МИНИСТЕРТСВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ, МОЛОДЕЖИ
И СПОРТА УКРАИНЫ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ВЫСШЕЕ УЧЕБНОЕ ЗАВЕДЕНИЕ
«ДОНЕЦКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
АВТОМОБИЛЬНО-ДОРОЖНЫЙ ИНСТИТУТ

«УТВЕРЖДАЮ»
Директор АДИ ГВУЗ «ДонНТУ»
М. Н. Чальцев
10.07.2012

Кафедра «Высшая математика»

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ ПОДГОТОВКИ К МОДУЛЬНЫМ КОНТРОЛЯМ ПО ДИСЦИПЛИНЕ «ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА» (НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ И ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛЫ, ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ФУНКЦИИ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ) ДЛЯ СТУДЕНТОВ ВСЕХ СПЕЦИАЛЬНОСТЕЙ

2/22-2012-11

«РЕКОМЕНДОВАНО»
Учебно-методическими
комиссиями:
ф-та Э и У
Протокол № 5 от 15.01.2012 г.,
ф-та АД
Протокол № 6 от 15.02.2012 г.,
ф- та АТР
Протокол № 6 от 14.02.2012 г.,
ф-та ТТ
Протокол № 6 от 08.02.2012 г.

«РЕКОМЕНДОВАНО»
Кафедра
«Высшая математика»
Протокол № 18
от 18.01.2012 г.

Горловка – 2012

УДК 517.2(07)

Методические указания для подготовки к модульным контролям по дисциплине «Высшая математика» (неопределенный и определенный интегралы, дифференциальные уравнения и функции многих переменных) для студентов всех специальностей [Электронный ресурс] / составители: Л. И. Луценко, Е. С. Кисиль. – Электрон. данные. – Горловка: ГВУЗ «ДонНТУ» АДИ, 2012. – 1 электрон. опт. диск (CD–R); 12 см. – Систем. требования: Pentium; 32 MBRAM; WINDOWS 98/2000/NT/XP; MS Word 2000. – Название с титул. экрана.

Указания соответствуют разделам: неопределенный интеграл, определенный интеграл и его приложения, дифференциальные уравнения и функции многих переменных дисциплины «Высшая математика» для подготовки бакалавров. Содержат теоретические сведения, примеры решения типовых задач, набор задач для самостоятельного решения и подготовки к модульному контролю.

Методические указания предназначены для студентов первого курса всех специальностей.

Составители: Луценко Л. И., к. ф.-м. н., доц.
Кисиль Е. С.

Ответственный за выпуск: Вовк Л. П., д.т.н., проф.

Рецензент: Королев Е. А., к. ф.-м. н., доц.

СОДЕРЖАНИЕ

ВСТУПЛЕНИЕ

В современной науке, технике и экономике математические методы исследования, моделирования и проектирования играют все большую роль. Это обусловлено, прежде всего, быстрым ростом вычислительной техники, благодаря которой существенно расширяются возможности применения математики при решении конкретных задач.

Высшая математика является фундаментальной дисциплиной, так как является основой для успешного изучения общетеоретических и специальных дисциплин, которые предусмотрены учебными планами различных специальностей.

В данных методических указаниях достаточно подробно изложен теоретический материал по разделам «Неопределенный и определенный интегралы», «Дифференциальные уравнения» и «Функции многих переменных».

Известно, что овладеть математическими методами можно лишь научившись решать задачи, поэтому изложение теоретического материала сопровождается решением типовых задач по указанным темам. В конце каждого раздела приведены условия задач, решив которые студент сможет оценить свою готовность к сдаче очередного модуля, а также теоретические вопросы.

В разделах 11 – 13 приведены задания для индивидуальных типовых расчетов по изложенным в методических указаниях темам.

Желаем успехов!

1 НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

1.1 Понятие дифференциала функции

С понятием производной функции теснейшим образом связано другое фундаментальное понятие математического анализа – *дифференциал функции*.

Пусть $y = f(x)$ – функция, непрерывная при рассматриваемых значениях x и имеющая производную

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x).$$

Из этого равенства следует, что

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \varepsilon,$$

где ε – бесконечно малая величина при $\Delta x \to 0$. Отсюда находим, что

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + \varepsilon\Delta x.$$

Итак, *бесконечно малое приращение дифференцируемой функции* Δy *может быть представлено в виде суммы двух слагаемых: 1) величины, пропорциональной бесконечно малому приращению независимой переменной* Δx, *и 2) бесконечно малой величины более высокого порядка, чем* Δx.

Определение. Дифференциалом функции dy называется главная часть приращения функции, т. е.

$$dy = f'(x)\Delta x.$$

Поскольку $dx = \Delta x$, то

$$dy = f'(x)dx.$$

Зная производную, легко найти дифференциал, и наоборот. Поэтому действия нахождения производной и дифференциала данной функции носят общее название *дифференцирование.*

1.2 Понятие неопределенного интеграла

Интегральное исчисление является одним из основных разделов математического анализа, без которого невозможно углубление знаний высшей математики и ее применение в практических приложениях.

Неопределенное интегрирование – это действие обратное дифференцированию. При помощи дифференцирования мы по данной функции находим ее производную, а при помощи неопределенного интегрирования мы по данной производной восстанавливаем первоначальную функцию.

Иначе говоря, задача состоит в том, чтобы по известной функции *f(x)* найти такую функцию *F(x)*, что *F'(x) = f(x)*.

В этом случае *F(x)* называют *первообразной функцией* для данной *f(x)*, а общее выражение всех первообразных для *f(x)* называют неопределенным интегралом от функции *f(x)* и обозначают

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

где $f(x)$ – подынтегральная функция, $f(x)dx$ – подынтегральное выражение, независимая переменная x – переменная интегрирования, а C – произвольная постоянная.

1. 3 Основная таблица интегралов

1. $\int dx = x + C;$

2. $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad (n \neq -1);$

3. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C;$

4. $\int \cos x dx = \sin x + C;$

5. $\int \sin x dx = -\cos x + C;$

6. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C;$

7. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C;$

8. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C;$

9. $\int e^x dx = e^x + C;$

10. $\int \dfrac{dx}{1+x^2} = arctgx + C;$

11. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C;$

12. $\int chxdx = shx + C;$

13. $\int shxdx = chx + C.$

Примечание 1: таблицу необходимо помнить наизусть!

Примечание 2: при запоминании интегралов (1 – 13) целесообразно сопоставлять их с соответствующими формулами дифференцирования.

Дополним таблицу формулами не столь очевидными как (1 – 13), но часто встречающимися при нахождении интегралов

14. $\int tgxdx = -\ln|\cos x| + C$;

15. $\int ctgxdx = \ln|\sin x| + C$;

16. $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C;$

17. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C;$

18. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C;$

19. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C;$

20. $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left|tg \frac{x}{2}\right| + C;$

21. $\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left|tg\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C.$

Найти неопределенный интеграл можно только путем его приведения к одному из табличных. Поэтому для интегрирования функций необходимо:

1) знать наизусть таблицу интегралов;

2) владеть методами приведения данного интеграла к табличному.

Разнообразие методов приведения неопределенных интегралов к табличным делает задачу интегрирования значительно сложнее, чем задача дифференцирования. Поэтому почти весь теоретический материал по теме «Неопределенный интеграл» посвящен разбору методов интегрирования. Остановимся на основных их них.

1.4 Непосредственное интегрирование

Метод непосредственного интегрирования основан на преобразовании подынтегрального выражения к табличной форме путем:

1) тождественных преобразований подынтегральной функции;
2) применения простейших правил интегрирования.

Простейшие правила интегрирования

1. Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла, т. е.

$$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx\,.$$

2. Интеграл от алгебраической суммы функций равен алгебраической сумме интегралов от этих функций, т. е.

$$\int (f_1(x) \pm f_2(x))dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx.$$

3. Всякая формула интегрирования сохраняет свой вид при подстановке вместо независимой переменной любой дифференцируемой функции от нее, т. е. если

$$\int f(x)dx = F(x) + C\,,\ \text{то}\ \int f(u)du = F(u) + C\,,$$

где $u = \varphi(x)$ – любая дифференцируемая функция от *x*.

Из правила 3 следует, что для того, чтобы интеграл являлся табличным, необходимо (но не достаточно!), чтобы переменная интегрирования и аргумент подынтегральной функции были равны. Свойства дифференциала позволяют достичь такого равенства путем изменения переменной интегрирования.

Основная таблица интегралов, в силу правила 3, оказывается справедливой не зависимо от того, является ли переменная интегрирования независимой переменной или любой дифференцируемой функцией от нее. Таким образом, основная таблица сразу значительно расширяется.

22. $\int du = u + C$;

23. $\int u^n du = \dfrac{u^{n+1}}{n+1} + C, \quad (n \neq -1)$;

24. $\int \dfrac{du}{u} = \ln|u| + C$;

25. $\int \cos u du = \sin u + C$;

26. $\int \sin u du = -\cos u + C$;

27. $\int \dfrac{du}{\cos^2 u} = tgu + C$;

28. $\int \frac{du}{\sin^2 u} = -ctgu + C;$

29. $\int a^u dx = \frac{a^u}{\ln a} + C;$

30. $\int e^u dx = \quad e^u + C;$

31. $\int \frac{du}{1+u^2} = arctgu + C;$

32. $\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \arcsin u + C,$

33. $\int tgudu = -\ln|\cos u| + C;$

34. $\int ctgudu = \ln|\sin u| + C;$

35. $\int \frac{du}{a^2+u^2} = \frac{1}{a} arctg\frac{u}{a} + C;$

36. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \arcsin\frac{u}{a} + C\,;$

37. $\int \frac{du}{u^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right| + C\,;$

38. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln\left|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right| + C\,;$

39. $\int \frac{du}{\sin u} = \ln\left|tg\frac{u}{2}\right| + C\,;$

40. $\int \frac{du}{\cos u} = \ln\left|tg\left(\frac{u}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C.$

Пример 1.1 Найти интеграл $I = \int tg\sqrt{x} \cdot d(\sqrt{x}).$

Решение

$$I = \int tg\sqrt{x} \cdot d(\sqrt{x}) = -\ln\left|\cos\sqrt{x}\right| + C.$$

Результат интегрирования получен непосредственно из табличного интеграла по формуле 33.

Пример 1.2 Найти интеграл $I=\int \cos 5x dx.$

Решение

Среди табличных интегралов имеется интеграл (формула 25) от функции $\cos u$, однако данный интеграл не является табличным, т. к. переменная интегрирования x не равна аргументу $5x$ подынтегральной функции. Необходимо найти $d(5x)=5d(x)$, тогда

$$I=\int \cos 5x\cdot\frac{1}{5}d(5x)=\frac{1}{5}\int \cos 5x d(5x)=\frac{1}{5}\sin 5x+C.$$

Пример 1.3 Найти интеграл $I=\int \frac{1}{\sqrt{4x+3}}dx.$

Решение

$$I=\int \frac{1}{\sqrt{4x+3}}dx=\int (4x+3)^{-\frac{1}{2}}dx=\left[d(4x+2)=4dx\right]=\frac{1}{4}\int (4x+3)^{-\frac{1}{2}}d(4x+3)=$$

$$=\frac{1}{4}\cdot\frac{(4x+3)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}+C=\frac{\sqrt{4x+3}}{2}+C.$$

Примечание: при решении использована формула 23.

Пример 1.4 Найти интеграл $I=\int \frac{1}{x}\ln^5 x dx..$

Решение

$$I=\int \ln^5 x d(\ln x)=\frac{1}{6}\ln^6 x+C.$$

Примечание: при решении использована формула 23.

Пример 1.5 Найти интеграл $I=\int e^{3\cos x}\cdot \sin x dx.$

Решение

$$I=-\frac{1}{3}\int e^{3\cos x}d(3\cos x)=-\frac{1}{3}e^{3\cos x}+C.$$

Примечание: при решении использована формула 30.

После каждого изменения формы дифференциала целесообразно проводить самоконтроль, т. е. от новой формы дифференциала возвращаться к старой. Подынтегральное выражение при этом должно оставаться неизменным. Следует отметить, что при непосредственном интегрировании применение свойств интеграла и дифференциала, а также тож-дественные преобразования подынтегральной функции выполняются в комплексе.

Пример 1.6 Найти интеграл $I=\int \frac{2-x}{\sqrt{25-3x^2}}dx.$

Решение

Выполним тождественные преобразования подынтегральной функции и воспользуемся свойствами неопределенного интеграла. Получим

$$I=2\int \frac{dx}{\sqrt{25-3x^2}}-\int \frac{xdx}{\sqrt{25-3x^2}}.$$

Продолжаем выполнять тожественные преобразования над подынтегральными функциями в каждом из полученных интегралов и, применяя свойства дифференциала, меняем его форму (меняем переменную интегрирования)

$$I=2\int \frac{dx}{\sqrt{5^2-(\sqrt{3}x)^2}}-\int \frac{\frac{1}{2}d(x^2)}{\sqrt{25-3x^2}}=2\int \frac{\frac{1}{\sqrt{3}}d(\sqrt{3}x)}{\sqrt{5^2-(\sqrt{3}x)^2}}-\frac{1}{2}\int \frac{-\frac{1}{3}d(25-3x^2)}{(25-3x^2)^{\frac{1}{2}}}=$$

$$=\frac{2}{\sqrt{3}}\int \frac{d(\sqrt{3}x)}{\sqrt{5^2-(\sqrt{3}x)^2}}+\frac{1}{6}\int (25-3x^2)^{-\frac{1}{2}}d(25-3x^2)=$$

$$=\frac{2}{\sqrt{3}}\arcsin\frac{\sqrt{3}x}{5}+\frac{1}{6}(25-3x^2)^{\frac{1}{2}}2+C=$$

$$=\frac{2}{\sqrt{3}}\arcsin\frac{\sqrt{3}x}{5}+\frac{1}{3}\sqrt{25-3x^2}+C.$$

В последующих примерах сохраним лишь одни выкладки, которые проводятся так же, как и в предыдущих примерах.

Пример 1.7 Найти интеграл $I=\int \frac{dx}{\sin^2 x\cdot\cos^2 x}.$

Решение

1 способ:

$$I=\int \frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^2 x\cdot\cos^2 x}dx=\int\left(\frac{1}{\cos^2 x}+\frac{1}{\sin^2 x}\right)dx=tgx-ctgx+C.$$

2 способ:

$$I=\int\frac{4dx}{4\sin^2 x\cdot\cos^2 x}=\int\frac{4dx}{(2\sin x\cdot\cos x)^2}=4\int\frac{dx}{\sin^2 2x}=4\cdot\frac{1}{2}\int\frac{d(2x)}{\sin^2 2x}=-2ctg2x+C.$$

Отличие результатов интегрирования только внешнее.

Действительно:

$$-2ctg2x=-2\frac{\cos 2x}{\sin 2x}=-2\frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{2\sin x\cdot\cos x}=-\frac{\cos x}{\sin x}+\frac{\sin x}{\cos x}=tgx-ctgx.$$

Задачи для самостоятельного решения

Найти интегралы:

1. $\int\sin 7xdx;$
2. $\int(2x-1)^{100}dx,$
3. $\int\frac{dx}{3x-1},$
4. $\int\frac{3x+2}{2x-1}dx,$
5. $\int\frac{dx}{\sqrt{5x-7}},$
6. $\int\sin^3 x\cdot\cos xdx,$
7. $\int\frac{\ln^2 x}{x}dx,$
8. $\int\frac{e^x}{\cos^2(e^x)}dx,$
9. $\int x^2\sqrt{x^3+5}dx,$
10. $\int x^2e^{x^3}dx,$
11. $\int\frac{arctg^2 x}{1+x^2}dx,$
12. $\int\frac{1}{x\ln^4 x}dx.$

1.5 Метод подстановки (замена переменной) в неопределенном интеграле

Идея метода состоит в том, что интеграл $\int f(x)dx$ приводят к табличному (или хотя бы упрощают) путем замены переменной в подынтегральном выражении.

При этом возможны подстановки двух видов:

1. старую переменную x заменяют некоторой функцией от новой переменной t, т. е. $x=\varphi(t)$;
2. выражение содержащее x (некоторую функцию от x), заменяют новой переменной t, т. е. $\varphi(x)=t$.

В каждом из этих случаев необходимо также найти и заменить *dx,* а после интегрирования по переменной t возвратиться к старой переменной x.

Успех применения метода замены переменной зависит от удачно выбранной подстановки.

Пример 1.8 Найти интеграл $I=\int \dfrac{dx}{(5x+9)\cdot\sqrt{x}}$.

Решение

Пусть $x = t^2$, тогда $dx = 2tdt$ и интеграл принимает вид:

$$I=\int\frac{2tdt}{(5t^2+9)t}=2\int\frac{dt}{5t^2+9}=2\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}\int\frac{d(\sqrt{5}t)}{(\sqrt{5}t)^2+3^2}=$$

$$=\frac{2}{\sqrt{5}}\cdot\frac{1}{3}arctg\frac{\sqrt{5}t}{3}+C.$$

Из равенства $x=t^2$ следует, что $t=\sqrt{x}$. Возвращаясь к переменной *x*, окончательно получаем ответ: $I=\dfrac{2}{3\sqrt{5}}arctg\dfrac{\sqrt{5x}}{3}+C.$

Пример 1.9 Найти интеграл $I=\int\dfrac{(2x+3)dx}{\sqrt{4-(x-1)^2}}$.

Решение

Пусть $x-1=t$, тогда $x=t+1$ и $dx = dt$. В результате замены имеем

$$I=\int\frac{2(t+1)+3}{\sqrt{4-t^2}}dt=\int\frac{2t+5}{\sqrt{4-t^2}}dt=\int\frac{2t}{\sqrt{4-t^2}}dt+\int\frac{5}{\sqrt{4-t^2}}dt=$$

$$=-\int\frac{d(4-t^2)}{(4-t^2)^{\frac{1}{2}}}+5\int\frac{dt}{\sqrt{4-t^2}}=-2\sqrt{4-t^2}+5\arcsin\frac{t}{2}+C.$$

Возвращаясь к переменной *x*, получаем ответ:

$$I=-2\sqrt{4-(x-1)^2}+5\arcsin\frac{x-1}{2}+C.$$

Пример 1.10 Найти интеграл $I=\int\dfrac{\sin x\cos xdx}{\sqrt{3-\sin^2 x}}$.

Решение

Пусть $3-\sin^2 x=t$, тогда $dt=-2\sin x\cos xdt$, а значит

$$\sin x\cos xdx=-\frac{1}{2}dt\,.$$

Тогда $I=\int \frac{-\frac{1}{2}dt}{\sqrt{t}}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}+C=-\sqrt{t}+C=-\sqrt{3-\sin^2 x}+C.$

Примечание: заметим, что в методе подстановки можно и не вводить явно обозначение новой переменной, а применять известное «непосредственное» интегрирование. В таких случаях добиваются, чтобы переменная интегрирования (выражение, стоящее под знаком дифференциала) совпала с аргументом подынтегральной функции табличного интеграла.

Тогда нахождение предыдущего интеграла без применения замены переменной будет выглядеть так:

$$I=\int \frac{\sin x\cos x}{\sqrt{3-\sin^2 x}}dx=$$

$$=-\frac{1}{2}\int \frac{d(3-\sin^2 x)}{(3-\sin^2 x)^{\frac{1}{2}}}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{(3-\sin^2 x)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}+C=-\sqrt{3-\sin^2 x}+C.$$

Задачи для самостоятельного решения

Найти интегралы:

1. $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x+1}}$, 5. $\int \frac{e^{2x}dx}{\sqrt[4]{e^x+1}}$, 9. $\int \sqrt{1+\cos^2 x}\cdot\sin 2x\cdot\cos 2x dx$,

2. $\int \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}}$, 6. $\int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x\ln x}dx$, 10. $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{x-1}}$,

3. $\int \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}$, 7. $\int \frac{x+1}{x\sqrt{x-2}}dx$, 11. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}(\sqrt[3]{x}-1)}$,

4. $\int \frac{\sqrt{x}dx}{x(x+1)}$, 8. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}$, 12. $\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}$.

1.6 Интегрирование по частям

Метод интегрирования по частям позволяет «расщепить» исходный интеграл по формуле

$$\int u\cdot dv=uv-\int v\cdot du \qquad (1.1)$$

Цель применения данного метода состоит в том, чтобы в результате был получен табличный интеграл или интеграл проще исходного.

Этот метод приводит к успешному результату, если под знаком интеграла присутствует произведение разноименных функций, например, степенной и показательной, степенной и тригонометрической и т. д.

Для применения формулы интегрирования по частям надо подынтегральное выражение представить в виде произведения двух множителей: u и dv. Затем найти du и $v=\int dv$.

При нахождении v произвольная постоянная не влияет на результат интегрирования, и поэтому ее не пишут. За u в большинстве случаев принимают функции, интегралы от которых не являются табличными (логарифмические, обратные тригонометрические функции). Если под интегралом требуется понизить степень, то за u принимают многочлен или степенную функцию. Выражение dv всегда содержит dx и должно легко интегрироваться.

Укажем некоторые классы часто встречающихся интегралов, которые вычисляются методом интегрирования по частям.

I. Интегралы вида

$$\int p(x)\cdot e^{kx}dx, \qquad \int p(x)\sin kx\cdot dx, \qquad \int p(x)\cos kx\cdot dx,$$

где $p(x)$ – многочлен, а k – некоторое число, берутся по частям, если положить $u=p(x)$.

II. Интегралы вида

$$\int p(x)\cdot\ln kx\cdot dx, \qquad \int p(x)\cdot\arcsin kx\cdot dx, \qquad \int p(x)\arccos kx\cdot dx,$$

$$\int p(x)\cdot arctgkx\cdot dx, \qquad \int p(x)\cdot arcctgkx\cdot dx$$

берутся по частям, если положить $dv=p(x)dx$.

III. Интегралы вида

$$\int e^{ax}\cdot\cos bx\cdot dx, \qquad \int e^{ax}\cdot\sin bx\cdot dx,$$

где a, b – постоянные, берутся двукратным интегрированием по частям.

Пример 1.11 Найти интеграл $I=\int\ln x\cdot dx$.

Решение

Положим $u=\ln x$; $dv=dx$, откуда $du=\dfrac{1}{x}dx$; $v=\int dx=x$.

Тогда по формуле (1. 1) $I=\ln x\cdot x-\int x\cdot\dfrac{1}{x}dx=x\cdot\ln x-x+C$.

Пример 1.12 Найти интеграл $I = \int x^3 \cdot \ln x \cdot dx.$

Решение

Положим $u = \ln x$; $dv = x^3 dx$, откуда $du = \frac{1}{x}dx$; $v = \int x^3 \cdot dx = \frac{1}{4}x^4$.

Тогда

$$I = \frac{1}{4} \cdot x^4 \cdot \ln x - \int \frac{1}{4} \cdot x^4 \cdot \frac{1}{x}dx = \frac{1}{4} \cdot x^4 \cdot \ln x - \frac{1}{4}\int x^3 dx = \frac{1}{4}x^4 \ln x - \frac{1}{16} \cdot x^4 + C.$$

Пример 1.13 Найти интеграл $I = \int xe^{-x}dx.$

Решение

Положим $u = x$; $dv = e^{-x}dx$, откуда $du = dx$; $v = \int e^{-x}dx = -e^{-x}$.

В итоге $I = -xe^{-x} + \int e^{-x}dx = -xe^{-x} - e^{-x} + C.$

Примечание: преобразования, необходимые при применении метода интегрирования по частям, удобно выделять в квадратных скобках.

Пример 1.14 Найти интеграл $I = \int x^2 \cos 5x dx.$

Решение

$$I = \int x^2 \cdot \cos 5x \cdot dx = \begin{bmatrix} u = x^2 \Rightarrow du = 2xdx; \\ dv = \cos 5xdx \Rightarrow v = \dfrac{\sin 5x}{5} \end{bmatrix} =$$

$$= x^2 \cdot \frac{\sin 5x}{5} - \int \frac{1}{5}\sin 5x \cdot 2x \cdot dx = \frac{1}{5}x^2 \sin 5x - \frac{2}{5}\int x \sin 5xdx =$$

$$= \begin{bmatrix} u = x \Rightarrow du = dx \\ dv = \sin 5xdx \Rightarrow v = -\dfrac{1}{5}\cos 5x \end{bmatrix} = \frac{1}{5}x^2 \cdot \sin 5x - \frac{2}{5}(-\frac{1}{5}x \cdot \cos 5x +$$

$$+\frac{1}{5}\int \cos 5xdx) = \frac{1}{5}x^2 \cdot \sin 5x + \frac{2}{25}x\cos 5x - \frac{2}{25} \cdot \frac{1}{5}\sin 5x + C.$$

Задачи для самостоятельного решения

Найти интегралы:

1. $\int (4 - 3x)e^{-3x}dx,$ 5. $\int xarctgxdx,$ 9. $\int xarctgxdx,$

2. $\int x^2 \ln x dx$, 6. $\int x^2 \ln x dx$, 10. $\int \sin \sqrt[3]{x} dx$,

3. $\int x \cos 3x dx$, 7. $\int arctg \sqrt{x} dx$, 11. $\int \ln^2 x dx$,

4. $\int x^2 \sin 2x dx$, 8. $\int \ln(x^2+1) dx$, 12. $\int x^3 e^x dx$.

Примечание: при решении примеров 9, 10 сначала применить замену переменной, а потом интегрирование по частям.

1.7 Интегрирование выражений, содержащих квадратный трехчлен в знаменателе

Выделен особый класс интегралов, содержащих квадратный трехчлен в знаменателе. Общий вид таких интегралов:

$$J = \int \frac{dx}{ax^2+bx+c}, \quad J = \int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c} dx,$$

$$J = \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}, \quad J = \int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx.$$

Рекомендуемая последовательность нахождения таких интегралов:
а) в знаменателе выделяется полный квадрат:

$$ax^2+bx+c = a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right) = a\left(x^2+2x\cdot\frac{b}{2a}+\frac{b^2}{4a^2}-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right) =$$

$$= a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}\right).$$

б) осуществляется замена переменной $x+\frac{b}{2a}=t$, приводящая исходный интеграл к табличному.

