения соответствует транспортной загрузке. В зоне 2 условия движения ухудшаются, средняя скорость снижается, но интенсивность движения может оставаться высокой. В зоне 3 уменьшается как скорость, так и ин-

тенсивность движения, что само по себе может служить признаком перегрузки.

Упомянутые исследования устанавливают некоторые 'ограничения на форму поверхности основной диаграммы. Дифференцируя уравнение состояния по плотности, получаем уравнение для волновой скорости. Приравнивая уравнение для волновой скорости нулю, получаем оптимальную плотность, т. е. такое значение, при котором интенсивность потока максимальна.

Параметр пропускной способности можно получить несколько другим способом. Среднее расстояние между автомобилями зависит от средней длины автомобиля L, среднего времени реакции водителя C1 и некоторой функции, зависящей от возможностей тормозного устройства автомобиля C2, тогда безопасное расстояние между автомобилями имеет вид

$$s = L + C_1 u + C_2 u^2.$$

Подставляя в уравнение состояния полученное соотношение, получаем

$$q = \frac{u}{L + C_1 u + C_2 u^2}.$$

Полагая, что изменение интенсивности по изменению скорости равно 0, получаем оптимальную скорость или такую скорость, для которой интенсивность максимальна:

$$u_m = \left(\frac{L}{C_2}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Рассмотренные соотношения, раскрывают современную основу детерминированного макроподхода к моделированию транспортного потока. Основные разработки в этом направлении сконцентрированы в области различного рода аналогий.

Лекция 11

Гидравлическая и газовая аналогии транспортного потока.

1 Аналогия с тепловым потоком

Большинство ситуаций по своему характеру настолько сложны, что они не могут быть в точности описаны математическими методами. Детерминированный подход к теории транспортных потоков, включает анализ основных характеристик транспортного потока, разработку теории, а затем применение методов, при разработке которых, обычно, важную роль играют дифференциальные уравнения.

Рассмотрим одномерный поток тепла в длинном тонком изолированном стержне, описываемый дифференциальным уравнением

$$a^2 \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = 0,$$

где p — температура; x — расстояние; t — время; а - коэффициент, учитывающий теплопроводность теплоемкость и плотность материала.

Обычно требуется найти решение дифференциального уравнения в виде:

$$p(x,\ t) = f\,(L,\ a,\ x,\ t).$$

Во многих отношениях дорога с однорядным движением напоминает длинный тонкий изолированный стержень (регулируемый въезд без возможности перехода в другой ряд). Если предположить, что в уравнении р играет роль некоторого параметра, связанного с такими обычными характеристиками транспортного потока, как скорость, плотность и интенсивность движения, то *решение уравнения позволит оценить некоторое свойство дороги* - *«способностью обеспечить движение».*

В физике дифференциальное уравнение в частных производных называется уравнением диффузии. Оно описывает плотность р любого вещества, проникающего путем диффузии в пористое твердое тело. *Движение автомобилей происходит в результате действия «потенциала давления»,* *аналогичного p.* Впоследствии при решении уравнения этот параметр исключается ***(так как он не имеет физического смысла для транспортных потоков, и, следовательно, его нельзя измерить)*** и скорость движения выражается как функция параметра, который был определен выше как «способность обеспечить движение». *Таким образом, появляется возможность приведения к единому масштабу таких различных геометрических характеристик, как изгиб или уклон дороги.*

Несколько вариантов уравнения исследовались в физике. Для стержня, в котором ***тепловая энергия генерируется с постоянной интенсивностью****, а* ***боковая поверхность изолирована****, уравнение теплопередачи имеет вид:*

$$a^2 \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = c,$$

где c — некоторая положительная постоянная.

Как основу для оценки геометрических характеристик дорог необходимо рассматривать последнее уравнение. Таким путем получено обобщение теории с учетом влияния автомобилей, выезжающих на некоторый участок дороги (или выезжающих с него), например, вблизи въезда на магистраль или съезда с нее.

2 Гидродинамическая аналогия

Следует отметить, что трудность использования детерминистского подхода связана не с решением дифференциального уравнения, а с нахождением такого уравнения, которое бы реалистически выражало физические условия. Например, определяют p следующим образом:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -c_1 u$$

$$\frac{\partial k}{\partial p} = c_2 k,$$

где u *и* k *— скорость и плотность движения.*

Решая уравнения как систему, получаем следующее соотношение между *скоростью и плотностью движения:*

$$u = -(c_1 c_2 k)^{-1} \frac{\partial k}{\partial x}.$$

Это означает, что скорость может быть отрицательной, если плотность возрастает с увеличением расстояния. Однако это условие не соответствует действительности.

Рассмотрим следующее уравнение движения, выражающее ускорение транспортного потока в данном месте в определенный момент времени:

$$\frac{du}{dt} = \frac{-c^2}{k} \cdot \frac{\partial k}{\partial x}.$$

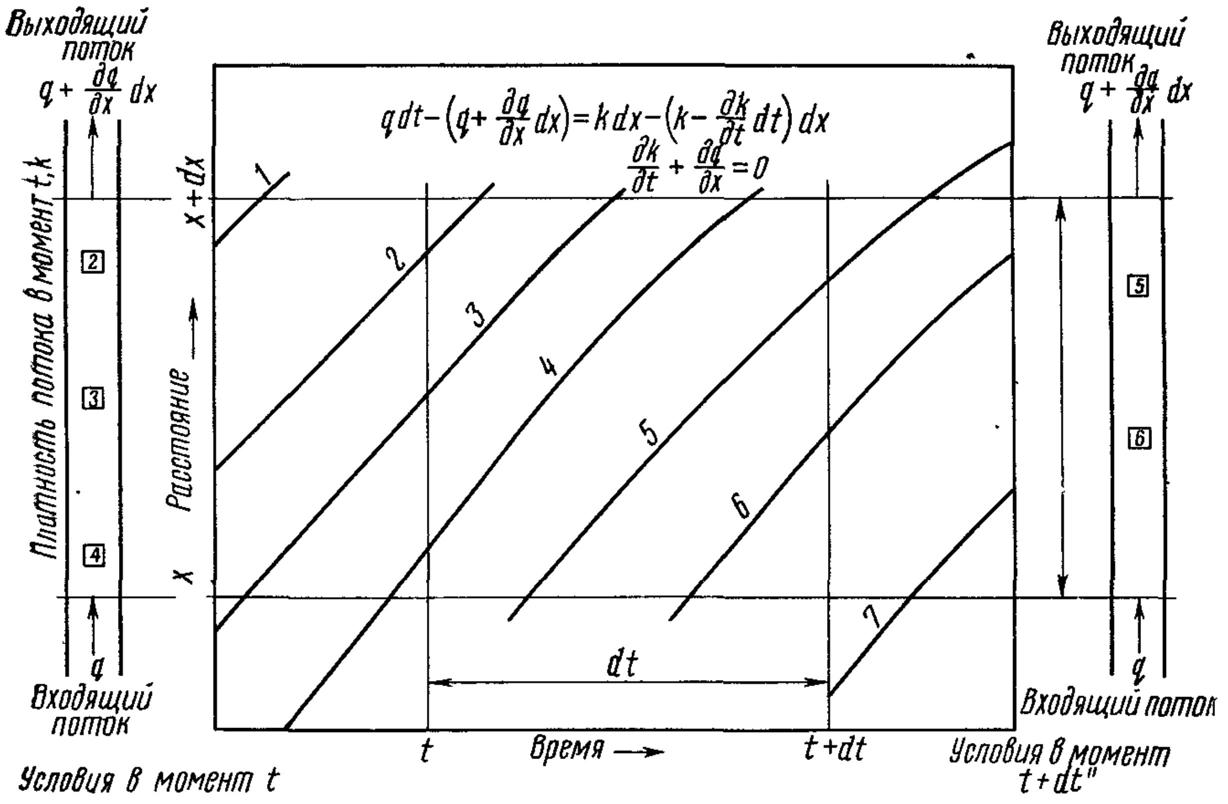
Из уравнения следует, что водитель изменяет скорость движения в любой момент в зависимости от условий движения, выражаемых членом $k^{-1} \frac{\partial k}{\partial x}$.

