Конспект лекцій по вищій математиці

КРАТНІ ІНТЕГРАЛИ

ПОНЯТТЯ КРИВИХ НА ПЛОЩИНІ

Нехай l — крива на площині xy, параметричні рівняння якої $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $t \in [\alpha; \beta]$.

Означення. Крива l називається *гладкою*, якщо (рис. 2.26):

1) функції $\varphi(t)$, $\psi(t)$ неперервно диференційовні на $[\alpha;\ \beta]$ і $\mathbf{p} = (\varphi'(t);\ \psi'(t)) \neq (0,\ 0)$, $\forall t \in [\alpha; \beta]$;

2) l не має точок самоперетину.

Якщо l — *замкнена крива*, то $\varphi(\alpha) = \varphi(\beta)$, $\psi(\alpha) = \psi(\beta)$, а також $\varphi'(\alpha) = \varphi'(\beta)$, $\psi'(\alpha) = \psi'(\beta)$.

Вектор $\mathbf{p}(t)$ є напрямним вектором дотичної до кривої l у точці $(x(t);\ y(t)) \in l$.

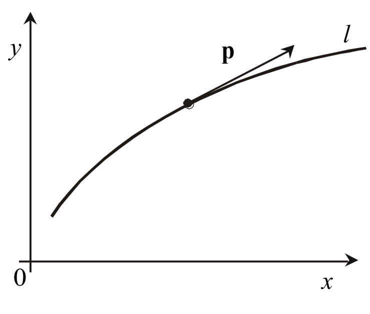

Рис. 2.26

Нехай криву l задано рівнянням $y = f(x)$, $x \in (a; b)$.

Означення. Крива називається *гладкою*, якщо функція $y = f(x)$ має неперервну похідну $f'(x)$, $\forall x \in (a;\ b)$. Крива, яка утворена скінченною кількістю гладких кривих і не має точок самоперетину, називається *кусково-гладкою*.

2.3.2. ЗАДАЧІ, ЩО ПРИВОДЯТЬ ДО ПОДВІЙНОГО ІНТЕГРАЛА

Об'єм криволінійного циліндра. Нехай $z = f(x;\ y)$ — невід'ємна, неперервна в замкненій обмеженій області D функція, тобто $f(x;\ y) \ge 0$, $\forall (x;\ y) \in D$. У тривимірному просторі рівняння $z = f(x;\ y)$ визначає деяку поверхню S, проекція якої на площину xy збігається з D (рис. 2.27). Потрібно знайти об'єм V тіла T, обмеженого згори поверхнею S і знизу областю D з межею γ та циліндричною поверхнею з напрямною γ і твірними, паралельними осі z. Таке тіло називається *криволінійним циліндром.*

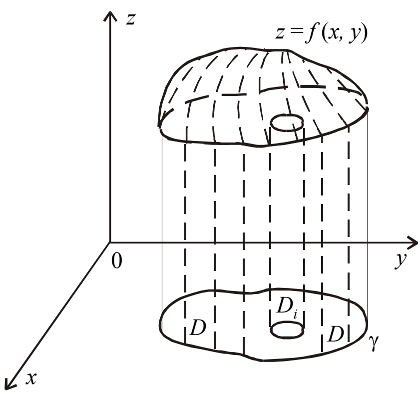

Рис. 2.27

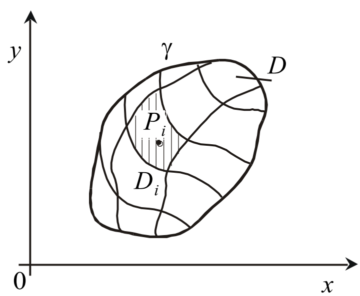

Рис. 2.28

• Розіб'ємо область D на n областей D_i з кусково-гладкими межами γ_i, $i = 1, 2, \ldots, n$. Через межу Γ_i проведемо циліндричну поверхню з твірними, паралельними осі z. Ці поверхні розіб'ють тіло T на n стовпчиків T_i, об'єм кожного з яких наближено дорівнює $\Delta T_i = f(\xi_i;\ \eta_i)\Delta S_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, де $(\xi_i;\ \eta_i)$ — довільна точка області D_i; ΔS_i — площа області D_i. Об'єм усього тіла T наближено подамо сумою

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i;\ \eta_i)\Delta S_i .$$

Нехай d_i — діаметр області D_i, а $\Delta = \max\limits_i d_i$. Тоді точне значення об'єму таке:

$$V = \lim_{\Delta \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i;\ \eta_i)\Delta S_i . \qquad (1)$$

Означення. Границя (1), якщо вона існує, позначається $\iint\limits_D f(x;\ y)dxdy$ і називається *подвійним інтегралом від функції* $f(x;\ y)$ *за областю* D.

Об'єм криволінійного циліндра, обмеженого поверхнею $z = f(x;\ y) \geq 0$, $\forall (x;\ y) \in D$, *областю* D *та циліндричною поверхнею з напрямною* γ *і твірними, паралельними осі* z, *подається так:*

$$V = \iint\limits_D f(x;\ y)dxdy. \tag{2}$$

Маса плоскої пластинки. Нехай D — плоска пластинка, по поверхні якої неперервно розподілена маса з густиною $\rho = \rho(x,\ y)$. Треба знайти масу пластинки.

● Розіб'ємо пластинку D за допомогою кусково-гладких дуг довільним чином на n частин D_i (рис. 2.28).

Припускаючи що густина ρ в кожній частині D_i стала і дорівнює $\rho(\xi_i;\ \eta_i)$, де $P_i(\xi_i;\ \eta_i)$ — довільна точка D_i, дістаємо наближену масу частини D_i:

$$\Delta m_i \approx \rho(\xi_i;\ \eta_i)\Delta S_i\,,$$

де ΔS_i — площа D_i. Тоді маса всієї пластинки D наближено дорівнює $\sum\limits_{i=1}^{n} \rho(\xi_i;\ \eta_i)\Delta S_i$. Точна маса m всієї пластинки виражається граничним переходом при $\Delta = \max d_i \to 0$:

$$\boxed{m = \lim_{\Delta \to 0} \sum_{i=1}^{n} \rho(\xi_i;\ \eta_i)\Delta S_i = \iint\limits_D \rho(x;\ y)dxdy.}$$

2.3.3. ОЗНАЧЕННЯ ПОДВІЙНОГО ІНТЕГРАЛА

Нехай в області D з кусково-гладкою межею γ задано неперервну функцію $f(x,\ y)$. Розіб'ємо область D кусково-гладкими дугами на n частинних областей D_i, площа яких ΔS_i, $i = 1, 2, \ldots, n$.

У кожній частинній області D_i виберемо довільну точку $(\xi_i;\ \eta_i)$ й утворимо суму

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i;\ \eta_i)\Delta S_i.$$

яка називається *інтегральною сумою Рімана.*

Позначимо через Δ найбільший з діаметрів області D_i і назвемо його *діаметром розбиття.*

Означення. Якщо існує границя

$$\lim_{\Delta\to 0}\sum_{i\to 1}^{n} f(\xi_i;\ \eta_i)\Delta S_i, \tag{3}$$

яка не залежить ні від способу розбиття області D на частини D_i, ні від вибору точок $(\xi_i;\ \eta_i)\in D_i$, то функція $f(x;\ y)$ називається *інтегровною за Ріманом в області D,* а сама границя називається *подвійним інтегралом від функції* $f(x;\ y)$ за областю D і позначається

$$\iint_D f(x;\ y)dxdy = \lim_{\Delta\to 0}\sum_{i=1}^{n}\int(\xi_i;\ \eta_i)\Delta S_i.$$

Зауважимо, що інтеграл від функції $f(x;\ y)$ за областю D є деяке число. Крім того, виконується рівність

$$\iint_D f(x;y)dxdy = \iint_D f(u;v)dudv,$$

тобто для інтеграла не має значення, якими символами позначено аргументи функції $f(x)$.

Границя (3) не залежить від способу розбиття області D на D_i і вибору точок $(\xi_i;\ \eta_i)\in D_i$. Отже, якщо границя (3) існує, можна область D розбивати на частини D_i прямими, які паралельні осям координат (рис. 29).

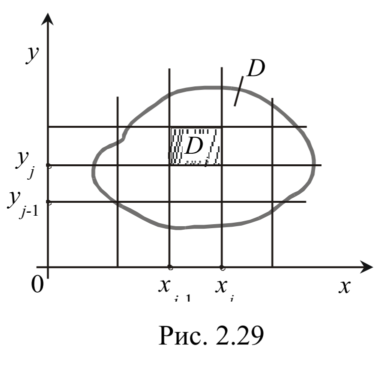

Рис. 2.29

Нехай D_{ij} — прямокутник зі сторонами

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1},\quad i=\overline{1,\ m};$$
$$\Delta y_j = y_j - y_{j-1},\quad j=\overline{1,\ n},$$

$D_{ij}\subset D_1$. Його площа S_{ij} дорівнює $\Delta x_i \Delta y_j$.

Інтегральна сума, що відповідає такому розбиттю області D, має вигляд

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} f\left(\xi_i;\ \eta_j\right)\Delta x_i \Delta y_j\,,\ x_{i-1}\le \xi_i \le x_i\,,\ y_{y-1}\le \eta_j \le y_j\,.$$

Тоді, згідно з рівністю (4), дістаємо:

$$\iint_D f(x;\ y)dxdy = \lim_{\substack{\max \Delta x_i \to 0 \\ \max \Delta y_j \to 0}} \left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f\left(\xi_i;\ \eta_j\right)\Delta x_i \Delta y_j\right) \qquad (5)$$

2.3.4. ОСНОВНІ ТЕОРЕМИ

***Теорема 2.19.* Для того щоб функція *f*(*x, y*) була інтегровна в області *D*, необхідно, щоб *f*(*x, y*) була обмежена на *D*.**

***Теорема 2.20.* Якщо функція *f*(*x, y*) неперервна в обмеженій області *D*, то подвійний інтеграл існує.**

***Теорема 2.21.* Нехай *D* — обмежена замкнена область і *f*(*x, y*) — функція, визначена і неперервна в усіх точках цієї області, за винятком, можливо, точок, що належать скінченній кількості кусково-гладких ліній із області *D*. Тоді інтеграл (4) існує.**

Властивості подвійного інтеграла:

1. $\iint_D 1dxdy = \iint_D dxdy = S,\quad S$ — площа області D. (6)

• Беручи в (4) $f\left(x;\ y\right)=1$, дістаємо:

$$\iint_D dxdy = \lim_{\Delta\to 0}\sum_{i=1}^{n}\Delta S_i = S.$$

2. $\boxed{\iint_D (\alpha f(x,\ y)+\beta f(x,\ y))dxdy = \alpha\iint_D f(x,\ y)dxdy + \beta\iint_D f(x,\ y)dxdy,\quad \alpha,\ \beta = \text{const.}}$

• За означенням,

$$\iint_D (\alpha\, f(x,\ y)+\beta\, g(x,\ y))dxdy = \lim_{\Delta\to 0}\sum_{i=1}^{n}(\alpha\, f(\xi_i,\ \eta_i)+\beta g(\xi_i,\ \eta_i))\Delta S_i =$$

$$= \lim_{\Delta\to 0}\sum_{i=1}^{n}\alpha f(\xi_i,\ \eta_i)\Delta S_i + \lim_{\Delta\to 0}\sum_{i=1}^{n}\beta g(\xi_i,\ \eta_i)\Delta S_i = \alpha\lim_{\Delta\to 0}\sum_{i=1}^{n}\alpha f(\xi_i,\ \eta_i)\Delta S_i +$$

$$+\beta\lim_{\Delta\to 0}\sum_{i=1}^{n} g(\xi_i,\ \eta_i)\Delta S_i = \alpha\iint_D f(x,\ y)dxdy + \beta g(x,\ y)dxdy.$$

3. Нехай $D = D_1 \bigcup D_2$, $D_1 \bigcap D_2 = \varnothing$ (рис. 2.30).

Тоді

$$\boxed{\iint_D f(x;\ y)dxdy = \iint_{D_1} f(x;\ y)dxdy + \iint_{D_2} f(x;\ y)dxdy.} \qquad (7)$$

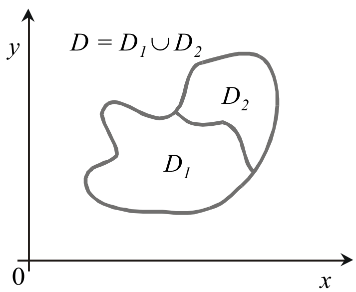

Рис. 2.30

• Нехай D_i — клітинки розбиття $D = D_1 \bigcup D_2$. Позначимо через D_{i1} — клітинки розбиття, що належать D_1, а через D_{i2} — клітинки, що належать D_2.

Тоді

$$\iint_D f(x,\ y)dxdy = \sum_{\Delta\to 0}\sum_{i=1}^{n} g(x_i,\ y_i)\Delta S_i = \lim_{\Delta\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\ \eta_i)\Delta S_{i1} +$$

$$+\lim_{\Delta\to 0}\sum_{i=1}^{n_2} f(\xi_i,\ \eta_i)\Delta S_{i2} = \iint_{D_1} f(x,\ y)dxdy + \iint_{D_2} f(x,\ y)dxdy$$

($n = n_1 + n_2$).

4. Якщо $f(x,\ y) \ge 0$, $\forall (x,\ y) \in D$, то

$$\boxed{\iint_D f(x,\ y)dxdy \ge 0.} \qquad (8)$$

5. Якщо $f(x,\ y) \ge g(x,\ y)$, $\forall (x,\ y) \in D$, то

$$\boxed{\iint_D f(x,\ y)dxdy \geq \iint_D g(x,\ y)dxdy.} \tag{9}$$

6. $$\left|\iint_D f(x,\ y)dxdy\right| \leq \iint_D |g(x,\ y)|\, dxdy. \tag{10}$$

• Очевидно, виконується нерівність

$$-|f(x,\ y)| \leq f(x,\ y) \leq |f(x,\ y)|.$$

Отже, за властивістю 5

$$-\iint_D |f(x,\ y)|\, dxdy \leq \iint_D f(x,\ y)\, dxdy \leq \iint_D |f(x,\ y)|\, dxdy.$$

Звідси маємо нерівність (10).