Пример 1.15 Найти интеграл $J = \int \frac{dx}{3x^2+2x+5}$.

Решение

$$J = \int \frac{dx}{3x^2+2x+5} = \left[\begin{array}{l} 3x^2+2x+5 = 3\left(x^2+\frac{2}{3}x+\frac{5}{3}\right) = \\ = 3\left((x^2+\frac{2}{3}x+\frac{1}{9})-\frac{1}{9}+\frac{5}{3}\right) = 3\left((x+\frac{1}{3})^2\right)+\frac{14}{9} \end{array}\right] =$$

$$=\frac{1}{3}\int\frac{dx}{\left(x+\frac{1}{3}\right)^2+\frac{14}{9}}=\begin{bmatrix} x+\frac{1}{3}=t \\ x=t-\frac{1}{3} \\ dx=dt \end{bmatrix}=\frac{1}{3}\int\frac{dt}{t^2+\frac{14}{9}}=$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{\sqrt{14}}arctg\frac{3t}{\sqrt{14}}+C=\frac{1}{\sqrt{14}}arctg\frac{3x+1}{\sqrt{14}}+C.$$

Пример 1.16 Найти интеграл $J=\int\frac{2x-1}{x^2+4x+5}dx.$

Решение

$$J=\int\frac{2x-1}{x^2+4x+5}dx=\left[x^2+4x+5=(x+2)^2+1\right]=\int\frac{2x-1}{(x+2)^2+1}dx=$$

$$=\begin{bmatrix} x+2=t \\ x=t-2 \\ dx=dt \end{bmatrix}=\int\frac{2(t-2)-1}{t^2+1}dt=\int\frac{2t-5}{t^2+1}dt=\int\frac{2tdt}{t^2+1}-5\int\frac{dt}{t^2+1}=$$

$$=\ln(t^2+1)-5arctgt+C=\ln\left((x+2)^2+1\right)-5arctg(x+2)+C.$$

Пример 1.17 Найти интеграл $J=\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+5}}.$

Решение

$$J=\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+5}}=\begin{bmatrix} \text{Смотри} \\ \text{разложение} \\ \text{примера } 1.16 \end{bmatrix}=\int\frac{dx}{\sqrt{(x+2)^2+1}}=\begin{bmatrix} x+2=t \\ dx=dt \end{bmatrix}=\int\frac{dt}{\sqrt{t^2+1}}=$$

$$=\begin{bmatrix} \text{Смотри} \\ \text{табличный} \\ \text{интеграл } 19 \end{bmatrix}=\ln\left|t+\sqrt{t^2+1}\right|+C=\ln\left|x+2+\sqrt{(x+2)^2+1}\right|+C.$$

Пример 1.18 Найти интеграл $J=\int\frac{(2x+1)dx}{\sqrt{x^2+4x+5}}.$

Решение

$$J=\int\frac{(2x+1)dx}{\sqrt{x^2+4x+5}}=\begin{bmatrix}\textit{Смотри}\\ \textit{разложение}\\ \textit{примера}\ \ 1.16\end{bmatrix}=\int\frac{(2x+1)dx}{\sqrt{(x+2)^2+1}}=\begin{bmatrix}x+2=t\\ dx=dt\\ x=t-2\end{bmatrix}=\int\frac{(2t-3)dt}{\sqrt{t^2+1}}=$$

$$=2\sqrt{t^2+1}-3\ln\left|t+\sqrt{t^2+1}\right|+C=$$

$$=\int\frac{2t}{\sqrt{t^2+1}}dt-3\int\frac{dt}{\sqrt{t^2+1}}=\int\left(t^2+1\right)^{-\frac{1}{2}}d(t^2+1)-3\int\frac{dt}{\sqrt{t^2+1}}=$$

$$=\left[t=x+2\right]=2\sqrt{(x+2)^2+1}-3\ln\left|x+2+\sqrt{(x+2)^2+1}\right|+C.$$

Задачи для самостоятельного решения

Найти интегралы:

1. $\int\frac{dx}{x^2+x+5}$,
2. $\int\frac{x-1}{x^2+x+1}dx$,
3. $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+10x+24}}$,
4. $\int\frac{5x+2}{\sqrt{x^2+3x-4}}dx$,
5. $\int\frac{dx}{3x^2-8x+9}$,
6. $\int\frac{xdx}{2x^2+2x+5}$,
7. $\int\frac{xdx}{\sqrt{2x^2+5x+3}}$,
8. $\int\frac{dx}{\sqrt{2-x-2x^2}}$,
9. $\int\frac{x-8}{\sqrt{3+2x-x^2}}dx$,
10. $\int\frac{dx}{\sqrt{9-x-x^2}}$,
11. $\int\frac{x-7}{\sqrt{3x^2-2x+1}}dx$,
12. $\int\frac{dx}{\sqrt{5+3x-x^2}}$.

1.8 Интегрирование рациональных дробей

Важнейшим классом элементарных функций, интегралы от которых находятся при помощи достаточно простой последовательности действий, является *класс рациональных функций*. Всякая рациональная функция $R(x)$ может быть представлена в виде дроби $\frac{P(x)}{Q(x)}$, где $P(x)$ и $Q(x)$ – многочлены, т. е.

$$R(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}.$$

Перед интегрированием рациональной дроби $\frac{P(x)}{Q(x)}$ надо выполнить следующие алгебраические преобразования:

а) если дана неправильная (степень многочлена числителя не меньше, чем степень многочлена знаменателя) рациональная дробь, то путём деления числителя на знаменатель необходимо выделить целую часть, т. е. представить дробь в виде

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=M(x)+\frac{P_1(x)}{Q(x)},$$

где $M(x)$ – целый многочлен, а $\frac{P_1(x)}{Q(x)}$ – правильная рациональная дробь;

б) разложить знаменатель дроби на линейные и простые квадратные множители:

$$Q(x)=(x-a)^m\cdot\ldots\cdot(x^2+px+q)^n\cdot\ldots$$

в) правильную рациональную дробь $\frac{P_1(x)}{Q(x)}$ представить в виде суммы простейших дробей:

$$\frac{R(x)}{Q(x)}=\frac{A_1}{(x-a)^m}+\frac{A_2}{(x-a)^{m-1}}+\ldots+\frac{A_m}{x-a}+\ldots+\frac{B_1x+C_1}{(x^2+px+q)^n}+$$
$$+\frac{B_2x+C_2}{(x^2+px+q)^{n-1}}+\ldots+\frac{B_nx+C_n}{x^2+px+q}+\ldots$$

г) правую часть последнего равенства привести к общему знаменателю. Она примет вид $\frac{R^*(x)}{Q(x)}$, где $R^*(x)$ – многочлен тождественно равный $R(x)$, а его коэффициенты выражены через константы $A_1,A_2,\ldots,B_n,C_n$;

д) записать тождество $R(x)\equiv R^*(x)$.

е) составить и решить систему линейных уравнений относительно неопределённых коэффициентов $A_1,A_2,\ldots,B_n,C_n$.

Уравнения системы можно получать двумя способами:

1) приравнять коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой части тождества;

2) подставить в тождество любые (удобные для вычисления) значения x.

Примечание: Для составления системы полезно комбинировать оба способа получения уравнений.

ж) вычисленные значения $A_1, A_2, ..., B_n, C_n$ подставить в разложение дроби и перейти к интегрированию. В результате интегрирование рациональной дроби сведётся к нахождению интегралов от многочлена $M(x)$ и от простейших рациональных дробей типа:

$$\frac{A}{x-a};\ \frac{A}{(x-a)^m};\ \frac{Ax+B}{x^2+px+q};\ \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}.$$

Пример 1.19 Найти интеграл $I = \int \frac{2x^4 - x^3 + 3x + 1}{x^3 - 4x} dx.$

Решение

Под интегралом имеем неправильную рациональную дробь, так как степень многочлена, находящегося в числителе больше степени многочлена знаменателя. Поэтому прежде всего выделим целую часть этой дроби, разделив числитель на знаменатель.

В результате подынтегральная дробь примет вид:

$$\frac{2x^4 - x^3 + 3x + 1}{x^3 - 4x} = 2x - 1 + \frac{8x^2 - x + 1}{x^3 - 4x}.$$

Следовательно,

$$I = \int \frac{2x^4 - x^3 + 3x + 1}{x^3 - 4x} dx =$$

$$= \int 2x dx - \int dx + \int \frac{8x^2 - x + 1}{x^3 - 4x} dx = x^2 - x + \int \frac{8x^2 - x + 1}{x^3 - 4x} dx = x^2 - x + I_1.$$

Найдем интеграл $I_1 = \int \frac{8x^2 - x + 1}{x^3 - 4x} dx$ от правильной рациональной дроби.

Для этого разложим ее на простейшие дроби. Такое разложение зависит от количества и вида корней знаменателя.

В нашем случае знаменатель имеет три корня (высшая степень неизвестного), а чтобы определить их вид необходимо знаменатель разложить на простые множители, а именно:

$$x^3 - 4x = x(x^2 - 4) = x(x-2)(x+2).$$

Такое разложение позволяет сделать вывод о том, что корни знаменателя являются действительными и разными (простыми).

Поэтому подынтегральная дробь может быть разложена на простейшие дроби следующим образом:

$$\frac{8x^2-x+1}{x^3-4x}=\frac{8x^2-x+1}{x(x-2)(x+2)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x+2}=$$

$$=\frac{A(x-2)(x+2)+Bx(x+2)+Cx(x-2)}{x(x-2)(x+2)}.$$

Из равенства дробей и их знаменателей следует тождественное равенство их числителей:

$$8x^2-x+1\equiv A(x-2)(x+2)+Bx(x+2)+Cx(x-2).$$

Для нахождения A, B и C подставим в правую и левую части тождества произвольные значения x. Удобнее, если они совпадут с корнями знаменателя.

В результате:

$$\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \\ x=-2 \end{array}\left|\begin{cases} 1=-4A, \\ 8\cdot 2^2-2+1=0+B\cdot 2\cdot 4+0, \\ 8\cdot(-2)^2-(-2)+1=0+0+C(-2)(-4), \end{cases}\right. \Rightarrow \begin{array}{l} A=-\dfrac{1}{4}, \\ B=\dfrac{31}{8}, \\ C=\dfrac{35}{8}. \end{array}$$

Итак, разложение исходной рациональной дроби на простейшие дроби имеет вид:

$$\frac{8x^2-x+1}{x^3-4x}=-\frac{1}{4x}+\frac{31}{8(x-2)}+\frac{35}{8(x+2)}.$$

Тогда

$$I=x^2+x+\int\left(-\frac{1}{4x}+\frac{31}{8(x-2)}+\frac{35}{8(x+2)}\right)dx=$$

$$=x^2+x-\frac{1}{4}\int\frac{dx}{x}+\frac{31}{8}\int\frac{dx}{x-2}+\frac{35}{8}\int\frac{dx}{x+2}=$$

$$=x^2+x-\frac{1}{4}\ln|x|+\frac{31}{8}\ln|x-2|+\frac{35}{8}\ln|x+2|+C.$$

Пример 1.20 Найти интеграл $I=\int\frac{4x^2+5}{(x+2)^3\cdot(x+1)}dx.$

Решение

Имеем интеграл от правильной рациональной дроби со знаменателем, разложенным на простые множители.

Обратим внимание на то, что множитель $(x+2)^3$ входит в знаменатель в третьей ($m=3$) степени, следовательно корень знаменателя $x=-2$ имеет кратность, равную 3, а значит в разложении дроби на простейшие ему соответствует сумма трёх дробей, т. е.

$$\frac{4x^2+5}{(x+2)^3(x+1)}=\frac{A_1}{(x+2)^3}+\frac{A_2}{(x+2)^2}+\frac{A_3}{x+2}+\frac{B}{x+1}.$$

В правой части полученного равенства приводим сумму дробей к общему знаменателю $(x+2)^3\cdot(x+1)$ и приравниваем числители.

Получаем

$$4x^2+5\equiv A_1(x+1)+A_2(x+2)(x+1)+A_3(x+2)^2(x+1)+B(x+2)^3.$$

Для нахождения A_1, A_2, A_3, B необходимо составить систему из 4-х уравнений. Получим её комбинированным приёмом, т. е. часть уравнений составим путём приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях x в левой и правой частях, а часть – подставляя вместо x значения корней знаменателя или любые другие удобные для вычислений значения x.

Получаем

$$\begin{array}{l|l} x=-2 & \\ x=-1 & \\ x=0 & \\ x^3 & \end{array}\left\{\begin{array}{l} 21=-A_1, \\ 9=B, \\ 5=A_1+2A_2+4A_3+8B, \\ 0=A_3+B, \end{array}\right. \Rightarrow \begin{array}{l} A_1=-21, \\ B=9, \\ A_2=-5, \\ A_3=-9. \end{array}$$

Примечание: Последнее уравнение системы получено путём приравнивания коэффициентов при x^3.

Итак,

$$\frac{4x^2+5}{(x+2)^3(x+1)}=\frac{-21}{(x+2)^3}+\frac{-5}{(x+2)^2}+\frac{-9}{x+2}+\frac{9}{x+1}.$$

Следовательно,

$$I=\int\left(\frac{-21}{(x+2)^3}+\frac{-5}{(x+2)^2}+\frac{-9}{x+2}+\frac{9}{x+1}\right)dx=$$

$$=-21\int\frac{dx}{(x+2)^3}-5\int\frac{dx}{(x+2)^2}-9\int\frac{dx}{x+2}+9\int\frac{dx}{x+1}=$$

$$=-21\frac{(x+2)^{-2}}{-2}-5\frac{(x+2)^{-1}}{-1}-9\ln|x+2|+9\ln|x+1|+C.$$

Пример 1.21 Найти интеграл $I=\int\frac{4x^2+1}{(x+2)^2\cdot(x^2+4x+5)}dx.$

Решение

Квадратичный множитель x^2+4x+5 - простой и входит в знаменатель в первой степени. Поэтому в разложении дроби на простейшие ему соответствует дробь $\frac{Bx+C}{x^2+4x+5}$.

Следовательно,

$$\frac{4x^2+1}{(x+2)^2\cdot(x^2+4x+5)}=\frac{A_1}{(x+2)^2}+\frac{A_2}{x+2}+\frac{Bx+C}{x^2+4x+5}.$$

В результате приведения правой части к общему знаменателю получим равенство числителей

$$4x^2+1\equiv A_1(x^2+4x+5)+A_2(x+2)(x^2+4x+5)+(Bx+C)(x+2)^2.$$

Комбинированным приёмом составляем систему уравнений и решаем её.

$$\begin{array}{l|l} x=-2 & \\ x=0 & \\ x=-1 & \\ x^3 & \end{array}\left\{\begin{array}{l} 15=A_1, \\ -1=5A_1+10A_2+4C, \\ 3=2A_1+2A_2-B+C, \\ 0=A_2+B, \end{array}\right. \Rightarrow \begin{array}{l} A_1=15, \\ A_2=-16, \\ B=16, \\ C=21. \end{array}$$

Искомый интеграл принимает вид:

$$I=\int\left(\frac{15}{(x+2)^2}+\frac{-16}{x+2}+\frac{16x+21}{x^2+4x+5}\right)dx=15\int\frac{dx}{(x+2)^2}-16\int\frac{dx}{x+2}+\int\frac{16x+21}{x^2+4x+5}dx=$$

$$=15\frac{(x+2)^{-1}}{-1}-16\ln|x+2|+\int\frac{16x+21}{(x+2)^2+1}dx=\begin{bmatrix} x+2=t, \\ x=t-2, \\ dx=dt. \end{bmatrix}=$$

$$=\frac{-15}{x+2}-16\ln|x+2|+\int\frac{16t-11}{t^2+1}dt=$$

$$=\frac{-15}{x+2}-16\ln|x+2|+16\int\frac{t}{t^2+1}dt-11\int\frac{dt}{t^2+1}=$$

$$=-\frac{15}{x+2}-16\ln|x+2|+8\ln(t^2+1)-11arctgt+C$$

$$=\frac{-15}{x+2}-16\ln|x+2|+8\ln((x+2)^2+1)-11arctg(x+2)+C.$$

Задачи для самостоятельного решения

Найти интегралы:

1. $\int\frac{x^5+9x^3-4}{x^2+3x}dx,$ 2. $\int\frac{x^3+x^2-x-3}{x^4-x^2}dx,$ 3. $\int\frac{x^3+x+2}{(x+2)x^3}dx,$

4. $\int\frac{x^3}{x^2-4x+3}dx,$ 5. $\int\frac{2x^3+x+1}{(x+1)x^3}dx,$ 6. $\int\frac{3x-8}{(x^2-1)(x^2+4)}dx,$

1.9 Интегрирование тригонометрических выражений

Интегрирование выражений, содержащих тригонометрические функции, отличается многообразием используемых приемов и требует умелого применения тригонометрических формул в тождественных преобразованиях.

Рассмотрим несколько видов указанных интегралов.

1.9.1 Интегралы вида $\int R(\sin x,\cos x)dx,$ где $R(\sin x,\cos x)$ – рациональная функция от синуса и косинуса.

Такие интегралы удобно находить с помощью универсальной тригонометрической подстановки вида $tg\frac{x}{2}=t.$ При этом необходимо воспользоваться формулами, выражающими тригонометрические функции через тангенс половинного аргумента, а именно:

$$\sin x = \frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}, \qquad \cos x = \frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}.$$

В результате применения универсальной тригонометрической подстановки получаем

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \qquad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Поскольку $x = 2arctgt$, то $dx = \dfrac{2dt}{1+t^2}$.

а) Если $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$, то применяют подстановку $tgx = t$.

Тогда $\sin x = \dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}$; $\cos x = \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}$; $dx = \dfrac{dt}{\sqrt{1+t^2}}$.

б) Если $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, применяют подстановку $\cos x = t$.

Тогда $\sin x = \sqrt{1-t^2}$; $dx = \dfrac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$.

в) Если $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, применяют подстановку $\sin x = t$.

Тогда $\cos x = \sqrt{1-t^2}$; $dx = \dfrac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$.

Пример 1.22 Найти интеграл $J = \displaystyle\int \frac{dx}{\cos x + 2\sin x + 3}$.

Решение

Применим универсальную подстановку $\sin x = \dfrac{2t}{1+t^2}, \cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$,

$dx = \dfrac{2dt}{1+t^2}$.

Получим

$$J = \int \frac{1}{\frac{1-t^2}{1+t^2} + \frac{4t}{1+t^2} + 3} \cdot \frac{2dt}{1+t^2} = \int \frac{2dt}{1-t^2+4t+3+3t^2} dt = \int \frac{dt}{t^2+2t+2} =$$

$$=\int\frac{dt}{(t+1)^2+1}=arctg(t+1)+C=arctg\left(tg\frac{x}{2}+1\right)+C.$$

1.9.2 Интегралы вида $\int\sin^m x\cdot\cos^n xdx,$ где m и n – целые числа. При этом возможны случаи:

а) если хотя бы одно из m и n нечетное, то проще всего сделать замену $\sin x=t$ или $\cos x=t.$

Пример 1.23 Найти интеграл $J=\int\sin^4 x\cos^3 xdx.$

Решение

$$J=\int\sin^4 x\cos^3 xdx=\int\sin^4 x\cdot\cos^2 x\cdot\cos xdx=$$

$$=\int\sin^4 x(1-\sin^2 x)d(\sin x)=[\sin x=t]=$$

$$=\int t^4(1-t^2)dt=\int t^4dt-\int t^6dt=\frac{t^5}{5}-\frac{t^7}{7}+C=\frac{\sin^5 x}{5}-\frac{\sin^7 x}{7}+C.$$

б) если m и n – четные положительные числа, то необходимо понизить степень, используя известные формулы:

$$\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2},\quad \cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}.$$

Пример 1.24 Найти интеграл $J=\int\cos^4 xdx.$

Решение

$$J=\int\cos^4 xdx=\int\left(\cos^2 x\right)^2dx=\int\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2dx=\int\frac{1+2\cos 2x+\cos^2 2x}{4}dx=$$

$$=\frac{1}{4}\int dx+\frac{1}{2}\int\cos 2xdx+\frac{1}{4}\int\cos^2 2xdx=\frac{x}{4}+\frac{\sin 2x}{4}+\frac{1}{4}\int\frac{1+\cos 4x}{2}dx=$$

$$=\frac{x}{4}+\frac{\sin 2x}{4}+\frac{x}{8}+\frac{\sin 4x}{32}+C=\frac{3x}{8}+\frac{\sin 2x}{4}+\frac{\sin 4x}{32}+C.$$

1.9.3 Интегралы вида

$$\int\sin mx\cos nxdx;\quad \int\sin mx\sin nxdx;\quad \int\cos mx\cos nxdx.$$

Для нахождения таких интегралов необходимо произведение тригонометрических функций представить в виде суммы с помощью следующих формул:

$$\sin mx \cdot \cos nx = \frac{1}{2}\left(\sin(m+n) + \sin(m-n)\right);$$

$$\cos mx \cdot \cos nx = \frac{1}{2}\left(\cos(m+n) + \cos(m-n)\right);$$

$$\sin mx \cdot \sin nx = \frac{1}{2}\left(\cos(m-n) - \cos(m+n)\right).$$

Пример 1.25 Найти интеграл $J = \int \cos 9x \cdot \cos 4x dx.$

Решение

$$J = \int \cos 9x \cdot \cos 4x dx = \frac{1}{2}\int \left(\cos 13x + \cos 5x\right)dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int \cos 13x dx + \frac{1}{2}\int \cos 5x dx = \frac{\sin 13x}{26} + \frac{\sin 5x}{10} + C.$$

Задачи для самостоятельного решения

Найти интегралы:

1. $\int \frac{\cos x}{1 + \cos x + \sin x} dx,$ 2. $\int \sin^3 x dx,$ 3. $\int \cos^4 \frac{x}{4} dx,$

4. $\int \frac{\sin x}{5 + 3\sin x} dx,$ 5. $\int \sin^4 x \cos^4 x dx,$ 6. $\int \sin 7x \cos 3x dx.$

1.10 Интегрирование некоторых иррациональностей

1.10.1 Интегралы вида $\int R(x; \sqrt{a^2 - x^2}) dx$.

Рекомендуемая замена $x = a\sin t$. Тогда $\sqrt{a^2 - x^2} = a\cos t, \quad dx = a\cos t dt.$

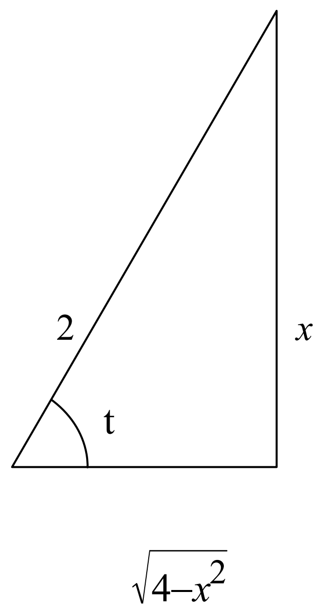
Пример 1.26 Найти интеграл $J = \int \frac{dx}{x^2\sqrt{4 - x^2}}.$

Решение

Сделаем замену $x = 2\sin t$. Тогда $\sqrt{4 - x^2} = 2\cos t, \quad dx = 2\cos t dt.$

$$J = \int \frac{dx}{x^2\sqrt{4 - x^2}} = \int \frac{2\cos t dt}{(2\sin t)^2 2\cos t} = \frac{1}{4}\int \frac{dt}{\sin^2 t} = -\frac{1}{4} ctgt + C.$$

Переход к первоначальной переменной осуществим с помощью прямоугольного треугольника.



$$\sin t = \frac{x}{2}, \quad ctgt = \frac{\sqrt{4-x^2}}{x}$$

Ответ: $J = -\frac{\sqrt{4-x^2}}{4x} + C.$

Примечание: при нахождении таких интегралов может быть использована замена $x = a\cos t$.