Данное уравнение по форме совпадает с уравнением одномерного движения сжимаемой жидкости, имеющей плотность k, со скоростью u. Это уравнение характерно для ряда новых теорий, где транспортный поток описывается как поток жидкости или гидродинамический поток.

Анализ потоков основывается на предполагаемом соотношении между интенсивностью и плотностью и на дифференциальном уравнении в частных производных, выражающем закон сохранения вещества.

Наряду с другими принципами механика жидкостей основана на законе сохранения массы. Выделим мысленно в пространстве некоторый объем. Если расход массы превышает поступившее количество, то согласно закону сохранения массы необходимо, чтобы имело место эквивалентное уменьшение массы, заключенной в данном объеме.

Этот принцип можно выразить математически в виде уравнения, называемого уравнением сохранения.



Вывод уравнения непрерывности для транспортного потока. Закон сохранения числа автомобилей: (число входящих автомобилей) — (число выходящих автомобилей) = (изменение числа автомобилей)

Если рассматривать транспортный поток как консервативную систему, то изменение числа автомобилей на участке дороги в интервале времени должно равняться разности между числом автомобилей въезжающих на данный участок, и числом автомобилей, покидающих его. Символически закон сохранения числа автомобилей можно выразить как

$$kdx-\left(k-\frac{\partial k}{\partial t}dt\right)dx=qdt-\left(q+\frac{\partial q}{\partial x}dx\right)dt.$$

Используя основное соотношения потока, получаем следующее уравнение непрерывности для транспортного потока:

$$\frac{\partial k}{\partial t}+\frac{\partial (ku)}{\partial x}=0.$$

$$\frac{\partial k}{\partial t}+\frac{u\partial k}{\partial x}+\frac{k\partial u}{\partial x}=0.$$

В теории транспортных потоков установлено, что скорость движения изменяется обратно пропорционально плотности потока $u=f(k)$. *Тогда*

$$\frac{\partial u}{\partial k}=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial k}=\frac{du}{dk}=u'.$$

Уравнение непрерывности для транспортного потока на дороге с однорядным движением:

$$\frac{\partial k}{\partial t}+(u+ku')\frac{\partial k}{\partial x}=0.$$

$$\frac{du}{dt}=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial u}{\partial t}\cdot\frac{dt}{dt},$$

В итоге уравнение принимает вид

$$\frac{\partial k}{\partial t}+\left(u+\frac{c^2k^n}{u'}\right)\frac{dk}{\partial x}=0.$$

Получено общее уравнение движения $(u')^2=c^2k^{(n-1)}$.

Наконец, вследствие пропорциональной обратной зависимости между скоростью и плотностью получаем

$$u'=-ck^{\frac{(n-1)}{2}}.$$

$$u=\frac{-2c}{n+1}k^{\frac{(n+1)}{2}}+C_1,$$

Поскольку при максимальной плотности k, движение невозможно, то

$$C_1=\frac{2c}{n+1}k_j^{\frac{(n+1)}{2}},\ n>-1$$

$$u=\frac{2c}{n+1}\left[k_j^{\frac{(n+1)}{2}}-k^{\frac{(n+1)}{2}}\right],\ n>-1.$$

Аналогично предполагается, что водитель может ехать со скоростью свободного движения только в том случае, если на дороге нет других автомобилей. Таким образом,

$$u_f = \frac{2c}{n+1} k_j^{\frac{(n+1)}{2}}, \quad n > -1,$$

Подставляя выражения в уравнение, получаем обобщенные уравнения состояния

$$u = u_f \left[1 - \left(\frac{k}{k_j} \right)^{\frac{(n+1)}{2}} \right], \quad n > -1;$$

$$q = ku = ku_f \left[1 - \left(\frac{k}{k_j} \right)^{\frac{(n+1)}{2}} \right], \quad n > -1.$$

Оптимальная плотность, при которой интенсивность потока автомобилей максимальна

$$\frac{dq}{dk} = \left[1 - \frac{n+3}{2} \left(\frac{k}{k_j} \right)^{\frac{(n+1)}{2}} \right] u_f = 0;$$

$$k_m = \left(\frac{n+3}{2} \right)^{-\frac{2}{(n+1)}} k_f, \quad n > -1.$$

Оптимальную скорость

$$u_m = \frac{n+1}{n+3} u_f, \quad n > -1.$$

Пропускная способность находится как произведение предыдущих выражений

$$q_m = \left[\frac{n+1}{\left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{2}{(n+1)}} (n+3)^{\left[\frac{2}{(n+1)} \right] + 1}} \right] u_f k_j, \quad n > -1.$$

Лекция 12

Метод подвижного наблюдателя.

Ударные волны в транспортном потоке.

1 Метод подвижного наблюдателя

При методе оценки скорости движения и интенсивности потока из ***движущегося автомобиля наблюдатели****, находящиеся в контрольном автомобиле, измеряют и регистрируют следующие данные:* ***число автомобилей, которые обогнал контрольный автомобиль; число автомобилей, обогнавших контрольный автомобиль; время движения контрольного автомобиля.***

В случае 1, *когда* ***контрольный автомобиль остановлен****, интенсивность потока равна числу автомобилей, обгоняющих контрольный автомобиль, деленному на время обследования.*

$$q = \frac{n_0}{T}.$$

В случае 2, *когда* ***останавливаются все автомобили****, кроме контрольного, плотность равна числу автомобилей, обгоняющих контрольный автомобиль, деленному на длину исследуемого участка.*

$$k = \frac{n_s}{L}.$$

$$L = vT,$$

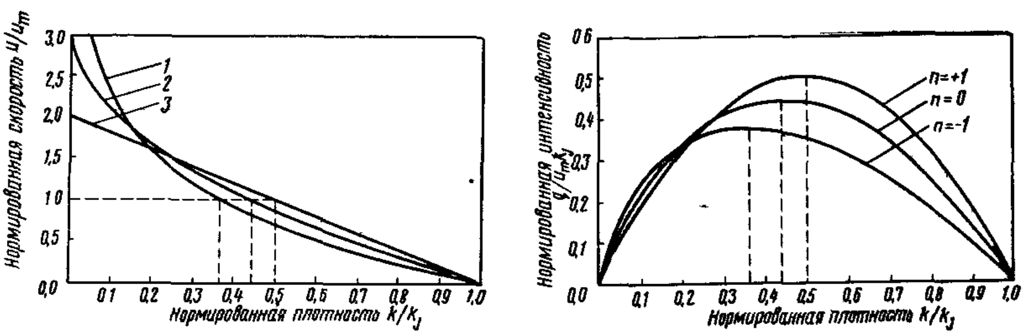
где V - скорость контрольного автомобиля, T — время движения через участок L.

