ИСПОЛЬЗОВАНИЕ СТОХАСТИЧЕСКОЙ ДИСКРЕТИЗАЦИИ В СИСТЕМАХ СБОРА ДАННЫХ

Суков С.Ф., Лукащук А.С.
Донецкий национальный технический университет, г.Донецк
Кафедра автоматики и телекоммуникаций
Афанасьев Д.Н.
ООО «Смайл», г.Донецк
E-mail: sfs@fcita.dn.ua, denis_afanassyev@smile-soft.com

Abstract
Sukov S.F., Lukaschuk A.S., Afanassyev D.N. Randomness sampling in data acquisition systems. *Randomness methods of sampling in data acquisition systems are discussed. Two methods of randomness sampling are offered. Advantages of zero-padding method are shown.*

В настоящее время практически во всех системах цифровой обработки сигналов используется метод равномерной дискретизации. Однако периодическая модель осуществления выборки не всегда может быть применима, например когда колебания в длительности шага дискретизации не могут быть проигнорированы. Для таких устройств необходимы новые, специальные способы обработки информации.

При регистрации сигналов, обладающих широким, но существенно неоднородным частотным спектром, в том числе, затухающим на высоких частотах, приходится значительно повышать частоту дискретизации. В противном случае велика вероятность попадания алиасов в полезную полосу частот. Однако, такой подход приводит к большой избыточности регистрируемого потока данных. Такое подавление алиасов «грубой силой» приводит также к ужесточению требований к стабильности тактовой частоты АЦП. В противном случае, джиттер приведет к потере точности передачи низкоуровневых высокочастотных составляющих спектра сигнала, вплоть до их полной декорреляции.

Для стохастической дискретизации не существует ограничений, описываемых теоремой Котельникова[1,3]. Также возможно ослабить влияние нестабильности временного масштаба [2].

На практике во многих приложениях задача абсолютно точного восстановления сигнала обычно не ставится, в отличие от задачи минимального физического объема информации, при котором сохраняется возможность ее восстановления в непрерывной форме с определенным допустимым значением погрешности. Такая задача особенно актуальна при дистанционных методах регистрации и обработки информации, передаче сигналов по каналам связи и при подготовке информации к длительному хранению. Несоблюдение при дискретизации ограничений теоремы Котельникова позволяет уменьшить объём выборки без появления высокочастотных алиасов.

На рисунке 1 представлен спектр синусоидального сигнала с частотой 50Гц, восстановленного после равномерной дискретизации с частотой 75Гц (теорема Котельникова нарушена). На рисунке 2 – тот же сигнал, восстановленный после стохастической дискретизации.

Рисунок 1 – Спектр сигнала, восстановленного после равномерной дискретизации.

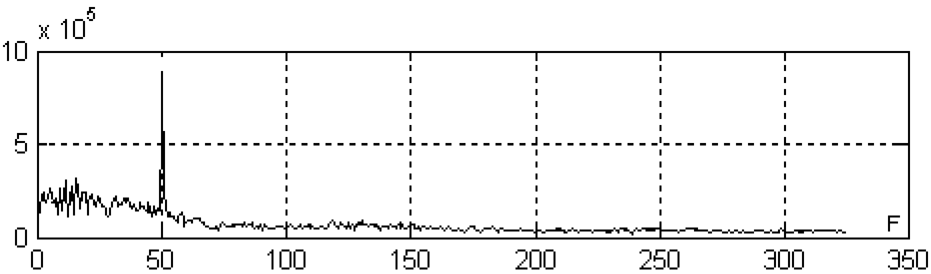

Рисунок 2 – Спектр сигнала, восстановленного после стохастической дискретизации.

Стохастическая дискретизация может осуществляться двумя различными способами: псевдостохастическим взятием отсчетов и аддитивным методом.

При псевдостохастической дискретизации отсчеты сигнала $\{t_k\}$ берутся в моменты времени:

$$
\begin{aligned}
& t_k = kT + \tau_k \\
& \textit{причем}: \\
& T > 0 \\
& |\tau_k| < 0.5 \cdot T
\end{aligned}
\qquad (1)
$$

где T – период равномерной дискретизации;

$\{\tau_k\}$ – ряд одинаково распределенных независимых случайных величин с нулевым математическим ожиданием.