1.10.2 Интегралы вида $\int R\left(x;\sqrt{x^2-a^2}\right)dx.$

Рекомендуемая замена $x = \frac{a}{\sin t}.$

Тогда

$$\sqrt{x^2-a^2} = \sqrt{\frac{a^2}{\sin^2 t} - a^2} = \frac{a\cos t}{\sin t}, \quad dx = \frac{-a\cos t}{\sin^2 t}dt.$$

Пример 1.27 Найти интеграл $J = \int \frac{\sqrt{x^2-25}}{x}dx.$

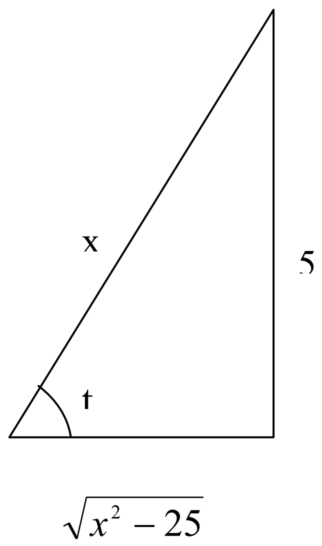
Решение

$$J = \int \frac{\sqrt{x^2-25}}{x}dx = \left[x = \frac{5}{\sin t}; \quad dx = \frac{-5\cos t}{\sin^2 t}dt; \quad \sqrt{x^2-25} = \frac{5\cos t}{\sin t}\right] =$$

$$= -5\int \frac{5\cos t \sin t \cos t}{5\sin t \sin^2 t}dt = -5\int \frac{\cos^2 t}{\sin^2 t}dt = -5\int \frac{1-\sin^2 t}{\sin^2 t}dt = -5\int \frac{dt}{\sin^2 t} + 5\int dt =$$

$$= 5ctgt + 5t + C.$$

Переход к старой переменной осуществим с помощью прямоугольного треугольника.



$$\sin t=\frac{5}{x},\ ctgt=\frac{\sqrt{x^2-25}}{5}.$$

Ответ: $J=\sqrt{x^2-25}+\arcsin\frac{5}{x}+C.$

1.10.3 Интегралы вида $\int R(x;\sqrt{a^2+x^2})dx.$

Рекомендуемая замена

$$x=atgt;\ \ dx=\frac{a}{\cos^2 t}dt;\ \ \sqrt{a^2+x^2}=\sqrt{a^2(1+tg^2t)}=\frac{a}{\cos t}.$$

Пример 1. 28 Найти интеграл $J=\int\frac{1+x}{\sqrt{(16+x^2)^3}}dx.$

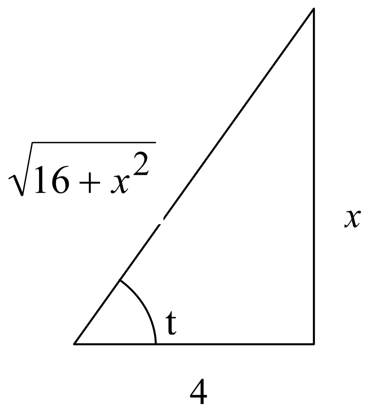
Решение

$$J=\int\frac{1+x}{\sqrt{(16+x^2)^3}}dx=\begin{bmatrix}x=4tgt\\ dx=\dfrac{4dt}{\cos^2 t}\end{bmatrix}=\int\frac{1+4tgt}{\sqrt{(16+16tg^2t)^3}}\cdot\frac{4dt}{\cos^2 t}=$$

$$=\frac{4}{4^3}\int\frac{(1+4tgt)dt}{\cos^2 t\sqrt{(1+tg^2t)^3}}=\frac{1}{16}\int\frac{(1+4tgt)dt}{\dfrac{1}{\cos^3 t}\cdot\cos^2 t}=\frac{1}{16}\int(1+4tgt)\cos tdt=$$

$$=\frac{1}{16}\int(\cos t+4\sin t)dt=\frac{1}{16}(\sin t-4\cos t)+C.$$

Возвратимся к исходной переменной x. Для этого строим прямоугольный треугольник, соответствующий условию $tgt=\frac{x}{4}$.



Тогда $\sin t = \dfrac{x}{\sqrt{16+x^2}}$, $\cos t = \dfrac{4}{\sqrt{16+x^2}}$.

Ответ: $J = \dfrac{1}{16}\left(\dfrac{x}{\sqrt{16+x^2}} - \dfrac{16}{\sqrt{16+x^2}}\right) + C = \dfrac{x-16}{16\sqrt{16+x^2}} + C.$

Задачи для самостоятельного решения

Найти интегралы:

1. $\int \sqrt{4-x^2}\,dx$, 2. $\int \dfrac{\sqrt{x^2-9}}{x^4}dx$, 3. $\int \dfrac{dx}{(9+x^2)\sqrt{9+x^2}}$,

4. $\int \dfrac{x^2}{\sqrt{16-x^2}}dx$, 5. $\int \dfrac{dx}{x^2\sqrt{x^2-16}}$, 6. $\int x^2\sqrt{9-x^2}\,dx$,

7. $\int \dfrac{dx}{(9+x^2)\sqrt{9+x^2}}$, 8. $\int \dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x}dx$, 9. $\int \dfrac{\sqrt{x^2+4}}{x}dx$.

2 ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

2.1 Определенный интеграл как предел интегральной суммы

Рассмотрим непрерывную функцию $f(x)$, определенную на отрезке $[a;b]$. Разобьем отрезок $[a;b]$ на n частей точками деления $a = x_0; x_1; ...; x_n = b$ таким образом, что $x_0 < x_1 < .... < x_{n-1} < x_n$.

Обозначим $\Delta x_1 = x_1 - x_0;\ \Delta x_2 = x_2 - x_1; ....; \Delta x = x_n - x_{n-1}$.

В каждом интервале $(x_0; x_1)$, (x_1, x_2), ..., (x_{n-1}, x_n) выберем произвольную точку ξ_1, $\xi_2, ...,$ ξ_n и найдем значения функции в этих точках.

Составим сумму

$$S_n = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + ... + f(\xi_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

Эта сумма называется *интегральной суммой* для функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$. Если число разбиений n неограниченно увеличивать, то $\max \Delta x_i \to 0$. Если при этом интегральная сумма S_n имеет предел, не зависящий от способа разбиения отрезка $[a;b]$ и от выбора точек ξ_i, то функция $f(x)$ называется *интегрируемой* на $[a;b]$, а сам предел называется *определенным интегралом* от функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$ и обозначается символом

$$\int_a^b f(x)dx,$$

где a и b – соответственно нижний и верхний пределы интегрирования.

2.2 Свойства определенных интегралов

1. $\int_a^a f(x)dx = 0.$

2. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$

3. $\int_a^b k \cdot f(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$, где k – постоянное число.

4. $\int\limits_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int\limits_a^b f(x)dx \pm \int\limits_a^b g(x)dx.$
5. Если интервал интегрирования $[a;b]$ разбит на две части $[a;c]$ и $[c;b]$, то

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx.$$

6. Если на $[a;b]$ $f(x) \geq 0$, то

$$\int\limits_a^b f(x)dx \geq 0.$$

7. Если на $[a;b]$ $f(x) \geq g(x)$, то

$$\int\limits_a^b f(x)dx \geq \int\limits_a^b g(x)dx.$$

8. Если на $[a;b]$ $f(x)$ непрерывна, то существует такая точка $c \in [a;b]$, что

$$\int\limits_a^b f(x)dx = f(c) \cdot (b-a).$$

9. Если m и M – соответственно наименьшее и наибольшее значения функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$, то:

$$m(b-a) \leq \int\limits_a^b f(x)dx \leq M(b-a).$$

2.3 Вычисление определенных интегралов

Вычисление определенных интегралов от непрерывных функций осуществляется с помощью *формулы Ньютона-Лейбница*

$$\int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a),$$

где $F(x)$ – одна из первообразных непрерывной на отрезке $[a;b]$ функции $f(x)$.

Обычно разность первообразных, стоящую справа в формуле Ньютона-Лейбница, изображают символом $F(x)\Big|_a^b$ и формулу Ньютона- Лейбница записывают в виде

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b .$$

Пример 2.1 Вычислить определенный интеграл $\int_e^{e^2} \frac{dx}{x\ln x}$.

Решение

$$\int_e^{e^2} \frac{dx}{x\ln x} = \int_e^{e^2} \frac{d(\ln x)}{\ln x} = \ln|\ln x|\Big|_e^{e^2} = \ln\ln e^2 - \ln\ln e = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2.$$

Пример 2.2 Вычислить определенный интеграл $\int_\pi^{2\pi} \frac{x+\cos x}{x^2+2\sin x}dx.$

Решение

$$\int_\pi^{2\pi} \frac{x+\cos x}{x^2+2\sin x}dx = \frac{1}{2}\int_\pi^{2\pi} \frac{d(x^2+2\sin x)}{x^2+2\sin x} = \frac{1}{2}\ln(x^2+2\sin x)\Big|_\pi^{2\pi} =$$

$$= \frac{1}{2}\ln 4\pi^2 - \frac{1}{2}\ln \pi^2 = \frac{1}{2}\ln 4 = \ln 2.$$

2.4 Замена переменной в определенном интеграле

Вычисление определенного интеграла можно иногда упростить, сделав замену переменной.

Пусть требуется вычислить интеграл $\int_a^b f(x)dx,$ где $f(x)$ функция непрерывная на $[a,b]$. Перейдем от переменной x к переменной $t,$ положив $x=\phi(t),$ где $\phi(t)$ удовлетворяет следующим условиям:

1) $\phi(t)$ определена и непрерывна в некотором промежутке $[\alpha,\beta]$ и ее значения не выходят за пределы $[a,b]$, когда t изменяется на $[\alpha,\beta]$;

2) $\phi(\alpha)=a$; $\phi(\beta)=b$;

3) существует в промежутке $[\alpha,\beta]$ непрерывная производная $\phi'(t)$.

Тогда имеет место формула

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_\alpha^\beta f(\phi(t))\phi'(t)dt.$$

Пример 2.3 Вычислить $\int\limits_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}dx.$

Решение

Сделаем замену $x = \sin t$.

Тогда $dx = \cos t dt$, $t = \arcsin x$, $t_1 = \arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$, $t_2 = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$.

Следовательно,

$$\int\limits_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}dx = \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{1-\sin^2 x}}{\sin^2 x}\cdot\cos t dt = \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 t}{\sin^2 t}dt = \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin^2 t}{\sin^2 t}dt =$$

$$= \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{\sin^2 t} - 1\right)dt = \left(-ctgt - t\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = -ctg\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} + ctg\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{2} + 1 + \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{\pi}{4}.$$

2.5 Интегрирование по частям в определенном интеграле

Пусть функции $u(x)$ и $v(x)$, а также их первые производные непрерывны на отрезке $[a,b]$, тогда имеет место следующая формула интегрирования по частям в определенном интеграле:

$$\int\limits_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int\limits_a^b vdu.$$

Примечание. Интегрирование по частям в определенном интеграле применяется к тому же классу интегралов, что и нахождение неопределенного интеграла по частям.

Пример 2. 4 Вычислить $\int\limits_1^2 x\ln xdx.$

Решение

$$\int_1^2 x\ln x dx = \begin{bmatrix} u=\ln x; du=\dfrac{dx}{x}; \\ dv = xdx; v=\int xdx = \dfrac{x^2}{2} \end{bmatrix} = \frac{x^2}{2}\ln x\Big|_1^2 - \int_1^2 \frac{x^2}{2}\cdot\frac{dx}{x} = 2\ln 2 - \frac{1}{2}\int_1^2 xdx =$$

$$= 2\ln 2 - \frac{x^2}{2}\Big|_1^2 = 2\ln 2 - 1 + \frac{1}{4} = 2\ln 2 - \frac{2}{3}.$$

3 НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

3.1 Интегралы с бесконечными пределами

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на $[a;\infty)$ и для любого отрезка $[a;b]$ существует $\int\limits_a^b f(x)dx$. Если $\int\limits_a^b f(x)dx$ стремится к конечному пределу при неограниченном возрастании b, то этот предел называется *несобственным интегралом с бесконечной верхней границей* и обозначается $\int\limits_a^\infty f(x)dx.$

Таким образом, $\int\limits_a^\infty f(x)dx = \lim\limits_{b\to\infty}\int\limits_a^b f(x)dx.$

В этом случае несобственный интеграл называют *сходящимся*. Если же указанный предел не существует или равен бесконечности, то говорят, что интеграл *расходится*.

Аналогично определяется несобственный интеграл с бесконечной нижней границей:

$$\int\limits_{-\infty}^b f(x)dx = \lim\limits_{a\to-\infty}\int\limits_a^b f(x)dx.$$

Несобственный интеграл с двумя бесконечными границами определяется следующим образом:

$$\int\limits_{-\infty}^\infty f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^c f(x)dx + \int\limits_c^\infty f(x)dx,$$

где c – любая фиксированная точка оси OX. Причем, этот интеграл сходится только тогда, когда сходится каждый из интегралов.

Пример 3.1 Вычислить несобственный интеграл $\int\limits_{e^2}^\infty \frac{dx}{x\ln x}$ или доказать его расходимость.

Решение

$$\int\limits_{e^2}^\infty \frac{dx}{x\ln x} = \lim\limits_{b\to\infty}\int\limits_{e^2}^b \frac{dx}{x\ln x} = \lim\limits_{b\to\infty} \ln|\ln x|\Big|_{e^2}^b = \lim\limits_{b\to\infty}\left(\ln|\ln b| - \ln e^2\right) =$$

$$= \lim_{b\to\infty}(\ln\ln b - 2) = \infty - 2 = \infty.$$

Вывод: исходный интеграл расходится.

Пример 3.2 Вычислить несобственный интеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^2+2x+5}$ **или доказать его расходимость.**

Решение

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^2+2x+5} = \lim_{a\to-\infty}\int\limits_{a}^{0}\frac{dx}{(x+1)^2+4} + \lim_{b\to\infty}\int\limits_{0}^{b}\frac{dx}{(x+1)^2+4} =$$

$$= \lim_{a\to-\infty}\frac{1}{2}arctg\frac{x+1}{2}\Big|_a^0 + \lim_{b\to\infty}\frac{1}{2}arctg\frac{x+1}{2}\Big|_0^b =$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{a\to-\infty}\left(arctg\frac{1}{2} - arctg\frac{a+1}{2}\right) + \frac{1}{2}\lim_{b\to\infty}\left(arctg\frac{b+1}{2} - arctg\frac{1}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}arctg\frac{1}{2} + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}arctg\frac{1}{2} = \frac{\pi}{4}.$$

Вывод: исходный интеграл сходится**.**

Примечание. Для вычисления несобственного интеграла остается справедливым *метод замены переменной.* Часто удачной заменой переменной несобственный интеграл с бесконечными пределами сводится к определенному интегралу.

Пример 3.3 Вычислить $I = \int\limits_{0}^{\infty}\frac{dx}{\left(1+x^2\right)^2}.$

Решение

Сделаем замену $x = tgt$, тогда

$$dx = \frac{dt}{\cos^2 t},\quad \frac{1}{\left(1+x^2\right)^2} = \frac{1}{\left(1+tg^2 t\right)^2} = \cos^4 t.$$

Если x изменяется от 0 до ∞, то t меняется от 0 до $\frac{\pi}{2}$. Тогда

$$I = \int\limits_{0}^{\pi/2}\cos^4 t\cdot\frac{dt}{\cos^2 t} = \int\limits_{0}^{\pi/2}\cos^2 t\,dt = \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\pi/2}(1+\cos 2t)dt =$$

$$=\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_{0}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{4}.$$

3.2 Несобственные интегралы от разрывных функций

Пусть функция $y=f(x)$ непрерывна на $[a;b)$, а в точке b имеет бесконечный разрыв и интегрируема на любом отрезке $[a;b-\varepsilon]$, где $\varepsilon\in(0;b-a)$.

Если при $\varepsilon\to\infty$, определенный интеграл $\int\limits_{a}^{b-\varepsilon}f(x)dx$ стремится к конечному пределу, то этот предел называется несобственным интегралом от разрывной функции и обозначается $\int\limits_{a}^{b}f(x)dx$. Таким образом,

$$\int\limits_{a}^{b}f(x)dx.=\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{a}^{b-\varepsilon}f(x)dx.$$

Аналогично, если функция $y=f(x)$ разрывна в точке a, то

$$\int\limits_{a}^{b}f(x)dx=\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{a+\varepsilon}^{b}f(x)dx.$$

Если функция $y=f(x)$ разрывна в некоторой внутренней точке $c\in[a;b]$, то

$$\int\limits_{a}^{b}f(x)dx=\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{a}^{c-\varepsilon}f(x)dx+\lim_{\delta\to 0}\int\limits_{c+\delta}^{b}f(x)dx.$$

Пример 3.4 Вычислить или доказать расходимость $\int\limits_{0}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

Решение

$$\int\limits_{0}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{0}^{1-\varepsilon}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\lim_{\varepsilon\to 0}\arcsin x\Big|_{0}^{1-\varepsilon}=\lim_{\varepsilon\to 0}\arcsin(1-\varepsilon)-\arcsin 0=\frac{\pi}{2}.$$

Вывод: интеграл сходится.

Пример 3.5 Вычислить или доказать расходимость $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{dx}{\cos x}$.

Решение

$$\int\limits_0^{\pi/2} \frac{dx}{\cos x} = \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_0^{\pi/2-\varepsilon} \frac{dx}{\cos x} = \lim_{\varepsilon\to 0} \ln\left|tg\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|\Bigg|_0^{\pi/2-\varepsilon} =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\ln\left|\frac{\pi}{4}-\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\pi}{4}\right| - \ln\left|tg\frac{\pi}{4}\right|\right) = \lim_{\varepsilon\to 0} \ln\left|tg\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\varepsilon}{2}\right)\right| = \infty.$$

Вывод: интеграл расходится.

Пример 3.6 Вычислить или доказать расходимость $\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}$.

Решение

$$\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}} = \int\limits_{-1}^{0} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}} + \int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}} = \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{-1}^{0-\varepsilon} x^{-\frac{2}{3}}dx + \lim_{\delta\to 0} \int\limits_{0+\delta}^{1} x^{-\frac{2}{3}}dx =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} 3\cdot\sqrt[3]{x}\Big|_{-1}^{0-\varepsilon} + \lim_{\delta\to 0} 3\cdot\sqrt[3]{x}\Big|_{0+\delta}^{1} = 3+3=6.$$

Вывод: интеграл сходится**.**

Задачи для самостоятельного решения

Вычислить интегралы или установить их расходимость:

1. $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}$, 2. $\int\limits_0^{\infty} e^{-2x}dx$, 3. $\int\limits_2^{\infty} \frac{\ln x}{x}dx$, 4. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{2xdx}{x^2+1}$, 5. $\int\limits_1^{2} \frac{xdx}{\sqrt{x-1}}$,

6. $\int\limits_0^{1} x\ln x dx$, 7. $\int\limits_1^{2} \frac{dx}{x\ln x}$, 8. $\int\limits_0^{2} \frac{dx}{x^2-4x+3}$.

4 ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

4.1 Вычисление площадей плоских фигур

4.1.1 Кривая задана в декартовых координатах

а) если плоская фигура в декартовой системе координат представляет собой криволинейную трапецию ABCD (рис. 4.1), ограниченную сверху графиком функции $y = f(x)$, причем $f(x) \geq 0$, осью OX и прямыми $x = a$ и $x = b$, то площадь плоской фигуры вычисляется по формуле

$$S = \int_a^b f(x)dx. \tag{4.1}$$

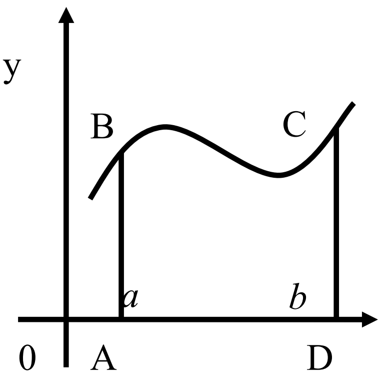


Рисунок 4.1

б) если $f(x) \leq 0$ на $[a;b]$, то

$$S = \left| \int_a^b f(x)dx \right|. \tag{4.2}$$

в) если $f(x) \geq g(x)$ на $[a;b]$, то

$$S = \int_a^b (g(x) - f(x))dx. \tag{4.3}$$

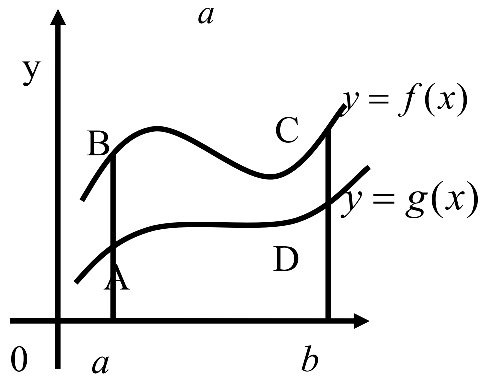


Рисунок 4.2

Пример 4.1 Вычислить площадь фигуры, ограниченной прямой $y = 3 - 2x$ и параболой $y = x^2$.

Решение

Построив графики прямой и параболы, получим нужную фигуру (рис.4.3).

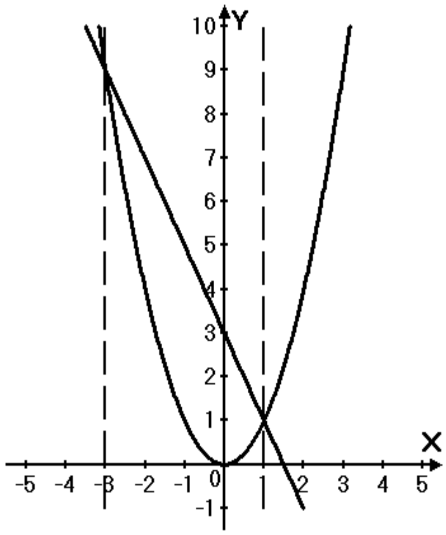


Рисунок 4.3

Найдем точки пересечения прямой и параболы. Для этого решим систему уравнений $\begin{cases} y - 3 - 2x \\ y = x^2 \end{cases}$. В результате получим квадратное уравнение $x^2 + 2x - 3 = 0$, решение которого дает два корня $x_1 = -3$ и $x_2 = 1$. Тогда искомая площадь по формуле (4.3) равна

$$S = \int_{-3}^{1} (3 - 2x - x^2)dx = \left(3x - x^2 - \frac{x^3}{3} \right)\Bigg|_{-3}^{1} = 10\frac{2}{3}\,(кв.ед.).$$

4.1.2 Кривая задана параметрически

Если фигура ограничена кривой, заданной параметрическими уравнениями $x = x(t), y = y(t)$, прямыми $x = a$, $x = b$ и осью OX,
то ее площадь вычисляется по формуле

$$S = \int_{t_1}^{t_2} y(t)x'(t)dt, \tag{4.4}$$

где $a = x(t_1)$, $b = x(t_2)$, $y(t) \ge 0$ на $[t_1; t_2]$.

Пример 4. 2 Найти площадь петли кривой

$$x = a(t^2 - 1); \quad y = b(4t - t^3) \quad a > 0, b > 0.$$

Решение

Найдем точки пересечения кривой с координатными осями:
$x = 0$ при $t = \pm 1$; $y = 0$ при $t = 0$ и $t = \pm 2$. Следовательно, искомые точки: $(0;\ 3b)$ при $t = 1$; $(0; -3b)$ при $t = -1$; $(-a;\ 0)$ при $t = 0$; $(3a;\ 0)$ при $t = \pm 2$.

Точка $(3a;\ 0)$ является точкой самопересечения кривой, в результате образуется петля (рис.4. 4).

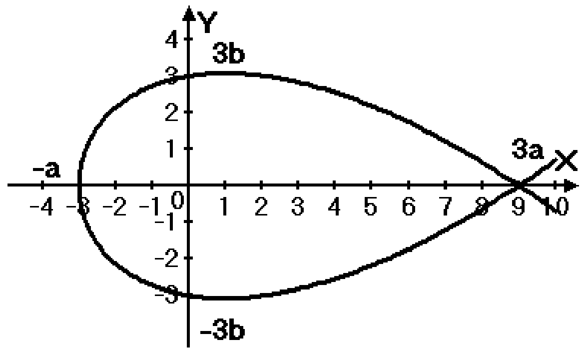


Рисунок 4.4

Площадь фигуры находим по формуле (4.4), как удвоенную площадь верхней ее половины:

$$S = 2\int_0^2 b(4t - t^3)2tadt = 4ab\int_0^2 (4t^2 - t^4)dt = \frac{256ab}{15}(кв.\ \ ед.)$$

4.1.3 Кривая задана в полярных координатах

В полярных координатах площадь криволинейного сектора OAB (рис. 4.5), ограниченного кривой $\rho = \rho(\varphi)$ и лучами $\varphi = \varphi_1$ и $\varphi = \varphi_2$, вычисляется по формуле (4.5).

$$S = \frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho^2 d\varphi. \tag{4.5}$$

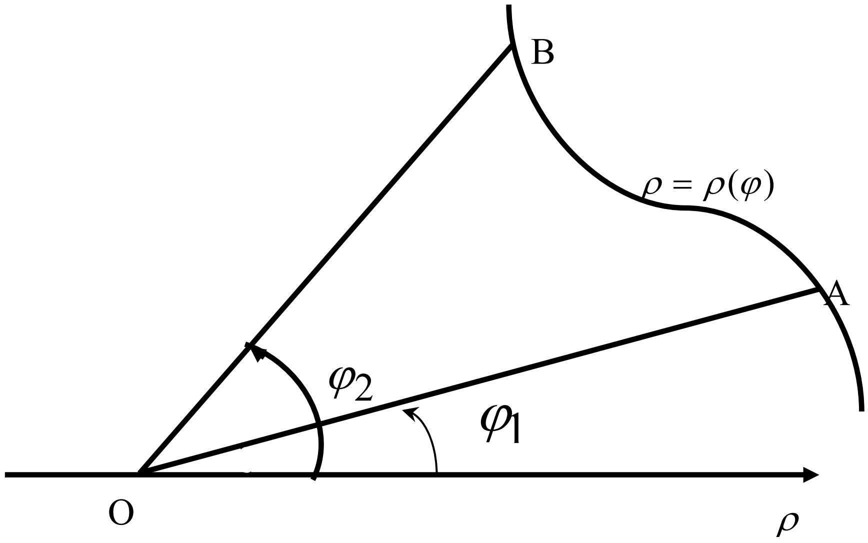


Рисунок 4.5

Пример 4.3 Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $\rho = 4\cos 3\varphi$ и $\rho = 2$ $(\rho \geq 2)$.

Решение

Данная кривая является трехлепестковой розой (рис. 4.6).