Подставляя соотношение в начальную формулу, получаем

$$k = \frac{n_S}{vT}.$$

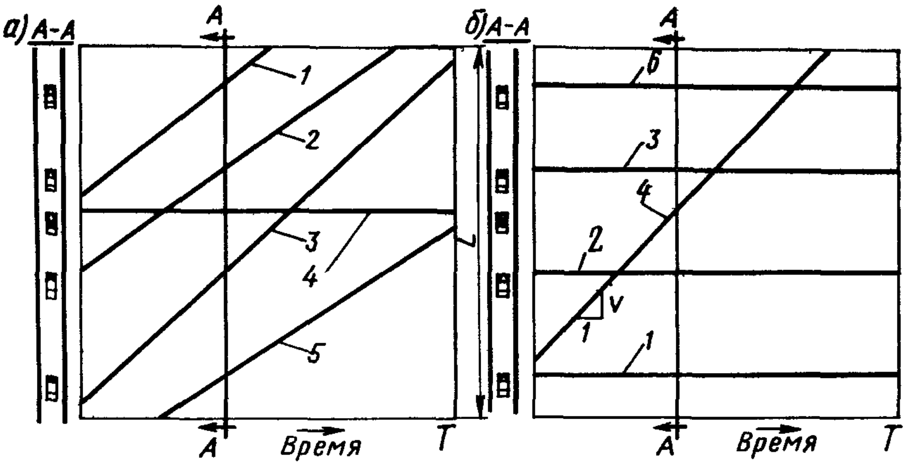
$$n_0 - n_s = qT - kvT.$$

$$\frac{n}{T} = q - kv.$$



Решение обобщенного уравнения движения транспортного потока:

1 — линейная модель; 2 — параболическая модель; 3 — экспоненциальная модель.



Удобно проводить измерения в разных направлениях (прямо, обратно):

$$\frac{n_w}{T_w} = q - kv_w$$

$$\frac{n_a}{T_a} = q + kv_a.$$

$$q = \frac{n_w + n_a}{T_w + T_a}.$$

Полученные уравнения представляют собой ***модель движения транспортного потока по данным подвижного наблюдателя***.

2 Ударные волны в транспортном потоке

*Лайтхилл и Уитхэм получили еще одно соотношение между интенсивностью и плотностью транспортного потока для случая, когда данные об интенсивностях и скоростях транспортных потоков получают **методом движущегося наблюдателя**.*

$$q = \frac{n}{T} + ku_w.$$

где n— число автомобилей, обгоняющих наблюдателя за время T; Uw – скорость движения транспортного потока.

*Если **работают два движущихся наблюдателя** и второй начинает движение через промежуток T после первого и этот промежуток сохраняется в процессе движения, с тем чтобы в среднем **для обоих наблюдателей число автомобилей между наблюдателями было постоянным** n = 0, то в этом случае*

$$q_1 - q_2 = u_w (k_1 - k_2).$$

*Другими словами**, если происходят изменения интенсивности потока, то скорость распространения этих изменений вдоль потока называется волновой скоростью**, которая определяется как*

$$u_w = \frac{dq}{dk}.$$

*Если уравнение непрерывности гидроаналогии умножить на волновую скорость, то получим следующее **уравнение движения одномерной волны***

$$\frac{\partial q}{\partial t} + u_w \frac{\partial q}{\partial x} = 0.$$

Рассмотрим в пространственно-временной плоскости линии, определяемые уравнением

$$u_w = \frac{dx}{dt}.$$

Подставляя это соотношение в предыдущее уравнение, получаем

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial x}{dt} \cdot \frac{\partial q}{\partial x} = 0;$$

$$\frac{\partial q}{\partial t} dt + \frac{\partial q}{\partial x} dx = 0.$$

Левая часть уравнения представляет собой полную производную интенсивности потока

$$dq = \frac{\partial q}{\partial t} dt + \frac{\partial q}{\partial x} dx = 0.$$

Дифференцируя уравнение по плотности, получаем

$$\frac{dq}{dk} = u_w = u + k \frac{\partial u}{\partial k} .$$

Из уравнения следует, что волновая скорость всегда меньше средней скорости потока, так как производная от скорости по плотности отрицательна (было доказано ранее).

Скорость распространения ударной волны *наиболее ярко выражена для* ***плотных транспортных потоков,*** *она характеризует* ***процесс заторообразования.***

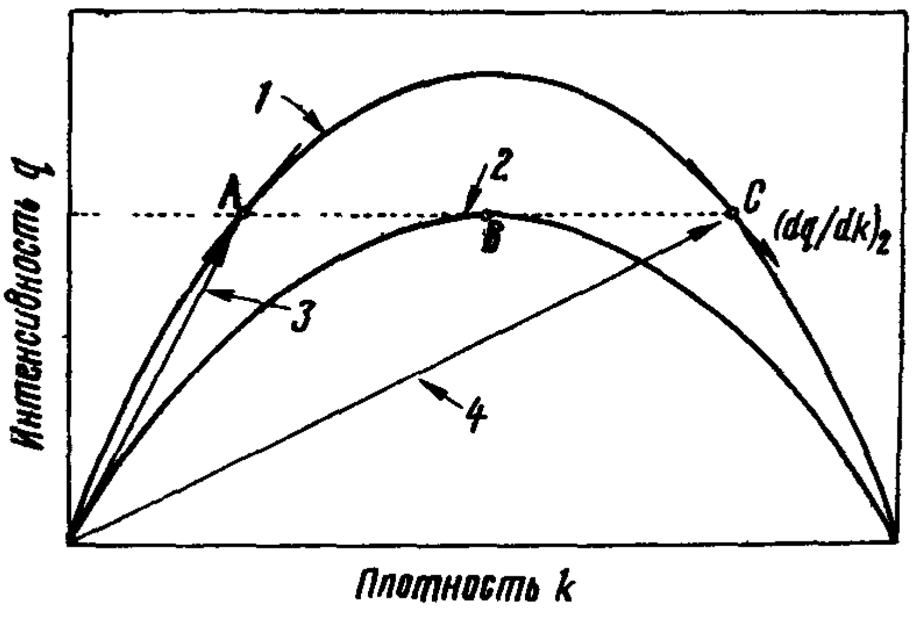
Лекция 13

Метод контролю місць затороутворення у транспортному потоці.

1 Анализ узкого места на основе диаграммы состояния транспортного потока

*С теорией транспортных волн тесно связано такое понятие как **узкое место**, т. е. **участок дороги**, на котором **пропускная способность меньше**, чем на **последующем участке** дороги. Верхняя кривая на рисунке, показывающая зависимость плотности от интенсивности, относится к участку дороги, расположенному впереди узкого места, а нижняя относится к узкому месту.*

*Если **интенсивность потока достигает значения пропускной способности узкого места**, то **скорость движения** в узком месте **становится значительно меньше,** чем на последующем участке дороги. При дальнейшем увеличении интенсивности потока перед узким местом возникает очередь автомобилей и условия движения на этом участке смещаются из точки А в точку С.*



… 3 — скорость автомобилей при приближении к узкому месту; 4— скорость автомобилей в узком месте.

*Если **интенсивность движения достигает значения пропускной способности узкого места**, то **скорость движения не зависит** от геометрических характеристик **участка дороги**, расположенного выше узкого места.*

Поскольку продолжительность перегрузки может значительно превышать интервал, в котором транспортная нагрузка превышает пропускную способность, важно принимать меры по предупреждению перегрузок.

Для изучения соотношения между интенсивностью потока и длительностью задержки предлагается использовать нижний график, изображенный на рисунке.