Принцип псевдостохастической дискретизации можно представить с помощью рисунка. На рисунке 3 показана функция плотности вероятности $p(t_k)$ интервалов времени, в которых осуществляются отсчеты (в данном случае изображен нормальный закон распределения). Если совместить все моменты времени, то получим результирующую функцию $p(t)$ (последний график).

Чтобы понять значение функции $p(t)$, необходимо представить себе движущееся вдоль оси t временное окно с интервалом Δt. При условии $\Delta t \to 0$ функция p(t) в любой произвольный момент времени равна вероятности, что один из отсчетов будет происходить в пределах этого окна.

Если провести дискретизацию, как изображено на рисунке 3, т.е. с нормальным законом распределения, то некоторые отсчеты сигнала будут иметь большую вероятность, чем другие. Это очевидно нежелательно, поскольку это уменьшит эффект подавления побочных частотных составляющих.

Если же распределение интервалов времени производить по равномерному закону, то результирующая функция плотности вероятности будет постоянной.

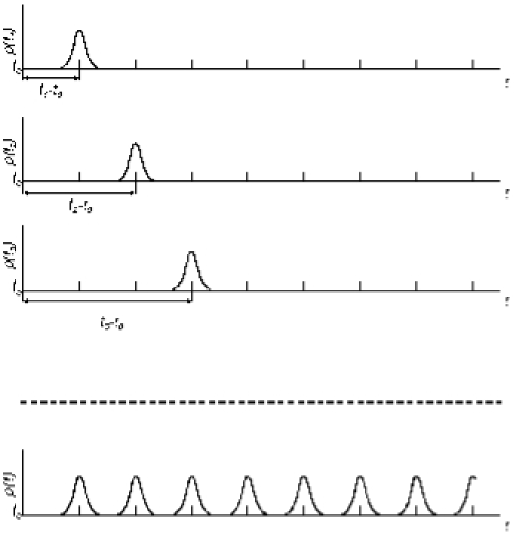

Рисунок 3 – Иллюстрирование принципа псевдостохастической дискретизации

Т.е. при использовании равномерного закона распределения можно добиться лучших результатов, поэтому псевдостохастическую дискретизацию целесообразнее применять при равномерном законе распределения вероятностей.

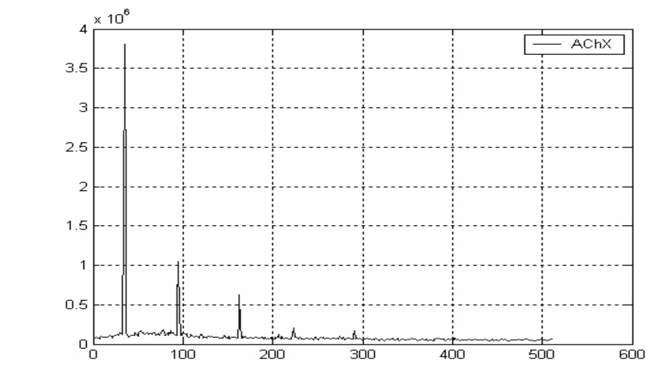

Рисунок 4 - Спектральная плотность интерполированного сигнала при псевдослучайном методе дискретизации (частота сигнала – 50 Гц, частота дискретизации – 128Гц)

В случае аддитивной стохастической дискретизации отсчеты производятся в моменты времени:

$$t_{k+1} = t_k + \tau_k \qquad (2)$$

где $\{\tau_k\}$ – ряд одинаково распределенных независимых случайных положительных величин.

Такая дискретизация проста в осуществлении и подавляет эффект наложения спектров (побочные составляющие). Степень случайности может варьироваться путем изменения только одного параметра σ / μ, где μ и σ -- соответственно математическое ожидание и среднеквадратичное отклонение интервалов между отсчетами.