7. Нехай $M = \max\ f(x,\ y)$, $m = \max\ f(x,\ y)$,

$$(x,\ y) \in D.$$

Тоді

$$\boxed{mS \leq \iint_D f(x,\ y)dxdy \leq MS,} \tag{11}$$

S — площа області D.

• Справді, виконується нерівність

$$m \leq f(x,\ y) \leq M.$$

Отже,

$$\iint_D m\, dxdy \leq \iint_D f(x;\ y)dxdy \leq \iint_D Mdxdy$$

і за властивостями 1 і 2 маємо нерівність (11).

8. Нехай D — прямокутник $a \leq x \leq b$, $c \leq x \leq d$ (рис. 2.31). $f(x,\ y) = f(x)g(y)$. Тоді

$$\boxed{\iint_D f(x)\, g(y)dxdy = \int_a^b \varphi(x)dx \int_c^d g(y)dy.} \tag{12}$$

• Прямими, паралельними осям координат, розбиваємо прямокутник D на прямокутники D_{ij}, площі яких дорівнюють $\Delta x_i \Delta y_i$, $i = 1, 2, \ldots, m$; $j = 1, 2, \ldots, n$.

Згідно з рівністю (5) дістаємо:

$$\iint_D \varphi(x)g(y)dxdy = \lim_{\substack{\max \Delta x_i \to 0 \\ \max \Delta y_i \to 0}} \left(\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \varphi(\xi_i)g(\eta_i)\Delta x_i \Delta y_j \right) =$$

$$=\left(\lim_{\max \Delta x_i\to 0}\sum_{i=1}^{m}\varphi(\xi_i)\Delta x_i\right)\left(\lim_{\max \Delta y_j\to 0}\sum_{y=1}^{n}g(\eta_j)\Delta y_j\right)=\int_a^b\varphi(x)dx\int_c^d g(y)dy.$$

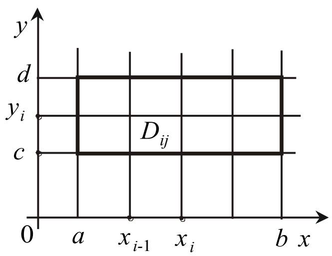

Рис. 2.31

9. ***Теорема 2.22. (Про середнє.)*** **Нехай $f(x,\ y)$ — функція, неперервна в обмеженій замкненій зв'язній області D. Тоді існує точка $(\xi,\ \eta)$, така що**

$$\iint_D f(x,\ y)dxdy = f(\xi,\ \eta)S, \tag{13}$$

де S — площа області D.

• З нерівності (11) випливає:

$$m\le\frac{1}{S}\iint_D f(x,\ y)dxdy\le M. \tag{14}$$

Нехай точки $A=(x_0,y_0)$, $B=(x_1,y_1)\in D$, причому

$$f(x_0,\ y_0)=M=\max f(x,\ y),$$
$$f(x_1,\ y_1)=m=\min f(x,\ y).$$

Сполучимо точки A і B неперервною кривою $x=x(t)$ і $y=y(t)$, $t\in[\alpha;\beta]$ так, щоб $x(\alpha)=x_0$, $y(\alpha)=y_0$, $x(\beta)=x_1$, $y(\beta)=y_1$.

У точках цієї кривої значення функції $f(x(t),\ y(t))=F(t)$ однієї змінної t утворюють відрізок $[m;\ M]$. За теоремою Вейєрштрасса вона набуває й усіх проміжних значень між m і M. Згідно з нерівністю (14) число

$$\iint_D\frac{1}{S}f(x,\ y)dxdy\in[m;\ M].$$

Тоді знайдеться таке t_0, що

$$F(t_0)=f(x(t_0),\ y(t_0))=f(\xi,\ \eta)=\frac{1}{S}\iint_D f(x,\ y)dxdy,$$

де $\xi=x(t_0),\ \eta=y(t_0)$.

Число

$$f(\xi,\ \eta)=\frac{1}{S}\iint_D f(x,\ y)dxdy \tag{15}$$

називається **середнім значенням функції** $f(x,\ y)$ **в області** D.

2.3.5. ПОХІДНА ПОДВІЙНОГО ІНТЕГРАЛА ПО ОБЛАСТІ ІНТЕГРУВАННЯ

Нехай S — площа області D, а $m=\iint_D f(x,\ y)\,dxdt$ — її маса. Тоді середня щільність речовини в D дорівнює $\frac{1}{S}\iint_D f(x,\ y)\,dxdy$.

Згідно з (15) маємо

$$\frac{1}{S}\iint_D f(x,\ y)dxdy=f(\xi,\ \eta),$$

де $(\xi,\ \eta)\in D$.

У разі стягування області D в точку $P_0(x_0,\ y_0)(d\to 0)$ внаслідок неперервності функції $f(x,\ y)$ дістаємо співвідношення:

$$\lim_{d\to 0}\frac{1}{S}\iint_D f(x,\ y)dxdy=\lim_{(\xi,\ \eta)\to(x_0,\ y_0)} f(\xi,\ \eta)=f(x_0,\ y_0).$$

Ця границя називається **похідною подвійного інтеграла за областю D в точці $P_0(x_0,\ y_0)$.**

Якщо f(x, y) — неперервна в області D функція, то похідна подвійного інтеграла за областю інтегрування дорівнює підінтегральній функції.

2.3.6. ЗВЕДЕННЯ ПОДВІЙНОГО ІНТЕГРАЛА ДО ПОВТОРНОГО

I. Випадок прямокутної області. Нехай область інтегрування є прямокутник

$$D = \{(x,\ \ y) |\ a \le x \le b,\ \ \ c \le y \le d\}$$

зі сторонами, паралельними координатним осям (див. рис. 2.31) і $f(x,\ y)$ — неперервна в цій області функція. Якщо зафіксувати $y \in [c,\ d]$, то $f(x,\ y)$ буде неперервною функцією змінної x. Тому існує інтеграл $F(y) = \int\limits_a^b f(x,\ y)dx,$ який є неперервною функцією змінної $y \in [c,\ d]$. Таким чином, функцію $F(y)$ можна інтегрувати на відрізку $[c,\ d]$. Отже, дістаємо повторний інтеграл

$$\int\limits_c^d F(y)dy = \int\limits_c^d \int\limits_a^b f(x,\ y)dy = \int\limits_c^d dy \int\limits_a^b f(x,\ y)dx. \tag{16}$$

Цей процес можна здійснити в оберненому порядку: спочатку обчислити функцію від x, визначену рівністю $\Phi(x) = \int\limits_c^d f(x,\ y)dy$, а потім функцію Φ зінтегрувати за x від a до b. У результаті дістанемо повторний інтеграл:

$$\int\limits_a^b \Phi(x)dx = \int\limits_a^b (f(x,\ y)dy)dx = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f(x,\ y)dy. \tag{17}$$

***Теорема 2.23*. Нехай функція $f(x,\ y)$ неперервна в замкненому прямокутнику *D*. Тоді виконується рівність**

$$\iint\limits_D f(x,\ y)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f(x,\ y)dy = \int\limits_c^d dy \int\limits_a^b f(x,\ y)dx. \tag{18}$$

Обчислити інтеграл

$$\iint\limits_D \left(5x^3 y + 6xy^3\right)dxdy,$$

$$D = \{(x;\ \ y) |\ 1 \le x \le 2,\ 3 \le y \le 4\}.$$

Маємо:

$$\iint\limits_{\substack{1\le x\le 2\\3\le y\le 4}}\left(5x^3y+6xy^3\right)dxdy=\int\limits_3^4\left(\int\limits_1^2\left(5x^3y+6xy^3\right)dx\right)dy=$$

$=\left\|\begin{array}{l}\text{У внутрішньому інтегралі}\\\text{інтегрування виконуємо за}\\\text{змінною } x,\text{ вважаючи } y\\\text{сталою.}\end{array}\right\|=\int\limits_3^4\left(\left(\frac{5}{4}x^4y+3x^2y^3\right)\Bigg|\begin{matrix}x=2\\x=1\end{matrix}\right)dy=$

$$=\int\limits_3^4\left(\frac{5}{4}\cdot 2^4y+3\cdot 2^2y^3-\frac{5}{4}y-3y^3\right)dy=\int\limits_3^4\left(\frac{75}{4}y+9y^3\right)dy=$$

$$=\left(\frac{75}{8}y^2+\frac{9}{4}y^4\right)\Bigg|_3^4=\frac{75}{8}\cdot 16+\frac{9}{4}\cdot 256-\frac{75}{8}9-\frac{9}{4}\cdot 81=\frac{75}{8}5\cdot 7+\frac{175}{4}\cdot 9=\frac{3675}{8}$$

2. Випадок криволінійної області. Нехай область D обмежена двома неперервними кривими $y=\varphi_1(x)$ і $y=\varphi_2(x)$, $\varphi_1(x)\le\varphi_2(x)$, і вертикальними відрізками $x=a$ і $x=b$ (рис. 2.32). Нехай будь-яка пряма, паралельна осі y, перетинає межу області D не більш ніж у двох точках. Тоді справджується формула:

$$\boxed{\iint\limits_D f(x,\ y)dxdy=\int\limits_a^b dx\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,\ y)\,dy.} \qquad (19)$$

У (19) спочатку функцію $f(x,\ y)$ інтегруємо за змінною y від $y=\varphi_1(x)$ до $y=\varphi_2(x)$, вважаючи x сталою, а потім результат інтегруємо за x на відрізку $[a,\ b]$.

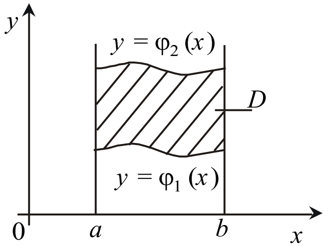

Рис. 2.32

Якщо область D (рис. 2.33) визначається нерівностями $c\le y\le d$, $g_1(y)\le x\le g_2(y)$, де $g_1(y)$ і $g_2(y)$ — неперервні на відрізку $[c;\ d]$, і будь-яка пряма, паралельна осі x, перетинає межу області не більш ніж у двох точках, то

$$\boxed{\iint\limits_D f(x,\ y)dxdy=\int\limits_c^d dy\int\limits_{g_1(y)}^{g_2(y)} f(x,\ y)\,dx.} \qquad (20)$$

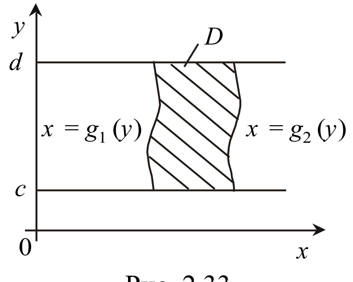

Рис. 2.33

Обчислити інтеграл

$$\iint\limits_D (x+2y)\,dxdy,$$

якщо D обмежена прямими $y = x$, $y = 2x$, $x = 2$, $x = 3$. (Рис. 2.34.)

● За формулою (19) маємо:

$$\iint\limits_{\substack{y=x,\ \ y=2x\\ x=2,\ \ x=3}} (x+2y)\,dxdy = \int_2^3 dx\int_x^{2x}(x+2y)\,dy = \int_2^3 dx\left(xy+y^2\right)\Big|_x^{2x} =$$

$$=\int_2^3\left(2x^2+4x^2-x^2-x^2\right)dx = \int_2^3\left(4x^2\right)dx = \frac{4}{3}x^3\Big|_2^3 = \frac{4}{3}(27-8) = \frac{4\cdot 19}{3} = \frac{76}{3}.$$

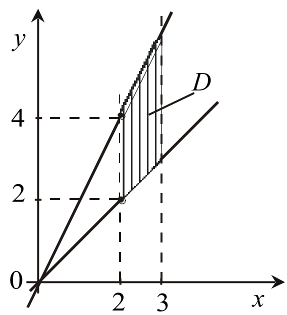

Рис. 2.34

Обчислити інтеграл

$$\iint\limits_D \sqrt{y^2-x^2}\,dxdy,$$

якщо D обмежена прямими $y = 1$, $y = x$, $y = -x$ (рис. 2.35).

● За формулою (20) дістаємо:

$$\iint\limits_{\substack{y=x,\ \ y=-x\\ y=1}} \sqrt{y^2-x^2}\,dxdy = \int_0^1 dy\int_{-y}^{y}\sqrt{y^2-x^2}\,dx = \int_0^1 dy\left(\frac{1}{2}x\sqrt{y^2-x^2}+\frac{1}{2}y^2\arcsin\frac{x}{y}\right)\Bigg|_{-y}^{y} =$$

$$=\int_0^1 dy\left(\frac{1}{2}y\cdot 0+\frac{1}{2}y^2\arcsin\frac{y}{y}-\frac{1}{2}(-y)\cdot 0-\frac{1}{3}y^2\cdot\arcsin\left(\frac{-y}{y}\right)\right) =$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1\left(y^2\cdot\frac{\pi}{2}+y^2\cdot\frac{\pi}{2}\right)dy = \frac{\pi}{2}\cdot\int_0^1 y^2dy = \frac{\pi}{2}\frac{y^3}{3}\Bigg|_0^1 = \frac{\pi}{6}.$$

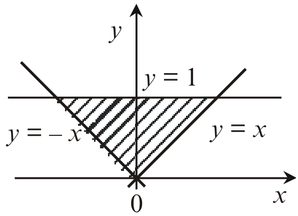

Рис. 2.35

Зауваження. Довільну область з кусково-гладкою межею можна розбити на скінченну кількість областей, кожна з яких має вигляд, показаний на рис. 2.33. Тому обчислення подвійного інтеграла завжди зводиться до обчислення повторних інтегралів.

Обчислити інтеграл

$$\iint_D (1+x+y)^{-2}\,dxdy,$$

якщо D — область, обмежена прямими $x = y$, $y = 2x$, $y = 6 - x$ (рис. 2.36).