Чтобы определить, как изменяется полярный угол φ, когда радиус-вектор описывает площадь одного лепестка, решим уравнение $\rho = 0,$ т. е. $4\cos 3\varphi = 0.$ В результате получим $\varphi = \pm\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{2k\pi}{3}.$

При $k = 0$ $\varphi_1 = -\dfrac{\pi}{6},$ $\varphi_2 = \dfrac{\pi}{6}.$

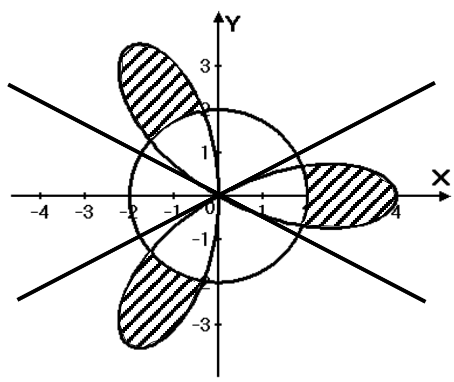


Рисунок 4.6

Уравнение $\rho = 2$ $(\rho \geq 2)$ определяет окружность с центром в начале координат и радиусом 2. Искомой фигурой является часть розы, отсекаемая окружностью. Определим, как изменится полярный радиус, когда радиус-вектор описывает искомую площадь. Для этого решим систему уравнений

$$\begin{cases} \rho = 4\cos 3\varphi \\ \rho = 2 \end{cases}, \text{ из которой следует } \varphi = \pm\frac{\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3}.$$

При $k = 0$ $\varphi_1 = -\frac{\pi}{9}$, $\varphi_2 = \frac{\pi}{9}$.

Найдем площадь одного лепестка $S_1 = \frac{1}{2}\int\limits_{-\frac{\pi}{9}}^{\frac{\pi}{9}}\left(\rho_2^2 - \rho_1^2\right)d\varphi =$

$$= \int\limits_0^{\frac{\pi}{9}}(16\cos^2 3\varphi - 4)d\varphi = 8\int\limits_0^{\frac{\pi}{9}}(1 + \cos 6\varphi)d\varphi + 4\int\limits_0^{\frac{\pi}{9}}\varphi d\varphi = \frac{4}{3}(\pi + \frac{\sqrt{3}}{2}).$$

Ответ: площадь всей фигуры $S = 3S_1 = 2(2\pi + \sqrt{3})(\textit{кв. ед.})$.

4.2 Вычисление длины дуги плоской кривой

4.2.1 Если кривая задана в декартвых координатах уравнением $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$, причем $f(x)$ имеет непрерывную производную, то длина кривой

$$L = \int\limits_a^b \sqrt{1 + (y')^2}\,dx. \qquad (4.6)$$

Пример 4.4 Найти длину дуги полукубической параболы $y^2 = 5(x-1)^3$, **отсекаемой прямой** $x = 3$.

Решение

Полукубическая парабола с вершиной в точке (1; 0) пересекается с прямой в точках A и C (рис. 4.7), поэтому $1 \leq x \leq 3$.

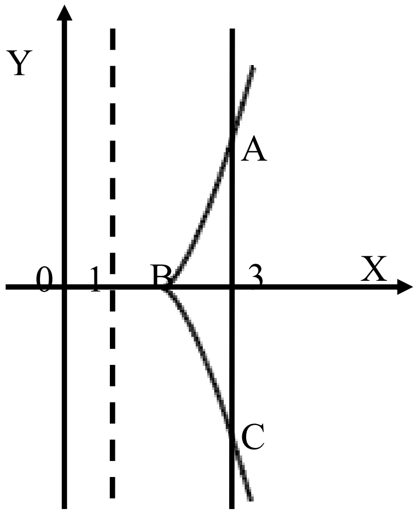


Рисунок 4.7

Кривая симметрична относительно оси *OX*, значит $L = 2\overset{\cup}{AB}$.

$$y = \sqrt{5}(x-1)^{\frac{3}{2}}; \quad y' = \frac{3}{2}\sqrt{5(x-)}.$$

По формуле (4.6) имеем

$$\overset{\cup}{AB} = \int_1^3 \sqrt{1 + \frac{45}{4}(x-1)}dx = \int_1^3 \sqrt{\frac{45x-41}{4}}dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{45}\frac{(45x-41)^{\frac{3}{2}}}{3}\Bigg|_1^3 =$$

$$= \frac{94\sqrt{94}-8}{135} = \frac{2(37\sqrt{94}-4)}{135}.$$

Ответ: $L = \dfrac{4(37\sqrt{94}-4)}{135}$ $(ед.\ \ дл.)$

4.2.2 Если кривая задана параметрическими уравнениями $x = x(t), y = y(t)$, $\alpha \le t \le \beta$, причем функции $x(t)$ и $y(t)$ имеют на $[\alpha;\beta]$ непрерывные производные, то длина дуги вычисляется по формуле

$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2}dt. \qquad (4.7)$$

Пример 4.5 Вычислить длину дуги кривой $x = e^t(\cos t + \sin t)$,

$y = e^t(\cos t - \sin t)$, соответствующей изменению параметра t от 0 до $\dfrac{\pi}{4}$.

Решение

Так как пределы интегрирования заданы, нет необходимости строить кривую на плоскости. Воспользуемся формулой (4. 7).

Найдем предварительно

$x'_t = e^t(-\sin t + \cos t) + e^t(\cos t + \sin t) = 2e^t \cos t;$

$y'_t = -2e^t \sin t.$ Тогда $(x'_t)^2 + (y'_t)^2 = 4e^{2t}\cos^2 t + 4e^{2t}\sin^2 t = 4e^{2t}.$

В соответствии с формулой (4.7) получаем

$$L = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} 2e^t dt = 2(e^{\frac{\pi}{4}} - e^{\frac{\pi}{6}}) \text{ (ед. дл.)}$$

4.2.3 Если кривая задана в полярной системе координат уравнением $\rho = \rho(\varphi)$, $\varphi_1 \le \varphi \le \varphi_2$, причем функция $\rho(\varphi)$ имеет на $[\varphi_1; \varphi_2]$ непрерывную производную, то ее длина

$$L = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{\rho^2 + (\rho')^2}\, d\varphi. \tag{4.8}$$

Пример 4.6 Вычислить длину кардиоиды $\rho = 2(1 - \cos\varphi)$.

Решение

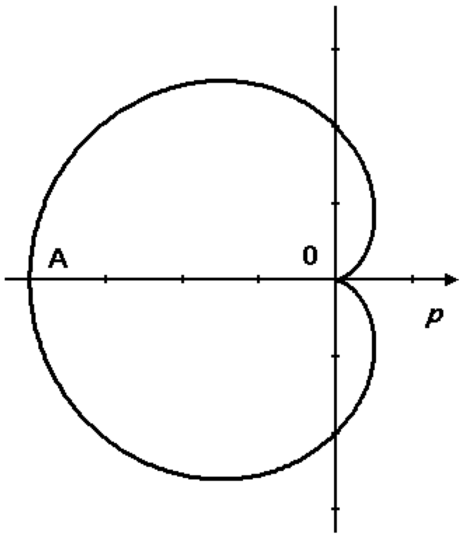


Рисунок 4.8

Данная кардиоида симметрична относительно полярной оси (рис. 4.8).

Половина кардиоиды описывается концом полярного радиуса при изменении φ от *0* до π. Воспользуемся формулой (4.8).

Найдем предварительно $\rho' = 2\sin\varphi.$

Тогда

$$\rho^2+(\rho')^2=4(1-\cos\varphi)^2+4\sin^2\varphi=8(1-\cos\varphi).$$

Итак,

$$L=2\int_0^{\pi}\sqrt{8(1-\cos\varphi}d\varphi=2\sqrt{8}\int_0^{\pi}\sqrt{2\sin^2\frac{\varphi}{2}}d\varphi=8\int_0^{\pi}\sin\frac{\varphi}{2}d\varphi=16\quad (\textit{ед.}\quad \textit{дл.}).$$

4.3 Вычисление площади поверхности вращения

4.3.1 Площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси OX дуги кривой, заданной неотрицательной функцией $y=f(x)$ на отрезке $[a;b]$, вычисляется по формуле

$$S_{0x}=2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx. \qquad (4.9)$$

Пример 4.7 Найти площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси *0X* петли кривой $9y^2=x(3-x)^2$.

Решение

Строим кривую (рис.4.9).

Выполним необходимые действия: $y=\frac{1}{3}(3-x)\sqrt{x};\, y'=\frac{1-x}{2\sqrt{x}}$.

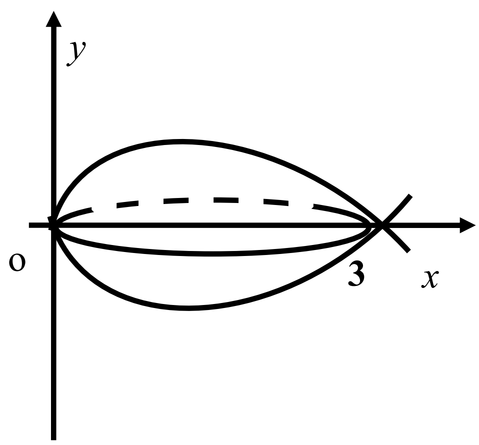


Рисунок 4.9

Тогда

$$\sqrt{1+(y')^2}=\sqrt{1+\frac{(1-x)^2}{4x}}=\frac{x+1}{2\sqrt{x}}.$$

По формуле (4.9) находим площадь поверхности

$$S=2\pi\int_0^3\frac{1}{3}(3-x)\sqrt{x}\,\frac{(x+1)}{2\sqrt{x}}\,dx=\frac{\pi}{3}\int_0^3(2x-x^2+3)dx=3\pi\quad (\textit{кв.}\quad \textit{ед.})$$

4.3.2 Если вращается кривая, заданная параметрическими уравнениями, то

$$S_{0x}=2\pi\int_{t_1}^{t_2}y(t)\sqrt{(x_t')^2+(y_t')^2}\,dt. \tag{4.10}$$

4.4 Вычисление объема тела вращения

Если тело образовано вращением вокруг оси OX криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции $y=f(x)$, прямыми $x=a$; $x=b$ и осью OX, то его объем равен

$$V_{OX}=\pi\int_a^b y^2dx. \tag{4.11}$$

При вращении вокруг оси OY криволинейной трапеции, образованной кривой $x=f(y)$, прямыми $y=c$; $y=d$ и осью OY, образуется тело вращения, объем которого равен

$$V_{OY}=\pi\int_c^d x^2dy. \tag{4.12}$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y=(x-2)^2,\quad y=4x-8.$$

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

$$xy=2,\quad x+2y-5=0.$$

3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

$$x=\sqrt{4-y^2},\quad x=0,\quad y=0,\quad y=1.$$

4. Участок извилистой дороги имеет форму петли. Найти площадь участка, ограниченного петлей, и длину этого участка дороги

$$\begin{cases} x=t^2, \\ y=\dfrac{t}{3}-t^3. \end{cases}$$

5. Участок извилистой дороги имеет форму петли. Найти площадь участка, ограниченного петлей, и длину этого участка дороги

$$\begin{cases} x = 3t^3, \\ y = 3t - t^3. \end{cases}$$

6. Участок шоссе, огибает луг и дважды пересекает прямоугольный участок железной дороги. Найти площадь луга между шоссе и железной дорогой и длину участка шоссе

$$\begin{cases} x = 3(t - \sin t) \\ y = 3(1 - \cos t), y = 3 \quad (y \geq 3). \end{cases}$$

7. Участок шоссе, огибает луг и дважды пересекает прямоугольный участок железной дороги. Найти площадь луга между шоссе и железной дорогой и длину участка шоссе

$$\begin{cases} x = 8\cos^3 t, \\ y = 8\sin^3 t, \quad x = 1 \quad (x \geq 1). \end{cases}$$

8. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями, заданными уравнениями в полярных координатах $\rho = 4\cos 3\varphi, \quad \rho = 2 \quad (\rho \geq 2)$.

9. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями, заданными уравнениями в полярных координатах $\rho = \sqrt{3}\cos\varphi, \quad \rho = \sin\varphi.$

10. Вычислить длину дуги кривой

$$y = \frac{x^2}{4} - \frac{\ln x}{2}, 1 \leq x \leq 2.$$

11. Вычислить длину дуги кривой

$$\rho = 1 - \sin\varphi, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}.$$

12. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси OX фигуры, ограниченной кривыми $y = x^2, \quad y = \sqrt{x}.$

5 ФИЗИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

Пример 5. 1 Найти силу давления воды на вертикальную пластину в виде полукруга радиуса R, погруженную в воду так, что ее диаметр совпадает с поверхностью воды.

Решение

Для вычисления силы давления жидкости воспользуемся законом Паскаля, согласно которому сила давления P жидкости с плотностью γ на площадку S при глубине погружения H равна

$$P = \gamma gHS. \tag{5.1}$$

Сила давления зависит от глубины погружения пластины, поэтому ось направим в сторону изменения глубины H, а начало координат поместим в центр круга (рис. 5.1).

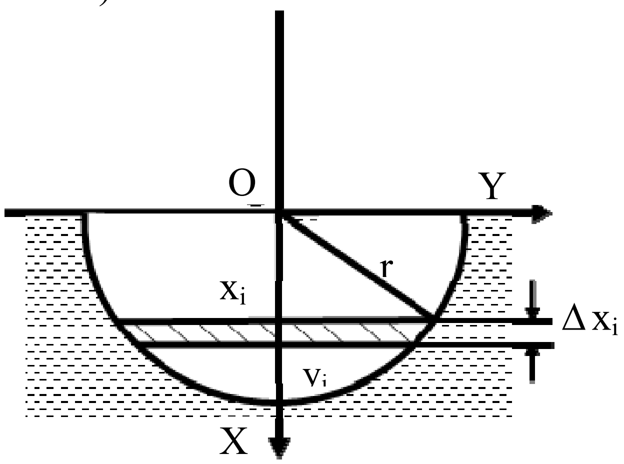


Рисунок 5.1

Разобьем пластину на n тонких полосок шириной Δx_i, параллельных поверхности воды.

Обозначим через ΔP_i давление на $i-$ ю полоску. Предполагая, что вся элементарная полоска находится на глубине x_i, по формуле (5.1) найдем

$$\Delta P_i \approx \gamma g x_i \cdot \Delta S_i,$$

где ΔS_i – площадь элементарной полоски. Учитывая, что Δx_i мало, считаем полоску прямоугольником и $\Delta S_i = 2y_i \Delta x_i$.

Выразим y_i через x_i и R, используя уравнение окружности $x_i^2 + y_i^2 = R^2$, откуда $y_i = \sqrt{R^2 - x_i^2}$. Тогда $\Delta P_i \approx 2\gamma g x_i \sqrt{R^2 - x_i^2}\,\Delta x_i$.

Давление на всю пластину

$$P \approx \sum_{i=1}^{n} 2\gamma g x_i \sqrt{R^2 - x_i^2}\,\Delta x_i.$$

Полученная сумма является интегральной суммой, поэтому

$$P = 2\gamma g\int\limits_0^R x\sqrt{R^2 - x^2}\,dx = \ldots = \frac{2\gamma g R^3}{3}.$$

Плотность воды $\gamma = 10^3\,\frac{кг}{м^3}$, ускорение силы тяжести $g = 10\,\frac{м}{с^2}$, следовательно $P = \frac{2\cdot 10^4}{3}R^3\,(н)$.

Пример 5. 2 Вычислить работу, которую необходимо затратить, чтобы выкачать жидкость из сосуда, имеющего форму параболоида вращения, обращенного вершиной вниз. Радиус основания $R = 2$ м, высота $H = 5$ м, плотность жидкости γ.

Решение

Работа, необходимая для поднятия тела весом P на высоту H, равна

$$A = PH.$$

Работа зависит от высоты, на которую надо поднять жидкость, поэтому выберем систему координат таким образом, чтобы ось OX была направлена в сторону изменения глубины, а начало координат находилось в центре основания параболоида на поверхности жидкости (рис. 5.2).

С помощью плоскостей, параллельных основанию параболоида, разобьем сосуд на n равных горизонтальных слоев толщиной Δx_i.

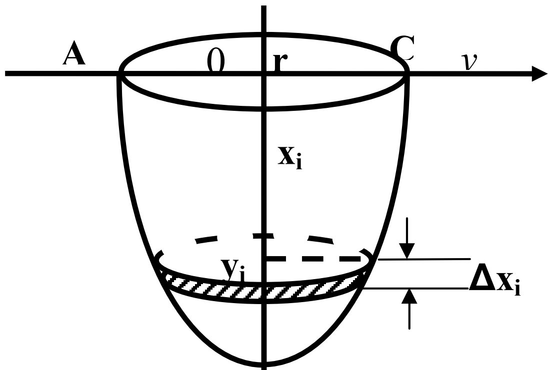


Рисунок 5.2

Тогда работа для поднятия i – ого слоя

$$\Delta A_i \approx \Delta P_i \cdot x_i.$$

Чтобы найти вес ΔP_i, вычислим объем i-ого слоя. Так как Δx_i мало, примем этот слой за цилиндр с высотой Δx_i и радиусом основания y_i.

Тогда

$$\Delta V_i = \pi y_i^2 \Delta x_i.$$

Отрезок y_i зависит от x_i и может быть найден из уравнения параболы. Составим уравнение параболы ABC.

Каноническое уравнение параболы имеет вид

$$y_i^2 = 2p(x_i - a),$$

где a - координата вершины $B(H;0)$. Тогда $y_i^2 = 2p(x_i - 5)$.

Параметр p найдем, подставив в это уравнение координаты точки $C(0;2)$. Окончательно, $p = -\frac{2}{5}$, а $y_i^2 = -\frac{4}{5}(x_i - 5)$. Поскольку $\Delta P_i = \gamma g \Delta V_i$, получаем

$$\Delta A_i = -\frac{4}{5}\gamma g \pi (x_i - 5) x_i \Delta x_i.$$

Вся работа $A \approx -\frac{4}{5}\gamma g \pi \sum_{i=1}^{n} (x_i - 5) x_i \Delta x_i$. Поученная сумма является интегральной суммой, поэтому предел этой суммы при $\Delta x \to 0$ равен определенному интегралу

$$A = -\frac{4}{5}\pi \gamma g \int_0^5 x(x-5)dx = \ldots = \frac{50\pi\gamma g}{3} \text{ (дж)}.$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Найти силу давления воды на вертикальную треугольную пластину с основанием a и высотой h, погруженную в воду так, что вершина находится на поверхности, а основание параллельно поверхности воды.
2. Вертикальная плотина имеет форму равнобедренной трапеции. Вычислить силу давления воды на плотину, если известно, что ее верхнее основание равно 70 м, нижнее – 50 м, высота – 20 м.
3. Найти силу, с которой жидкость с плотностью γ давит на вертикальную стенку, имеющую форму полуэллипса, большая ось которого находится на поверхности жидкости. Большая ось эллипса *а*, малая – *в*.
4. Найти силу давления бензина на стенки цилиндрического бака высотой 3 м и радиусом основания 1 м. Плотность бензина 800 кг/м^3.
5. Вычислить работу, необходимую для того, чтобы выкачать жидкость из резервуара, имеющего форму обращенного вершиной вниз конуса, высота которого H, а радиус основания R. Плотность жидкости ρ.
6. Вычислить работу, которую надо затратить при постройке пирамиды с квадратным основанием a и высотой h. Плотность материала γ.

6 ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ВОПРОСЫ ПО ТЕМЕ «ИНТЕГРАЛЫ»

1. Сформулировать определение производной функции.
2. Дать определение дифференциала функции.
3. Сформулировать правило нахождения дифференциала функции.
4. Что такое первообразная (неопределенный интеграл)?
5. Основные табличные интегралы.
6. Сформулировать основные правила интегрирования.
7. Как проверить правильность интегрирования?
8. Опишите основные приемы приведения неопределенного интеграла к табличному.
9. Изложите идею метода замены переменной в неопределенном интеграле.
10. Суть метода интегрирования по частям.
11. Интегрирование по частям выражений вида $P_n(x)\sin kx$.
12. Интегрирование по частям выражений вида $P_n(x)\cos kx$.
13. Интегрирование по частям выражений вида $P_n(x)e^{kx}$.
14. Интегрирование по частям выражений вида $P_n(x)a^{kx}$.
15. Интегрирование по частям выражений вида $P_n(x)\ln kx$.
16. Интегрирование по частям выражений вида $P_n(x)\arcsin kx$.
17. Интегрирование по частям выражений вида $P_n(x)\arccos kx$.
18. Интегрирование по частям выражений вида $P_n(x)arctgkx$.
19. Интегрирование по частям выражений вида

$$e^{kx}\cdot\sin nx;\quad e^{kx}\cdot\cos nx.$$

20. Интегрирование выражений вида $J=\int\frac{dx}{ax^2+bx+c}$.
21. Интегрирование выражений вида $J=\int\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}dx$.
22. Интегрирование выражений вида $J=\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$.
23. Интегрирование выражений вида $J=\int\frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$.
24. Дать определение рациональной дроби.
25. Как отличить правильную рациональную дробь от неправильной дроби?
26. Как выделить целую часть неправильной рациональной дроби?
27. От чего зависит разложение правильной рациональной дроби на простейшие дроби?
28. Как рациональная дробь раскладывается на простейшие в случае дей-

ствительных простых корней знаменателя?
29. Как рациональная дробь раскладывается на простейшие в случае действительных кратных корней знаменателя?
30. Как рациональная дробь раскладывается на простейшие в случае комплексных корней знаменателя?
31. Интегрирование тригонометрических выражений.
32. Универсальная тригонометрическая подстановка.
33. Интегрирование выражений, содержащих иррациональность вида $\sqrt{a^2-x^2}$.
34. Интегрирование выражений, содержащих иррациональность вида $\sqrt{a^2+x^2}$.
35. Интегрирование выражений, содержащих иррациональность вида $\sqrt{x^2-a^2}$.
36. Интегральная сумма.
37. Определенный интеграл как предел интегральной суммы.
38. Свойства определенного интеграла.
39. Замена переменной в определенном интеграле.
40. Интегрирование по частям в определенном интеграле.
41. Несобственные интегралы вида $\int\limits_a^\infty f(x)dx$.
42. Несобственные интегралы вида $\int\limits_{-\infty}^b f(x)dx$.
43. Несобственные интегралы вида $\int\limits_{-\infty}^\infty f(x)dx$.
44. Несобственные интегралы от функции разрывной на нижнем пределе интегрирования.
45. Несобственные интегралы от функции разрывной на верхнем пределе интегрирования.
46. Несобственные интегралы от функции разрывной внутри промежутка интегрирования.
47. Геометрический смысл определенного интеграла.
48. Вычисление площадей плоских фигур в декартовых координатах.
49. Вычисление площадей плоских фигур в полярных координатах.
50. Вычисление площадей плоских фигур, ограниченных линиями, заданными параметрическими уравнениями.
51. Вычисление длины дуги в декартовых координатах.
52. Вычисление длины дуги в полярных координатах.
53. Вычисление длины дуги, заданной параметрическими уравнениями.
54. Вычисление площади поверхности вращения в декартовых координатах.
55. Вычисление объема тела вращения.
56. Методика решения задач на нахождение давления жидкости.
57. Методика решения задач на нахождение работы.

7 ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Определение 1. Дифференциальным уравнением называется уравнение, связывающее независимую переменную x**, искомую функцию** $y = f(x)$ **и ее производные** $y', y'', y''',...$

Символически дифференциальное уравнение можно записать так:

$$F(x, y, y', y'', y''',..) = 0.$$

Определение 2. ***Порядком*** **дифференциального уравнения называется порядок наивысшей производной, входящей в уравнение.**
Определение 3. ***Решением*** **дифференциального уравнения называется всякая функция** $y = f(x)$, **которая, при подстановке в уравнение, превращает его в тождество.**

Дифференциальное уравнение первого порядка имеет вид

$$F(x, y, y') = 0.$$

Если это уравнение можно разрешить относительно y', то его можно записать в виде

$$y' = f(x, y).$$

В этом случае мы говорим, что дифференциальное уравнение разрешено относительно производной.
Определение 4. ***Общим решением*** **дифференциального уравнения первого порядка называется функция**

$$y = \varphi(x, C),$$

которая зависит от одного произвольного постоянного C.
Определение 5. ***Частным решением*** **называется любая функция** $y = \varphi(x, C_0)$, **которая получается из общего решения** $y = \varphi(x, C)$, **если в последнем произвольному постоянному** ***C*** **придать определенное значение** $C = C_0$.

С геометрической точки зрения *общее решение* представляет собой *семейство кривых* на координатной плоскости, зависящее от одной произвольной постоянной С. Частному решению соответствует *одна кривая* этого семейства, проходящая через некоторую заданную точку.

Рассмотрим несколько видов дифференциальных уравнений первого порядка:

7.1 Дифференциальные уравнения первого порядка с разделяющимися переменными

Общий вид:

$$y' = f(x)g(y).$$

Решение. Учитывая то, что $y' = \dfrac{dy}{dx}$ и $g(y) \neq 0$, преобразуем уравнение к виду $\dfrac{dy}{g(y)} = \dfrac{dx}{f(x)}$. Интегрируя левую часть по y, а правую по x, получаем

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int \frac{dx}{f(x)} + C.$$

Пример 7.1 Найти решение уравнения $y' - xy^2 = 2xy.$

Решение

Выполним следующие преобразования. Заменим $y' = \dfrac{dy}{dx}$, умножим обе части уравнения на dx, в результате уравнение примет вид

$$dy = xy(y+2)dx.$$

Разделим обе части уравнения на $y(y+2) \neq 0,$ получим

$$\frac{dy}{y(y+2)} = xdx.$$

Проинтегрируем обе части равенства $\int \dfrac{dy}{y(y+2)} = \int xdx.$ В результате

$$\frac{1}{2}\ln|y| - \frac{1}{2}\ln|y+2| = \frac{x^2}{2} + C \text{ или } \ln\sqrt{\frac{y}{y+2}} = \frac{x^2}{2} + C.$$

Примечание. При делении на $y(y+2)$ могли быть потеряны решения $y = 0$ и $y = -2$. Непосредственной подстановкой убеждаемся, что $y = 0$ и $y = -2$ являются особыми решениями уравнения, которые не могут быть получены из общего ни при каких значениях произвольной постоянной C.