Очевидно, что средняя частота дискретизации:

$$f_{dcp} = \frac{1}{\mu} \tag{3}$$

Принцип аддитивной стохастической дискретизации представлен на рисунке 5. Функция плотности вероятности интервала времени

$$(t_k - t_0) = \tau_1 + \tau_2 + \ldots + \tau_k \tag{4}$$

в данном случае может быть рассчитана как:

$$p_k(t) = p_{k-1}(t) * p_\tau(t) \tag{5}$$

где $p_\tau(t) = p_1(t)$ - функция плотности распределения $\{\tau_k\}$

На основаниях центральной теоремы предела в статистике, если случайная величина имеет среднее значение m и конечную дисперсию s^2, то при стремлении объема выборки n к бесконечности (практически всегда достаточно, если n>>30) распределение выборочного среднего значения стремиться к нормальному со средним m и дисперсией s^2/n. При этом распределение совсем не обязательно должно быть нормальным.

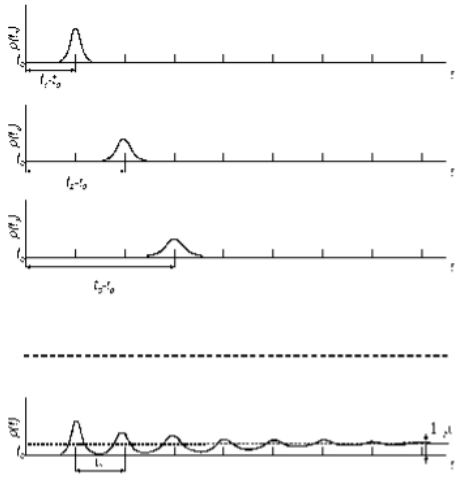

Рисунок 5 – Иллюстрирование принципа аддитивной стохастической дискретизации

Как видно из рисунка 5, результирующая функция плотности вероятности $p(t) = \sum_{k=1}^{\infty} p_k(t)$ в случае аддитивной стохастической дискретизации с увеличением t всегда будет иметь тенденцию становиться плоской. Значение этого постоянного уровня равно 1/μ. При использовании стохастической дискретизации необходимо произвести выбор частоты дискретизации, причем критерии выбора частоты дискретизации полностью отличаются от обычно используемых для равномерной дискретизации. Средняя частота дискретизации вычисляется оцениванием необходимого числа отсчетов и самого длинного интервала времени в течении которого должны производиться отсчеты за одну реализацию сигнала (т.е. матожиданием и СКО интервалов между отсчетами).

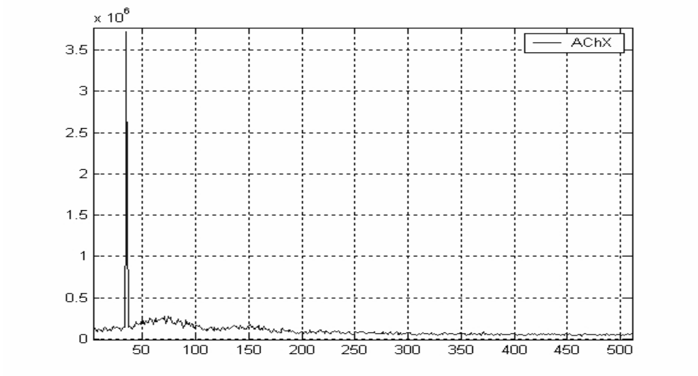

Рисунок 6 - Спектральная плотность интерполированного сигнала при аддитивном методе дискретизации (частота сигнала 50 Гц, частота дискретизации – 128Гц)

Исходя из анализа полученных спектров, можно сказать, что стохастическая дискретизация позволяет ослабить, или даже полностью избежать появление алиасных составляющих, сохраняя возможность восстановления информации, однако обладает низкочастотным шумом, не коррелированным с исходным сигналом.

Для снижения уровня этого шума и использования при дальнейшей обработке сигнала обычных алгоритмов дискретного преобразования Фурье (ДПФ), других преобразований и цифровых фильтров, можно применить процедуру заполнении нулями промежутков между случайными отсчетами в сетке дискретизации временного масштаба[3]. Эта процедура применима, когда интервалы времени между отсчетами сигнала, будучи неравномерными, точно известны (псевдослучайная или аддитивно- неравномерная дискретизация).