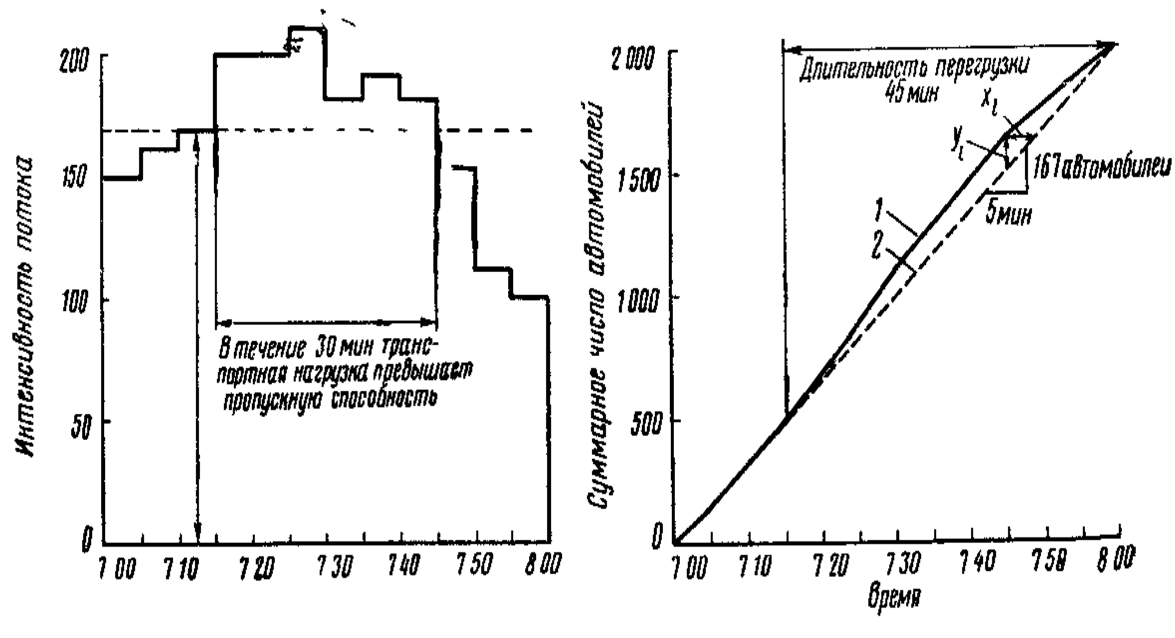


Рисунок Соотношение между транспортной нагрузкой, пропускной способностью и перегрузкой:

1 — транспортная нагрузка; 2 — пропускная способность.

*Преимущество этого графика состоит в том, что он **изображает интенсивность потока в виде кривой**, зависящей от времени, **а не в виде точки**, не связанной со временем.*

На этом графике ***число автомобилей****, проезжающих через узкое место за период максимальной интенсивности движения, изображается как* ***некоторая функция времени****.*

Наклон верхней кривой *в любой точке* ***характеризует интенсивность прибытия****, а* ***наклон нижней кривой*** *определяет уровень обслуживания, т. е.* ***фактическую интенсивность потока****.*

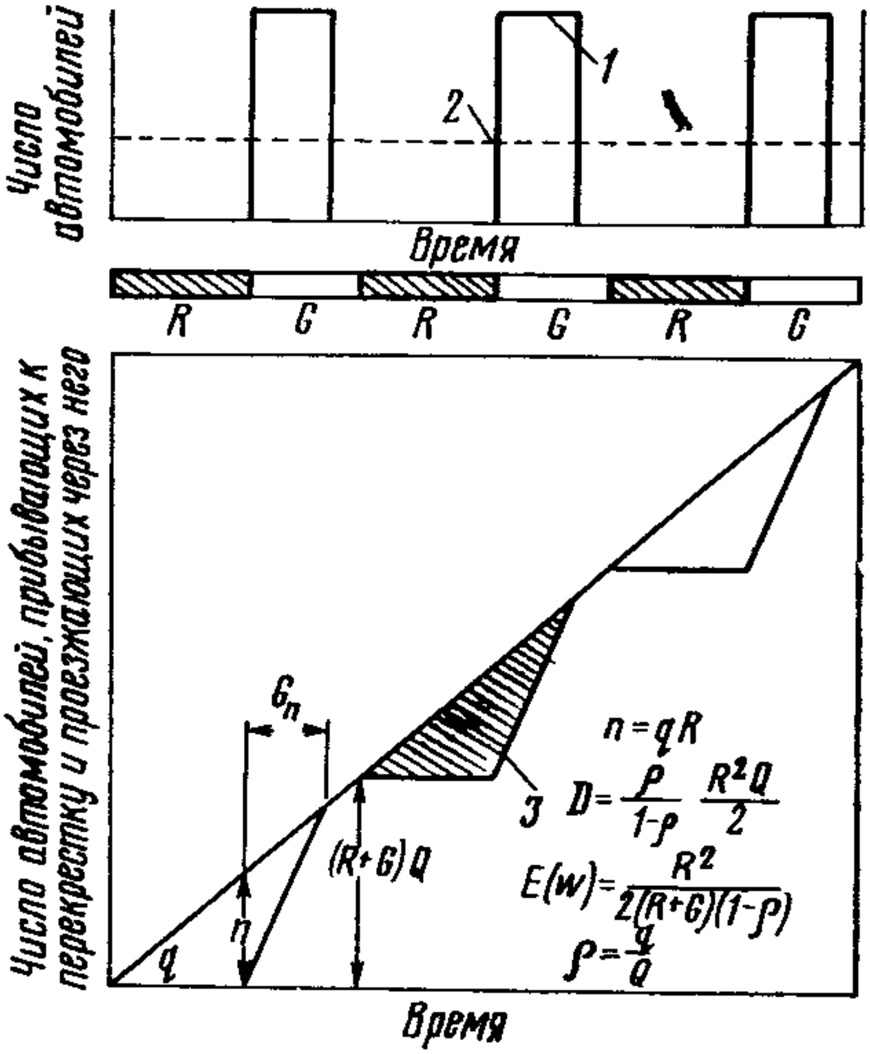


Рисунок Соотношение между транспортной нагрузкой и пропускной способностью у регулируемого перекрестка.

Изображенный график, показывающий ***зависимость между входящим и выходящим потоками*** *и объясняющий причины возникновения перегрузок на* *дороге с наличием узкого места, используется также для наглядного представления* ***движения на регулируемом перекрестке.***

2 Связь характеристик светофорного регулирования с наличием узкого места

Очевидно, что ***число автомобилей****, прибывающих в течение всего цикла работы светофора,* ***меньше пропускной способности*** *в течение фазы зеленого сигнала*

$$(R+G)q < GQ.$$

где R - длительность красного сигнала;

G – длительность зеленого сигнала;

q – интенсивность прибытия автомобилей к перекрестку.

Q – пропускная способность участка.

Максимальная длина очереди *на данном направлении существует в конце красной фазы и определяется из выражения*

$$n = qR.$$

Очевидно, что ***длительность зеленой фазы****, необходимая для* ***проезда*** *через перекресток* ***автомобилей****, образовавших очередь,* ***меньше полной длительности фазы зеленого сигнала****, и символически может быть выражена как*

$$G_n = \frac{\rho}{1-\rho} R,$$

где р — коэффициент загрузки.

Лекция 14

Моделі транспортних систем.

1 Характеристика моделей транспортных систем

В изучавшихся до сих пор моделях рассматривались главным образом события, происходящие в некоторой точке пространства или в некоторый момент времени.

*При **разработке планов оптимизации** работы всей дорожной системы (участок, дороги протяженностью несколько километров с движением автомобилей в одном направлении) **используются модели двух типов**.*

***Первой** из них **является модель для оценки транспортной загрузки** у узкого места, **а второй — модель линейного программирования**.*

***В обоих моделях** в качестве контрольного параметра используется **полная пропускная способность дороги** и делается попытка в каждом узком месте поддерживать транспортную нагрузку меньше пропускной способности.*

Транспортная нагрузка у узкого места дороги образуется за счет автомобилей, въезжающих на магистраль с примыкающих въездов, расположенных перед узким местом.