Ответ: $\ln\sqrt{\dfrac{y}{y+2}} = \dfrac{x^2}{2} + C,\ y = 0,\ y = -2.$

Пример 7. 2 Найти частное решение уравнения $\left(1 + e^{2x}\right)y^2 y' = e^x$**, удовлетворяющее начальному условию** $y(0) = 1.$

Решение

Приведем уравнение к виду $\left(1 + e^{2x}\right)y^2 dy = e^x dx,$ а затем разделим переменные и проинтегрируем обе части равенства. Получим

$$\int y^2 dy = \int \frac{e^x dx}{1+e^{2x}}.$$

В результате общее решение имеет вид $y^3 = 3arctge^x + 3C$ или

$$y = \sqrt[3]{3arctge^x + 3C}.$$

Найдем частное решение, подставив в общее решение начальные условия $1 = \sqrt[3]{3arctge^0 + 3C}$. Отсюда $1 = \sqrt[3]{\frac{3\pi}{4} + 3C}$ или $1 = \frac{3\pi}{4} = 3C.$

Окончательно, $C = \frac{1}{3} - \frac{\pi}{4}.$

Ответ: $y = \sqrt[3]{3arctge^x + 1 - \frac{3\pi}{4}}.$

Задачи для самостоятельного решения

А. Найти общее решение уравнений:

1. $x\sqrt{3+y^2}dx + y\sqrt{2+x^2}dy = 0,$
2. $3^{x+y} + 2^{x-y} \cdot y' = 0,$
3. $(2x + xy^2)dx = (yx^2 + y)dy,$
4. $\left(1+e^{2x}\right)yy' = e^{2x},$
5. $y' \sin x = \frac{y}{\ln y}.$

В. Решить задачу Коши:

1. $y'ctgx + y = 2; \quad y(0) = -1,$
2. $(x^2 - 1)y' + 2xy^2 = 0; \quad y(0) = 1.$

7.2 Однородные дифференциальные уравнения первого порядка

Определение. Уравнение $y' = f(x, y).$ **называется однородным относительно** x **и** y**, если функция** $f(x, y)$ **есть однородная функция нулевого измерения относительно** x **и** y**.**

Решение. Поскольку $f(kx, ky) = f(x, y),$ делаем вывод об однородности данного уравнения. Решение ищем в виде $y = tx$, тогда $y' = t'x + t.$

Подставив y и y' в исходное уравнение, получим уравнение с разделяющимися переменные, решив которое и сделав в полученном решении замену $t = \frac{y}{x}$, получим искомый результат.

Пример 7.3 Решить дифференциальное уравнение

$$y' = \frac{y^2 - x^2}{2xy}.$$

Решение

Это однородное ДУ первого порядка, т. к. при замене x и y соответственно на kx и ky уравнение не меняется.

Используя замену $y = tx$, получаем

$$t'x + t = \frac{t^2 - 1}{2t},\ t'x = -\frac{1 + t^2}{2t};$$

$$\frac{2tdt}{1 + t^2} = -\frac{dx}{x},\ \int \frac{2tdt}{1 + t^2} = -\int \frac{dx}{x},\ \ln(1 + t^2) = -\ln|x| + \ln 2C.$$

Окончательно, $1 + u^2 = \frac{2c}{x}, 1 + \frac{y^2}{x^2} = \frac{2C}{x}, x^2 + y^2 = 2Cx.$

Ответ: $x^2 + y^2 = 2Cx.$

Задачи для самостоятельного решения

Найти общее решение уравнений:

1. $\left(y + \sqrt{xy}\right)dx = xdy,$
2. $xy' = y + \sqrt{y^2 - x^2},$
3. $y' = \frac{y}{x} + \sqrt{1 + \frac{y^2}{x^2}},$
4. $x^3 y' = y(y^2 + x^2),$
5. $\left(xctg\frac{y}{x} - y\right) + xy' = 0,$
6. $y^2 + x^2 y' = xyy'.$

7.3 Линейные дифференциальные уравнения первого порядка

Определение. Дифференциальное уравнение (ДУ) вида

$$y' + p(x)y = q(x), \tag{7.1}$$

где $p(x)$, $q(x)$ – известные функции, называется линейным ДУ.

Решение. Решение ищем в виде произведения двух функций $u = u(x)$ и $v = v(x)$, т. е. $y = uv$, Тогда $y' = u'v + v'u$. Подставляя $y = uv$ и $y' = u'v + v'u$ в уравнение (7.1), получаем

$$u'v + uv' + p(x)uv = q(x).$$

Или

$$u'v + u\left(v' + p(x)v\right) = q(x). \qquad (7.2)$$

Функцию v подберем так, чтобы она удовлетворяла уравнению

$$v' = -p(x)v,\ \frac{dv}{dx} = -p(x)v,\ \frac{dv}{v} = -p(x)dx,$$

$$\int \frac{dv}{v} = -\int p(x)dx,\ \ln|v| = -\int p(x)dx, v = e^{-\int p(x)dx}.$$

Подставив найденную функцию в уравнение (7. 2), получим

$$u' = q(x)v^{-1},\ u' = q(x)e^{\int p(x)dx},\ u = \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + C.$$

Окончательно,

$$y = (\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + C)e^{-\int p(x)dx}.$$

Пример 7.4 Найти общее решение дифференциального уравнения $xy' + y = 3x^2$.

Решение

Решение ищем в виде $y = uv$, $y' = u'v + v'u$.

Тогда

$$x(u'v + v'u) + uv = 3x^2$$

или

$$xu'v + u(xv' + v) = 3x^2. \qquad (7.3)$$

Приравняем скобку 0, получим уравнение $xv' + v = 0$. Это уравнение с разделяющимися переменными. Решив его, получаем $v = \frac{1}{x}$. Подставляем его в уравнении (7. 3) и решаем полученное уравнение

$$xu'\frac{1}{x} = 3x^2,\ u' = 3x^2,\ u = \int 3x^2 dx = x^3 + C.$$

Итак, общее решение $y = \left(x^3 + C\right)\frac{1}{x}$.

Ответ: $y = \left(x^3 + C\right)\frac{1}{x}$.

Задачи для самостоятельного решения

Найти общее решение уравнений:

1. $y' - \frac{y}{x} = x^2 + 2x$,
2. $y' + ytgx = \frac{1}{\cos x}$,
3. $xy' + y = x\sin x$,
4. $y' - \frac{y}{x+2} = x^2 = 3x$,
5. $y' + \frac{y}{x} = \frac{x+1}{x}e^x$.

7.4 Уравнения Бернулли

Общий вид:

$$y' + p(x)y = q(x)y^n. \tag{7.4}$$

Решение. Разделив все члены уравнения на y^n, получим

$$y^{-n}y' + p(x)y^{-n+1} = q(x). \tag{7.5}$$

Сделаем замену $z = y^{-n+1}$.

Тогда

$$z' = (-n+1)y^{-n}y'.$$

Подставляя эти выражения в уравнение (7.5), получим линейное уравнение

$$z' + (-n+1)p(x)z = (-n+1)q(x).$$

Найдя его общее решение и подставив вместо z выражение y^{-n+1}, получим окончательный ответ.

8 ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

8.1 Дифференциальные уравнения, не содержащие явным образом искомую функцию y

Общий вид: $y'' = f(x, y')$.

Решение: введем замену $y' = p$, где $p = p(x)$. Тогда $y'' = p'$. Подставляя выражения производных в исходное уравнение, получаем уравнение первого порядка

$$p' = p(x, C)$$

относительно неизвестной функции $p = p(x)$. Решив это уравнение, получим общее решение

$$p = p(x, C_1),$$

а затем из соотношения $y' = p$ получаем общее решение исходного уравнения

$$y = \int p(x, C_1)dx + C_2.$$

Пример 8.1 Найти общее решение уравнения $y'' + y' = 0$.

Решение

Пусть $y' = p$, $y'' = p'$. Понижаем порядок ДУ и приходим к ДУ первого порядка с разделяющимися переменными

$$p' + p = 0.$$

Находим его решение

$$\frac{dp}{dx} = -z,\ \frac{dp}{p} = -dx,\ \int \frac{dp}{p} = -\int dx,\ \ln|p| = -x + \ln C_1,\ p = C_1 e^{-x}.$$

Поскольку $y' = p$, получаем

$$y' = C_1 e^{-x},\ y = \int C_1 e^{-x} dx + C_2,\ y = -C_1 e^{-x} + C_2.$$

Задачи для самостоятельного решения

1. $xy'' + 2y' = 0$,
4. $2xy'y'' = (y')^2 + 1$,
2. $xy'' = y' \ln \frac{y'}{x}$,
5. $x(y'' + 1) + y' = 0$,

3. $y''tgx = y' + 1,$ 6. $xy'' = y' + x\sin\dfrac{y'}{x}.$

8.2 Дифференциальные уравнения второго порядка, не содержащие явно независимую переменную x

Общий вид: $y'' = f(y, y')$.

Решение: положим $y' = p$, где $p = p(y)$. Тогда $y'' = p'p$. Подставляя выражения производных, получим ДУ первого порядка, решив которое получим $p = p(y, C_1)$, Затем, воспользовавшись тем, что $y' = p$, решим уравнение

$$y' = p(y, C_1).$$

Разделяя переменные, находим

$$\frac{dy}{p(y, C_1)} = dx.$$

Интегрируя это уравнение, получаем общее решение исходного уравнения

Пример 8.2 Найти общее решение уравнения $2yy'' = y^2 + (y')^2$.

Решение

Сделаем замену $y' = p,\ y'' = p'p$. Исходное уравнение примет вид

$$2yp'p = y^2 + p^2. \qquad (8.1)$$

Это однородное уравнение первого порядка относительно функции $p = p(y)$. Положим $p = ty$, тогда $p' = t'y + t$. Подставив последние два равенства в уравнение (8. 1), после элементарных преобразований получим уравнение с разделяющимися переменными

$$2tt'y = 1 - t^2.$$

После разделения переменных и интегрирования полученного уравнения получим

$$\int\frac{2tdt}{1-t^2} = \int\frac{dy}{y}.$$

В результате

$$-\ln\left|1 - t^2\right| = \ln|y| + \ln|C_1| \text{ или } \frac{1}{1-t^2} = C_1 y.$$

Заменив в последнем равенстве $t = \dfrac{p}{y}$, после преобразований получим

$$p = \sqrt{y^2 - \frac{y}{C_1}}.$$

Поскольку $y' = p$, то $y' = \sqrt{y^2 - \dfrac{y}{C_1}}.$

Интегрируя это дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными, получим

$$\int \frac{dy}{\sqrt{y^2 - \frac{y}{C_1}}} = \int dx, \ \int \frac{dy}{\sqrt{\left(y - \frac{1}{2C_1}\right)^2 - \frac{1}{4C_1}}} = x + C_2.$$

Ответ: $\ln\left| y - \dfrac{1}{2C_1} + \sqrt{y^2 - \dfrac{y}{C_1}} \right| = x + C_2.$

Задачи для самостоятельного решения

1. $xy'' + 2y' = 0,$
2. $xy'' = y' \ln \dfrac{y'}{x},$
3. $y'' tgx = y' + 1,$
4. $2xy'y'' = (y')^2 + 1,$
5. $x(y'' + 1) + y' = 0,$
6. $xy'' = y' + x \sin \dfrac{y'}{x}.$

8.3 Линейные однородные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Общий вид: $ay'' + by' + c = 0,$ где $a, b, c -$константы.

Решение: составляем характеристическое уравнение $ak^2 + bk + c = 0.$

Если характеристическое уравнение имеет два действительных простых корня k_1, k_2 (случай, когда дискриминант $D > 0$), то общее решение уравнения имеет вид

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}. \tag{8. 2}$$

Если характеристическое уравнение имеет два действительных равных корня $k_1 = k_2 = k$ (случай, когда дискриминант $D = 0$), то общее решение уравнения имеет вид

$$y = C_1 e^{kx} + C_2 x e^{kx}. \qquad (8.\ 3)$$

Если характеристическое уравнение имеет два комплексно сопряженных корня $k_1 = \alpha + \beta i$, $k_2 = \alpha - \beta i$ (случай, когда дискриминант $D < 0$), то общее решение уравнения имеет вид

$$y = e^{\alpha x}(C_1 \sin \beta x + C_2 \cos \beta x). \qquad (8.\ 4)$$

Пример 8.3 Найти общее решение уравнения $y'' + 2y' + 10y = 0.$

Решение

Составляем характеристическое уравнение $k^2 + 2k + 10 = 0.$ Его решение $k_{1,2} = -1 \pm 3i$, т. е. $\alpha = -1$, $\beta = 3$. Общее решение найдем по формуле (8. 4).

Ответ: $y = e^{-x}(C_1 \sin 3x + C_2 \cos 3x).$

Пример 8.4 Решить задачу Коши

$$y'' + 3y' + 2y = 0, \quad y(0) = 1, y'(0) = 2.$$

Решение

Составляем характеристическое уравнение $k^2 + 3k + 2 = 0.$ Его решения $k_1 = -2$, $k_2 = -1$. Общее решение найдем по формуле (8. 2).

$$y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-x}.$$

Отсюда $y' = -2C_1 e^{-2x} - C_2 e^{-x}$. Воспользуемся начальными условиями, что приводит к системе уравнений

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 1 \\ -2C_1 - C_2 = 2. \end{cases}$$

Получаем $C_1 = -3$, $C_2 = 4$. Подставляем найденные значения произвольных постоянных в общее решение и получаем окончательный ответ.

Ответ: $y = -3e^{-2x} + 4e^{-x}.$

Задачи для самостоятельного решения

Найти общее решение уравнений:

1. $y'' + y' - 2y = 0,$
2. $y'' - 4y' = 0,$
3. $y'' + 6y' + 13y = 0,$

Найти частные решения уравнений:

1. $y'' - 4y' + 3y = 0, \quad y(0) = 6, \quad y'(0) = 10,$
2. $y'' + 4y' + 29y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 15,$
3. $4y'' + 4y' + y = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 0.$

8.4 Линейные неоднородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Общий вид: $ay'' + by' + c = f(x)$, где $a, b, c -$ постоянные величины.

Решение: если правая часть уравнения имеет специальный вид

$$f(x) = e^{\alpha x}(P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x), \qquad (8.5)$$

то решение ищем в виде $y = \overline{y} + y^*$, где $\overline{y}$ – общее решение соответствующего однородного уравнения $ay'' + by' + c = 0$, а y^* – частное решение исходного неоднородного уравнения.

Пример 8.5 Найти общее решение уравнения

$$4y'' + 8y' + 13y = 2x^2 - x + 1.$$

Решение

Решение ищем в виде $y = \overline{y} + y^*$,

Сначала находим $\overline{y}$. Для этого решаем уравнение $4y'' + 8y' + 13y = 0$.

Соответствующее характеристическое уравнение $4k^2 + 8k + 13 = 0$ имеет корни $k_{1,2} = -1 \pm \frac{3}{2}i$, поэтому $\overline{y} = e^{-x}(C_1\cos\frac{3}{2}x + C_2\sin\frac{3}{2}x)$.

Найдем частное решение y^* по виду правой части. В нашем случае правая часть исходного уравнения является многочленом второй степени. Составим число $r = \alpha + \beta\, i$. Числа α, β находим, сравнив правую часть нашего уравнения с функцией (8. 5). В нашем случае $\alpha = 0, \quad \beta = 0$, поэтому $r = 0$. Данное значение r не является корнем характеристического уравнения, поэтому частное решение будем искать в виде $y^* = Ax^2 + Bx + C$.

Найдем ${y^*}' = 2Ax + B$ и ${y^*}'' = 2A$ и подставив в исходное уравнение, получим

$$8A + 8(2Ax + B) + 13(Ax^2 + Bx + C) = 2x^2 - x + 1.$$

Раскроем скобки и приведем подобные члены

$$13Ax^2 + (16A + 13B)x + 8A + 13C = 2x^2 - x + 1.$$

Приравняв коэффициенты при одинаковых степенях x в правой и левой частях последнего равенства, получим систему

$$\begin{cases} 13A = 2 \\ 16A + 13B = -1 \\ 8B + 13C = 1. \end{cases}$$

Решив ее, находим $A = \dfrac{2}{13}, \quad B = -\dfrac{45}{169}, \quad C = \dfrac{529}{2197}$. Тогда частное решение имеет вид $y^* = \dfrac{2}{13}x^2 - \dfrac{45}{169}x + \dfrac{529}{2197}$.

Общее решение $y = e^{-x}(C_1 \cos\dfrac{3}{2}x + C_2 \sin\dfrac{3}{2}x) + \dfrac{2}{13}x^2 - \dfrac{45}{169}x + \dfrac{529}{2197}$.

Пример 8.6 Найти общее решение уравнения $y'' + 2y' - 3y = x^2 e^x$.

Решение

Решение ищем в виде $y = \overline{y} + y^*$.

Сначала находим $\overline{y}$. Для этого решаем уравнение $y'' + 2y' - 3y = 0$.

Соответствующее характеристическое уравнение $k^2 + 2k - 3 = 0$ имеет корни $k_1 = -3, \quad k_2 = 1$, поэтому $\overline{y} = C_1 e^{-3x} + C_2 e^x$.

Найдем частное решение y^* по виду правой части. В нашем случае правая часть исходного уравнения является многочленом второй степени, умноженном на e^x. Составим число $r=\alpha+\beta i$. Числа α,β находим, сравнив правую часть нашего уравнения с функцией (8.4). В нашем случае $\alpha=1,\ \ \beta=0$, поэтому $r=1$. Данное значение r является корнем характеристического уравнения, поэтому частное решение будем искать в виде $y^*=(Ax^2+Bx+C)e^x x$.

Упростим $y^*=(Ax^3+Bx^2+Cx)e^x$ и найдем первую и вторую производную от этой функции. Подставив функцию и ее производные в исходное уравнение, сократив полученное равенство на $e^x\neq 0$ и приравняв коэффициенты при одинаковых степенях x, получим $A=\frac{1}{12},\ \ B=-\frac{1}{16},\ \ C=\frac{1}{8}$. Тогда

$$y^*=(\frac{1}{12}x^3-\frac{1}{16}x^2+\frac{1}{8}x)e^x.$$

Ответ: $y=C_1e^{-3x}+C_2e^x+\frac{1}{12}x^3-\frac{1}{16}x^2+\frac{1}{8}x.$

Пример 8.7 Решить задачу Коши для уравнения $y''+y=-\sin 2x$, если $y(\pi)=1,\ \ y'(\pi)=1$.

Решение

Характеристическое уравнение $k^2+1=0$ имеет корни $k_{1,2}=\pm i.$

Поэтому $\overline{y}=C_1\cos x+C_2\sin x.$

Частное решение ищем по виду правой части, учитывая то, что число $r=\alpha+\beta i=2i$ не является корнем характеристического уравнения.

Итак, $y^*=A\cos 2x+B\sin 2x.$ Находим $y^{*'}=-2A\sin 2x+2B\cos 2x$,

$y^{*''}=-4A\cos 2x-4B\sin 2x$ и подставляем в исходное уравнение. Приравняв коэффициенты при $\sin 2x$ и $\cos 2x$, получаем $A=0,\ \ B=\frac{1}{3}$. В результате частное решение исходного уравнения $y^*=\frac{1}{3}\sin 2x.$ Тогда общее решение исходного уравнения

$$y=C_1\cos x+C_2\sin x+\frac{1}{3}\sin 2x.$$

Найдем частное решение, удовлетворяющее начальным условиям.

$y(\pi)=1, \quad y'(\pi)=1.$

$$y(\pi)=C_1\cos\pi+C_2\sin\pi+\frac{1}{3}\sin 2\pi=1.$$

Отсюда $C_1=-1$.

Найдем $y'=-C_1\sin x+C_2\cos x+\dfrac{2}{3}\cos 2x.$

$$y'(\pi)=-C_1\sin\pi+C_2\cos\pi+\frac{2}{3}\cos 2\pi=1.$$

Отсюда $C_2=-\dfrac{1}{3}.$

Ответ: $y=-\cos x-\dfrac{1}{3}\sin x+\dfrac{1}{3}\sin 2x.$

Задачи для самостоятельного решения

1. $y''-2y'+y=xe^{2x}$,
2. $y''-5y'+6y=x^2-3x+2$,
3. $y''+2y'=x-3$,
4. $y''-2y'+y=4xe^{x}$,
5. $y''-3y'+2y=3\sin x-\cos x$,
6. $y''-2y'+5y=\cos 2x$,
7. $y''-4y=(x+1)e^{2x}$,
8. $y''+6y'+9y=xe^{-3x}$.

8.5 Метод вариации произвольных постоянных

Этот метод применяется для решения уравнений вида

$$ay''+by'+c=f(x),$$

где $a,b,c-$постоянные величины, а функция $f(x)$ не соответствует виду (8. 5), т. е. является произвольной.

Пример 8.8 Методом вариации произвольных постоянных решить уравнение

$$y''+3y'+2y=\frac{1}{e^{x}+1}.$$

Решение

Решим соответствующее однородное уравнение $y'' + 3y' + 2y = 0$. Корни его характеристического уравнения $k_1 = -2,\ k_2 = -1$. Тогда общее решение однородного уравнения имеет вид $\overline{y} = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-x}$.

Будем считать, что C_1 и C_2 являются функциями от x, а функции $y_1 = e^{-2x}$ и $y_2 = e^{-x}$ образуют фундаментальную систему однородного уравнения.

Поэтому общее решение исходного уравнения имеет вид

$$y = C_1(x)e^{-2x} + C_2(x)e^{-x}.$$

Для нахождения функций $C_1(x)$ и $C_2(x)$ решим систему уравнений

$$\begin{cases} C_1' y_1 + C_2' y_2 = 0 \\ C_1' y_1' + C_2' y_2' = \dfrac{1}{e^x + 1}. \end{cases}$$

Поскольку $y_1' = -2e^{-2x}$, а $y_2' = -e^{-x}$, система приобретает вид

$$\begin{cases} C_1' e^{-2x} + C_2' e^{-x} = 0 \\ -2C_1' e^{-2x} - C_2' e^{-x} = \dfrac{1}{e^x + 1}. \end{cases}$$

Решим эту систему по формулам Крамера относительно неизвестных функций $C_1'(x)$ и $C_2'(x)$.

$$\Delta = \begin{vmatrix} e^{-2x} & e^{-x} \\ -2e^{-2x} & -e^{-x} \end{vmatrix} = e^{-3x}; \quad \Delta_{C_1'} = \begin{vmatrix} 0 & e^{-x} \\ \dfrac{1}{e^x+1} & -e^{-x} \end{vmatrix} = -\frac{e^{-x}}{e^x+1};$$

$$\Delta_{C_2'} = \begin{vmatrix} e^{-2x} & 0 \\ -2e^{-2x} & \dfrac{1}{e^x+1} \end{vmatrix} = \frac{e^{-2x}}{e^x+1}; \quad C_1' = \frac{\Delta_{C_1'}}{\Delta} = -\frac{e^{2x}}{e^x+1}; C_2' = \frac{\Delta_{C_2'}}{\Delta} = \frac{e^x}{x^x+1}.$$

.... Тогда

$$C_1 = -\int \frac{e^{2x}}{e^x+1}dx = -e^x + \ln(e^x+1) + A;$$

$$C_2 = \int \frac{e^x}{e^x+1}dx = \ln(e^x+1)+B.$$

A и B – произвольные постоянные

Окончательно, общее решение исходного уравнения имеет вид

$$y = (-e^x + \ln(e^x+1) + A)e^{-2x} + (\ln(e^x+1)+B)e^{-x}.$$

Задачи для самостоятельного решения

1. $y'' + 2y' + y = \dfrac{e^{-x}}{x^2}$,

2. $y'' + y = \dfrac{1}{\cos x}$,

3. $y'' + 4y = tg2x$,

4. $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{x}$,

5. $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{\sqrt{x+1}}$,

6. $y'' - y' = e^{2x}\sin(e^x)$.

8.6 Решение систем дифференциальных уравнений

Пример 8.9 Решить систему $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + 4y, \\ \dfrac{dy}{dt} = y - 3x. \end{cases}$

Решение

Искомые функции $x = x(t)$ и $y = y(t)$. Дифференцируем одно уравнений по t, например первое. Получаем $\dfrac{d^2x}{dt^2} = \dfrac{dx}{dt} + 4\dfrac{dy}{dt}$. Заменив $\dfrac{dy}{dt}$ его выражением из второго уравнения, получаем $\dfrac{d^2x}{dt^2} = \dfrac{dx}{dt} + 4y - 12x.$

Рассмотрим систему двух уравнений $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + 4y \\ \dfrac{d^2x}{dt^2} = \dfrac{dx}{dt} + 4y - 12x. \end{cases}$

Из первого уравнения найдем $4y = \dfrac{dx}{dt} - x$ и подставим во второе уравнение и после его преобразований получим линейное однородное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 2\frac{dx}{dt} + 13x = 0.$$

Его характеристическое уравнение $k^2 - 2k + 13 = 0$ имеет корни $k_{1,2} = 1 + 2\sqrt{3}i.$ Поэтому общее решение этого уравнения

$$x = e^t (C_1 \cos 2\sqrt{3}t + C_2 \sin 2\sqrt{3}t).$$

Найдем $\frac{dx}{dt} = e^t \left((C_1 + 2\sqrt{3}C_2) \cos 2\sqrt{3}t + (C_2 - 2\sqrt{3}C_1) \sin 2\sqrt{3}t\right)$ и подставим в равенство $y = \frac{1}{4}\left(\frac{dx}{dt} - x\right)$.