Эта операция также позволяет вытеснить сигнал ошибки из низкочастотной области путем дальнейшего повышения частоты отсчетов (передискретизации, рисунок 7). В неравномерно дискретизированный сигнал вводят L-1 дополнительных нулевых отсчётов между отсчётами исходного сигнала. Далее выполняют фильтрацию полученных дополнительно спектральных боковых полос L-1. Это ограничение полосы частот, осуществляемое с помощью цифрового фильтра, определяет условия для расчёта (интерполяции) промежуточных L-1 отсчётов.

Спектр дополнительных ошибок дискретизации при заполнении нулями занимает более широкую полосу частот, благодаря чему шумы в полосе частот полезного сигнала становятся меньше, чем в случае без выполнения этой процедуры на величину:

$$\Delta SNR = 10Log(L) \text{ (Дб)} \qquad (6)$$

Таким образом, использование метода заполнения нулями позволяет уменьшить основной недостаток стохастического отбора данных – низкочастотный шум.

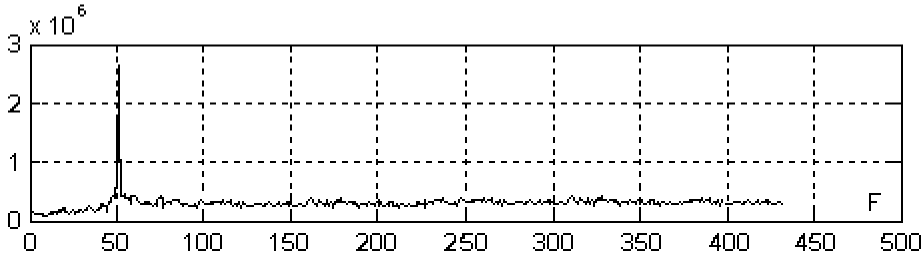

Рисунок 7 – Спектр сигнала, восстановленного после стохастической дискретизации с применением заполнения нулями.

Выводы.

1. При соблюдении теоремы Котельникова неравномерная дискретизация позволяет избежать высокочастотных алиасов. Исходя из этого, можно предположить, что сглаживание сигнала, как и восстановление с использованием полиномов высших порядков, даст лучшие результаты при стохастическом методе дискретизации, так как амплитуда низкочастотного шума, возникающего при этом методе, меньше чем высокочастотные ошибки при равномерной дискретизации.

2. После проведения экспериментов с дискретизацией сигналов различными способами и их последующим восстановлением был отмечен ряд особенностей стохастического метода дискретизации. В частности при восстановлении сигнала с помощью нулевой интерполяции метод стохастической дискретизации позволяет значительно снизить уровень высокочастотных ошибок восстановления (приблизительно в 20 раз), устранить явление алиасинга, имеющее место при равномерном отборе. Энергия посторонних высокочастотных составляющих равномерно распределяется по широкой полосе частот, исчезает регулярность и снижается амплитуда ошибочно принятого сигнала. Так же стохастически дискретизированный сигнал обеспечивает возможность корректного восстановления информации даже в случае несоблюдения теоремы Котельникова, что при практическом применении дает возможность использования более простых аппаратных решений при сборе и обработке информации, например, в SCADA-системах.

3. При организации многоканального сбора данных без жесткого ограничения спектра регистрируемых сигналов, стохастическая дискретизация позволяет снизить потребную пропускную способность каналов передачи данных, и сократить состав оборудования, в частности, отказаться от антиалиасных фильтров или применить на входах АЦП простые ФНЧ низкого порядка. При регистрации медленно меняющихся сигналов, тем не менее, существует возможность проникновения на вход АЦП широкополосной помехи, например, высших гармоник частоты сети переменного тока, а также случайных по времени мощных импульсов наводок. При стохастической дискретизации такие помехи приведут только к небольшому и кратковременному понижению отношения сигнал/шум, тогда как при традиционной ИКМ регистрируемый сигнал может быть необратимо искажен алиасами.

Литература

1. Р. Богнер, А. Константинидис. Введение в цифровую фильтрацию.- М.: Радио и связь, 1976.- 298 с.

2. Л.М. Гольденберг, Б.Д. Матюшкин. Цифровая обработка сигналов.- М.: Радио и связь, 1985.-385 с.

3. I. Bilinskis. Digital Alias-free Signal Processing.- London: Wiley, 2007.-430 p.