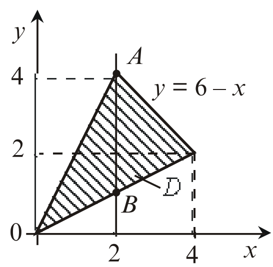

Рис. 2.36

Відрізком AB поділимо D на два трикутники D_1 і D_2. Тоді

$$\iint_D (1+x+y)^{-2}\,dxdy = \iint_{D_1} (1+x+y)^{-2}\,dxdy + \iint_{D_2} (1+x+y)^{-2}\,dxdy.$$

За формулою (19) маємо:

$$\iint_{D_1} (1+x+y)^{-2}\,dxdy = \int_0^2 dx \int_{x/2}^{2x} \frac{dy}{(1+x+y)^2} = \int_0^2 \left(-\frac{1}{1+x+y} \right)\Bigg|_{\frac{x}{2}}^{2x} dx =$$

$$= \int_0^2 \left(-\frac{1}{1-3x} + \frac{1}{1+\frac{3}{2}x} \right) dx = -\frac{1}{3}\ln 7 + \frac{2}{3}\ln 4;$$

$$\iint\limits_{D_2}(1+x+y)^{-2}\,dxdy=\int\limits_2^4 dx\int\limits_{x/2}^{6-x}\frac{dy}{(1+x+y)^2}=\int\limits_2^4\left(-\frac{1}{7}+\frac{1}{1+\frac{3}{2}x}\right)dx=$$

$$=-\frac{2}{7}+\frac{2}{3}(\ln 7-\ln 4).$$

Отже,

$$\iint\limits_{D}(1+x+y)^{-2}\,dx=\boxed{\frac{1}{3}\ln 7-\frac{2}{7}}.$$

Змінити порядок інтегрування в повторному інтегралі

$$\int\limits_0^{\pi} dx\int\limits_0^{2\sin x} f(x,\ y)dy.$$

● Область $D=\{(x,\ y)|0\le x\le \pi,\quad 0\le y\le 2\sin x\}$ зображено на рис. 2.37.

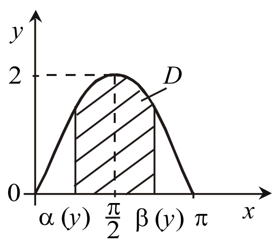

Рис. 2.37

Проекцією множини D на вісь y є відрізок [0; 2]. Кожна пряма $y=\mathrm{const}\in[0;\ 2]$ перетинає множину D по відрізках з кінцями $\alpha(y)$ і $\beta(y)$, які знаходимо як розв'язок рівняння $y=2\sin x$ на відрізку $[0;\ \pi]$; $\alpha(y)=\arcsin\left(\frac{1}{2}\right)$, $\beta(y)=\pi-\arcsin\left(\frac{y}{2}\right)$. Таким чином, множина D задається нерівностями:

$$0\le y\le 2,\quad \arcsin\left(\frac{y}{2}\right)<x\le \pi-\arcsin\left(\frac{y}{2}\right).$$

За формулою (19) маємо:

$$\int\limits_0^{\pi} dx\int\limits_0^{2\sin x} f(x,\ y)dy=\int\limits_0^{2} dy\int\limits_{\arcsin\left(\frac{y}{2}\right)}^{\pi-\arcsin\left(\frac{y}{2}\right)} f(x,\ y)dx.$$

! ***Зауваження.*** Зміна порядку інтегрування в повторному інтегралі іноді істотно спрощує його обчислення.

2.3.7. ПОНЯТТЯ *n*-КРАТНОГО ІНТЕГРАЛА

Означення: ***n*-вимірним паралелепіпедом V_n у просторі R_n** називається множина точок $x = (x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$, що задовольняють співвідношення

$$V_n = \{(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n) | a_1 \le x_1 \le b_1,\ a_2 \le x_2 \le b_2,\ \ldots,\ a_n \le x_n \le b_n\},$$

де $a_i,\ b_i \in R,\ i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n.$

> **Правило.** Об'єм *n*-вимірного паралелепіпеда визначається рівністю
>
> $$V = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2)\ldots(b_n - a_n) = \prod_{i=1}^{n}(b_i - a_i)\,.$$

Нехай G — обмежена замкнена область у просторі R^n і функція $u = f(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$ неперервна в цій області. Гіперплощинами $x_i = \text{const}$ розбиваємо область G на *n*-вимірні паралелепіпеди, об'єм яких V_i. У кожному такому паралелепіпеді візьмемо довільну точку $\left(x_1^0,\ x_2^0,\ \ldots,\ x_n^0\right)$ і утворимо інтегральну суму

$$\sigma_n = \sum_{j=1}^{N_j}\sum_{k=1}^{N_k}\ldots\sum_{i=1}^{N_i} f\left(x_1^0,\ x_2^0,\ \ldots x_n^0\right) V_i\,. \tag{21}$$

Означення. Границя інтегральних сум (21) при $\max\Delta x_{1j} \to 0$, $\max\Delta x_{2k} \to 0$, $\max\Delta x_{nl} \to 0$ називається ***n*-кратним інтегралом від функції *f*** за областю G і позначається

$$\iint\limits_G\ldots\int f(x_1,\ x_2,\ \ldots x_n)\,dx_1 dx_2 \ldots dx_n.$$

Для *n*-кратних інтегралів справджуються всі властивості подвійних інтегралів.

Інтеграл від функції $f(x_1,\ \ldots,\ x_n)$ за *n*-вимірним паралелепіпедом дістаємо послідовним інтегруванням функції f за кожною зі змінних x_i від a_i до b_i в будь-якому порядку.

Для криволінійної області *n*-вимірний інтеграл обчислюється за формулами, аналогічними (19) і (20).

Обчислити інтеграл

$$\iint\limits_G\iint x\,dx\,dy\,dz\,dt,$$

де G — область, обмежена прямими $0 \le x \le 1$, $x \le y \le 4$, $5 \le z \le t^2$, $5 \le t \le 6$.

● Маємо

$$\iint_G\iint xdxdydzdt=\int_0^1 dx\int_x^4 dy\int_5^6 dt\int_5^{t^2} xdz=\int_0^1 dx\int_x^4 dy\int_5^6 xz\Big|_5^{t^2} dt=$$

$$=\int_0^1 dx\int_x^4 dy\int_5^6\left(xt^2-5x\right)dt=\int_0^1 dx\int_x^4\left(\frac{xt^3}{3}-5xt\right)\Bigg|_5^6 dy=$$

$$=\int_0^1 dx\int_x^4\left(x\frac{6^3}{3}-5x\cdot 6-\frac{x}{3}5^3+25x\right)dy=\int_0^1 dx\int_x^4\left(\frac{91}{3}x-5x\right)dy=$$

$$=\int_0^1 dx\int_x^4\frac{76}{3}xdy=\int_0^1\frac{76}{3}\cdot xy\Big|_x^4 dx=\frac{76}{3}\int_0^1 x(4-x)dx=$$

$$=\frac{76}{3}\left(2x^2-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1=\frac{76}{3}\left(2-\frac{1}{3}\right)=\frac{76}{3}\cdot\frac{5}{3}=\frac{380}{9}.$$

2.3.8. ЗАМІНА ЗМІННИХ У ПОДВІЙНИХ ІНТЕГРАЛАХ

Нехай $f(x,\ y)$ — неперервна функція, визначена в замкненій обмеженій області D з кусково-гладкою межею Γ (рис. 2.38).

Область D відображається взаємнооднозначно на область G (рис. 2.39) площини uv за допомогою функцій $x=x(u,\ v)$, $y=y(u,\ v)$.

Потрібно перетворити інтеграл $\iint\limits_D f(x,\ y)dxdy$ на інтеграл за новими змінними $(u,\ v)\in G$. Область G розіб'ємо прямими $u=u_1=\text{const}$ і $v=v_j=\text{const}$ на прямокутники P_{ij}, площі яких дорівнюють $S_{P_{ij}}$ (див. рис. 2.39).

Тоді сім'ї кривих $u(x;\ y)=u_i$ і $v(x;\ y)=v_j$ розбивають область D на відповідні криволінійні паралелограми Π_{ij} з площами $S_{\Pi_{ij}}$ (див. рис. 2.38).

При цьому точці $(u_i,\ v_j)\in G$ відповідає точка $(x_i,\ y_j)=\left(x(u_i,\ v_j),\right.$ $\left.y(u_i,\ v_j)\right)\in D$. Звідси

$$\iint\limits_D f(x,\ y)dxdy=\lim_{\Delta\to 0}\sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^n f(x_i,\ y_i)S_{\Pi_{ij}}=\lim_{\substack{\max\Delta u_i\to 0\\ \max\Delta v_j\to 0}}\sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^n f\left(x(u_i,\ v_j),\ y(u_i,\ v_j)\right).$$

$$\left|\frac{D(x,\ y)}{D(u,\ y)}\right|_{\substack{u=u_i\\ v=v_j}} S_{P_{ij}}=\iint\limits_G f(x(u,\ v),\ \ u(u,\ v))\left|\frac{D(x,\ y)}{D(u,\ v)}\right| dudv.$$

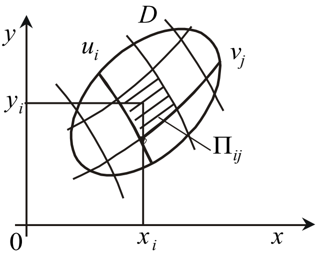

Рис. 2.38

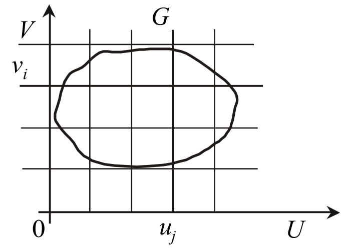

Рис. 2.39

Таким чином, якщо функції $x = x(u,\ v)$, $y = y(u,\ v)$ здійснюють взаємно однозначно відображення області G площини uy на області D площини xy, то справджується рівність:

$$\boxed{\iint\limits_D f(x,\ y)dxdy = \iint\limits_G f(x(u,\ v);\quad y(u,\ v))\left|\frac{D(x,\ y)}{D(u,\ v)}\right| dudv,} \tag{22}$$

яка називається **формулою заміни змінних у подвійному інтегралі**.

2.3.9. ПОЛЯРНА СИСТЕМА КООРДИНАТ

Найпоширенішим перетворенням на площині є *полярні координати u, v* точок області D.

Вони пов'язані з декартовими координатами x і y рівностями $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, де $\rho \ge 0$, $0 \le \varphi \le 2\pi$ (або $-\pi \le \varphi \le \pi$).

Беручи $u = \rho$, $v = \varphi$, дістаємо

$$\left|\frac{D(x,\ y)}{D(u,\ v)}\right| = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial\rho} & \dfrac{\partial x}{\partial\varphi} \\ \dfrac{\partial y}{\partial\rho} & \dfrac{\partial y}{\partial\varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi \end{vmatrix} = \rho.$$

Тоді згідно з формулою (22) подвійний інтеграл з переходом до полярної системи координат перетворюється так:

$$\boxed{\iint\limits_D f(x,\ y)dxdy = \iint\limits_G f(\rho\cos\varphi,\quad \rho\sin\varphi)\rho d\rho d\varphi.} \tag{23}$$

Площа області D в полярних координатах визначається формулою

$$\boxed{S = \iint\limits_D dxdy = \iint\limits_G \rho d\rho d\varphi.} \tag{24}$$

Обчислити площу замкненої фігури, обмеженої кривою

$$\left(x^2+y^2\right)^2 = 2a^2\left(x^2-y^2\right),\ a>0. \tag{25}$$

● Переходячи до полярних координат, із рівняння кривої дістаємо

$$\rho^4 = 2a^2\rho^2\left(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi\right) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \rho^2 = 2a^2\cos 2\varphi.$$

Із рівняння (25) бачимо, що фігура, обмежена даною кривою, симетрична відносно координатних осей і початку координат. Отже, достатньо обчислити площу частини фігури, розміщеної в першій координатній чверті, де $0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{4}$, $0 \le \rho \le a\sqrt{2\cos 2y}$, і результат помножити на 4.

Дістанемо:

$$S = 4\int_0^{\pi/4} d\varphi \int_0^{a\sqrt{2\cos 2\varphi}} \rho d\rho = 2\int_0^{\pi/4}\left(p^2\Big|_0^{a\sqrt{2\cos^2\varphi}}\right)d\varphi = 4a^2\int_0^{\pi/4}\cos 2\varphi d\varphi = 2a^2.$$

2.3.10. ЗАМІНА ЗМІННИХ У *n*-КРАТНИХ ІНТЕГРАЛАХ

Сформулюємо правило заміни змінних у n-кратних інтегралах. Нехай взаємно однозначне перетворення

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1(u_1,\ u_2,\ \ldots,\ u_n),\\ x_2 &= x_2(u_1,\ u_2,\ \ldots,\ u_n),\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ x_n &= x_n(u_1,\ u_2,\ \ldots,\ u_n) \end{aligned}$$

відображає область $\Omega_n \subset R^n$ змінних $u_1,\ u_2,\ \ldots,\ u_n$ на область $\gamma_n \subset R^n$ змінних $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$ і якобіан

$$\left|\frac{D(x_1,\ x_2,\ldots,\ x_n)}{D(u_1,\ u_2,\ \ldots,\ u_n)}\right| = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial u_1} & \dfrac{\partial x_1}{\partial u_2} & \ldots & \dfrac{\partial x_1}{\partial u_n} \\ \dfrac{\partial x_2}{\partial u_1} & \dfrac{\partial x_2}{\partial u_2} & \ldots & \dfrac{\partial x_2}{\partial u_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \dfrac{\partial x_n}{\partial u_1} & \dfrac{\partial x_n}{\partial u_2} & \ldots & \dfrac{\partial x_n}{\partial u_n} \end{vmatrix} \ne 0.$$

Тоді n-кратний інтеграл перетворюється за формулою:

$$\iint\limits_{V_n}\ldots\int f(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)\,dx_1dx_2\ \ldots\ dx_n =$$
$$= \iint\limits_{\Omega_n}\ldots\int f\left(x_1(u_1,\ u_2,\ \ldots,\ u_n),\ x_2(u_1,\ u_2,\ \ldots,u_n),\ \ldots,\ x_n(u_1,\ u_2,\ \ldots,\ u_n)\right)\times$$
$$\times\left|\frac{D(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)}{D(u_1,\ u_2,\ \ldots,\ u_n)}\right|du_1du_2\ \ldots\ du_n.$$

2.3.11. ЗАСТОСУВАННЯ КРАТНИХ ІНТЕГРАЛІВ ДО ОБЧИСЛЕННЯ ПЛОЩІ ПОВЕРХНІ

1. *Параметричне задання поверхні*

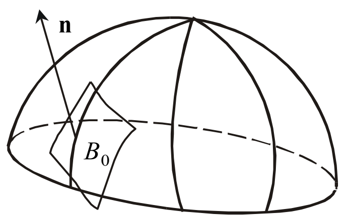

Рис. 2.40

Нехай на декартовій площині uv вибрано область G, в якій визначено функції:

$$\begin{aligned} &x = x(u,\ v),\\ &y = y(u,\ v),\\ &z = z(u,\ v),\ \ (u,\ v)\in G. \end{aligned} \tag{26}$$

Ці функції неперервно диференційовні в G, причому їх якобіани мають такий вигляд:

$$\left|\frac{D(y,\ z)}{D(u,\ v)}\right| = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v}\\ \dfrac{\partial z}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix},\ \left|\frac{D(x,\ y)}{D(u,\ v)}\right| = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v}\\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix},\ \left|\frac{D(z,\ x)}{D(u,\ v)}\right| = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial z}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial v}\\ \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \end{vmatrix}$$

і не дорівнюють одночасно нулеві для кожної точки $(u,\ v)\in G$.