После преобразований получим $y = \frac{2\sqrt{3}}{4} e^t (C_2 \cos 2\sqrt{3}t - C_1 \sin 2\sqrt{3}t).$

Ответ: $x = e^t (C_1 \cos 2\sqrt{3}t + C_2 \sin 2\sqrt{3}t).$

$$y = \frac{\sqrt{3}}{2} e^t (C_2 \cos 2\sqrt{3}t - C_1 \sin 2\sqrt{3}t).$$

8.7 Решение геометрических задач с помощью дифференциальных уравнений

Чтобы решить геометрическую задачу, надо построить чертеж, обозначить искомую кривую через $y = y(x)$ и выразить все упоминаемые в задаче величины через $x, y, y'.$ Тогда данное в условии задачи соотношение превращается в дифференциальное уравнение, из которого можно найти искомую функцию $y = y(x)$.

Пример 8.10 Найти уравнение кривой, проходящей через точку *$M_0(1;2)$* и обладающую тем свойством, что касательная к кривой отсекает от оси *ОУ* отрезок, равный полусумме координат точки касания.

Решение

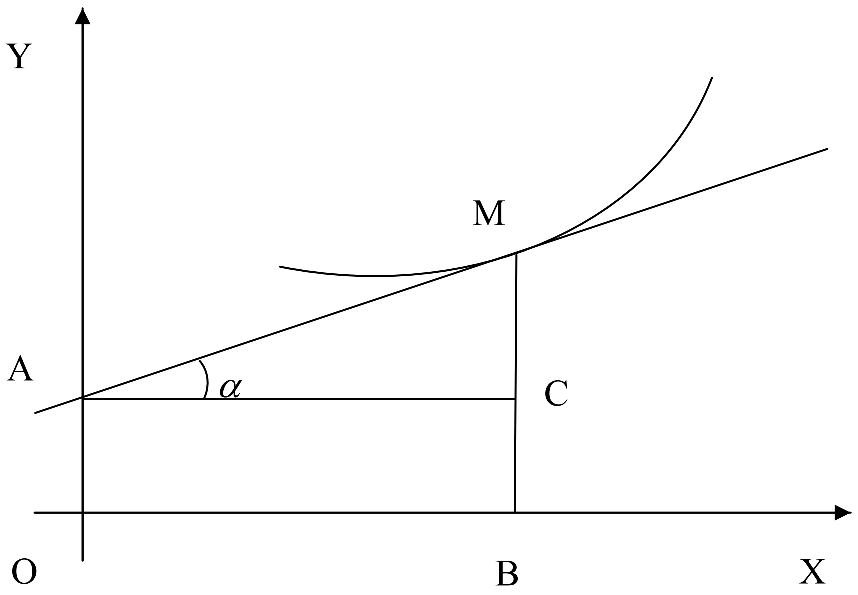


Рисунок 8.1

Пусть $M(x;y)$ – произвольная точка искомой кривой (рис. 8.1). По условию задачи $OA=\frac{1}{2}(OB+BM)$. для того, чтобы составить дифференциальное уравнение, выразим отрезки OA и OB через координаты текущей точки $M(x;y)$ и производную y'. Из рисунка видим, что $OB=AC=x,\;\; BM=y,\;\; OA=BM-CM=BM-AC\cdot tg\alpha=y-xy'$.

В итоге получаем линейное дифференциальное уравнение $y-xy'=\frac{x+y}{2}$. Преобразуем его к общему виду $y'-\frac{y}{2x}=-\frac{1}{2}$. Решение ищем в виде $y=uv$.

Тогда $y'=u'v+v'u$. Подставив y и y' в уравнение и применив методику решений данного вида уравнений (см. раздел 7.3), получим общее решение $y=-x+C\sqrt{x}$. По условию задачи кривая проходит через точку $M_0(1;2)$, т. е. $y(1)=2$. Следовательно, $2=-1+C\sqrt{1}$. Отсюда $C=3$.

Ответ: искомая кривая имеет вид $y=-x+3\sqrt{x}$.

9 ФУНКЦИИ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

9.1 Основные понятия

Определение 1. Переменная величина z называется функцией двух переменных величин x и y, если каждой паре допустимых значений x и y соответствует одно и только одно значение z.

Функция двух переменных обозначается символом

$$z = f(x, y)$$

Геометрическим изображением функции двух переменных является некоторая поверхность в пространстве.

Значение функции $z = f(x, y)$ при $x = a, y = b$ обозначается через $f\left(a, b\right)$.

Определение 2. Переменная величина u называется функцией трех переменных величин x, y, z, если каждой тройке значений x, y, z отвечает единственное значение u. Обозначение:

$$u = f(x, y, z).$$

Определение 3. Совокупность всех точек, в которых определена функция нескольких переменных, называется областью существования или областью определения функции.

Для функции двух переменных областью определения является некоторая часть координатной плоскости, ограниченная одной или несколькими линиями (или вся плоскость); для функции трех переменных – часть пространства (или все пространство).

Пример 9.1 Найти область определения функции $x^2 + y^2 + z^2 = 9$.

Решение

Решив это уравнение относительно z, получим

$$z = \pm\sqrt{9 - x^2 - y^2}.$$

Функция определена, когда подкоренное выражение неотрицательно, то есть

$$9 - x^2 - y^2 \geq 0 \text{ или } x^2 + y^2 \leq 9.$$

Последнему неравенству удовлетворяют координаты всех точек, лежащих внутри и на границе круга радиуса *R = 3* с центром в начале координат. Таким образом, областью определения этой функции будет круг радиуса *R = 3*.

Пример 9.2 Найти область определения функции $z = \sqrt{xy}$.

Решение

Данная функция определена, когда подкоренное выражение неотрицательно, то есть $xy \geq 0$. Это возможно в двух случаях: 1) $x \geq 0$, $y \geq 0$; 2) $x \leq 0$, $y \leq 0$. Следовательно, область определения – совокупность точек, расположенных в первой и третьей координатных четвертях и на координатных осях.

Пример 9.3 Найти область определения функции

$$Z = \frac{1}{\sqrt{9 - x^2 - y^2}}.$$

Решение

Функция определена, когда подкоренное выражение положительно (в отличие от предыдущего примера равенство нулю здесь исключается), то есть

$$9 - x^2 - y^2 > 0 \text{ или } \quad x^2 + y^2 < 9.$$

Последнему неравенству удовлетворяют точки, лежащие внутри круга радиуса $R = 3$ (предельные точки исключаются). Область определения функции – совокупность точек, лежащих внутри круга радиуса $R = 3$ с центром в начале координат.

9.2 Частные производные и полный дифференциал функции двух переменных

Определение 1. Частными производными функции двух переменных по одной из этих переменных называется предел отношения соответствующего частного приращения функции к приращению данной переменной, когда последнее стремится к нулю.

Для функции двух переменных $z = f(x, y)$ по определению имеем

$$z_x{}' = \frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} \text{ (частная производная по } x\text{)},$$

$$z_y{}' = \frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y} \text{ (частная производная по } y\text{)}.$$

При нахождении частной производной по одной переменной пользуются правилами дифференцирования функции одной переменной, считая все другие переменные постоянными.

Определение 2. Полным дифференциалом функции $z = f(x, y)$ называется главная часть полного приращения, линейная относительно приращений аргументов Δx и Δy.

Функция, которая имеет непрерывные частные производные, имеет полный дифференциал. Дифференциалы независимых переменных совпадают с их приращением, то есть $dx = \Delta x, dy = \Delta y$.

Полный дифференциал функции $z = f(x, y)$ вычисляется по формуле

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy \tag{9.1}$$

Пример 9.4 Найти частные производные функции $z = x^2 + 2xy + y^2$.

Решение

Считая y постоянной и дифференцируя z как функцию от x, получаем частную производную по x:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = (x^2)'_x + (2xy)'_x + (y^2)'_x = 2x + 2y = 2(x + y).$$

Считая x постоянной и дифференцируя z как функцию от y, находим частную производную по y:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = (x^2)'_y + (2xy)'_y + (y^2)'_y = 0 + 2x + 2y = 2(x + y).$$

Пример 9.5 Найти полный дифференциал функции $z = \ln(x^2 + y^2)$.

Решение

Найдем $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x}{x+y}$ и $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2y}{x+y}$. Тогда полный дифференциал по формуле (9.1) равен

$$dz = \frac{2xdx}{x+y} + \frac{2ydy}{x+y}.$$

9.3 Производные и дифференциалы высших порядков

Определение 1. Производными второго порядка функции $z = f(x, y)$ называется частные производные от ее частных производных первого порядка.

Обозначение:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right); \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right);$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right); \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right).$$

Используются и другие обозначения:

$$f''_{xx}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right); \quad f''_{yy}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right); \quad f''_{xy}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right).$$

Если смешаные производные f''_{xy} и f''_{yx} непрерывны, то результаты дифференцирования не зависят от порядка дифференцирования, то есть

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}.$$

Аналогично определяются частные производные третьего порядка. Например, для функции $z=f(x,y)$ частные производные третьего порядка определяются по формулам:

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right); \quad \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right);$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right); \quad \frac{\partial^3 z}{\partial y^2 \partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)$$

Причем

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}=\frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x^2}=\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial x}.$$

Дифференциалы второго, третьего и высших порядков функции $z=f(x,y)$ определяются по формулам $d^2z=d(dz), d^3z=d(d^2z)$ и так далее. Они выражаются через частные производные таким образом:

$$d^2z=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2+2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dxdy+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2;$$

$$d^3z=\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}dx^3+3\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}dx^2dy+3\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}dxdy^2+\frac{\partial^3 z}{\partial y^3}dy^3.$$

Пример 9.6 Найти частные производные второго порядка функции $z=(x^2+y^2)^2$**.**

Решение

Находим сначала частные производные первого порядка:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2(x^2 + y^2)(x^2 + y^2)'_x = 2(x^2 + y^2)2x = 4x^3 + 4xy^2,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2(x^2 + y^2)(x^2 + y^2)'_y = 2(x^2 + y^2)2y = 4x^2y + 4y^3.$$

Дифференцируя каждую из полученных функций по x и y, находим частные производные второго порядка:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(4x^3 + 4xy^2) = 12x^2 + 4y^2,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}(4x^2y + 4y^3) = 4x^2 + 12y^2,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}(4x^3 + 4xy^2) = 8xy,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(4x^2y + 4y^3) = 8xy.$$

Как и следовало ожидать $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$.

Пример 9.7 Дана функция $z = x^{y^2}$ **. Показать, что**

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}.$$

Решение

Имеем:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y^2 x^{y^2 - 1}; \quad \frac{\partial z}{\partial x} = 2yx^{y^2};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 2yx^{y^2 - 1}(1 + y^2 \ln x); \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 2yx^{y^2 - 1}(1 + y^2 \ln x).$$

Отсюда следует равенство

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}.$$

Пример 9.8 Доказать, что функция $u=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ **удовлетворяет уравнению** $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0.$

Решение

Найдем сначала частные производные данной функции. Запишем ее в виде

$$u=(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}};$$

Тогда

$$u'_x=-x(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}};$$

$$u''_{xx}=3x^2(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{5}{2}}-(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}};$$

$$u'_y=-y(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}};$$

$$u''_{yy}=3y^2(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{5}{2}}-(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}};$$

$$u'_z=-z(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}};$$

$$u''_{zz}=3z^2(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{5}{2}}-(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}};$$

Отсюда

$$u''_{xx}+u''_{yy}+u''_{zz}=0.$$

Пример 9.9 Показать, что функция $z=\ln(e^x+e^y)$ **удовлетворяет уравнению**

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right)^2=0.$$

Решение

Найдем сначала частные производные данной функции:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{e^x+e^y}e^x;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{e^x+e^y}e^y;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{e^x+e^y}\cdot e^x\right)=\frac{e^x\left(e^x+e^y\right)-e^x\cdot e^x}{(e^x+e^y)}=\frac{e^x e^y}{(e^x+e^y)};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{e^x}{e^x+e^y}\right)=\frac{0\cdot\left(e^x+e^y\right)-e^y\cdot e^x}{(e^x+e^y)^2}=\frac{e^x e^y}{(e^x+e^y)^2};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\left(\frac{e^y}{e^x+e^y}\right)'_y=\frac{e^y\left(e^x+e^y\right)-e^y\cdot e^y}{(e^x+e^y)^2}=\frac{e^x e^y}{(e^x+e^y)}.$$

Подставив полученные вторые производные в заданное уравнение, получим

$$\frac{e^x e^y}{(e^x+e^y)^2}\cdot\frac{e^x e^y}{(e^x+e^y)^2}-\left(-\frac{e^x e^y}{(e^x+e^y)^2}\right)^2=0.$$

Пример 9.10 Найти значение полного дифференциала функции $u=\dfrac{x+y}{z}$ **при** $x=1$, $y=-2$, $z=-1$, $\Delta x=0{,}1$, $\Delta y=0{,}2$, $\Delta z=0{,}5$.

Решение

Находим частные производные

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\left(\frac{x+y}{z}\right)'_x=\frac{1}{z};\ \frac{\partial u}{\partial y}=\left(\frac{x+y}{z}\right)'_y=\frac{1}{z};\ \ \frac{\partial u}{\partial z}=\left(\frac{x+y}{z}\right)'_z=-\frac{x+y}{z^2},$$

а затем полный дифференциал

$$du=\frac{1}{z}\Delta x+\frac{1}{z}\Delta y-\frac{x+y}{z^2}\Delta z.$$

Теперь находим значение этого полного дифференциала при $x=1,\ y=-2,\ z=-1,\ \Delta x=0{,}1,\ \Delta y=0{,}2\ ,\Delta z=0{,}5.$

$$du=\frac{1}{-1}\cdot 0{,}1+\frac{1}{-1}\cdot 0{,}2-\frac{1-2}{\left(-1\right)^2}\cdot 0{,}5=0{,}2.$$

9.4 Касательная плоскость и нормаль к поверхности

Определение 1. Касательной плоскостью к поверхности в данной ее точке M (точке касания) называется плоскость, в которой лежат касательные в этой точке к всевозможным кривым, проведенным на данной поверхности через указанную точку.

Определение 2. Нормалью к поверхности называется перпендикуляр к касательной плоскости в точке касания.

Уравнение касательной плоскости к поверхности $z = f(x, y)$ в данной точке $M(x_0, y_0, z_0)$ имеет вид

$$z - z_0 = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0); \qquad (9.2)$$

Уравнение нормали в указанной точке находим по формуле

$$\frac{x - x_0}{f'_x(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{f'_y(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{-1} \qquad (9.3)$$

Пример 9.11 Даны функция $z = f(x, y) = arctg\frac{x - y}{y}$ и точка $A(2,1,\frac{\pi}{4})$. Составить уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности в точке A.

Решение

.Уравнение касательной плоскости к поверхности в точке $C(x_0, y_0, z_0)$ найдем по формуле (9.2), где

$$z'_x\Big|_{\substack{x-2\\y=1}} = \frac{y}{y^2 + (x - y)^2}\Bigg|_{\substack{x=2\\y=1}} = \frac{1}{2}, \quad z'_y\Big|_{\substack{x-2\\y=1}} = -\frac{y}{y^2 + (x - y)^2}\Bigg|_{\substack{x=2\\y=1}} = -1$$

Имеем

$$z - \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}(x - 2) + (-1)(y - 1),$$

или

$x - 2y - 2z + \frac{\pi}{2} = 0$ – уравнение касательной плоскости к поверхности $z = arctg\frac{x - y}{y}$ в точке A.

Уравнение нормали найдем по формуле (9.3)

$$\frac{x - 2}{1/2} = \frac{y - 1}{-1} = \frac{z - \frac{\pi}{4}}{-1}.$$

9. 5 Экстремум функции двух переменных

Определение 1. Максимум (минимум) функции $z = f(x, y)$ называется такое ее значение $f(x_0, y_0)$, какое больше (меньше) всех других значений, которые принимаются ею в точках, достаточно близких к точке $\mathrm{M}_0(x_0, y_0\ )$ и отличающихся от нее.

Максимум или минимум функции называется экстремумом. Точка, в которой достигается экстремум, называется точкой экстремума.

Аналогично определяется экстремум функции трех и более переменных.

Экстремум функции несколько переменных может достигаться лишь в точках, лежащих внутри области ее определения, в которых все частные производные первого порядка обращаются в нуль. Такие точки называются критическими. Для функции двух переменных $z = f(x, y)$ критические точки находятся из системы уравнений

$$\begin{cases} f'_x(x, y) = 0, \\ f'_y(x, y) = 0. \end{cases}$$

Для проверки полученных критических точек на наличие в них экстремума вычисляют определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix},$$

в котором $A = f''_{xx}(x_0, y_0), B = f''_{xy}(x_0, y_0), C = f'_{yy}(x_0, y_0)$, тогда,

1) если $\Delta \succ 0$, то $\mathrm{M}_0(x_0, y_0\ )$ – точка экстремума: при $A \prec 0$ (или $C \prec 0$) – точка максимума, при $A \succ 0$ (или $C \succ 0$) – точка минимума;

2) если $\Delta \prec 0$, то в точке M_0 нет экстремума,

3 если $\Delta = 0$, то вопрос о наличии или отсутствии экстремума функции остается открытым (нужно последующее исследование функции, например, по знаку прироста Δf вблизи этой точки).

Пример 9.12 Найти экстремумы функции

$$f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 30x - 18y.$$

Решение

Находим первые частные производные:

$$f'_x(x, y) = 3x^3 + 3y^2 - 30, \quad f'_y(x, y) = 6xy - 18.$$

Приравнивая эти производные нулю, после элементарных преобразований приходим к системе уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 10, \\ 2xy = 6. \end{cases}$$

Складывая и вычитая почленно уравнения, получим

$$\begin{cases} x^2 + 2xy + y^2 = 16, \\ x^2 - 2xy + y^2 = 4 \end{cases}$$

Решая эту систему уравнений, находим четыре критических точки: $P_1(3;1)$, $P_2(1;3)$, P_3(-3; -1), P_4(-1;-3).

Теперь найдем вторые частные производные: $f''_{x^2} = 6x; f''_{xy} = 6y; f''_{y^2} = 6x$ и составим выражение

$$\Delta(P) = f''_{x^2}(P) \cdot f''_{y^2}(P) - \left(f''_{yx}(P)\right)^2 = 36(x^2 - y^2).$$

Убедимся, что

1) $\Delta(P_1) \succ 0, f''_{x^2}(P_1) \succ 0, P_1$ – точка минимума;

2) $\Delta(P_2) \prec 0,$ в точке экстремума нет;

3) $\Delta(P_3) \prec 0,$ в точке экстремума нет;

4) $\Delta(P_4) \succ 0, f''_{x^2}(P_4) \prec 0, P_4$ – точка максимума.

Следовательно, данная функция имеет два экстремума: в точке P_1 – минимум, причем $f(P_1) = -72,$ в точке P_4 – максимум, $f(P_4) = 72.$

9.6 Наибольшее и наименьшее значения функции

Функция, непрерывная и ограниченная в замкнутой области, достигает в ней наибольшего и наименьшего значений в критических точках или в точках, лежащих на границе области.

Для нахождения наибольшего и наименьшего значений функции в замкнутой ограниченной области необходимо:

1. Найти критические точки (лежащие внутри данной области) и вычислить в них значение функции.
2. Найти наибольшее и наименьшее значения функции на границе области.
3. Выбрать наибольшее и наименьшее значения из всех полученных.

В некоторых случаях при нахождении наибольших и наименьших значений функции двух переменных в ограниченной замкнутой области границу этой области удобно разбить на части, каждая из которых задается своими уравнением.

Пример 9.13 Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^3 + y^3 + 6xy$ **в прямоугольнике с вершинами** $A(-3,-3)$, $B(-3,2)$, $C(1,2)$, $D(1,-3)$.

Решение

Найдем частные производные данной функции:

$$z'_x = 3x^2 + 6y; z'_y = 3y^2 + 6x$$

Найдем критические точки. Для этого решим систему уравнений

$$\begin{cases} 3x^2 + 6y = 0, \\ 3y^2 + 6x = 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x^2 + 2y = 0, \\ y^2 + 2x = 0 \end{cases}$$

В результате получаем две критических точки $M_1(0,0), M_2(-2,-2)$, которые принадлежат прямоугольнику $ABCD$ (рис. 9.1).

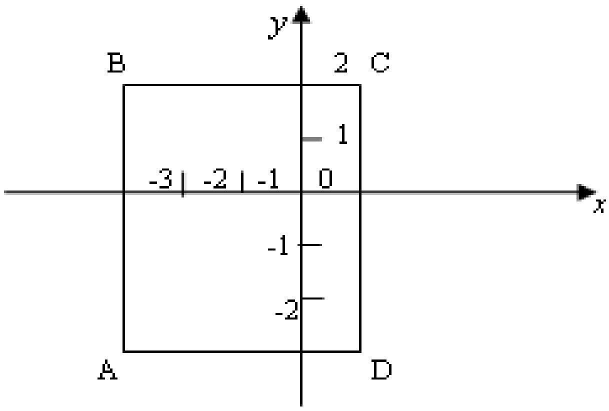


Рисунок 9.1

Вычисляем значения функции в этих точках:

$$z_1 = z(M_1) = z(0;0) = 0; \quad z_2 = z(M_2) = z(-2;-2) = 8.$$

Найдем наибольшее и наименьшее значения функции на границе прямоугольника $ABCD$. Эту границу удобно разбить на четыре отрезка AB, BC, CD, DA, на каждом из которых могут оказаться свои критические точки. Кроме того, необходимо учесть и концы отрезков, то есть точки A, B, C и D.

Ищем критические точки на отрезке AB, уравнение которого $x = -3$, причем $-3 \le y \le 2$. На этом отрезке данная функция становится функцией одной переменной y:

$$z = y^3 - 18y - 27.$$

Производная этой функции $z_y{}' = 3y^2 - 18$ превращается в нуль при $y = -\sqrt{6}, y = \sqrt{6}$. Второго значения рассматривать не будем, поскольку оно не принадлежит отрезку AB, для которого $-3 \le y \le 2$. Вычислим значение функции $z(y)$ при $y = -\sqrt{6}$:

$$z_3 = z\left(-\sqrt{6}\right) = \left(-\sqrt{6}\right)^3 - 18\left(-\sqrt{6}\right) - 27 = 12\sqrt{6} - 27$$

На отрезке BC $y = 2$, поэтому

$$z = x^3 + 12x + 8.$$

Функция $z(x) = x^3 + 12x + 8$ критических точек не имеет, поскольку ее производная $z'_x = 3x^3 + 12$ в нуль не обращается.

На отрезке CD $x = 1(-3 \le y \le 2)$, где $z = 1 + y^3 + 6y,$ также нет критических точек.

На отрезке DA $y = -3(-3 \le y \le 1)$, поэтому

$$z = x^3 - 27 - 18x$$

Функция $z(x) = x^3 - 18x - 27$ имеет критическую точку $x = -\sqrt{6}$ (точка $x = \sqrt{6}$, в которой производная $z'_x = 3x^3 - 18$ также обращается в нуль отрезку DA не принадлежит).

Вычислим значение функции $z(x)$ при $x = -\sqrt{6}$:

$$z_4 = z\left(-\sqrt{6}\right) = \left(-\sqrt{6}\right)^3 - 18\left(-\sqrt{6}\right) - 27 = 12\sqrt{6} - 27$$

Осталось найти значение функции $z = x^3 + y^3 + 6xy$ в вершинах $A, B, C\ D$

$$z_5 = z\big|_A = z\big|_{\substack{x=-3\\y=-3}} = (-3)^3 + (-3)^3 + 6(-3)(-3) = 0;$$

$$z_6 = z\big|_B = z\big|_{\substack{x=-3\\y=2}} = (-3)^3 + 2^3 + 6(-3)2 = -55;$$

$$z_7 = z\big|_C = z\big|_{\substack{x=1\\y=2}} = 1^3 + 2^3 + 6 \cdot 1 \cdot 2 = 21;$$

$$z_8 = z\big|_D = z\big|_{\substack{x=1\\y=-3}} = 1^3 + (-3)^3 + 6 \cdot 1 \cdot (-3) = -44.$$

Сравнив значения $z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6, z_7, z_8$, заключаем, что функция $z = x^3 + y^3 + 6xy$ в прямоугольнике $ABCD$ достигает наименьшего значения, равного –55, в точке B и наибольшего значения, равного 21, в точке M.

9.7 Производная по направлению

Вычисление производной по направлению производится с помощью следующей теоремы.

Теорема. Для всякой дифференцируемой функции $u(x, y, z)$ существует производная по любому направлению λ, причем

$$\frac{\partial u}{\partial \lambda} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma, \tag{9.4}$$

где $\cos\alpha, \cos\beta$ и $\cos\gamma$ – направляющие косинусы луча λ.

Пример 9.14 Дана функция $u = xyz$. Найти ее производную в точке $P(5,1,2)$ в направлении от этой точки к точке $Q(7,-1,3)$.

Решение

Найдем частные производные функции

$$\frac{\partial u}{\partial x} = yz; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = xz; \quad \frac{\partial u}{\partial z} = xy$$

и вычислим их значение в точке P:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_p = 2, \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_p = 10, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_p = 5.$$

Поскольку вектор $\overline{PQ} = \{2,-2,1\}$, то его направляющими косинусами будут

$$\cos = \frac{2}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2}} = \frac{2}{3}, \cos\beta = -\frac{2}{3}, \cos\gamma = \frac{1}{3}.$$

Следовательно,

$$\frac{\partial u}{\partial \lambda} = 2 \cdot \frac{2}{3} + 10 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) + 5 \cdot \frac{1}{3} = -\frac{11}{3}.$$

Ответ: $\frac{\partial u}{\partial \lambda} = -\frac{11}{3}$. Знак минус указывает, что в данном направлении функция u убывает.