***Если известна интенсивность каждого такого потока, то можно оценить транспортную нагрузку у узкого места.** Этот метод оказался ценным при разработке планов регулирования потоков, въезжающих на магистраль свободного движения.*

*Для анализа и планирования работы дорожной системы в установившемся режиме могут **использоваться различные модели линейного программирования**. В простейшем случае модель имеет следующий вид:*

максимизировать

$$\sum_{j=1}^{n} X_j$$

$$\sum_{j=1}^{n} A_{jk} X_j \leqslant B_k, \quad k=1,\ \ldots,\ n,$$

$$X_j \leqslant D_j, \ j=1,\ \ldots,\ n,$$

$$X_j \geqslant 0, \ j=1,\ldots,\ n.$$

В данной модели X – интенсивность входящего потока, D – транспортная загрузка; B – пропускная способность; А – вероятность проезда автомобилем участка.

Построенная модель максимизирует выходящий поток системы.

Первая система *ограничений требует, чтобы в каждом узком месте дороги транспортная нагрузка не превышала полной пропускной способности в данном направлении.*

Вторая система *ограничений требует, чтобы интенсивность входящего потока не превышала транспортной нагрузки при любом входящем потоке.*

Третья система *ограничений гарантирует возможность решения.*

В этой модели могут быть использованы и ***другие ограничения:***

- *ограничения, устанавливающие максимальную длину очереди на всех регулируемых въездах;*

- *ограничения, уравнивающие длину очереди на всех регулируемых въездах;*

- *ограничения гарантирующие, что транспортная нагрузка не превысит пропускной способности узкого места дороги на наиболее ответственной полосе движения.*

2 Основные проблемы в моделировании систем

Необходимо проверить на практике те детерминированные модели, - которые были предложены для описания однорядного транспортного потока. После этого из большого числа рассмотренных моделей следует выбрать те, которые наиболее точно описывают транспортный поток на различного рода дорогах, в тоннелях, на мостах и эстакадах с односторонним движением.

Необходимо проведение исследований, которые позволили бы определить, какие математические модели транспортного потока описывают реально происходящие процессы.

3 Модели систем относящихся к транспортным системам

При движении автомобиля определяющими являются три основных фактора: ***водитель, автомобиль и окружающая среда****, взаимодействующие между собой сложным образом во времени и пространстве.*

Учитывая это, логично подойти к ***описанию соотношения между воздействием*** *(стимулом) и* ***реакцией*** *или описанию соотношения между входным и выходным сигналами с точки зрения систем регулирования.*

Все ***системы регулирования удобно разделить на два основных класса****:* ***системы с разомкнутым контуром и системы с замкнутым контуром****.*

Например, такая разомкнутая система, как система пуска ракеты, после включения больше не регулируется.

В системах другого типа измеряют регулируемую величину; ее фактическое значение сравнивают с требуемым значением, и если они отличаются друг от друга, то выполняют определенное корректирование.

Такие системы относятся к классу систем регулирования с замкнутым контуром или систем с обратной связью.

Следует указать на принципиальное различие между системами

этих двух классов.

Единой теории, справедливой для всех систем с разомкнутым контуром, нет, между этими системами больше различий, чем сходства.

В то же время ***методы анализа систем с замкнутым контуром составляют единую теорию****, независимо от конкретных применений. Методы анализа таких систем используются и в теории транспортных потоков.*

Системы регулирования с обратной связью широко применяются в современной технике. К ним относится широкий круг систем — от простых устройств до сложной автоматической аппаратуры.

В ***простой системе с обратной связью выходной сигнал сравнивается с входным сигналом***.

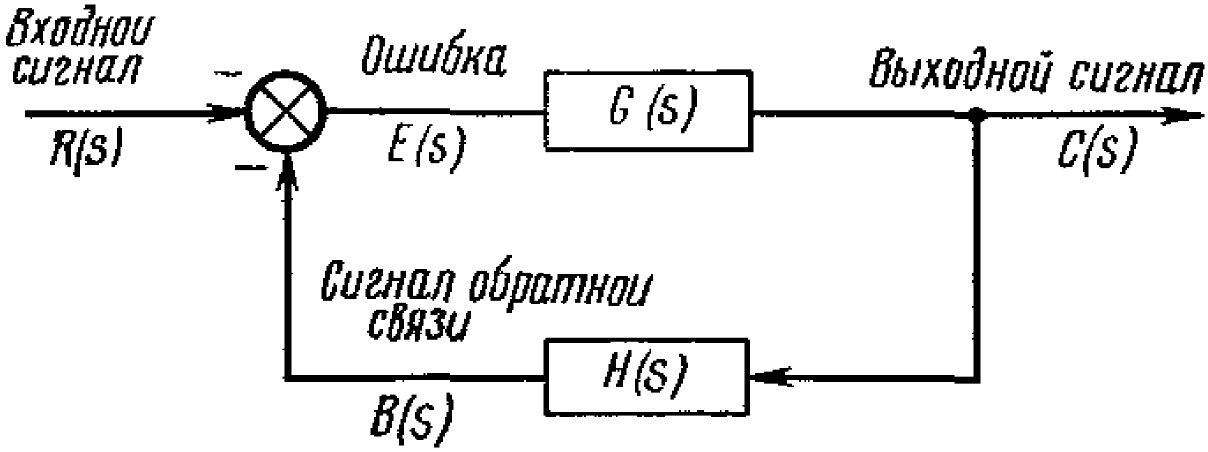
Такая система является самокорректирующейся *в том смысле, что любые отклонения от требуемой характеристики используются для выработки корректирующего воздействия*

Лекция 15

Моделювання системи ВАДС.

1. Регулирование с обратной связью

Системы регулирования с обратной связью *широко применяются в современной технике.* ***В простой системе с обратной связью*** *выходной сигнал сравнивается с входным сигналом. Такая* ***система является самокорректирующейся*** *в том смысле, что любые отклонения от требуемой характеристики используются для выработки корректирующего воздействия.*



На рисунке даны ***обозначения наиболее важных элементов*** *этой системы регулирования. С функциональной точки зрения двумя* ***наиболее важными переменными*** *в этой системе являются* ***входной и выходной сигналы****, обозначаемые (заданное значение входного сигнала) и (регулируемая величина).*

Передаточная функция G(S) *представляет собой математическое описание* ***отношения выходного сигнала элемента или системы ко входному сигналу. Характеристики регулирования*** *с обратной связью можно выразить следующими уравнениями:*

$$E(s) = R(s) - H(s)\,C(s);$$
$$C(s) = E(s)\,G(s).$$

Решая эти уравнения *для отношения между выходным и входным сигналами,* ***получаем передаточную функцию Т***

$$T = \frac{G(s)}{1 + G(s)\,H(s)}\ .$$

2 Человек как система регулирования

Принцип обратной связи лежит в основе многих естественных явлений *и не ограничивается системами регулирования, созданными человеком.*

Разработка таких современных ***сложных систем типа «человек—автомобиль»****, еще более повысила роль человека в системе с замкнутым контуром.*

При изучении человека как элемента этой системы *и при попытках описать его с помощью передаточной функции оказалось,* ***что оператор работает аналогично следящей системе.***

*При описании передаточных функций человека, учитываются сенсорные ощущения (обычно это визуально наблюдаемые сигналы) и физические реакции (обычно это работа органов регулирования)****. Разумеется, такие переменные, как восприятие, принятие решения, время реакции и регулирование, должны рассматриваться в рамках этой «передаточной функции человека»****.*

Вождение автомобиля является примером системы регулирования типа «человек — автомобиль» с обратной связью.

Входными сигналами в этой системе *являются* ***панорама вьющейся дороги и транспортный поток****, наблюдаемые водителем через ветровое* *стекло кабины.*

Индикаторы *включают такие приборы, как* ***спидометр и др. Органами регулирования являются ведущее колесо, педаль управления подачей топлива и тормоза.***

Выходное усилие этих органов *регулирования* ***воздействует на автомобиль****, вызывая его перемещение,* ***что и является выходным сигналом в этой системе.***

Для иллюстрации применения обратной связи в системе «водитель—автомобиль» показана выше блок-схема*, описывающая регулирование скорости автомобиля.*

Водитель принимает решение о движении по дороге с соответствующей скоростью (входной сигнал) и наблюдает за фактической скоростью (выходной сигнал) по показаниям спидометра.