Для всіх $(u;\ v)\in G$, згідно з (26) існує єдина відповідна точка $(x,\ y,\ z)\in R^3$. Образом області G при такому відображенні є де-яка поверхня S в R^3, яка називається **поверхнею, заданою параметрично** з параметрами $u,\ v \in G$.

Площа поверхні обчислюється за формулою

$$\boxed{S = \iint_G |n| du dv,} \tag{27}$$

де $\mathrm{n} = \left(\left| \frac{D(y,\ z)}{D(u,\ v)},\ \frac{D(z,\ x)}{D(u,\ v)},\ \frac{D(x,\ y)}{D(u,\ v)} \right| \right)$ — вектор перпендикулярний до площини, дотичної до поверхні S у точці $B_0\ (x_0,\ y_0,\ z_0)$ рис. 2.40. Вектор **n** називається **нормаллю до поверхні *S*.**

Величина $|\mathbf{n}| duv$ називається **диференціалом площі поверхні *ds***:

$$ds = |\mathbf{n}| du dv.$$

Формулу (27) можна записати у вигляді:

$$\boxed{S = \iint_G \sqrt{\left| \frac{D(y,\ z)}{D(u,\ v)} \right|^2 + \left| \frac{D(z,\ \ x)}{D(u,\ v)} \right|^2 + \left| \frac{D(x,\ y)}{D(u,\ v)} \right|^2} du dv.}$$

2. *Явне задання поверхні.*

Нехай D — область на площині xy. Коли

$$z = f(x,\ y),\ x,\ y \in D, \tag{28}$$

є функція, що має на D неперервні частинні похідні f'_x і f'_y, то графік цієї функції називається **гладкою поверхнею**. Говорять, що поверхня задана явно рівнянням (28).

У такому разі вектор нормалі до поверхні набирає вигляду:

$$\mathbf{n} = \left(-f'_x,\ -f'_y,\ 1\right).$$

Площу поверхні S, що задана явно рівнянням $z = f(x,\ y)$, $(x,\ y) \in D$, згідно з (27) можна подати формулою:

$$\boxed{S = \iint_D \sqrt{1 + (f'_x)^2 + \left(f'_y\right)^2} dx dy.} \tag{29}$$

3. *Неявне завдання поверхні.*

Нехай в області $V \in R^3$ задано функцію $F = F(x,\ y,\ z)$, неперервну разом з частинними похідними F'_x, F'_y, F'_z. Припустимо, що $\mathbf{gradF} = \left(F'_x,\ F'_y,\ F'_z\right) \neq 0$, $\forall (x,\ y,\ z) \in V$. Тоді множина точок, що задовольняє рівняння

$$F(x,\ y,\ z) = 0, \tag{30}$$

називається поверхнею, **заданою неявно**. Функція $z = f(x,\ y)$, що визначається рівнянням (30), має частинні похідні:

$$f'_x = -\frac{F'_x}{F'_z},\ f'_y = -\frac{F'_y}{F'_z}.$$

Звідси та з рівності (29) дістаємо **площу поверхні *S*, заданої неявно рівнянням** (30):

$$S = \iint\limits_D \frac{1}{\left|F'_z\right|} \sqrt{F'^2_x + F'^2_y + F'^2_z}\, dxdy, \tag{31}$$

де D — проекція поверхні S на площину xy.

Знайти площу поверхні

$z = 5 + \sqrt{8\left(x^2 + y^2\right)}$, де $y \geq x^2$, $y \leq 1$ (рис. 2.41).

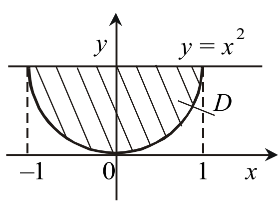

Рис. 2.41

● Поверхня задана явно. Знаходимо

$$z'_x = \sqrt{8}\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}},\ z'_y = \sqrt{8}\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Тоді

$$\sqrt{1 + z'^2_x + z'^2_y} = \sqrt{1 + \frac{8x^2}{x^2 + y^2} + \frac{8y^2}{x^2 + y^2}} = 3.$$

Отже, за формулою (29) шукана площа

$$S = 3\iint\limits_{D} dxdy = 3\int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{x}^{1} dy = 3\int\limits_{-1}^{1} \left(1 - x^2\right) dx =$$

$$= 3\left(x - \frac{x^3}{3} \right)\Bigg|_{-1}^{1} = 3\left(1 - \frac{1}{3} + 1 - \frac{1}{3}\right) = 3 \cdot \frac{4}{3} = 4.$$

2.3.12. КРАТНІ НЕВЛАСНІ ІНТЕГРАЛИ

Означення. Кратний інтеграл називається *невласним*, якщо або область інтегрування, або підінтегральна функція, або як область, так і функція необмежена.

1. Невласні інтеграли 1-го роду

Нехай область D — необмежена. Візьмемо послідовність монотонних обмежених областей інтегрування $D_1,\ D_2,\ \ldots,\ D_n$ — $D_n \subset D_{n+1}$, $\forall n$ і $D_n \to D$ при $n \to \infty$.

Наприклад, якщо область інтегрування збігається з площиною xy, то за послідовність D_n можна взяти сукупність кругів $x^2 + y^2 \le {a_n}^2$, $a_n < a_{n+1}$, із центром у початку координат.

Означення. **Невласним інтегралом за необмеженою областю інтегрування**, або **невласним інтегралом 1-го роду**, називається границя

$$\lim_{n\to\infty} \iint\limits_{D_n} f(x,\ y)dxdy, \tag{32}$$

яка не залежить від вибору послідовності D_n. Таким чином, за означенням

$$\iint\limits_{D} f(x,\ y)dxdy = \lim_{n\to\infty} \iint\limits_{D_n} f(x,\ y)dxdy.$$

Якщо границя (32) існує і скінченна, то невласний інтеграл за необмеженою областю називається **збіжним**, у противному разі — **розбіжним**.

Дослідити на збіжність інтеграл

$$\iint\limits_{D} \frac{dxdy}{\left(1 + x^2 + y^2\right)}, \quad D: \ -\infty < x < \infty, \quad -\infty < y < \infty.$$

● Область D збігається з площиною xy, тому за області інтегрування D_n беремо круги $x^2+y^2\le n^2$ радіусом n. Переходячи до полярних координат, маємо:

$$\iint_D \frac{dxdy}{\left(1+x^2+y^2\right)}=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dxdy}{\left(1+x^2+y^2\right)^2}=\lim_{n\to\infty}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^n\frac{\rho d\varphi}{\left(1+\rho^2\right)^2}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^n\frac{d\left(\rho^2+1\right)}{\left(1+\rho^2\right)^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(-\frac{1}{\rho^2+1}\right)\Bigg|_0^n d\varphi=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(-\frac{1}{n^2+1}+1\right)d\varphi=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{n^2+1}+1\right)\varphi\Bigg|_0^{2\pi}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\pi\left(1-\frac{1}{n^2+1}\right)=\pi.$$

Інтеграл збіжний.

2. Невласні інтеграли 2-го роду

Нехай функцію $f(x,\ y)$ задано в замкненій області D.

Означення. Точка $\left(x_0,\ y_0\right)$ називається **особливою точкою** функції f, якщо в будь-якому околі U_δ точки $\left(x_0,\ y_0\right)$ радіусом δ функція f необмежена або невизначена.

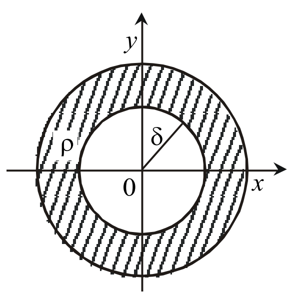

Рис. 2.42

Означення. Якщо функція $f\left(x,\ y\right)$ має в області D єдину особливу точку і неперервна в області $D\setminus U_\delta$, то ***невласним подвійним інтегралом 2-го роду*** від функції $f\left(x,\ y\right)$ за областю D називається границя

$$\lim_{\delta\to 0}\iint_{D\setminus U_\delta} f(x,\ y)\,dxdy. \tag{33}$$

КРИВОЛІНІЙНІ ІНТЕГРАЛИ

2.4.1. ПОНЯТТЯ КРИВОЛІНІЙНОГО ІНТЕГРАЛА 1-го РОДУ

Нехай на площині xy задано гладку криву l, у точках якої визначено неперервну функцію $f(x, y)$. Криву l довільно розіб'ємо на частини l_i завдовжки Δl_i, $i = 1, 2, \ldots, n$. У частині l_i виберемо довільну точку (x_i, y_i) і утворимо інтегральну суму.

$$\delta_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta l_i. \qquad (1)$$

Нехай $\Delta = \max\limits_{1 \le i \le n} \Delta l_i$.

Означення. Якщо існує границя

$$\lim_{\Delta \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta l_i,$$

яка не залежить ні від способу розбиття дуги l на частини l_i, ні від вибору точок $(x_i, y_i) \in l_i$, то ця границя називається **криволінійним інтегралом 1-го роду за дугою *l* від функції *f*(*x*, *y*)** і позначається $\int\limits_l f(x, y)dl$.

Отже, за означенням:

$$\boxed{\int\limits_l f(x, y)dl = \lim_{\Delta \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta l_i.} \qquad (2)$$

2.4.2. ОБЧИСЛЕННЯ КРИВОЛІНІЙНИХ ІНТЕГРАЛІВ 1-го РОДУ

Нехай криву l задано на площині рівнянням $y = g(x)$, $x \in [a, b]$, а $f(x, y)$ — неперервна в точках цієї кривої функція. Точки $(x, y) \in l$ мають вигляд $(x, g(x))$, $x \in [a, b]$. Тоді функція $f(x, y)$ у точках кривої l подається так: $f(x, y) = f(x, g(x))$, а довжина i-ої частини l_i наближено дорівнює $\Delta l_i = \sqrt{1 + g'^2(x_i)}\Delta x_i$ $i = 1, 2, \ldots, n$. Отже, інтегральна сума (1) набирає вигляду:

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i,\ g(x_i))\sqrt{1 + g'^2(x_i)}\Delta x_i. \tag{3}$$

Звідси границя виразу (3) при $\Delta \to 0$ являє собою інтеграл

$$\boxed{\int_l f(x,\ y)dl = \int_a^b f(x,\ g(x))\sqrt{1 + g'^2(x)}dx.} \tag{4}$$

Якщо крива l задана параметрично: $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in [\alpha,\ \beta]$, то

$$\boxed{\int_l f(x, y)dl = \int_\alpha^\beta f(x(t),\ y(t))\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}dt.} \tag{5}$$

Обчислити інтеграл $\int_l x dl$, де l — дуга параболи $y = \dfrac{x^2}{\sqrt{2}}$, що сполучає точки (0, 0) і (2, $\sqrt{2}$).

● Оскільки $x \in [0, 2]$ і $y' = \sqrt{2}x$, то згідно з (5) маємо:

$$\int_l x dl = \int_0^2 x\sqrt{1 + 2x^2}dx = \frac{1}{4}\int_0^2 (1 + 2x^2)^{1/2} d(1 + 2x^2) = \frac{1}{6}\sqrt{(1 + 2x^2)^3}\Big|_0^2 = \boxed{\frac{13}{6}}.$$

2.4.3. ПОНЯТТЯ КРИВОЛІНІЙНОГО ІНТЕГРАЛА 2-го РОДУ

Нехай функції $P = P(x, y, z)$, $Q = Q(x, y, z)$, $R = R(x, y, z)$ неперервні в точках гладкої кривої

$$l = \{x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t)\},\ t \in [\alpha,\ \beta].$$

Точка $A = (x(\alpha),\ y(\alpha),\ z(\alpha))$ називається **початковою точкою кривої** l, а точка $B = (x(\beta),\ y(\beta),\ z(\beta))$ — **кінцевою точкою** цієї кривої.

Припустимо, що рух по кривій l відбувається від початкової точки A до кінцевої точки B.

Означення. Крива, для якої вибрано початкову і кінцеву точки і вказано напрям руху, називається **орієнтованою**: l^+ означає, що крива l орієнтована і рух відбувається від точки A до точки B, а l^- — рух відбувається від точки B до точки A (рис. 2.43).