Если скалярное поле – плоское, то функция поля зависит от двух переменных: $z = f(x, y)$. Вектор λ в этом случае лежит в плоскости O_{xy} (то есть $\cos\gamma = 0$) и, следовательно, производная по направлению вычисляется по формуле

$$\frac{\partial z}{\partial \lambda} = \frac{\partial z}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial z}{\partial y}\cos\beta. \tag{9. 5}$$

Пример 9.15 Заданы функция $z = x^2 + y^2 + xy$, **точка** $A(1,2)$ **и вектор** $\vec{\lambda} = \{3;2\}$. **Найти производную в точке** A **по направлению вектора** $\vec{\lambda}$.

Решение

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + y, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = 2y + x,$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=1\\x=2}} = 4, \qquad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=1\\x=2}} = 5.$$

Направляющие косинусы вектора $\vec{\lambda}$ равны

$$\cos\alpha = \frac{\lambda_x}{\sqrt{\lambda^2{}_x + \lambda^2{}_y}} = \frac{3}{\sqrt{3^2 + 2^2}} = \frac{3}{\sqrt{13}},$$

$$\cos\beta = \frac{\lambda_y}{\sqrt{\lambda^2{}_x + \lambda^2{}_y}} = \frac{3}{\sqrt{13}}.$$

Подставим полученные данные в формулу (9.5) и получим

$$\left.\frac{\partial z}{\partial \lambda}\right|_A = 4\cdot\frac{3}{\sqrt{13}} + 5\cdot\frac{2}{\sqrt{13}} = \frac{22}{\sqrt{13}} = \frac{22\cdot\sqrt{13}}{13}.$$

9.8 Градиент функции

Определение. Градиентом в точке $P(x, y, z)$ скалярного поля, заданного дифференцируемой функцией $u = u(x, y, z)$, называется вектор

$$\frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}.$$

Градиент функции $u(x, y, z)$ обозначается символом

$$grad\ u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}. \tag{9.6}$$

Пример 9.16 Найти градиент функции $u = x^2 + 2y^2 - z^2 - 5$ **в точке** $P_0(2,-1,1)$**.**

Решение

Найдем $u'_x = 2x; u'_y = 4y; u'_z = -2z$. Потом по формуле получим

$$grad\ \ u\left(P_0\right) = u'_x(2,-1,1)\vec{i} + u'_y(2,-1,1)\vec{j} + u'_z(2,-1,1)\vec{k} = 4\vec{i} - 4\vec{j} - 2\vec{k}\,.$$

В случае плоского скалярного поля, заданного дифференцируемой функцией двух переменных $z = f(x,y)$, градиент определяется по формуле

$$grad\ \ f(x,y) = f'_x(x,y)\vec{i} + f'_y(x,y)\vec{j}$$

Пример 9.17 Найти градиент функции $z = f(x,y) = xy + x + y^2$ в произвольной точке $B(x,y)$ и в точке $A(2,3)$.

Решение

Найдем $\dfrac{\partial f}{\partial x} = y+1, \dfrac{\partial f}{\partial y} = x+2y, \left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{\substack{x=2\\y=3}} = 4, \left.\dfrac{\partial f}{\partial y}\right|_{\substack{x=2\\y=3}} = 8.$

Ответ: $grad\ \ f(x,y) = (y+1)\vec{i} + (x+2y)\vec{j},$

$grad\ \ f(2,3) = 4\vec{i} + 8\vec{j}.$

10 ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ВОПРОСЫ ПО ТЕМАМ

«ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ» И «ФУНКЦИИ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ»

1. Определение дифференциального уравнения.
2. Порядок дифференциального уравнения.
3. Общее решение дифференциального уравнения.
4. Особое решение дифференциального уравнения.
5. Частное решение дифференциального уравнения.
6. Задача Коши.
7. Общий вид дифференциального уравнения первого порядка.
8. Дифференциальные уравнения с разделенными переменными.
9. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными.
10. Однородные функции.
11. Однородные дифференциальные уравнения первого порядка.
12. Дифференциальные уравнения, приводящиеся к однородным.
13. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка.
14. Дифференциальные уравнения Бернулли.
15. Уравнения в полных дифференциалах.
16. Дифференциальные уравнения второго порядка.
17. Дифференциальные уравнения второго порядка, не содержащие явно искомую функцию.
18. Дифференциальные уравнения второго порядка, не содержащие явно независимую переменную.
19. Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.
20. Правило составления характеристического уравнения.
21. Общее решение линейного однородного дифференциального уравнения в случае положительного дискриминанта характеристического уравнения.
22. Общее решение линейного однородного дифференциального уравнения в случае отрицательного дискриминанта характеристического уравнения.
23. Общее решение линейного однородного дифференциального уравнения в случае дискриминанта характеристического уравнения равного нулю.
24. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.
25. Структура общего решения линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.
26. Нахождение частного решения неоднородного уравнения по виду правой части.
27. Метод вариации произвольных постоянных.
28. Решение систем дифференциальных уравнений.
29. Определение функций многих переменных.

30. Область определения функции двух переменных.
31. Частные приращения функций многих переменных.
32. Частные производные функций многих переменных.
33. Полный дифференциал функций многих переменных.
34. Производные высших порядков функций многих переменных.
35. Касательная плоскость и ее уравнение.
36. Нормаль к поверхности и ее уравнение.
37. Экстремумы функций двух переменных.
38. Необходимые условия экстремума функций двух переменных.
39. Достаточные условия экстремума функций двух переменных.
40. Наибольшее и наименьшее значения функций двух переменных.
41. Производная по направлению.
42. Градиент функции двух переменных.
43. Градиент функции трех переменных.

11 ТИПОВОЙ РАСЧЕТ ПО ТЕМЕ «ИНТЕГРАЛЫ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ»

Задание 1

Найти неопределенные интегралы:

1.1 а) $\int \frac{3x^2+14x+37}{(x-1)(x^2+4x+13)}dx;$ б) $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{4-x^2}};$ в) $\int 6x^2 arctg 2x dx.$

1.2 а) $\int \frac{2x^4+9x^3+3x^2+27}{x^3+6x^2+9x}dx;$ б) $\int \frac{dx}{(9+x^2)\sqrt{9+x^2}};$ в) $\int x\ln(x^2+2)dx.$

1.3 а) $\int \frac{7x^3+40x-96}{2x^4+5x^3-12x^2}dx;$ б) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-16}};$ в) $\int x^2\cos 4x dx.$

1.4 а) $\int \frac{4x^4-4x^3+x^2+5}{4x^3+4x^2+5x}dx;$ б) $\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}dx;$ в) $\int \arccos 4x dx.$

1.5 а) $\int \frac{x+2}{(2x+3)(x+1)^2}dx;$ б) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-4}};$ в) $\int (x^2+1)\sin x dx.$

1.6 а) $\int \frac{3x^3+4x}{(x-2)^2(x^2+4)}dx;$ б) $\int \frac{\sqrt{x^2-4}}{x}dx;$ в) $\int e^{-x}\sin x dx.$

1.7 а) $\int \frac{5dx}{x^3+2x^2+5x};$ б) $\int \frac{x^2dx}{(9-x^2)\sqrt{9-x^2}};$ в) $\int arctg 3x dx.$

1.8 а) $\int \frac{x^4-2}{x^3+x}dx;$ б) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+1}};$ в) $\int x^2e^{-3x}dx.$

1.9 а) $\int \frac{dx}{(2x-1)(8x^2-4x+1)};$ б) $\int \frac{x^3dx}{(4-x^2)\sqrt{4-x^2}};$ в) $\int e^{-2x}\cos x dx.$

1.10 а) $\int \frac{34dx}{(x-2)(x^2-2x+17)}$; б) $\int \frac{dx}{x^4\sqrt{x^2+4}}$; в) $\int x^2 \cos\frac{x}{2}dx$.

1.11 а) $\int \frac{x^2+5}{2x^3-x^2-10x}dx$; б) $\int \frac{x-1}{\sqrt{4x^2-4x+3}}dx$; в) $\int \frac{dx}{1+\sin x}dx$.

1.12 а) $\int \frac{20dx}{(x+4)(x^2+4x+20)}$; б) $\int \frac{4x+5}{\sqrt{11-20x-4x^2}}dx$; в) $\int \frac{dx}{\sin^2 x}$.

1.13 а) $\int \frac{3x^2-2}{(x+3)(2x^2-3x-2)}dx$; б) $\int \frac{6x-1}{\sqrt{9x^2+6x-2}}dx$; в) $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^3 x}dx$.

1.14 а) $\int \frac{2x^4+8x^3+9x^2+4}{x^3+4x^2+4x}dx$; б) $\int \frac{2x-1}{\sqrt{5+12x-9x^2}}dx$; в) $\int ctg^4 x dx$.

1.15 а) $\int \frac{9xdx}{(x-5)(x^2+2x+10)}$; б) $\int \frac{x+2dx}{\sqrt{4x^2+12x+7}}$; в) $\int 16\sin^4 x\cos^4 x dx$.

1.16 а) $\int \frac{4x-3}{x(2x-1)^2}dx$; б) $\int \frac{3x-4}{\sqrt{21+12x-9x^2}}dx$; в) $\int \frac{dx}{4-5\cos x}$.

1.17 а) $\int \frac{2dx}{16x^4-1}$; б) $\int \frac{3x+1}{\sqrt{9x^2-12x+5}}dx$; в) $\int \cos^4 x\sin^3 x dx$.

1.18 а) $\int \frac{2x^2+4}{(x-4)(x+2)^2}dx$; б) $\int \frac{x+5}{\sqrt{2-x-x^2}}dx$; в) $\int tg^4 x dx$.

1.19 а) $\int \frac{5dx}{(x+1)(2x^2+2x+5)}$; б) $\int \frac{x+3}{\sqrt{x^2-x+1}}dx$; в) $\int \frac{dx}{3\sin x+4\cos x+5}$.

1.20 а) $\int \frac{2x^5-2x^4+4}{x^4+4x^2}dx$; б) $\int \frac{2x+3}{\sqrt{7-6x-x^2}}dx$; в) $\int \frac{\cos^3 x dx}{\sin^6 x}$.

1.21 а) $\int \frac{x^5+9x^3-4}{x^2+3x}dx$; б) $\int \frac{1}{3x^2-8x+9}dx$; в) $\int \frac{\cos x}{2+\cos x}dx$.

1.22 а) $\int \frac{x^3+6x^2+13x+9}{(x+1)(x+2)^2}dx$; б) $\int \frac{x}{2x^2+2x+5}dx$; в) $\int \frac{\cos x}{1+\cos x+\sin x}dx$.

1.23 а) $\int \frac{3x^3+1}{x^2-1}dx$; б) $\int \frac{4x-1}{4x^2-4x+5}dx$; в) $\int \frac{\cos x-\sin x}{(1+\sin x)^2}dx$.

1.24 а) $\int \frac{x^3+x^2-x-3}{x^4-x^2}dx$; б) $\int \frac{2x-3}{x^2+2x-7}dx$; в) $\int \frac{1}{2+3\cos^2 x}dx$.

1.25 а) $\int \frac{x^5-25x^3-1}{x^2+5x}dx$; б) $\int \frac{5x+4}{\sqrt{x^2+2x+5}}dx$; в) $\int \frac{\cos x}{5+4\cos x}dx$.

1.26 а) $\int \frac{3}{(x-1)^2(x^2+9)}dx$; б) $\int \frac{5x+2}{\sqrt{x^2+3x-4}}dx$; в) $\int \frac{\cos^5 x}{\sin^4 x}dx$.

Задание 2

Вычислить интегралы:

2.1 $\int_0^1 \frac{4arctgx-x}{1+x^2}$,

2.2 $\int_0^{\pi/2} tgxdx$,

2.3 $\int_0^{\pi/2} \sin 2xdx$,

2.4 $\int_0^{\pi} x\sin xdx$,

2.5 $\int_0^{\ln 2} xe^{-x}dx$,

2.6 $\int_0^{\sqrt{3}} xarctgxdx$,

2.7 $\int_1^5 \frac{\sqrt{x-1}}{x}dx$,

2.8 $\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}dx$,

2.9 $\int_1^6 \frac{dx}{1+\sqrt{3x-2}}$,

2.10 $\int_3^6 \frac{\sqrt{x^2-9}}{x^4}dx$, 2.11 $\int_0^{\pi} \cos^2 x dx,$ 2.12 $\int_0^{2} \sqrt{4-x^2} dx,$

2.13 $\int_0^{1} e^{-3x}(2-9x)dx,$ 2.14 $\int_0^{3} (x^2-3x)\sin 2x dx,$

2.15 $\int_1^{e} \frac{dx}{x(1+\ln^2 x)}.$ 2.16 $\int_0^{3} \frac{4x dx}{\sqrt[3]{(3x-8)^2}-2\sqrt[3]{3x-8}+4}.$

2.17 $\int_0^{2} arctg \frac{x}{2} dx.$ 2.18 $\int_1^{e} \frac{\ln^2 x}{x^2} dx.$

2.19 $\int_0^{2} \ln(x^2+4)dx.$ 2.20 $\int_{-1}^{2} 3x^2 \ln(x+2)dx.$

2.21 $\int_0^{1} 3x^2 \arcsin x dx.$ 2.22 $\int_0^{\pi} x\cos\frac{x}{2} dx.$

2.23 $\int_0^{1} 3x^2 \arcsin x dx.$ 2.24 $\int_1^{e} \frac{\ln^2 x}{x^2} dx.$

2.25 $\int_0^{5} \frac{3dx}{\sqrt{3x+1}+\sqrt[4]{3x+1}}.$ 2.26 $\int_1^{2} \frac{5x dx}{\sqrt{5x^2-4}+\sqrt[4]{x^2-4}}.$

Задание 3

Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость.

3.1 $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2+4x+13}.$ 3.2 $\int_e^{\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^3}.$

3.3 $\int_0^{\infty} x^2 e^{-x^3} dx.$ 3.4 $\int_0^{\infty} \frac{x+2}{x^2+2x+2} dx.$

3.5 $\int\limits_0^{\infty}\frac{xdx}{(x+2)^2}.$

3.6 $\int\limits_0^{2}\frac{xdx}{\sqrt{4-x^2}}.$

3.7 $\int\limits_0^{3}\frac{dx}{(x-3)^2}.$

3.8 $\int\limits_1^{e}\frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}.$

3.9 $\int\limits_2^{10}\frac{dx}{\sqrt[3]{(x-2)^2}}.$

3.10 $\int\limits_2^{4}\frac{dx}{x^2-4}.$

3.11 $\int\limits_e^{\infty}\frac{dx}{x(\ln x)^2}.$

3.12 $\int\limits_0^{\infty}xe^{-x/2}dx.$

3.13 $\int\limits_5^{\infty}\frac{dx}{x^2-8x+17}.$

3.14 $\int\limits_0^{\infty}\frac{xdx}{\sqrt[3]{x^2+1}}.$

3.15 $\int\limits_0^{\pi/2}tgxdx.$

3.16 $\int\limits_{\pi/2}^{\pi}\frac{dx}{1+\cos x}.$

3.17 $\int\limits_{-1}^{7}\frac{dx}{\sqrt[3]{7-x}}.$

3.18 $\int\limits_0^{\infty}xe^{-x^2/2}dx.$

3.19 $\int\limits_0^{\pi/4}\frac{dx}{1-\cos 2x}.$

3.20 $\int\limits_0^{\infty}\frac{xdx}{(x+3)^4}.$

3.21 $\int\limits_0^{\infty}x^2e^{-x^2}dx.$

3.22 $\int\limits_0^{1}\frac{dx}{(x-1)^2}.$

3.23 $\int\limits_2^{\infty}\frac{dx}{x\ln x}dx.$

3.24 $\int\limits_0^{1}\frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^2}}.$

3.25 $\int\limits_0^{4}\frac{dx}{\sqrt[3]{(x-2)^2}}.$

3.26 $\int\limits_{-1}^{\infty}\frac{dx}{x^2+x+1}.$

Задание 4

4.1 Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболами $y = \frac{x^2}{2} - x + 1$ и $y = -\frac{x^2}{2} + 3x + 6$.

4.2 Вычислить площадь фигуры, ограниченной эллипсом $x = a\cos t,\ y = b\sin t$.

4.3 Вычислить площадь фигуры, ограниченной астроидой $x = 4\cos^3 t,\ y = 4\sin^3 t$.

4.4 Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси *Ox* фигуры, ограниченной параболой $y = \frac{1}{4}x^2$, прямой $x = 4$ и осью *Ox*.

4.5 Найти объем тела, полученного вращением вокруг оси *Oy* фигуры, ограниченной гиперболой $y = 6/x$, осью *Oy* и прямыми $y = 1$ и $y = 6$.

4.6 Найти объем тела, полученного вращением вокруг оси *Ox* эллипса $x = a\cos t,\ y = b\sin t$.

4.7 Найти длину дуги кривой $y = \frac{1}{3}x\sqrt{x}$ от $x_1 = 0$ до $x_2 = 2{,}4$.

4.8 Найти длину одной арки циклоиды $x = a(t - \sin t),\ y = a(1 - \cos t)$.

4.9 Найти длину кардиоиды $r = 2a(1 - \cos\varphi)$.

4.10 Найти площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси *Ox* параболы $y^2 = 2x + 1$, от x_1=1 до x_2=7.

4.11 Найти площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси *Ox* астроиды $x = a\cos^3 t,\ y = a\sin^3 t$.

4.12 Найти площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси *Ox* одной арки циклоиды $x = 3(t - \sin t),\ y = 3(1 - \cos t)$.

4.13 Найти площадь фигуры, ограниченной окружностями $r = a\cos\varphi \ и\ r = 2a\cos\varphi\ (a \succ 0)$.

4. 14 Найти площадь фигуры, ограниченной кардиоидой $r = 2(1 - \cos\varphi)$ и окружностью с радиусом $r = 2$.

4.15 Найти координаты центра тяжести однородной плоской фигуры, ограниченной дугой синусоиды $y = \sin x$ и отрезком оси *Ox* от $x_1 = 0$ до $x_2 = \pi$.

4.16 Найти координаты центра тяжести однородной плоской фигуры, ограниченной кривой $y = x\sqrt{x}$, осью Ox и прямой $x = 4$.

4.17 Найти координаты центра тяжести однородной плоской фигуры, ограниченной кривой $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 2$ и осями координат.

4.18 Найти координаты центра тяжести однородной плоской фигуры, ограниченной параболой $y = \frac{1}{2}x^2$ и прямой $y = 4 - x$.

4.19 Найти координаты центра тяжести однородной плоской фигуры, ограниченной эллипсом $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$ и окружностью $x^2 + y^2 = 4$ и расположенной в первом квадранте.

4.20 Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболой $y = 3x^2 + 1$ и прямой $y = 3x + 7$.

4.21 Вычислить площадь фигуры, ограниченной одной аркой циклоиды $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ и осью Ox.

4.22 Вычислить площадь фигуры, ограниченной кардиоидой $r = 3(1 + \cos\varphi)$.

4.23 Вычислить площадь фигуры, ограниченной четырехлепестковой розой $r = 4\sin 2\varphi$.

4.24 Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной параболами $y = x^2$ и $y = \sqrt{x}$.

4.25 Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Oy фигуры, ограниченной кривыми $y = \frac{2}{1 + x^2}$ и $y = x^2$.

4.26 Найти объем тела, полученного от вращения вокруг оси Ox полуволны синусоиды $y = \sin x$.

12 ТИПОВОЙ РАСЧЕТ ПО ТЕМЕ «ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ»

Задание 1

Найти общее решение (общий интеграл) дифференциальных уравнений первого порядка.

1.1 $y' = \dfrac{8x+5y}{5x-2y}$.

1.2 $y' = \dfrac{y}{x} - tg\dfrac{y}{x}$.

1.3 $xy' + y\ln\dfrac{y}{x} = 0$.

1.4 $xy' - y + \sqrt{x^2+y^2} = 0$.

1.5 $4xyy' - y^2 - 3x^2 = 0$.

1.6 $y' = \dfrac{x+y}{x-y}$.

1.7 $xy' = \sqrt{x^2-y^2}$.

1.8 $2x^2y' + x^2 + y^2 = 0$.

1.9 $y' = \dfrac{x-y}{x+y}$.

1.10 $xyy' = 8x^2 + y^2$.

1.11 $y'\cos^2 x + y = tgx$.

1.12 $y'\cos x = (y+1)\sin x$.

1.13 $y'\sqrt{1-x^2} + y = \arcsin x$.

1.14 $y' + 2ytg2x = \sin 4x$.

1.15 $y' + y = -e^{2x}y^2$.

1.16 $xy' - y = x^2\cos x$.

1.17 $xy' + y = -x^2y^2$.

1.18 $y'\sin x - y\cos x = 1$.

1.19 $xy' + 2y = 3x^5y^5$.

1.20 $y' + 2xy = 3x^2e^{-x^2}$.

1.21 $(x^2 - y^2)y' = 2xy$.

1.22 $xy' = y\ln\dfrac{y}{x}$.

1.23 $xy' - y = \sqrt{x^2+y^2}$.

1.24 $xy' + y = 3$.

1.25 $x^2y' - 2xy = 3$.

1.26 $(1+x^2)y' - 2xy = (1+x^2)^2$.

Задание 2

Даны дифференциальные уравнения второго порядка, допускающие понижение порядка. Найти частное решение, удовлетворяющее указанным начальным условиям.

2.1 $xy'' - y' - x^2 = 0, \quad y(1) = 4/3, \quad y'(1) = 3.$

2.2 $y'' - y' ctgx = \sin x, \quad y(\pi/2) = 1, \quad y'(\pi/2) = \pi/2.$

2.3 $y'' = \dfrac{x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2.$

2.4 $xy'' - 2y' = 2x^4, \quad y(1) = 1/5, \quad y'(1) = 4.$

2.5 $xy'' = \ln x + 1 = 0, \quad y(1) = 0, \quad y'(1) = 0.$

2.6 $y'' + y' tgx = \cos x, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$

2.7 $y'' = \dfrac{x}{\sqrt{(1-4x^2)^3}}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$

2.8 $xy'' + y' = 4x^3, \quad y(1) = 1/4, \quad y'(1) = 2.$

2.9 $xy'' - y' = x^2 \cos x, \quad y(\pi/2) = 1, \quad y'(\pi/2) = \pi/2.$

2.10 $x^3 y'' = 4 \ln x, \quad y(1) = 4, \quad y'(1) = 0.$

2.11 $y'' - e^y y' = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$

2.12 $y'y'' = 2y, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$

2.13 $yy'' = (y')^2, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 3.$

2.14 $y^3 y'' = 3, \quad y(1) = 1, \quad y'(1) = 1.$

2.15 $y'' - 12y^2 = 0, \quad y(0) = 1/2, \quad y'(0) = 1.$

2.16 $2y'' = e^{4y}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1/2.$

2.17 $(y-2)y'' = 2(y')^2, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = 1.$

2.18 $2yy'' = 3 + (y')^2, \quad y(1) = 1, \quad y'(1) = 1.$

2.19 $y'' = 3\sqrt{y+1}, \quad y(2) = 0, \quad y'(2) = 2.$

2.20 $(y+1)^2 y'' = (y')^3, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$

2.21 $y''(x^2+1) = 2xy', y(0) = 1, y'(0) = 3.$

2.22 $xy'' + x(y')^2 - y' = 0, y(2) = 2, y'(2) = 1.$

2.23 $y'' = \dfrac{y'}{x} + \dfrac{x^2}{y}, y(2) = 0, y'(2) = 4.$

2.24 $2y'' = 3y^2, y(-2) = 1, y'(-2) = -1.$

2.25 $y^3 y'' = -1, y(1) = 1, y'(1) = 0.$

2.26 $y'' = x + \sin x, y(0) = 1, y'(0) = 3.$

Задание 3

Решить линейные неоднородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами. Найти частное решение, удовлетворяющее указанным начальным условиям.

3.1 $y'' - 2y' - 8y = 16x^2 + 2, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 5.$

3.2 $y'' + 4y = 3\cos x, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2.$

3.3 $y'' - y' - 2y = 3e^{2x}, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 5.$

3.4 $y'' - 2y' = 2x + 1, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1.$

3.5 $y'' - 2y' = 9e^{-3x} + 2x - 4, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1.$

3.6 $y'' - 4y = 4\sin 2x, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 7.$

3.7 $y'' + y' = 3\cos x - \sin x, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$

3.8 $y'' - y' - 6y = 6x^2 - 4x - 3, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = 5.$

3.9 $y'' - 3y' = 3e^{3x}, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 4.$

3.10 $y'' - 4y' + 5y = 5x - 4, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 3.$

3.11 $y'' + y' - 2y = \cos x - \sin x, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2.$

3.12 $y'' - 4y = (3x - 1)e^{-x}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = -4.$

3.13 $y'' + y = 6\sin 2x, \quad y(\pi) = -1, \quad y'(\pi) = -4.$

3.14 $y'' - 5y' = 10x + 3, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 4.$

3.15 $y'' + y' - 2y = 4e^{2x} - 2x + 1, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = 5.$

3.16 $y'' - 2y' = 6x^2 - 6x - 2, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1.$

3.17 $y'' - 4y' + 3y = 8e^{5x}, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = 7.$

3.18 $y'' + 16y = 7\cos 3x, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 4.$

3.19 $y'' + 6y' + 9y = 2e^{-3x}, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -3.$

3.20 $y'' + 2y' + y = -2\sin x + x + 2, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2.$

3.21 $y'' - 4y' + 5y = xe^{2x}, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$

3. 22 $y'' - 2y' = (x^2 + x - 3)e^{x}, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 2.$

3.23 $y'' - 4y' + 4y = e^{2x}, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 8.$

3.24 $y'' - 5y' + 6y = (12x - 7)e^{-x}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$

3.25 $y'' + 5y' + 8y = 12\cos 2x - 8\sin 2x, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2.$

3.26 $y'' - 4y' + 5y = 2x^2 e^x, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 3.$

Задание 4

Решить систему уравнений:

4.1 $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 2y. \end{cases}$

4.2 $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + 5y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -x - 3y. \end{cases}$

4.3 $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 4x - y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 2y. \end{cases}$

4.4 $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 3y. \end{cases}$

4.5 $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y + e^{3t}, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + e^{3t}. \end{cases}$

4.6 $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y + t^2, \\ \dfrac{dy}{dt} = 4x + 2t. \end{cases}$

4.7 $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - 2y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + 6y. \end{cases}$

4.8 $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - 3y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 5y. \end{cases}$

4.9 $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + y + \cos t, \\ \dfrac{dy}{dt} = -x + 3\sin t. \end{cases}$

4.10 $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y + e^t, \\ \dfrac{dy}{dt} = 4x + 2e^t. \end{cases}$

4.11 $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - 2y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -2x + y. \end{cases}$

4.12 $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x + 3y. \end{cases}$

4.13 $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -5x - y. \end{cases}$

4.14 $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -4x + y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -8x + 2y. \end{cases}$

4.15 $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x - y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 4x - y. \end{cases}$

4.16 $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -2x - y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -6x - 3y. \end{cases}$

4.17 $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + 2y. \end{cases}$

4.18 $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x - y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 16x - 6y. \end{cases}$

4.19 $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 9x + 2y. \end{cases}$

4.20 $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -2x - y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -6x - y. \end{cases}$

4.21 $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x - y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -5x - 2y. \end{cases}$

4.22 $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 2y. \end{cases}$

4.23 $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 9x + y. \end{cases}$

4.24 $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 4x + y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 20x + 5y. \end{cases}$

4.25 $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x - 5y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + y. \end{cases}$

4.26 $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + 9y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 2y. \end{cases}$

Задание 5

5.1 Найти уравнение кривой, проходящей через точку A (2; 3) и обладающей тем свойством, что отрезок любой касательной к кривой, заключенный между осями координат, делится в точке касания пополам. Построить кривую.