Он мысленно оценивает соотношение между наблюдаемой и требуемой скоростью (ошибка).

Если автомобиль едет слишком медленно, то водитель нажимает на педаль управления подачей топлива пропорционально этой разности скоростей. Этим обеспечивается подача в двигатель большего количества топлива, и скорость автомобиля увеличивается. Если же последующее наблюдение покажет, что имеет место ***перекомпенсация****, то водитель отпускает педаль управления подачей топлива и скорость автомобиля уменьшается.*

Многие реальные системы, например ректификационные колонны, производственные линии, графики движения товаров от производителей в оптовые магазины и далее в розничную торговлю, потоки на открытых водоводах и т. п. трудно регулировать вследствие наличия мертвого времени или транспортного запаздывания.

Поскольку механические и электрические процессы, химические реакции или реакции человека не протекают мгновенно, то идеальное регулирование невозможно.

Сущность запаздывания состоит в том, что величина коррекции, которая была правильной в момент наблюдения, может оказаться неправильной, когда в системе фактически проводится коррекция.

Высокая чувствительность *может приводить к быстрым изменениям, которые продолжаются после того, как исчезнет необходимость в них, и* ***вследствие этого появляется ошибка противоположного знака****.*

Из блок-схемы видно, что вождение автомобиля по свободной дороге является примером системы регулирования типа «человек — автомобиль» с обратной связью.

На дорогах с интенсивным движением *водитель в среднем в меньшей степени руководствуется соображениями, связанными с* ***экономией времени и расстояния, чем соображениями безопасности****.*

Водитель оказывается в трудной ситуации, он должен приспосабливаться к движению других автомобилей в потоке.

Заметим, что всякий раз, когда данный автомобиль приближается довольно близко к идущему впереди автомобилю и не может его обогнать, он замедляет свое движение.

Задача состоит в построении модели*, описывающей динамику транспортного потока, при допущении о том, что* ***водители стремятся сохранять безопасное расстояние между автомобилями****.*

Указанная задача входит в комплекс задач связанных с теорией следования за лидером, что будет рассмотрено далее.

Лекция 15

Линейная модель движения за головным автомобилем

Продвижение потока автомобилей*, обозначаемых индексами 1=1, 2, ..., n, удобно показать на* ***пространственно-временной диаграмме*** *(рис.). По оси ординат откладывается расстояние x, а по оси абсцисс — время t. Кривая означает, что происходит изменение углового коэффициента, т. е. изменение скорости. Это означает, что* ***автомобиль движется с ускорением****.*

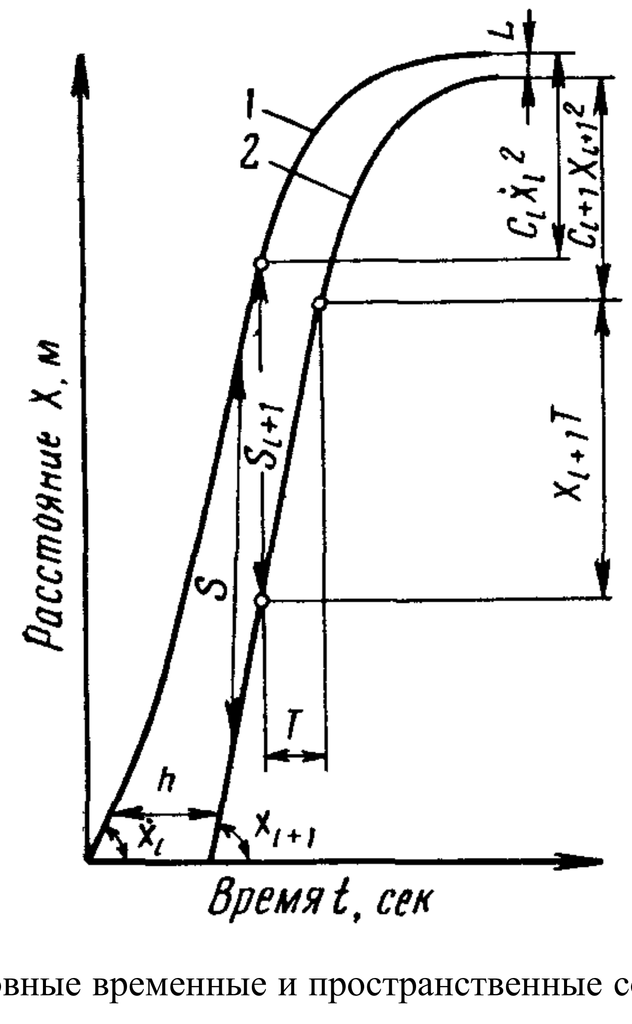


Рисунок Основные временные и пространственные соотношения в транспортном потоке:

1 — автомобиль i, 2 — автомобиль i+1; L — интервал между автомобилями при перегрузке; S_{i+1} — безопасное расстояние между автомобилями, S — расстояние между автомобилями; T—реакция, h — интервал времени между автомобилями.

При следовании за другими автомобилями водитель часто изменяет свою скорость таким образом, чтобы сохранялось безопасное расстояние между автомобилями. ***Принцип безопасного расстояния показан на рисунке.*** *Это* ***расстояние между автомобилями****, которое* ***должно поддерживаться в момент (t - T)****, чтобы избежать столкновения с впереди идущим автомобилем, если тот резко затормозит до полной остановки:*

$$s_{i+1}(t-T)=C_{i+1}v_{i+1}^{2}(t)+L_i+Tv_{i+1}(t)-C_i v_i^2(t-T),$$

где $C_i = (2f_i g)^i$, а T — временная задержка.

Если предполагается, что у всех автомобилей одинакова способность торможения и одинаковы скорости движения, то, выразив среднее безопасное расстояние через координаты X_i *и* X_{i+1}*, получаем*

$$x_i(t-T)-x_{i+1}(t-T)=Tv_{i+1}(t)+L_i.$$

Важно отметить, что формула дает основу для вывода ***известного эмпирического правила следования за другим автомобилем****, а именно:* ***при увеличении скорости на каждые 16 км/ч расстояние между автомобилями должно увеличиваться на длину автомобиля.***

Дифференцируя выражение по i, получаем

$$v_i(t-T)-v_{i+1}(t-T)=T\dot{v}_{i+1}(t), \quad i=1,\ 2,\ 3,\ 4.$$

С помощью уравнения можно определить движение любого автомобиля, если известно движение головного. Чтобы выполнить это, удобно ввести преобразование Лапласа скорости используя следующее обозначение:

$$L\,[v_i(t)]=V_i(s).$$

Выражения для скорости движения в момент (t - T) можно получить, используя теорему о переносе для преобразования

$$L\,[v_i(t-T)]=V_i(s)\,e^{-Ts}.$$

По формуле преобразования для первой производной функции

получаем

$$L\,[\dot{v}_{i+1}(t) = sV_{i+1}(s) - v_{i+1}(0),$$

где V(0) — начальные скорости автомобилей в момент времени 0.

Подставляя преобразования, имеем

$$V_{i+1}(t) = \frac{e^{-Ts}}{Ts + e^{-Ts}} V_i(s) + \frac{T}{Ts + e^{-Ts}} v_{i+1}(0).$$

Уравнение можно использовать для описания движения любого автомобиля данного ряда, если задано движение головного.

Рассмотрим простой пример, когда все автомобили неподвижны при t<0 и в момент t=0 головной автомобиль начинает движение с начальной скоростью V0.