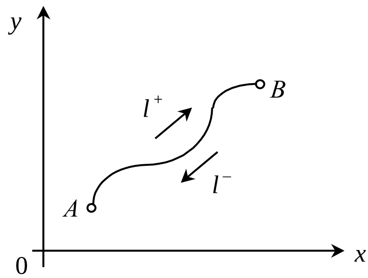

Рис. 2.43

Розіб'ємо криву l на частини l_i точками

$$M_0 = A, M_1, M_2, \ldots, M_n = B.$$

У кожній частині l_i виберемо довільно точку $N_i = (x_i, y_i, z_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Нехай $\mathbf{p_i}$ — одиничний вектор дотичної до кривої l у точці N_i, що задає напрям руху вздовж кривої l, а Δl_i — довжина частини l_i. Утворимо інтегральну суму для вектор-функції $\mathbf{s}(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$:

$$\delta_n = \sum_{i=1}^{n} (\mathbf{a}(x_i, y_i, z_i), \mathbf{p_i}) \Delta l_i. \tag{6}$$

Позначимо $\Delta = \max \Delta l_i$.

Означення. Якщо при $\Delta \to 0$ існує границя інтегральних сум (6), яка не залежить ні від способу розбиття кривої l на частини l_i, ні від вибору точок $N_i \in l_i$, її називають **криволінійним інтегралом 2-го роду** від вектор-функції $\mathbf{a} = (P, Q, R)$ за кривою l і позначають: $\int_l (\mathbf{a}, \mathbf{p^0}) dl$.

Таким чином, за означенням:

$$\boxed{\int_l (\mathbf{a}, \mathbf{p}) dl = \lim_{\Delta \to 0} \sum_{i=1}^{n} (\mathbf{a}(x_i, y_i, z_i), \mathbf{p}_i^0) \Delta l_i.} \tag{7}$$

Нехай гладка крива l задана параметрично: $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, $t \in [\alpha; \beta]$. У цьому разі маємо:

$$dl = |\mathbf{p}|\,dt = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}\,dt,$$

де $\mathbf{p} = (x'(t),\ y'(t),\ z'(t))$ — вектор, дотичний до кривої l.

Вираз $(\mathbf{a}, \mathbf{p}^0)$ можна записати у вигляді:

$$(\mathbf{a},\mathbf{p}^0)dl = \left(a, \frac{\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|}\right)|\mathbf{p}|dt = (\mathbf{a},\ \mathbf{p})dt = \tag{8}$$
$$= px'(t)dt + Qy'(t)dt + Rz'(t)dt = Pdx + Qdy + Rdz.$$

Згідно з рівністю (8), інтеграл у лівій частині співвідношення (7) можна записати так:

$$\int_l (\mathbf{a},\ \mathbf{p^0})dl = \int_l Pdx + Qdy + Rdz \tag{9}$$

або

$$\int_l (\mathbf{a},\ \mathbf{p^0})dl = \int_l Pdx + Qdy + Rdz = \lim_{\Delta\to 0}\sum_{i=1}^{n}(\mathbf{a}(x_i, y_i, z_i),\ \mathbf{p_i^0})\Delta l_i. \tag{10}$$

У точках параметрично заданої кривої l вектор-функція $\mathbf{a}$ набирає вигляду $\mathbf{a} = (P(x(t),\ y(t),\ z(t)),\ Q(x(t),\ y(t),\ z(t)),\ R(x(t),\ y(t),\ z(t))$. Звідси з рівності (5) маємо **формулу для обчислення криволінійного інтеграла 2-го роду в разі параметричного задання кривої**:

$$\boxed{\begin{aligned}&\int_l P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dz + R(x,y,z)dz = \int_\alpha^\beta (P(x(t),y(t),z(t))x'(t) + \\ &\quad + Q(x(t),y(t),z(t))y'(t) + R(x(t),y(t),z(t))z'(t))\,dt.\end{aligned}} \tag{11}$$

Якщо криву l задано в площині xy параметрично: $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in [\alpha,\ \beta]$ і $\mathbf{a} = (P(x,\ y),\ Q(x,\ y))$ — вектор-функція, визначена в точках цієї кривої, то дістаємо формулу:

$$\boxed{\int_l P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_\alpha^\beta (P(x(t),y(t))x'(t) + Q(x(t),\ y(t))y'(t))dt.} \tag{12}$$

Нехай плоска крива l задана явно рівнянням $y = f(x)$, $x \in [a,\ b]$, де $f(x)$ — гладка функція. Цю криву можна задати параметрично:

$$x = x,\ y = f(x),\ x \in [a,\ b].$$

Тоді з рівностей (11) і (12) дістанемо $\mathbf{p} = (1,\ f'(x))$. Далі маємо:

$$\int_l P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_a^b (P(x_1 f(x)) + Q(x) f(x)) f(x))dx.$$

Одиничний вектор дотичної $\mathbf{p}^0 = (\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma)$, де $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ — напрямні косинуси вектора $\mathbf{p}$, дотичного до кривої l, тому з рівностей (12) дістаємо:

$$\boxed{\int_l (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)dl = \int_l Pdx + Qdy + Rdz.} \tag{13}$$

Формула (13) встановлює **зв'язок між криволінійними інтегралами 1-го і 2-го родів**.

Якщо l — плоска крива, формула (13) набирає вигляду:

$$\boxed{\int_l (P\cos\alpha + Q\sin\alpha)dl = \int_l Pdx + Qdy,} \tag{14}$$

оскільки в цьому разі $\mathbf{p}^0 = (\cos\alpha,\ \sin\alpha)$ $\left(\beta = \dfrac{\pi}{2} - \alpha\right)$.

Обчислити інтеграл

$$\int_l 2x^2dx - (y^2 - x^2)dy, \tag{15}$$

де l — частина параболи $y = x^2$ з початковою точкою (0, 0) і кінцевою точкою (2, 4).

• За формулою (14) для інтеграла (15) з урахуванням того, що $x \in [0, 2]$ дістаємо:

$$\int_l 2x^2dx - (y^2 - x^2)dy = \int_0^2 (2x^2 - 2x^5 - 2x^3)dx = -8.$$

2.4.4. ФОРМУЛА ГРІНА

Формула Гріна пов'язує криволінійний інтеграл другого роду за замкненою кривою з подвійним інтегралом за областю, обмеженою цією кривою.

Нехай на площині xy задано замкнену область D з межею γ.

Означення. Межа γ області D орієнтована **додатно** (**від'ємно**), якщо під час руху по γ область D бачимо розміщеною ліворуч (праворуч) (рис. 2.44). Область D орієнтована додатно (від'ємно), якщо її межа орієнтована додатно (від'ємно) (рис. 2.45).

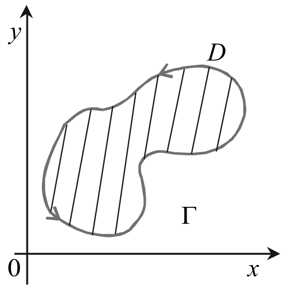

Рис. 2.44

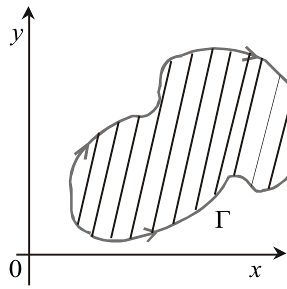

Рис. 2.45

Означення. Область D називається **областю 1-го типу**, якщо вона обмежена знизу кривою γ_1: $y = y_1(x)$, згори — кривою γ_2: $y = y_2(x)$ і, можливо, відрізками прямих $x = a$ і $x = b$, причому будь-яка пряма, паралельна осі y, перетинає межі γ_1 і γ_2 не більш ніж у двох точках (рис. 2.46).

Означення. Область D називається **областю 2-го типу**, якщо вона обмежена ліворуч кривою γ_1: $x = x_1(y)$, праворуч — кривою γ_2: $x = x_2(y)$ і, можливо, відрізками прямих $y = c$ і $y = d$, причому будь-яка пряма, паралельна осі x, перетинає межі γ_1 і γ_2 не більш ніж у двох точках (рис. 2.47).

Теорема. 2.24. **Нехай функції $P(x, y)$ і $Q(x, y)$ неперервні і мають неперервні частинні похідні $\frac{\partial P}{\partial y}$ і $\frac{\partial Q}{\partial x}$ у замкненій однозв'язній області D, обмеженій кусково-гладкою кривою j. Тоді**

$$\boxed{\oint_{\gamma} P dx + Q dy = \iint_{D} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy,} \qquad (16)$$

де криволінійний інтеграл обчислюється за межею γ області D, орієнтованою додатно. Вираз **(16)** називається **формулою Гріна.**

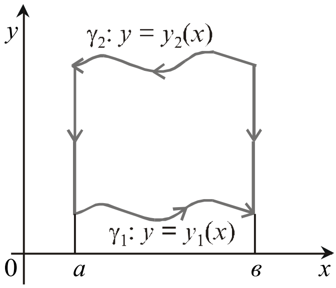

Рис. 2.46

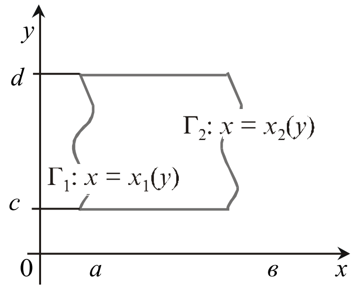

Рис. 2.47

Обчислити інтеграл

$$I=\oint\limits_{l} -x^2y\,dx+xy^2\,dy,$$

де l — коло $x^2+y^2=R^2$, яке обходимо, рухаючись проти годинникової стрілки.

• Маємо $P=-x^2y,\ Q=xy^2$. Область D, обмежена колом, є круг $x^2+y^2\le R^2$. Оскільки $\dfrac{\partial Q}{\partial x}-\dfrac{\partial P}{\partial y}=x^2+y^2$, і то за формулою Гріна

$$I=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{R}\rho^3\,d\rho=\frac{\pi R^4}{2}.$$

2.4.5. ОБЧИСЛЕННЯ ПЛОЩІ ЗА ДОПОМОГОЮ ФОРМУЛИ ГРІНА

Узявши у формулі (16) $P=-y$, $Q=x$, дістанемо

$$\oint\limits_{\gamma} -y\,dx+x\,dy=\iint\limits_{D}2\,dx\,dy=2\iint\limits_{D}dx\,dy=2S,$$

де S — площа області D. Звідси маємо:

$$\boxed{S=\frac{1}{2}\oint\limits_{\gamma}x\,dy-y\,dx.}\qquad(17)$$

Обчислити площу області D, обмеженої параболами $y^2=x,\ x^2=y$ (рис. 2.48).

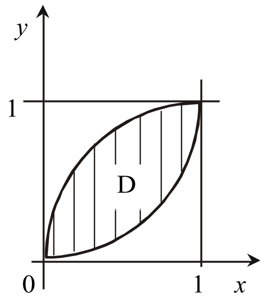

Рис. 2.48

Скориставшись (17), обчислимо інтеграл $\int\limits_{\gamma} -ydx + xdy$ за кривою Γ_1 і $y = x^2$, $0 \le x \le 1$:

$$\int\limits_{\Gamma_1} -ydx + xdy = \int\limits_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}.$$

Цей самий інтеграл за кривою Γ_2: $x^2 = y$, $y \in [1; 0]$

$$\int\limits_{\Gamma_2} -ydx + xdy = -\int\limits_1^0 y^2 dy = \frac{1}{3}.$$

Тоді при $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$

$$S = \frac{1}{2}\int\limits_{\Gamma} -ydx + xdy = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}.$$

5.1. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ І ОЗНАЧЕННЯ

Нехай задано послідовність чисел $u_1, u_2, \ldots, u_n \ldots$.

Означення. Вираз

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots}$$

називається **рядом**, а самі числа $u_1, u_2, \ldots, u_n \ldots$ називаються **членами ряду**. Вираз u_n як функція від n називається **загальним членом ряду**.

Означення. Скінченні суми

$$\boxed{\begin{aligned} &S_1 = u_1, \\ &S_2 = u_1 + u_2, \\ &S_3 = u_1 + u_2 + u_3, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n \end{aligned}} \qquad (1)$$

називаються **частинними сумами ряду**.

Означення. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ називається ***збіжним***, якщо існує границя частинних сум ряду

$$S = \lim_{n \to \infty} S_n . \qquad (2)$$

Границя частинних сум (2) називається **сумою ряду**. Якщо границя (2) не існує, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ називається **розбіжним**.

Дослідимо збіжність числового ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} + \ldots$$

- Знайдемо значення частинної суми ряду:

$$S_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} =$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Шукаємо границю частинних сум ряду:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1.$$

Границя існує, отже, розглядуваний ряд збігається і його сума дорівнює 1.

Розглянемо ряд геометричної прогресії

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = 1 + q + q^2 + \ldots + q^n + \ldots \qquad (3)$$

I. Якщо $q \neq 1$, можемо знайти частинну суму ряду

$$S_n = 1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1} = \frac{1-q^n}{1-q}.$$

II. Якщо $|q| < 1$, $q^n \to 0$ при $n \to +\infty$ і при цьому існує границя частинних сум ряду

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1-q^n}{1-q} = \frac{1}{1-q},$$

ряд (3) збігається.

Якщо $|q| > 1$, границя частинних сум не існує і ряд (3) розбігається.

Якщо $q = 1$, маємо ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} 1^n = 1 + 1 + 1 + \ldots + 1.$$

Його частинні суми

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} 1 = n, \quad \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} n = +\infty.$$

Границя частинних сум не існує, отже, при $q = 1$ ряд (3) розбігається.

Якщо $q = -1$, маємо ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n = 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots + (-1)^n + \ldots$$

і частинні суми

$$S_1 = 1,\ S_2 = 0,\ S_3 = 1,\ S_4 = 0,\ \ldots\ S_n = \begin{cases} 1, \text{ якщо } n \text{ — непарне}, \\ 0, \text{ якщо } n \text{ — парне}. \end{cases}$$

Границя частинних сум S_n ряду не існує, і ряд (3) розбігається.

Наведемо необхідні і достатні умови збіжності числового ряду.