5.2 Найти уравнение кривой, проходящей через точку A (2; 4), если угловой коэффициент касательной в любой точке кривой в три раза больше углового коэффициента прямой, соединяющей ту же точку с началом координат. Построить кривую.

5.3 Найти уравнение кривой, проходящей через точку A (1; 1) и обладающей тем свойством, что отрезок, отсекаемый касательной на оси ординат, равен квадрату абсциссы точки касания. Построить кривую.

5.4 Найти уравнение кривой, проходящей через точку *A* (1; 2) и обладающей тем свойством, что отрезок касательной между точкой касания и осью *Ox* делится пополам в точке пересечения с осью *Oy*. Построить кривую.

5.5 Найти уравнение кривой, проходящей через точку *A* (-1; 1), если угловой коэффициент касательной в любой точке кривой равен квадрату ординаты точки касания. Построить кривую.

5.6 Найти уравнение кривой, проходящей через точку *A* (1; 2), если поднормаль в каждой точке равна 2. Построить кривую.

5.7 Найти уравнение кривой, проходящей через точку *A* (2; 4), если угловой коэффициент касательной в любой точке кривой в два раза меньше углового коэффициента прямой, соединяющей ту же точку с началом координат. Построить кривую.

5.8 Найти уравнение кривой, проходящей через точку *A* (2; -4), если начальная ордината касательной, проведенной в любой точке кривой, равна кубу абсциссы точки касания. Построить кривую.

5.9 Найти уравнение кривой, проходящей через точку *A* (0; 3), если угловой коэффициент касательной, проведенной в любой ее точке, меньше ординаты точки касания на 2. Построить кривую.

5.10 Найти уравнение кривой, проходящей через точку *A* (2; 2), если длина отрезка касательной между точкой касания и осью *Ox* равна длине отрезка между точкой касания и началом координат. Построить кривую.

5.11 Кривая проходит через точку А(1; 2) и обладает тем свойством тем свойством, что угловой коэффициент касательной в любой ее точке пропорционален квадрату ординаты точки касания с коэффициентом пропорциональности $\kappa = 3$. Найти уравнение кривой.

5.12 Кривая проходит через точку А(2; –1) и обладает тем свойством, что произведение углового коэффициента касательной в любой ее точке на сумму координат точки касания равно удвоенной ординате этой точки. Найти уравнение кривой.

5.13 Кривая проходит через точку А(1; 2) и обладает тем свойством, что отношение ординаты любой ее точки к абсциссе пропорционально угловому коэффициенту касательной к кривой, проведенной в той же точке, с коэффициентом пропорциональности $\kappa = 3$. Найти уравнение кривой.

5.14 Кривая проходит через точку А(1; 5) и обладает тем свойством, что отрезок, отсекаемый на оси ординат любой касательной, равен утроенной абсциссе точки касания. Найти уравнение кривой.

5.15 Кривая проходит через точку А(2; 4) и обладает тем свойством, что отрезок, отсекаемый на оси абсцисс любой касательной, равен кубу абсциссы точки касания. Найти уравнение кривой.

5.16 Найти такую кривую, проходящую через точку A(2; 2), чтобы угловой коэффициент касательной в любой ее точке равнялся утроенной ординате этой точки.

5.17 Найти линию, проходящую через точку A(1; 1) и обладающую тем свойством, что площадь треугольника, образованного касательной, осью OX и прямой, проходящей через точку касания параллельно оси OY, есть постоянная величина, равная 9.

5.18 Найти линию, проходящую через точку A(3; 0) и обладающую тем свойством, что ордината точки пересечения нормали с осью OY равна произведению квадрата абсциссы точки касания на ординату этой точки.

5.19 Найти кривую, проходящую через точку A(0; 2), касательные к которой отсекают от оси абсцисс отрезки в два раза большие ординаты точки касания.

5.20 Найти кривую, проходящую через точку A(-1; 1), для которой отрезок, отсекаемый касательной к кривой в любой ее точке от оси OX, равен квадрату абсциссы точки касания.

5.21 Найти кривую, проходящую через точку A(1; 1), для которой отрезок любой касательной, заключенной между координатными осями, делится в точке касания в отношении 1:2, считая от оси OY.

5.22 Найти кривую, проходящую через точку A(1; 0) и обладающую тем свойством, что ордината точки пересечения любой касательной с осью OY равна удвоенной сумме координат точки касания.

5.23 Найти кривую, проходящую через точку A(0; 3), для которой отрезок любой касательной делится в точке касания пополам.

5.24 Найти кривую, проходящую через точку A(0; -2) и обладающую тем свойством, что тангенс угла наклона любой касательной к оси OX равен ординате точки касания, увеличенной на 3 единицы.

5.25 Найти линию, проходящую через точку A(4; 1). Для которой длина отрезка, отсекаемого любой касательной от оси OY, равна произведению координат точки касания.

5.26 Найти кривую, проходящую через точку A(1; 0), для которой угловой коэффициент любой касательной равен отношению суммы абсциссы и ординаты точки касания к абсциссе этой точки.

13 ТИПОВОЙ РАСЧЕТ ПО ТЕМЕ «ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ»

Задание 1

Найти область определения функции двух переменных (дать геометрическое истолкование).

1.1 $z=\sqrt{\ln(x+y)}$.

1.2 $z=\ln\dfrac{x^2}{x+y}$.

1.3 $z=\ln\dfrac{\cos x}{y}$.

1.4 $z=\ln\dfrac{x-3}{y-5}$.

1.5 $z=\ln(y-\sin x)$.

1.6 $z=\ln(x^2+y^2-9)$.

1.7 $z=\dfrac{1}{x}\arcsin\dfrac{x+y}{y}$.

1.8 $z=\sqrt{\ln xy}$.

1.9 $z=\dfrac{\ln(x^2y)}{\sqrt{y-x}}$.

1.10 $z=\ln(-x-y)$.

1.11 $z=\ln x+\ln\sin y$.

1.12 $z=\dfrac{\ln x}{\sqrt{4-x^2-y^2}}$.

1.13 $z=\dfrac{1}{x}+\sqrt{x^2+y^2-1}$..

1.14 $z=\sqrt{1-x^2}+\sqrt{y^2-1}$.

1.15 $z=\dfrac{1}{x-y}-\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2-9}}$.

1.16 $z=\dfrac{1}{|x|}\sqrt{y^2-x}$.

1.17 $z=(x+\sqrt{y})\cdot\ln(y^2-x^2)$.

1.18 $z=\sqrt{1-(x^2+y)^2}\cdot\ln y$.

1.19 $z=\sqrt{1-x^3}+\ln(y^2-1)$.

1.20 $z=\dfrac{\sqrt{\cos x-y}}{\sqrt{y}}$.

1.21 $z=\arcsin(x+y)+\sqrt{9-x^2-y^2}$.

1.22 $z=\arccos\dfrac{x}{y^2}+\arcsin(1-y^2)$.

1.23 $z=\sqrt{x^2+y^2-2x}-\sqrt{4-x^2-y^2}$.

1.24 $z=\sqrt{\sin(x^2+y^2)}+\arcsin(x-y)$.

1.25 $z=\arcsin\dfrac{y}{x^2}+\arccos(1-x)$

1.26 $z=\sqrt{\sin x\cdot\cos y}$.

Задание 2

Найти частные производные $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ от функции $z=z(x,y)$.

2.1 $z=\ln(x+\sqrt{x^2+y^2})$.

2.2 $z=\ln(\sqrt{x}+y^2)$.

2.3 $z=\ln(1+x)\cdot\ln(1+y^3)$.

2.4 $z=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{x}{y}$.

2.5 $z=xy^2\cdot\ln(x^2+y)$.

2.6 $z=\ln(x^5+\ln y)$.

2.7 $z=(1+\log_y x)^3$.

2.8 $z=\ln(\sin x+\cos y)$.

2.9 $z=\ln\left(\sqrt[3]{y}-\sin x\right)$.

2.10 $z=\ln\left(x\sqrt{y}+\dfrac{y}{2x}\right)$.

2.11 $z=\dfrac{(x-2y)^2}{x+2y}$.

2.12 $z=e^{\frac{x^2+y^2}{x+y}}$.

2.13 $z=(x\sin y+y\cos x)^2$

2.14 $z=\sqrt{\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x^2}}$.

2.15 $z=\dfrac{\arcsin(x+y)}{\cos(xy)}$.

2.16 $z=\sqrt[3]{\ln(x^2y)}$.

2.17 $z=\cos\dfrac{x+y}{x-y}$.

2.18 $z=\arcsin\dfrac{\sqrt{x^2-y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

2.19 $z=-\ln\left(\cos\dfrac{y}{x}\right)$.

2.20 $z=(\sin x)^{\cos y}$.

2.21 $z = x \cdot \sin(\sqrt{x} + y^2)$.

2.22 $z = arctg\sqrt{x^y}$.

2.23 $z = \dfrac{\cos x^2}{x + y}$.

2.24 $z = \arcsin\dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

2.25 $z = \cos\dfrac{x}{y} \cdot \sin\dfrac{y}{x}$.

2.26 $z = arctg\dfrac{xy}{1 + x^2}$.

Задание 3

Найти производные сложных функций.

3.1 $z = x\sin y + y\cos x$, где $x = \dfrac{u}{v}$, $y = u^3v^2$; $\dfrac{\partial z}{\partial u}$, $\dfrac{\partial z}{\partial v} = ?$

3.2 $z = e^{4xy}$, где $x = \cos(1-t)$, $y = \sin t^2$; $\dfrac{dz}{dt} = ?$

3.3 $z = x^2 - y^2 + 2xy$, где $x = \sin t$, $y = \arccos(e^t)$; $\dfrac{dz}{dt} = ?$

3.4 $z = \left(x + y^3\right) \cdot e^{x^2 + y^2}$, где $x = \cos(t^2)$, $y = \sqrt{t}$; $\dfrac{dz}{dt} = ?$

3.5 $z = \arcsin\dfrac{x^2}{y}$, где $x = \sin t$, $y = \cos^2\dfrac{t}{2}$; $\dfrac{dz}{dt} = ?$

3.6 $z = tg(x + 2x^2 - y)$, где $x = \dfrac{1}{t}$, $y = \sqrt{t}$; $\dfrac{dz}{dt} = ?$

3.7 $z = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, где $x = v - u^2v$, $y = u + v^2u$; $\dfrac{\partial z}{\partial u}$, $\dfrac{\partial z}{\partial v} = ?$

3.8 $z = arctg\dfrac{x}{\sqrt{y}}$, где $y = \sqrt{x^2 + 1}$, $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{dz}{dx} = ?$

3.9 $z = \dfrac{4y}{\sqrt{y^2 - x}}$, где $x = t \cdot \cos t$, $y = t \cdot \sin t$; $\dfrac{dz}{dt} = ?$

3.10 $z = \arcsin(x - y)$, где $x = \ln(\sqrt{t} + 1)$, $y = 4t^3$; $\dfrac{dz}{dt} = ?$

3.11 $z = arctg\dfrac{x + y}{1 + xy}$, где $x = t^2 + 1$, $y = \sin t$; $\dfrac{dz}{dt} = ?$

3.12 $z=\ln(\sqrt{x}\cdot\ln y)$, где $x=\sin t$, $y=\arccos(t^5)$; $\dfrac{dz}{dt}=?$

3.13 $z=\ln(e^{2x}+e^{6y})$, где $y=x\sqrt{x}$; $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{dz}{dx}=?$

3.14 $z=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{x}{y}$, где $x=tg^2 t$, $y=ctg^3\dfrac{t}{2}$; $\dfrac{dz}{dt}=?$

3.15 $z=\ln(x^2 y)$, где $x=u^v$, $y=v^u$; $\dfrac{\partial z}{\partial u}$, $\dfrac{\partial z}{\partial v}=?$

3.16 $z=x^3\sin y+y^3\cos x$, где $x=3t^2-\sqrt{t}$, $y=\dfrac{t^2}{t-1}$; $\dfrac{dz}{dt}=?$

3.17 $z=\dfrac{x+2y}{xy}$, где $x=tg(t^2+1)$, $y=ctg(t^4-1)$; $\dfrac{dz}{dt}=?$

3.18 $z=xy^2+\dfrac{x}{y}$, где $x=\ln(t^2+t)$, $y=10^t$; $\dfrac{dz}{dt}=?$

3.19 $z=\ln(x^2+y^2)-x\sqrt{x}$, где $x=\sin t$, $y=\dfrac{t}{t+1}$; $\dfrac{dz}{dt}=?$

3.20 $z=\dfrac{x-2y}{x+2y}$, где $x=\dfrac{u-v}{u}$, $y=\dfrac{v}{u+v}$; $\dfrac{\partial z}{\partial u}$, $\dfrac{\partial z}{\partial v}=?$

3.21 $z=\dfrac{x+y}{1-xy}$, где $x=\dfrac{t}{\sin t}$, $y=\dfrac{t}{\cos t}$; $\dfrac{dz}{dt}=?$

3.22 $z=\sqrt{xy+\sin x}$, где $x=tg\left(3t^2+t\right)$, $y=ctg\left(2t+1\right)$; $\dfrac{dz}{dt}=?$

3.23 $z=\sqrt{\dfrac{x+y}{x-y}}$, где $x=tg(e^t+1)$, $y=ctg\dfrac{t}{2}$; $\dfrac{dz}{dt}=?$

3.24 $z=x^{\ln y}$, где $x=\sin(uv)$, $y=\cos(v^2-u)$; $\dfrac{\partial z}{\partial u}$, $\dfrac{\partial z}{\partial v}=?$

3.25 $z=\dfrac{\sin^2 x}{\sin^2 y}$, где $x=\ln t$, $y=te^t$; $\dfrac{dz}{dt}=?$

3.26 $z=\ln x-\dfrac{y^2}{x}$, где $x=\sin t^2$, $y=\cos t^2$; $\dfrac{dz}{dt}=?$

Задание 4

Даны функция $z = f(x, y)$, точка $A\left(x_0; y_0\right)$ и точка $B(x_1; y_1)$.

Необходимо:

а) составить уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности в точке $C\left(x_0; y_0; z_0\right)$;

б) найти градиент функции в точке;

в) найти производную функции в направлении вектора $\overline{AB}$.

4.1 $z = x^2 + xy + y^2$; $A\left(1; 2\right)$, $B(0;3)$.

4.2 $z = 3x^2 - xy + x + y$; $A\left(1; 3\right)$, $B(1;-3)$.

4.3 $z = x^2 + 3xy - 6y$; $A\left(4; 1\right)$, $B(-1;2)$.

4.4 $z = x^2 - y^2 + 6x + 3y$; $A\left(2; 3\right)$, $B(-1;-2)$.

4.5 $z = x^2 + 2xy + 3y^2$; $A\left(2; 1\right)$, $B(-2;3)$.

4.6 $z = x^2 + y^2 + 2x + y - 1$; $A\left(2; 4\right)$, $B(3;3)$.

4.7 $z = 3x^2 + 2y^2 - xy$; $A\left(-1; 3\right)$, $B(2;-3)$.

4.8 $z = x^2 - y^2 + 5x + 4y$; $A\left(3; 2\right)$, $B(-1;3)$.

4.9 $z = 2xy + 3y^2 - 5x$; $A\left(3; 4\right)$, $B(-2;3)$.

4.10 $z = xy + y^2 - 2x$; $A\left(1; 2\right)$, $B(-1;-3)$.

4.11 $z = x^2 + y^2 - 2xy = 2x - y$; $A(-1;-1)$, $B(1;3)$.

4.12 $z = x^2 - y^2 - 2xy - x - 2y$; $A(-1;1)$, $B(-2;3)$.

4.13 $z = x^2 + y^2 - 3xy - x + y + 2$; $A(2;1)$, $B(-1;2)$.

4.14 $z = 2x^2 - 3y^2 + 4x - 2y + 10$; $A(-1;1)$, $B(-3;3)$.

4.15 $z = x^2 + 2y^2 + 4xy - 5y - 10$; $A(-7;1)$, $B(-1;3)$.

4.16 $x^2 + y^2 + z^2 + 6z - 4x + 8 = 0$; $A(2;1)$, $B(-1;-2)$.

4.17 $x^2 + z^2 - 4y^2 = -2xy$; $A(-2;1)$, $B(-1;3)$.

4.18 $x^2+z^2+y^2-xy+3z=7$; $A(1;2)$, $B(-1;4)$.

4.19 $x^2+z^2+y^2+6y+4x=8$; $A(-1;1)$, $B(-4;3)$.

4.20 $2x^2+z^2-y^2+y-4z=13$; $A(2;1)$, $B(-1;3)$.

4.21 $x^2+z^2+y^2-6y+4z=-4$; $A(2;1)$, $B(-1;3)$.

4.22 $x^2+z^2-5yz+3y=46$; $A(1;2)$, $B(-1;-3)$.

4.23 $x^2+y^2-xz-yz=0$; $A(0;2)$, $B(-1;3)$.

4.24 $x^2-z^2+y^2+2yz+y-2z=2$; $A(1;1)$, $B(-1;3)$.

4.25 $x^2-z^2+y^2-2xz+2x-z=0$; $A(1;1)$, $B(-2;3)$.

4.26 $x^2+z^2-y^2+2y-4x=14$; $A(3;1)$, $B(-5;3)$.

Задание 5

Найти наименьшее и наибольшее значения функции $z=f(x,y)$ в замкнутой области D, ограниченной данными линиями. Сделать чертеж.

5.1 $z=x^2+y^2-9xy+27$; D: $0\le x\le 3, 0\le y\le 3$.

5.2 $z=x^2+2y^2+1$; D: $x\ge 0; y\ge 0, x+y\le 3$.

5.3 $z=3-2x^2-xy-y^2$; D: $x\le 1, y\ge 0, y\le x$

5.4 $z=x^2+3y^2+x-y$; D: $x\ge 1, y\ge -1, x+y\le 1$.

5.5 $z=x^2+2xy+2y^2$; D: $-1\le x\le 1, 0\le y\le 2$.

5.6 $z=5x^2-3xy+y^2+4$; D: $x\ge -1, y\ge -1, x+y\le 1$.

5.7 $z=10+2xy-x^2$; D: $0\le y\le 4-x^2$.

5.8 $z=x^2+2xy-y^2+4x$; D: $x\le 0, y\le 0, x+y+2\ge 0$.

5.9 $z=x^2+xy-2$; D: $4x^2-4\le y\le 0$.

5.10 $z=x^2+xy$; D: $-1\le x\le 1, 0\le y\le 3$.

5.11 $z=3x+y-xy$; D: $y=x; y=4; x=0$.

5.12 $z=xy-x-2y$; D: $x=3; y=x; y=0$.

5.13 $z = x^2 + 2xy - 4x + 8y;$ D: $x = 0; x = 1; y = 0; y = 2.$

5.14 $z = 5x^2 - 3xy + y^2;$ D: $x = 0; x = 1; y = 0; y = 1.$

5.15 $z = x^2 + 2xy - y^2 - 4x;$ D: $x - y + 1 = 0; x = 3; y = 0.$

5.16 $z = x^2 + y^2 - 2x - 2y + 8;$ D: $x = 0; y = 0; x + y - 1 = 0.$

5.17 $z = 2x^3 - xy^2 + y^2;$ D: $x = 0; x = 1; y = 0; y = 6.$

5.18 $z = 3x + 6y - x^2 - xy - y^2;$ D: $x = 0; x = 1; y = 0; y = 1.$

5.19 $z = x^2 - 2y2 + 4xy - 6x - 1;$ D: $x = 0; y = 0; x + y - 3 = 0.$

5.20 $z = x^2 + 2xy - 10;$ D: $y = 0; y = x^2 - 4.$

5.21 $z = xy - 2x - y;$ D: $x = 0; x = 3; y = 0; y = 4.$

5.22 $z = \frac{x^2}{2} - xy;$ D: $y = 8; y = 2x^2.$

5.23 $z = 3x^2 + 3y^2 - 2x - 2y + 2;$ D: $x = 0; y = 0; x + y - 1 = 0.$

5.24 $z = x^2 - 2xy - y^2 + 4x + 1;$ D: $x = -3; y = 0; x + y + 1 = 0.$

5.25 $z = x^2 - 2xy + \frac{5}{2}y^2 - 2x;$ D: $x = 0; x = 2; y = 0; y = 2.$

5.26 $z = x^2 y(4 - x - y);$ D: $x = 0; y = 0; y = 6 - x.$

Задание 6

Исследовать следующие функции на екстремум:

6.1 $z = y\sqrt{x} - 2y^2 - x + 14y;$

6.2 $z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 5;$

6.3 $z = 1 + 15x - 2x^2 - xy - 2y^2;$

6.4 $z = 1 + 6x - x^2 - xy - y^2;$

6.5 $z = x^2 + y^2 - 6xy - 39x + 18y + 20;$

6.6 $z = 2x^3 + 2y^3 - 6xy + 5;$

6.7 $z = 3x^3 + 3y^3 - 9xy + 10;$

6.8 $z = x^2 + xy + y^2 + x - y + 1;$

6.9 $z = 4(x - y) - x^2 - y^2;$

6.10 $z = 6(x - y) - 3x^2 - 3y^2;$

6.11 $z = x^2 + xy + y^2 - 6x - 9y;$

6.12 $z = (x - 2)^2 + 2y^2 - 10;$

6.13 $z = (x - 5)^2 + y^2 + 1;$

6.14 $z = x^3 + y^3 - 3xy;$

6.15 $z = 2xy - 2x^2 - 4y^2;$

6.16 $z = 2xy - 5x^2 - 3y^2 + 2;$

6.17 $z = xy(12 - x - y);$

6.18 $z = 2xy - 3x^2 - 2y^2 + 10;$

6.19 $z = xy(6 - x - y);$

6.20 $z = x^2 + y^2 - xy + x + y;$

6.21 $z = x^2 + xy + y^2 - 2x - y;$

6.22 $z = (x - 1)^2 + 2y^2;$

6.23 $z = xy - 3x^2 - 2y^2;$

6.24 $z = x^2 + 3(y + 2)^2;$

6.25 $z = 2(x + y) - x^2 - y^2;$

6.26 $z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 1.$

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Берман Г. Н. Сборник задач по курсу математического анализа / Г. Н. Берман. – М: Наука, 1967. – 416 с.
2. Бугров Я. С. Дифференциальное и интегральное исчисление / Я. С. Бугров, С. М. Никольский. – М.: Наука, 1983. – 228 с.
3. Дубовик В. П. Вища математика: навч. посіб./ В. П. Дубовик, І. І. Юрик. – К.: Вища школа, 1993. – 648 с.
4. Запорожец Г. И. Руководство к решению задач по математическому анализу / Г. И. Запорожец. – М.: Высшая школа, 1964. – 479 с.
5. Корн Г. Справочник по математике / Г. Корн, Т. Корн. – М.: Наука, 1984. – 831 с.
6. Мантуров О. В. Курс высшей математики / О. В. Мантуров. – М.: Высшая школа, 1991. – 448 с.

ЭЛЕКТРОННОЕ УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ИЗДАНИЕ

Луценко Любовь Ивановна
Кисиль Екатерина Сергеевна

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ ПОДГОТОВКИ К МОДУЛЬНЫМ КОНТРОЛЯМ ПО ДИСЦИПЛИНЕ «ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА» (НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ И ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛЫ, ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ФУНКЦИИ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ) ДЛЯ СТУДЕНТОВ ВСЕХ СПЕЦИАЛЬНОСТЕЙ

Подписано к выпуску 10.07.2012 г. Гарнитура Times New.
Усл. печ. лист. 7,25. Зак. № 222.

Государственное высшее учебное заведение
«Донецкий национальный технический университет»
Автомобильно-дорожный институт
84646, г. Горловка, ул. Кирова, 51
E-mail: druknf@rambler.ru

Редакционно-издательский отдел

Свидетельство о внесении в Государственный реестр издателей, изготовителей и распространителей издательской продукции ДК № 2982 от 21.09.2007 р.