Начальными условиями являются

$$v_1(t) = v_0,\ t \geqslant 0$$

$$V_1(s) = \frac{v_0}{s}$$

$$v_{i+1}(0) = 0, \quad i = 1,\ 2,\ 3, \ldots$$

Подставляя начальные условия в полученную формулу, получаем преобразование для скорости любого автомобиля

$$V_{i+1}(s) = \left(\frac{e^{-Ts}}{Ts + e^{-Ts}}\right)^i \frac{v_0}{s}.$$

Уравнение можно переписать в виде суммы членов геометрического ряда, что облегчает обратное преобразование:

$$L^{-1}\left(\frac{e^{-kTs}}{s^u}\right); \quad u > 0 = \frac{(t - kT)^{u-1}}{u - 1}, \quad t > kT.$$

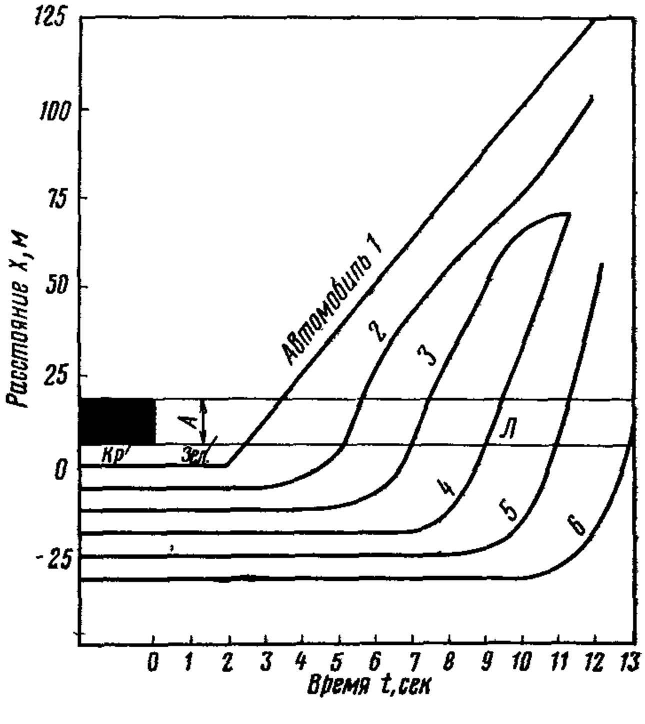
Выражая формулу в виде разложения в степенной ряд, получаем нормированные скорости каждого последовательного автомобиля данного ряда:

$$\frac{v_2(t)}{v_0} = \frac{t-T}{T} - \frac{(t-2T)^2}{2T^2} + \frac{(t-3T)}{6T^3} - \cdots;$$

$$\frac{v_3(t)}{v_0} = \frac{(t-2T)^2}{2T^2} - \frac{(t-3T)^3}{3T^3} + \frac{(t-4T)^4}{8T^4} - \cdots.$$

Расстояния, пройденные автомобилями к моменту t после начала движения первого автомобиля, находим путем интегрирования членов уравнений в интервале от 0 до I.

Если предположить, что очередь автомобилей образовалась в фазе красного сигнала и через 2 сек после появления зеленого сигнала головной автомобиль мгновенно приобретает скорость, равную 12 м/сек, то, согласно формуле, реакция последующих автомобилей будет такой, как показано на рисунке. *Начальные промежутки времени для всех автомобилей, следующих за головным, исходя из времени реакции Т=1 сек, вполне реалистичны, однако можно видеть, что на расстоянии около 80 м от линии «стоп» четвертый автомобиль сталкивается с третьим.* Реакция на торможение второго автомобиля возрастает по мере его выхода из очереди, и система автомобилей обнаруживает реакцию, которую можно считать неустойчивой, несмотря на то, что каждый отдельный автомобиль имеет ограниченную скорость.



Лекция 16

Нелинейная модель движения за головным автомобилем

В теории следования за головным автомобилем принимается ***допущение****, что* ***транспортный поток*** *представляет собой* ***совокупность пар автомобилей****, когда* ***каждый автомобиль следует за впереди идущим*** *автомобилем в соответствии с определенным соотношением между стимулом (воздействием) и реакцией, приближенно описывающим поведение и механику системы «водитель — автомобиль—дорога».*

Это соотношение гласит: водитель, сталкиваясь с определенной ситуацией (стимул), поступает определенным образом (реакция).

Каким представляет он коэффициент своей чувствительности? Как быстро он определяет задержку реакции системы «человек—автомобиль»? ***Общее уравнение для автомобиля, следующего за головным, имеет вид:***

$$\ddot{x}_{i+1}(t)=a_m\,\frac{\dot{x}_i(t-T)-\dot{x}_{i+1}(t-T)}{[x_i(t-T)-x_{i+1}(t-T)]^m},$$

где Т—запаздывание реакции относительно стимула.

Чувствительность определяется как

$$\frac{a_m}{[x_i(t-T)-x_{i+1}(t-T)]^m},$$

где а — коэффициент пропорциональности.

В предыдущем параграфе было поставлено условие устойчивости для простого случая, когда автомобили начинают движение после полной остановки. ***Эта модель называется линейной моделью следования за головным автомобилем****, так как коэффициент чувствительности является постоянным и в рассмотренном примере равен* T^{-1}.

Выбор той или иной формы общего уравнения зависит от того, насколько хорошо они описывают транспортный поток. ***Существуют два важных класса таких явлений, рассматриваемых в первую очередь.***

Это устойчивость и характеристики установившегося потока.

Кроме того, для многих значений чувствительности были получены довольно полные характеристики установившегося потока, задаваемые начальным уравнением. ***Уравнение гласит, что ускорение автомобиля за время запаздывания реакции Т прямо пропорционально скорости автомобиля относительно впереди идущего автомобиля и обратно пропорционально расстоянию между автомобилями.*** *Интегрируя уравнение, получаем:*

$$\dot{x}_{i+1}(t) = a \ln[x_i(t-T) - x_{i+1}(t-T)] + C_1, \quad m=1,$$

и

$$\dot{x}_{i+1}(t) = (-m+1)^{-1} a [x_i(t-T) - x_{i+1}(t-T)]^{-m+1} + C_2, \quad m>1.$$

Постоянные интегрирования вычисляются из условия, что скорость автомобиля стремится к нулю, если расстояние между автомобилями приближается к эффективной длине автомобиля L:

$$c_1 = -a \ln L;$$

$$c_2 = -(-m+1)^{-1} a L^{-m+1}, \quad m>1.$$

Подставляя значения, получаем:

$$\dot{x}_{i+1}(t) = a \ln\{L^{-1}[x_i(t-T) - x_{i+1}(t-T)]\}, \quad m=1;$$

$$\dot{x}_{t+1}(t) = (m-1)^{-1} a \{L^{-(m-1)} - [x_i(t-T) - x_{i+1}(t-T)]^{-(m-1)}, \quad m>1.$$

Уравнение впервые получили Гейзис, Херман и Поттс. ***Они установили, что уравнение состояния для транспортного потока можно вывести с помощью микроскопического закона следования за головным автомобилем точно так же, как уравнение состояния газа можно вывести с помощью микроскопического закона взаимодействия молекул.*** Поскольку расстояние между автомобилями — величина, обратная плотности k, то уравнения принимают вид:

$$u = a \ln\frac{k_j}{k};$$

$$u = (m-1)^{-1} a (k_j^{m-1} - k^{m-1}), \quad m>1.$$

Коэффициент пропорциональности вычисляется при k=0.