Теорема 5.1. **(Критерій Коші.) Для того, щоб ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ збігався, необхідно і достатньо, щоб для будь-якого $\varepsilon > 0$ знайшлось таке $N = N(\varepsilon)$, що при будь-якому $p > 0$, $n \ge N$ виконується нерівність**

$$\left| u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots + u_{n+p} \right| < \varepsilon. \qquad (4)$$

Іншими словами, збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ рівносильна тому, що сума будь-якої кількості членів ряду, наступних за членом ряду з достатньо великим номером, може бути скільки завгодно малою.

Означення. Ряд

$$r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k = u_{n+1} + u_{n+2} + u_{n+3} + \ldots + u_{n+k} + \ldots \qquad (5)$$

називається **залишком ряду** $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$.

Очевидна теорема.

Теорема 5.2. **Для того, щоб збігався ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$, необхідно і достатньо, щоб збігався залишок ряду.**

Доведення. Розглянемо при фіксованому значенні n частинну суму ряду (5).

$$\sigma_p = u_{n+1} + u_{n+2} + u_{n+3} + \ldots + u_{n+p} = S_{n+p} - S_n,$$

$$\lim_{n\to+\infty} \sigma_p = \lim_{n\to+\infty} \left(S_{n+p} - S_n \right).$$

Існування границі $\lim_{p\to+\infty} \sigma_p$ рівносильне існуванню границі $\lim_{n\to+\infty} \sigma_n$, що доводить правильність теореми.

З теореми 5.2 випливає, що збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ не зміниться, якщо відкинути скінченну кількість перших членів.

З критерію Коші випливає, що збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ рівносильна тому, щоб усі частинні суми залишку ряду (5) були скільки завгодно малі, якщо номер n достатньо великий.

Теорема 5.3. **(Необхідна умова збіжності.) Для того щоб ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ збігався, необхідно, щоб загальний член ряду прямував до нуля, тобто щоб виконувалась умова**

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0.. \qquad (6)$$

Доведення. Нехай ряд збігається, тобто існує границя частинних сум ряду

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} u_k .$$

З рівності $u_n = S_n - S_{n-1}$ випливає, що існує границя

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0,$$

що і доводить правильність теореми.

Умова (6) не є достатньою для збіжності ряду, що можна бачити на прикладі так званого гармонійного ряду

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots} \qquad (7)$$

Дослідити збіжність ряду (7).

- Оцінимо знизу деякі частинні суми:

$$S_1 = 1,\ \ S_2 = 1 + \frac{1}{2},\ \ S_4 = S_2 + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) > S_2 + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) = 1 + \frac{2}{2}.$$

$$S_8 = S_4 + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) > S_4 + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) > 1 + \frac{3}{2}, \ \ldots$$

Аналогічним способом отримаємо оцінку

$$S_{2^n} \geq 1 + \frac{n}{2} \ \ (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Оскільки частинні суми не обмежені згори, то не існує границя $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ і гармонійний ряд розбігається. Хоча для гармонійного ряду (7) виконана необхідна умова збіжності (6)

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Дослідимо збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{1000n+1}$.

- Шукаємо границю загального члена ряду

$$\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{1000n+1}=\frac{1}{1000}.$$

Оскільки загальний член ряду не прямує до нуля, то розглядуваний ряд розбігається.

Розглянемо знову ряд геометричної прогресії (3)

$$\sum_{n=0}^{\infty}aq^n \quad (a\neq 0).$$

При $|q|>1$ ряд розбігається, бо загальний член ряду $u_n = aq^n$ не прямує до нуля.

Властивості дій з рядами

Теорема 5.4. **Задано числовий ряд**

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n=u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots \tag{8}$$

Якщо помножити члени ряду на один і той самий числовий множник $a\neq 0$ і дістати ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}au_n=au_1+au_2+\ldots+au_n+\ldots, \tag{9}$$

то із збіжності ряду (8) випливає збіжність ряду (9), і навпаки, зі збіжності ряду (9) випливає збіжність ряду (3). При цьому для сум ряду справджується рівність:

$$\boxed{a\sum_{n=1}^{\infty}u_n=\sum_{n=1}^{\infty}au_n,\quad a=\text{const}}$$

Отже, дії множення на число і підсумовування переставні.

Теорема 5.5. **Якщо два ряди збігаються, то їх можна почленно додавати і віднімати, тобто**

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} u_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} v_n = \sum_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n).} \qquad (10)$$

Теорема 5.6. **Збіжність числового ряду не зміниться, якщо для нього приписати або відкинути скінченну кількість членів.**

Розглянемо збіжний ряд з нульовими членами

$$\sum_{n=1}^{\infty} (n-n) = (1-1) + (2-2) + (3-3) + \ldots + (n-n) + \ldots$$

Розкривши дужки, дістанемо збіжний ряд

$$1 - 1 + 2 - 2 + 3 - 3 + \ldots + n - n + \ldots,$$

загальний член якого не прямує до нуля.

5.2. ОЗНАКИ ЗБІЖНОСТІ РЯДІВ З ДОДАТНИМИ ЧЛЕНАМИ

Найбільш часто використовуються ознаки збіжності рядів з додатними членами.

5.2.1. НЕОБХІДНА І ДОСТАТНЯ УМОВА ЗБІЖНОСТІ РЯДУ З ДОДАТНИМИ ЧЛЕНАМИ

Розглядається ряд з додатними членами

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots, \quad u_n > 0 \quad (u = 1, 2, \ldots, n, \ldots). \qquad (11)$$

Частинні суми ряду монотонно зростають, бо

$$S_2 - S_1 = u_2 > 0, \; S_3 - S_2 = u_3 > 0, \ldots, S_n - S_{n-1} = u_n > 0, \ldots$$

Звідси випливає правильність такої теореми.

Теорема 5.7. **Для того, щоб ряд з додатними членами збігався, необхідно і достатньо, щоб усі його частинні суми були обмежені зверху.**

Доведення. Якщо ряд (11) збігається, то існує границя послідовності частинних сум. Відомо, що збіжна послідовність обмежена.

Нехай послідовність частинних сум ряду обмежена зверху. За теоремою Вейєрштрасса монотонно зростаюча обмежена послідовність має границю. Отже, послідовність частинних сум ряду має границю і ряд збігається.

5.2.2. ОЗНАКИ ПОРІВНЯННЯ

Розглядаємо два ряди з додатними членами

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots \tag{12}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n = v_1 + v_2 + v_3 + \ldots + v_n + \ldots \tag{13}$$

Теорема 5.8. **Нехай з деякого номера *n* виконується нерівність $u_n \le v_n$. Тоді із збіжності ряду (13) випливає збіжність ряду (12), а із розбіжності ряду (12) випливає розбіжність ряду (13).**

Доведення. Оскільки відкидання скінченної кількості членів ряду не впливає на його збіжність, то можна вважати, що нерівність $u_n \le v_n$ виконується для всіх членів рядів. Якщо збігається ряд (13), то всі його частинні суми обмежені зверху. З огляду на це всі частинні суми ряду (12) теж обмежені зверху і, отже, ряд (12) збігається.

Якщо ряд (12) розбігається, то ряд (13) не може збігатися, бо за доведеним вище із збіжності ряду (13) випливає збіжність ряду (12). Теорему доведено.

При виконанні нерівності $u_n \le v_n$ кажуть, що ряд (13) *мажорує* ряд (12).

Дослідимо збіжність числового ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} + \ldots \tag{14}$$

- Візьмемо збіжний ряд порівняння

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} + \ldots \tag{15}$$

Оскільки виконуються нерівності

$$\frac{1}{2^2} < \frac{1}{1\cdot 2},\ \frac{1}{3^2} < \frac{1}{2\cdot 3},\ \ldots,\ \frac{1}{n^2} < \frac{1}{(n-1)n},\ \ldots,$$

то за теоремою 2 ряд (4) збігається.

На практиці найбільш зручна ознака порівняння у граничній формі.

Теорема 5.9. **Нехай для членів рядів (12), (13) існує границя**

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n} = l \quad (0 < l < \infty).}$$

Тоді обидва ряди (12), (13) збігаються або розбігаються одночасно. Якщо $l = 0$, то зі збіжності ряду (12) випливає збіжність ряду (13). Якщо $l = +\infty$, то з розбіжності ряду (13) випливає розбіжність ряду (12).

Доведення. Нехай $0 < l < \infty$. Для довільного $\varepsilon > 0$, $\varepsilon < l$ знайдеться номер $N = N(\varepsilon)$, такий що при $n > N$ виконуватимуться нерівності:

$$0 < l - \varepsilon < \frac{u_n}{v_n} < l + \varepsilon.$$

З нерівностей $(l - \varepsilon)v_n < u_n < (l + \varepsilon)v_n$ і збіжності ряду (12) випливає збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty}(l-\varepsilon)v_n = (l-\varepsilon)\sum_{n=1}^{\infty}v_n$. З розбіжності ряду (12) $\sum_{n=1}^{\infty}(l+\varepsilon)v_n = (l+\varepsilon)\sum_{n=1}^{\infty}v_n$, що остаточно доводить правильність теореми.

Порівняємо збіжність рядів (14), (15), що мають загальні члени $u_n = \frac{1}{n^2}$, $v_n = \frac{1}{n(n+1)}$.

- Шукаємо границю відношення загальних членів

$$l = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n(n+1)}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{n^2} = 1.$$

Згідно з теоремою 5.9 обидва ряди (14), (15) збігаються або розбігаються одночасно. Оскільки ряд (15) збігається, то й ряд (14) збігається.

Дослідимо збіжність ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n(n+1)(n+2)}}$ порівнюючи з розбіжним гармонійним рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$. Оскільки існує границя

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt[3]{n(n+1)(n+2)}}}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[3]{n(n+1)(n+2)}}=1,$$

то досліджуваний ряд також розбігається.

5.2.3. ОЗНАКА ДАЛАМБЕРА

Теорема 5.10. **Якщо для ряду з додатними членами**

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n=u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n+\ldots \tag{16}$$

починаючи з деякого номера $n\ge N$ виконується нерівність

$$\boxed{\frac{u_{n+1}}{u_n}\le q<1,} \tag{17}$$

то ряд (16) збігається. Якщо починаючи з деякого номера $n\ge N$ виконується нерівність

$$\boxed{\frac{u_{n+1}}{u_n}\ge 1,} \tag{18}$$

то ряд розбігається.

Доведення. З нерівності (17) випливає, що справджуються нерівності

$$u_{N+1}\le qu_N,\ u_{N+2}\le qu_{N+1}\le q^2u_N,\ u_{N+3}\le qu_{N+2}\le q^3u_N,\ldots,u_{N+p}\le q^pu_N,\ \ldots$$

Отже, члени ряду

$$u_N+u_{N+1}+u_{N+2}+\ldots+u_{N+p}+\ldots \tag{19}$$

мажоруються членами збіжного ряду

$$u_N + qu_N + q^2 u_N + \ldots + q^p u_n + \ldots,\ |q| < 1.$$

Звідси випливає збіжність ряду (19) і, отже, збіжність ряду (16).

Якщо виконується нерівність (18), то справджується нерівність

$$u_{N+1} \geq u_N,\ u_{N+2} \geq u_{N+1} \geq u_N,\ \ldots,\ u_{N+p} \geq u_{N+p-1} \geq u_N,\ \ldots$$

Оскільки загальний член ряду не прямує до нуля, то ряд (16) розбігається. Теорему доведено.

Приклад: Дослідимо збіжність ряду

$$\sum_{n=v}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!} + \ldots,\ u_n = \frac{1}{n!}.$$

- Дамо оцінку відношення членів ряду при $n \geq 1$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \frac{\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n(n+1)}}{\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n}} = \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{2}.$$

З теореми 5.10 випливає збіжність ряду, який розглядається.

Теорема 5.11. **(Ознака Даламбера у граничній формі.) Якщо для ряду (16) з додатними членами існує границя**

$$\boxed{\boldsymbol{q = \lim_{n \to \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n},}}$$

то при $q < 1$ ряд збігається, при $q > 1$ ряд розбігається, при $q = 1$ ряд може збігатися і розбігатися.

Доведення. Якщо $q < 1$, то при достатньо великих значеннях n буде виконуватись нерівність $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq q_1 < 1$ $(q < q_1)$ і, отже, з огляду на теорему 5.10 ряд (16) збігається.

При $q > 1$ достатньо великих значеннях і буде виконуватися нерівність $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$ і, отже, ряд (16) буде розбіжним.

При $q = 1$ ряд (6) може збігатися або розбігатися.

Розглянемо чисельний ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}=\frac{1^2}{2}+\frac{2^2}{2^2}+\frac{3^2}{2^3}+\frac{4^2}{2^4}+\ldots+\frac{n^2}{2^n}+\ldots$$

Знайдемо границю відношення членів ряду

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2\,2^n}{2^{n+1}\cdot n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{2n^2}=\frac{1}{2}<1.$$

З теореми 5.11 випливає збіжність ряду.

Дослідимо збіжність ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{na^n}=\frac{2}{1\cdot a}+\frac{2^2}{2a^2}+\frac{2^3}{3a^3}+\ldots+\frac{2^n}{na^n}+\ldots,\ u_n=\frac{2^n}{na^n},$$

де a — параметр ($a > 0$).

- Знаходимо границю

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}\cdot n\cdot a^n}{(n+1)a^{n+1}\cdot 2^n}=\frac{2}{a}.$$

Отже, при $a < 2$ ряд розбігається, а при $a < 2$ ряд збігається.

Дослідимо за ознакою Даламбера розбіжний гармонійний ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ і збіжний ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$.

- Для першого ряду знаходимо

$$q=\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}}=1.$$

Для другого ряду маємо

$$q=\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{(n+1)(u+2)}}{\frac{1}{n(n+1)}}=1.$$

Отже, при $q = 1$ ряди можуть розбігатися або збігатися.

5.2.4. РАДИКАЛЬНА ОЗНАКА ЗБІЖНОСТІ КОШІ

Теорема 5.12. **Якщо для ряду з додатними членами**

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots \qquad (20)$$

починаючи з деякого номера $n \geq N$ виконується нерівність

$$\boxed{\sqrt[n]{u_n} \leq q < 1,}$$

то ряд збігається. Якщо починаючи з деякого номера $n \geq N$ виконується нерівність $\boxed{\sqrt[n]{u_n} \geq 1}$, то ряд розбігається.

Доведення. Якщо при $n \geq N$ виконується нерівність $\sqrt[n]{u_n} \leq q$, то $u_n \leq q^n$ і ряд (20) збігається, бо мажорується членами збіжної геометричної прогресії. Якщо $\sqrt[n]{u_n} \geq 1$, то $u_n \geq 1$ і розбігається, бо загальний член ряду не прямує до нуля.

Дослідимо збіжність ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} (3 + (-1)^n)^{-n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{4^4} + \ldots + \frac{1}{(3 + (-1)^n)^n} + \ldots$$

- Оскільки виконується нерівність

$$\sqrt[n]{(3 + (-1)^n)^{-n}} \leq \frac{1}{3 + (-1)^n} \leq \frac{1}{2},$$

то ряд, що досліджується, збігається.

Теорема 5.13. **(Радикальна ознака Коші у граничній формі.) Якщо для ряду (20) з додатними членами існує границя**

$$\boxed{q = \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{u_n}.}$$

то при $q < 1$ ряд збігається, при $q > 1$ ряд розбігається, а при $q = 1$ ряди можуть збігатися або розбігатися.

Доведення. Дослідимо збіжність ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n=\frac{1}{3}+\left(\frac{2}{5}\right)^2+\left(\frac{3}{7}\right)^3+\ldots+\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n+\ldots$$

• Знаходимо границю

$$q=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n+1}=\frac{1}{2}.$$

При $q=\frac{1}{2}<1$ ряд збігається.

Дослідимо збіжність ряду з параметром a

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{a}{n}\right)^{n^2}=\left(1+\frac{a}{1}\right)+\left(1+\frac{a}{2}\right)^{2^2}+\left(1+\frac{4}{3}\right)^{3^2}+\ldots+\left(1+\frac{4}{n}\right)^{n^2}+\ldots$$

• Знаходимо границю

$$q=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(1+\frac{a}{n}\right)^{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{a}{n}\right)^n=e^a.$$

При $a>0$ ряд розбігається, при $a<0$ ряд збігається.

Дослідимо за допомогою радикальної ознаки збіжність розбіжного ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ і збіжного ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$.

• Знаходимо границі

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}e^{\ln\sqrt[n]{\frac{1}{n}}}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{-\ln n}{n}}=e^0=1 \text{ і}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n}}\sqrt[n]{\frac{1}{n}}=1.$$

Отже, при $q=1$ ряд може бути розбіжним або збіжним.

Зауваження. Значення границі q в ознаці Даламбера збігається зі значенням границі q в радикальній ознаці Коші. При $q=1$ доцільно застосувати наведену далі інтегральну ознаку Коші.

5.2.5. ІНТЕГРАЛЬНА ОЗНАКА ЗБІЖНОСТІ КОШІ

Інтегральна ознака збіжності заснована на порівнянні ряду з невласним інтегралом.

Нехай для ряду з додатними членами

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots$$

вдалося знайти неперервну, монотонно спадну при $x \geq 1$ функцію $y = f(x)$ таку, що $u_n = f(n)$ ($n = 1, 2, 3, \ldots$) (див. рис. 5.1).

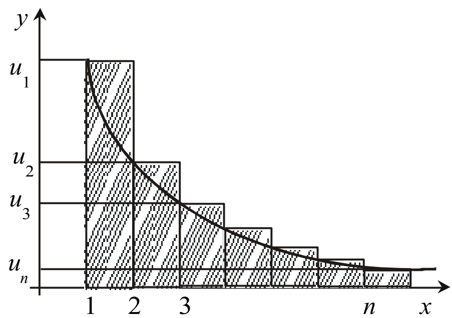

Рис. 5.1

Теорема 5.14. **Якщо функція $y = f(x)$ неперервна і монотонно спадає при $x \geq 1$, то невласний інтеграл**

$$\int_1^{\infty} f(x)dx \tag{21}$$

і ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) \tag{22}$$

збігаються або розбігаються одночасно.

Доведення. З огляду на монотонне спадання функції виконується нерівність

$$f(n+1) \leq \int_n^{n+1} f(x)\,dx \leq f(n) \quad (n = 1, 2, \ldots, k).$$

Підсумовуючи ці нерівності, дістаємо

$$\sum_{n=2}^{k+1} f(n) \leq \int_1^{k+1} f(x)dx \leq \sum_{n=1}^{k} f(n).$$

Якщо збігається невласний інтеграл, то з обмеженості частинних сум ряду $\sum\limits_{n=2}^{k+1} f(n)$ випливає збіжність ряду (21). Якщо збігається ряд, то з обмеженості інтеграла $\int\limits_{1}^{k+1} f(x)dx$ випливає збіжність невласного інтеграла (21). Теорему доведено.

Дослідимо збіжність гармонійного ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

● Оскільки $u_n = \frac{1}{n}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, то можемо скористатися функцією $f(x) = \frac{1}{x}$.

Це неперервна, монотонно спадна при $x \geq 1$ функція. Отже, збіжність гармонійного ряду рівносильна збіжності невласного інтеграла

$$\int\limits_{1}^{\infty} \frac{1}{x} dx = \lim_{b \to +\infty} \int\limits_{1}^{b} \frac{1}{x} dx = \lim_{b \to +\infty} \ln|x| \Big|_{x=1}^{x=b} = \lim_{b \to +\infty} \ln|b| = +\infty.$$

Оскільки невласний інтеграл розбіжний, то ряд також розбіжний.

Дослідимо збіжність

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \ldots + \frac{1}{n^s} + \ldots \quad (s > 0). \qquad (23)$$

● Використаємо функцію $y = \frac{1}{x^s}$, яка при $x \geq 1$ неперервна і монотонно спадає. Тому збіжність ряду рівносильна збіжності невласного інтеграла

$$I_s = \int\limits_{1}^{\infty} \frac{1}{x^s} dx = \begin{cases} \dfrac{1}{s-1} & \text{при } s > 1 \\ \infty & \text{при } s \leq 1. \end{cases}$$

Отже, ряд (23) збігається при $s > 1$ і розбігається при $s \leq 1$.

Наведемо окремі випадки ряду (23). Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{1} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \ldots$$

розбігається, бо $s = \frac{1}{2} < 1$. Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} + \ldots$$

збігається, бо $s = 2 > 1$.

5.2.6. ЕКОНОМІЧНИЙ ПРИКЛАД

Якщо $100i$ — відсоток нарахування на вкладену суму, то $\rho = \dfrac{1}{1+i}$ називається **множником дисконту**. Через k років вкладена сума $\rho^k b_k$ набуває значення b_k. Загальна сума вкладень за n років становить:

$$K_n = \sum_{k=1}^{n} \rho^k b_k.$$

Якщо прибуток від кожного вкладу буде сталим, тобто $b_k = b$, то маємо

$$K_n = b\sum_{k=1}^{n} \rho^k = b\frac{\rho - \rho^{n+1}}{1-\rho} = b\frac{1}{1+i}\frac{1-\dfrac{1}{(1+i)^n}}{1-\dfrac{1}{1+i}} = \frac{b}{i}\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n}.$$

Звідси випливає, що

$$\lim_{n\to\infty} K_n = \frac{b}{i}.$$

Якщо прибуток b_k змінюється за лінійним законом

$$b_k = a + bk_1,$$

то для загальної суми вкладень знаходимо вираз

$$K_n = \sum_{k=1}^{n} b_k \rho^k = a\sum_{k=1}^{n} \rho^k + b\sum_{k=1}^{n} k\rho^k.$$

Обчислимо значення сум

$$\sum_{k=1}^{n} \rho^k = \frac{\rho(1-\rho^n)}{1-\rho}, \quad \sum_{k=1}^{n} k\rho^k = \rho\sum_{k=1}^{n} k\rho^{k-1} = \rho\frac{d}{d\rho}\frac{\rho-\rho^{n+1}}{1-\rho} = \frac{\rho - (n+1)\rho^{n+1} + n\rho^{n+2}}{(1-\rho)^2}.$$

Звідси випливає, що

$$K_n = a\rho\frac{(1-\rho^n)}{1-\rho} + b\frac{\rho - (n+1)\rho^{n+1} + n\rho^{n+2}}{(1-\rho)^2} =$$

$$= a\frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n} + b\frac{n - (n+1)(1+i) + (1+i)^{n+1}}{i^2(1+i)^n}.$$

У границі при $n \to +\infty$ дістаємо пропорційний вираз

$$\lim_{n\to+\infty} K_n = \frac{a}{i} + \frac{b(1+i)}{i^2}.$$

Якщо прибуток зростає за законом

$$b_k = b(1+g)^k,$$

то маємо вираз

$$K_n = \sum_{k=1}^{n} b_k \rho^k = b\sum_{k=1}^{n} \rho^k (1+g)^k = b\rho(1+g)\frac{1-\rho^n (1+g)^n}{1-\rho(1+g)} =$$

$$= b\frac{1+g-(1+g)^{n+1}(1+i)^{-n}}{i-g}.$$

Аналогічно можна знайти значення K_n у разі інших законів отримання прибутку від кожного річного вкладу.

5.3. ЗБІЖНІСТЬ РЯДІВ ЗІ ЗНАКОЗМІННИМИ ЧЛЕНАМИ

5.3.1. ЗНАКОПОЧЕРГОВІ РЯДИ. ОЗНАКА ЗБІЖНОСТІ ЛЕЙБНІЦА

Означення. Ряд виду

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots + (-1)^{n+1} a_n + \ldots, \qquad (24)$$

де $a_n > 0$ ($n = 1, 2, 3, \ldots$), називається **знакопочерговим** рядом.

Лейбніц указав достатню умову збіжності ряду (24).

Теорема 5.15. **Нехай у знакопочерговому ряді (24) послідовність a_n(n = 1, 2, 3, …) монотонно спадає. Якщо**

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} a_n = 0,}$$

ряд (24) збігається і його сума не перевищує a_1.

Доведення. Розглянемо послідовність парних частинних сум ряду (24). Згідно з нерівностями

$$a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq a_4 \geq \ldots$$

Послідовність частинних сум

$$S_{2n} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \ldots + (a_{2n-1} - a_n)$$

монотонно зростає. Суми S_n можна подати у вигляді

$$S_{2n} = a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \ldots - (a_{2n-2} - a_{2n-1}) - a_{2n},$$

звідси випливає, що $S_{2n} \le a_1$ ($n = 1, 2, 3, \ldots$). Монотонно зростаюча, обмежена послідовність S_{2n} збігається, тобто існує границя

$$S = \lim_{n \to \infty} S_{2n}.$$

Розглянемо послідовність непарних частинних сум.

$$S_{2n+1} = S_{2n} + a_{2n+1}, \ \lim_{n \to \infty} S_{2n+1} = \lim_{n \to \infty} S_{2n} + \lim_{n \to \infty} a_{2n+1} = S.$$

Оскільки послідовності парних і непарних частинних сум прямують до однієї й тієї самої границі, то ряд (24) збігається. Теорему доведено.

Дослідимо збіжність знакопочергового ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \ldots + \frac{(-1)^{n+1}}{n} + \ldots$$

Усі умови теореми 5.15 виконані, і тому ряд збігається.

5.3.2. АБСОЛЮТНА Й УМОВНА ЗБІЖНІСТЬ

Розглянемо довільний числовий ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots \tag{25}$$

Означення. Ряд (25) називається **абсолютно збіжним**, якщо збігається ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n| = |u_1| + |u_2| + |u_3| + \ldots + |u_n| + \ldots \tag{26}$$

Збіжний ряд (25) називається **умовно збіжним**, якщо ряд (26) розбіжний.

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ є умовно збіжним, бо ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ розбіжний.

Очевидно, що із збіжності ряду (26) випливає збіжність ряду (25), бо члени ряду (25) можуть мати різні знаки.

Теорема 5.16. **Абсолютно збіжний ряд збігається.**

Доведення. Нехай збігається ряд (26). Для будь-якого ε > 0 знайдеться $N = N(\varepsilon)$ таке, що при $n \geq N$, $p > 0$ буде виконана нерівність

$$\left\| u_{n+1} \right| + \left| u_{n+2} \right| + \left| u_{n+3} \right| + \ldots + \left| u_{n+p} \right\| < \varepsilon.$$

При цьому буде також виконана нерівність

$$\left| u_{n+1} + u_{n+2} + u_{n+3} + \ldots + u_{n+p} \right| < \varepsilon,$$

тобто ряд (25) також збігатиметься.

Оскільки для рядів з додатними членами відомі достатні ознаки збіжності, то їх можна використовувати для дослідження збіжності рядів за знакопочерговими членами.

Теорема 5.17. **Якщо для знакопочергового ряду**

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots$$

існують границі

$$q = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right|, \quad q = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left| u_n \right|},$$

то при $q < 1$ ряд абсолютно збіжний, а при $q > 1$ — розбіжний.

Приклад. Дослідимо збіжність ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2^{n-1}} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \ldots + \frac{(-1)^{n+1}}{2^{n-1}} + \ldots$$

- Знаходимо границю

$$q = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\dfrac{1}{2^n}}{\dfrac{1}{2^{n-1}}} \right| = \frac{1}{2} < 1.$$

Отже, ряд, що розглядається, збігається абсолютно.

Раніше відмічалося, що в довільному ряді не можна переставляти члени ряду. Наведемо без доведення такі твердження.

Теорема 5.18. **Якщо ряд збігається абсолютно, то за будь-якої перестановки членів ряд буде збігатися і сума його не змінюватиметься.**

Теорема 5.19. **(Теорема Рімана.) Якщо ряд збігається умовно і *s* — будь-яке наперед задане число, то завжди можна переставити члени ряду так, щоб сума отриманого ряду дорівнювала *s*.**

Дамо пояснення до теореми Рімана. Умовна збіжність ряду виконується завдяки тому, що додатні і від'ємні члени взаємно знищуються. Якщо скласти ряд лише із додатних членів і ряд лише із від'ємних членів, то ці ряди розбігаються. Отже, можна почергово обирати лише додатні або від'ємні числа так, щоб значення частинних сум було як можна ближче до значення s. При цьому сума ряду дорівнюватиме s.