Он равен

$$a=\frac{m-1}{k_j^{m-1}}u_f, \quad m>1.$$

Таблица 26

Элемент	Общий случай $m>1$	$m=1$
Уравнение движения	$\ddot{x}_i=\frac{a(\dot{x}_{i-1}-\dot{x}_i)}{(x_{i-1}-x_i)^m}$	$\ddot{x}_i=\frac{a(\dot{x}_{i-1}-x_i)}{x_{i-1}-x_i}$
Коэффициент пропорциональности	$a=(m-1)\,u_f k_j^{-(m-1)}$	u_m
Уравнение состояния	$q=ku_f\left[1-\left(\frac{k}{k_j}\right)^{m-1}\right]$	$ku_m\ln\left(\frac{k_j}{k}\right)$
Соответствующий параметр макроскопической модели *	$n=2m-3$	$n=-1$

Продолжение

Элемент	$m={}^3/_2$	$m=2$
Уравнение движения	$\ddot{x}_i=\frac{a(\dot{x}_{i-1}-\dot{x}_i)}{(x_{i-1}-x_i)^{3/2}}$	$\ddot{x}_i=\frac{a(\dot{x}_{i-1}-\dot{x}_i)}{(x_{i-1}-x_i)^2}$
Коэффициент пропорциональности	$\frac{u_f}{2k_j^{1/2}}$	$\frac{u_f}{k_j}$
Уравнение состояния	$ku_f\left[1-\left(\frac{k}{k_j}\right)^{1/2}\right]$	$ku_f\left[1-\left(\frac{k}{k_j}\right)\right]$
Соответствующий параметр макроскопической модели *	$n=0$	$n=+1$

Лекция 17

Оценка уровня удобства движения в транспортном потоке

Оценка любого изменения в функционировании или конструкции дороги требует тщательного исследования параметров, характеризующих транспортный поток и дающих количественное выражение этих изменений.

Такие параметры транспортного потока, как ***интенсивность, плотность, скорость и длина очереди автомобилей****, использовались для получения полного количественного описания потока, движущегося по дороге.*

Необходимы методы, позволяющие сравнивать влияние различных проектов дороги и способов регулирования движения на интенсивность потока или уровень обслуживания.

Применительно к движению транспорта уровень ***обслуживания означает качество условий движения****, обеспечиваемое на определенной дороге или дорожном сооружении. С* ***уровнем обслуживания*** *связаны такие факторы, как* ***скорость движения и продолжительность поездки, прерывание потока, свобода маневра, безопасность движения, комфорт и удобство вождения автомобиля, затраты на эксплуатацию автомобиля****.*

*Необходимость объективной оценки уровня обслуживания на дороге или дорожном сооружении признается давно****. В качестве критерия при такой оценке часто используется продолжительность поездки [5]****. Однако продолжительность поездки не всегда отражает истинное положение на отдельных участках дороги и поэтому не всегда позволяет показать наличие перегрузки и неудобства, испытываемые водителем.*

Критерий повышения интенсивности движения, основанный на системном подходе, строится главным образом на максимизации выходного показателя системы. Поскольку максимизация интенсивности движения эквивалентна минимизации продолжительности поездки в пределах системы, то в этом случае продолжительность поездки также используется как показатель обслуживания.

Имеются основания полагать, что водитель оценивает качество движения по скорости, с которой он может вести автомобиль, и равномерности движения. *Гриншилдс предложил показатель качества, учитывающий данные факторы. При выводе этого показателя в основу был положен тот факт, что, общая скорость движения определяет продолжительность поездки, следовательно, скорость пропорциональна качеству движения.* Гриншилдс определяет показатель качества движения следующим образом:

$$Q = \frac{KS}{\Delta s}\sqrt{f},$$

где S — средняя скорость, км/ч; ΔS — абсолютные суммы отклонений скорости движения на 1 км пути; f — число изменений скорости на 1 км пути; К — некоторая постоянная.

Комиссия по оценке пропускной способности дорог при управлении дорожных исследований предложила принять за основу шесть уровней обслуживания. *Фундаментальная кривая, показывающая зависимость между скоростью и интенсивностью движения, произвольно делится на шесть уровней обслуживания в зависимости от величины интенсивности и свободы маневра.*

В результате исследований за показатель качества движения может быть принят параметр транспортного потока, называемый шумом ускорения.

Для этого имеются две причины. ***Во-первых****, этот показатель связан с такими тремя основными элементами транспортного потока, как водитель, дорога и условия движения.* ***Во-вторых****, этот параметр по существу является показателем равномерности движения. В данном параграфе будет дано определение этого параметра и показано его применение.*

Шум ускорения (т. е. среднее квадратическое отклонение ускорения) *можно рассматривать как отклонение скорости автомобиля от равномерной или принять за показатель равномерности движения.* ***Термин шум используется, чтобы показать, что нарушение равномерности движения сравнимо с шумами видеосигнала, вызывающими, например, помехи на экране телевизора.***

Распределение ускорений автомобиля, который на протяжении всей поездки сохраняет почти равномерную скорость - равномерное. При более значительных отклонениях, от равномерной скорости может быть получено распределение ускорений. Шум ускорения изменяется в зависимости от величины и частоты увеличения и снижения скорости. Чем более резкими и более частыми являются эти маневры, тем больше шум. ***Поскольку резкое торможение оказывает существенное влияние на шум ускорения, то этот параметр также характеризует потенциально опасные условия движения.***

Одним из наиболее важных элементов, влияющих на характеристики транспортного потока, является водитель. Вследствие множества внешних и внутренних факторов, оказывающих влияние на принимаемые им решения, ***оценка его поведения в транспортном потоке представляет наиболее сложную задачу***.

Шум ускорения *является важным параметром, помогающим оценить* ***поведение различных водителей в транспортном потоке*** *с точки зрения потенциальной опасности. Поскольку данный параметр зависит от увеличения или уменьшения скорости движения, то неосторожный водитель, пытающийся ехать со скоростью, превышающей скорость потока, будет резко и, по-видимому, часто увеличивать и снижать скорость, поэтому он будет испытывать значительно больший шум ускорения, чем водитель, которого устраивают существующие условия движения.*

Можно предположить, что если бы водитель управлял автомобилем на идеальной дороге, не испытывая воздействия транспортного потока, то шум ускорения был бы равен нулю. Однако опыты, проведенные на испытательном полигоне фирмы «Дженерал моторс», когда четыре автомобиля пытались *сохранять постоянную скорость движения в интервале от 32 до 96 км/ч, показали, что шум ускорения составляет 0,10 м/сек^2.* ***Очевидно, что хотя в идеальных условиях водитель и старается сохранять постоянную скорость, все же это ему не удается***.

Шум ускорения, наблюдаемый при отсутствии движения транспорта, называется естественным шумом, свойственным данной дороге.

Основываясь на приведенных выше результатах, можно считать, что шум ускорения, испытываемый на некоторой дороге при отсутствии движения, равен естественному шуму на идеальной дороге, умноженному на ***некоторый коэффициент****. Появление этого коэффициента можно приписать в основном геометрическим характеристикам дороги.*

Сравнение значений шума ускорения *на одинаковых дорогах позволяет определить,* ***оказывают ли конструктивные особенности дорог одинаковое влияние на транспортный поток****. Другими словами, сравнение значений шума ускорения позволяет определить, какое влияние на равномерность движения оказывают различия в геометрических характеристиках дорог аналогичного класса. Можно ожидать, что дороги с наименьшим шумом ускорения характеризуются более высоким уровнем обслуживания.*

Не менее важно и то, как изменится характер данного параметра при сравнении равномерности движения до и после изменения геометрических характеристик дороги или дорожного сооружения. Установлено, что вследствие свойственных каждой конструкции особенностей дорога имеет естественный шум ускорения, превышающий по величине естественный шум почти идеальной дороги. ***Любое усовершенствование конструкции, по-видимому, можно оценить количественно, определив, насколько шум, ускорения реальной дороги приближается к шуму ускорения идеальной дороги.*** *Другими словами, при проектировании дороги можно попытаться минимизировать шум ускорения, если этот параметр является количественным показателем.*