Розглянемо ряд Лейбніца

$$S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \ldots, \quad \frac{1}{2} < S < 1.$$

Переставимо члени ряду так, щоб після додатного члена стояли два від'ємні.

При цьому дістанемо ряд

$$S_1 = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \frac{1}{7} - \frac{1}{14} - \frac{1}{16} + \ldots =$$
$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \frac{1}{14} - \frac{1}{16} + \ldots =$$
$$= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \ldots\right) = \frac{1}{2}S.$$

За такого переставлення членів ряду сума ряду зменшилась удвічі.

5.4. ФУНКЦІОНАЛЬНІ РЯДИ

Означення. Якщо членами ряду є функції $f_n(x)$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, то ряд

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + \ldots + f_n(x) + \ldots} \qquad (1)$$

називається ***функціональним***.

При кожному фіксованому значенні x ряд (1) є числовим рядом. Для дослідження збіжності функціональних рядів можна застосовувати викладені раніше ознаки збіжності для числових рядів.

5.4.2. ВЛАСТИВОСТІ РІВНОМІРНО ЗБІЖНИХ РЯДІВ

Наведемо кілька результатів про функціональні ряди, які використовують поняття рівномірної збіжності.

Теорема 5.21. **Нехай функції $f_n(x)$ (n = 1, 2, 3, …) неперервні при $x \in [a, b]$. Якщо функціональний ряд**

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

збігається рівномірно, то сума ряду $S(x)$ неперервна.

Розглянемо функціональний ряд на [0, 1]

$$\sum_{n=0}^{\infty}(1-x)x^n = \begin{cases} 1 & \text{при } x \in [0,1) \\ 0 & \text{при } x = 1. \end{cases}$$

Хоч члени ряду неперервні, сума ряду є розривною функцією. Отже, ряд збігається нерівномірно.

Теорема 5.22. **Нехай функції $f_n(x)$ (n = 1, 2, 3, …) неперервні на відрізку $[a, b]$. Якщо функціональний ряд $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ збігається рівномірно, то його можна інтегрувати почленно, тобто**

$$\int_a^b S(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b f_n(x)dx.$$

Функціональний ряд

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \ldots + (-1)^{n-1}x^{n-1} + \ldots$$

збігається рівномірно при $|x| \le q < 1$. Зінтегрувавши рівність на $[0, x]$, знайдемо розклад логарифмічної функції.

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n} + \ldots$$

Аналогічно, інтегруючи рівномірно при $|x| \le q < 1$ збіжний ряд

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - \ldots + (-1)^n x^{2n} + \ldots,$$

дістаємо розклад функції

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n-1} + \ldots$$

Розглянемо при $x \geq 0$ функціональний ряд

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x(n^2 e^{-nx} - (n-1)^2 e^{-(n-1)x}),$$

який має частинні суми

$$S_n(x) = xn^2 e^{-nx}.$$

Легко довести, що при $x \geq 0$ ряд збігається і його сума

$$S(x) = \lim_{n \to +\infty} \frac{xn^2}{e^{nx}} = 0 \quad (0 \leq x).$$

Проінтегруємо частинну суму

$$\int_0^1 S_n(x)dx = \int_0^1 xn^2 e^{-nx} dx = \int_0^n te^{-t} dt.$$

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^1 S_n(x)dx = \int_0^{\infty} te^{-t} dt = 1.$$

Таким чином, інтеграл від частинної суми збігається до 1, а інтеграл від нульової суми ряду дорівнює нулю.

Функціональний ряд не можна почленно інтегрувати з огляду на нерівномірну збіжність ряду. Справді,

$$\max_{0 \leq x} S_n(x) = S_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{n}{e} \xrightarrow[n \to \infty]{} \infty,$$

тобто максимум залишку ряду не прямує до нуля.

Теорема 5.23. **Нехай функції $f_n(x)$ (n = 1, 2, 3, …) неперервні і диференційовні на відрізку [a, b].**

Якщо функціональний ряд

$$\boldsymbol{S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f_1 + f_2(x) + \ldots + f_n(x) + \ldots} \qquad (4)$$

збігається на відрізку [a; b], а продиференційований ряд

$$\boldsymbol{\sigma(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x) = f_1'(x) + f_2'(x) + \ldots + f_n'(x) + \ldots} \tag{5}$$

збігається рівномірно на [*a*, *b*], то ряд (4) можна почленно диференціювати, тобто *S*′(*x*) = σ(*x*).

Функціональний ряд

$$S(x) = \frac{\sin x}{1^3} + \frac{\sin 2x}{2^3} + \frac{\sin 3x}{3^3} + \frac{\sin 4x}{4^3} + \ldots + \frac{\sin x}{n^3} + \ldots$$

можна диференціювати, оскільки продиференційований ряд

$$S'(x) = \frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 2x}{2^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 4x}{4^2} + \ldots + \frac{\cos nx}{n^2} + \ldots$$

збігається рівномірно.

5.5. СТЕПЕНЕВІ РЯДИ

Найбільш важливими для прикладних задач є *степеневі ряди,* які мають вигляд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots + a_n x^n + \ldots \tag{6}$$

або більш загальний

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = a_0 + a_1 (x - x_0) + a_2 (x - x_0)^2 + \\ + a_3 (x - x_0)^3 + \ldots + a_n (x - x_0)^n + \ldots \tag{7}$$

Оскільки заміна $x - x_0$ на x зводить ряд виду (7) до ряду виду (6), то далі вивчаємо властивості степеневих рядів виду (6). Коефіцієнти a_n називаються **коефіцієнтами степеневого ряду**.

5.5.1. ТЕОРЕМА АБЕЛЯ

При дослідженні збіжності степеневих рядів використовується теорема Абеля.

Теорема 5.24. **Якщо степеневий ряд (6) збігається при $x = x_1$, $x_1 \neq 0$, то він абсолютно збігається при $|x| < |x_1|$. Якщо степеневий ряд розбігається при $x = x_2$, то він розбігається при $|x| > |x_2|$.**

Доведення. Якщо степеневий ряд (6) збігається при $x = x_1$, то загальний член ряду прямує до нуля, тобто

$$\lim_{n\to\infty} a_n x_1^n = 0.$$

Оскільки збіжна послідовність обмежена, то знайдеться $M > 0$ таке, що при всіх значеннях $n = 0, 1, 2, \ldots$ виконується нерівність

$$\left|a_n x_1^n\right| \leq M \quad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Оцінимо члени ряду (6) за абсолютною величиною

$$\left|a_n x^n\right| = \left|\frac{x}{x_1}\right|^n \cdot \left|a_n x_1^n\right| \leq M \cdot \left|\frac{x}{x_1}\right|^n \quad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Члени ряду (6) мажоруються членами геометричної прогресії зі знаменником $q = \left|\dfrac{x}{x_1}\right|$. Отже, при $q < 1$, тобто при $|x| < |x_1|$ ряд (1) збігається абсолютно.

Друге твердження теореми рівносильне першому.

Оскільки при будь-якому значенні x ряд (6) збігається або розбігається, то існує число R таке, що при $|x| < R$ степеневий ряд (6) збігається, а при $|x| > R$ — розбігається. Величина R називається ***радіусом збіжності*** степеневого ряду. У крайньому разі, коли $R = 0$, степеневий ряд розбігається при будь-якому x. При $|x| = R$ ряд може збігатися або розбігатися.

Для пошуку радіуса збіжності можна використовувати формули, що випливають з ознак збіжності Даламбера і Коші

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|, \quad R = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}. \tag{8}$$

Формули (8) придатні для випадку, коли границі існують.

Знайдемо область збіжності степеневого ряду

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + \frac{(-1)^{n+1}x^n}{n} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{n}.$$

Для коефіцієнтів степеневого ряду і радіуса збіжності R маємо вирази

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n}, \quad R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n+1}}\right| = 1, \quad R = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{n}}} = 1.$$

Отже, при $|x| < 1$ степеневий ряд збігається абсолютно. При $x = 1$ маємо числовий ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{(-1)^n}{n} + \ldots,$$

який збігається за ознакою Лейбніца. При $x = -1$ ряд є гармонійним

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots,$$

який розбігається. Областю збіжності ряду є інтервал $(-1, 1]$.

Знайдемо область збіжності степеневого ряду

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^{2n-1}}{2n-1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots + \frac{(-1)^{n+1}x^{2n-1}}{2n-1} + \ldots \qquad (9)$$

● Формули (3) безпосередньо не придатні для пошуку радіуса збіжності, бо границі не існує. Тому безпосередньо використовуємо ознаку Даламбера для дослідження абсолютної збіжності ряду. Розглянемо ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|x|^{2n-1}}{2n-1} = |x| + \frac{|x|^3}{3} + \frac{|x|^5}{5} + \ldots + \frac{|x|^{2n-1}}{2n-1} + \ldots$$

Знаходимо границі

$$q = \lim_{n\to\infty}\frac{|x|^{2n+1}(2n-1)}{(2n+1)|x|^{2n-1}} = |x|^2.$$

Ряд (9) збігається при $|x|^2 < 1$ і розбігається при $|x|^2 > 1$.

Отже, радіус збіжності $R = 1$. При $x = \pm 1$ ряд (9) збігається за ознакою Лейбніца. Областю збіжності є відрізок $[-1, 1]$.

Степеневий ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$$

збігається при будь-якому значенні x, бо

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{1}{n!}}{\dfrac{1}{(n+1)!}}=\lim_{n\to\infty}(n+1)=\infty.$$

Степеневий ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}n!x^4=1+1!x+2!x^2+3!x^3+\ldots+n!x^n+\ldots$ розбігається при будь-якому значенні $x\neq 0$, бо

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0.$$

Як видно із прикладу, в окремих випадках радіус збіжності може бути рівним 0 або ∞.

5.5.2. ДІЇ ЗІ СТЕПЕНЕВИМИ РЯДАМИ

В основі дій зі степеневими рядами лежать такі теореми.

Теорема 5.25. **Якщо R — радіус збіжності степеневого ряду**

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n+\ldots=S(x), \tag{10}$$

то ряд збігається рівномірно при $x\in[-\rho,\rho]$ при $0<\rho<R$.

Доведення. З теореми Абеля випливає збіжність ряду

$$\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|\rho^n=|a_0|+|a_1|\rho+|a_2|\rho^2+\ldots+|a_n|\rho^n+\ldots \tag{11}$$

При $x\in[-\rho,\rho]$ виконані нерівності

$$|a_nx^n|\le|a_n|\cdot\rho^n\quad(n=0,1,2,\ldots),$$

з яких випливає рівномірна збіжність ряду (10), бо збіжний ряд (11) зі сталими членами мажорує функціональний ряд (10).

Теорема 5.26. **При інтегруванні або диференціюванні степеневого ряду його радіус збіжності не змінюється.**

З теорем 5.25, 5.26 випливає важливий результат.

Теорема 5.27. **Якщо $R > 0$ — радіус збіжності степеневого ряду (10), то в області $|x| < R$ степеневий ряд можна інтегрувати і диференціювати скільки завгодно разів.**

Знайдемо суму ряду при $R = 1$

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots + nx^{n-1} + \ldots .$$

● Інтегруючи рівність, знаходимо

$$\int_0^x S(x)dx = \int_0^x 1dx + \int_0^x 2xdx + \int_0^x 3x^2 dx + \ldots + \int_0^x nx^{n-1}dx + \ldots =$$

$$= x + x^2 + x^3 + \ldots + x^4 + \ldots = \frac{x}{1-x}.$$

Диференціюючи здобуту рівність, маємо:

$$S(x) = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

Зауваження. При диференціюванні або інтегруванні степеневого ряду збіжність не змінюється, але може змінитися збіжність ряду на кінцях інтервалу збіжності при $x = \pm R$.

Розглянемо степеневий ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2} = x + \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^3}{3^2} + \ldots + \frac{x^n}{n^2} + \ldots \tag{12}$$

Знаходимо радіус збіжності за ознакою Даламбера

$$R = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{(n+1)^2}}\right| = 1.$$

Ряд (12) збіжний при $x = \pm 1$. При диференціюванні за x отримаємо степеневий ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n} = 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + \ldots + \frac{x^{n-1}}{n} + \ldots,$$

який збігається при $x = -1$ і розбігається при $x = 1$. У разі наступного диференціювання знаходимо ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n-1)x^{n-2}}{n}=\frac{1}{2}+\frac{2}{3}x+\ldots+\frac{n-1}{n}x^{n-2}+\ldots,$$

який є розбіжним при $x = \pm 1$.

Аналогічні результати справедливі для степеневого ряду

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-a)^n=a_0+a_1(x-a)+a_2(x-a)^2+\ldots+a_n(x-a)^n+\ldots=S(x).\quad(13)$$

Збіжність ряду можна вивчати у разі, коли коефіцієнти степеневого ряду a_n, змінна x і стала a є комплексними числами. При цьому виявляється, що степеневий ряд (13) збігається у крузі $|x-a|<R$ і розбіжний при $|x-a|>R$. При цьому R — відстань від точки a до найближчої особливої точки суми ряду $S(x)$.

Суми збіжних степеневих рядів називаються *аналітичними* функціями. Властивості аналітичних функцій вивчає теорія функцій комплексного змінного.

5.5.3. РОЗКЛАД ФУНКЦІЙ У СТЕПЕНЕВІ РЯДИ

Припустимо, що функцію $f(x)$ можна розкласти в збіжний при $|x| < R$ степеневий ряд

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\ldots+a_nx^n+\ldots\quad(14)$$

Виразимо коефіцієнт ряду a_n через функцію $f(x)$.

Послідовно диференціюючи рівність (14), отримаємо

$$f'(x)=a_1+2a_2x+3a_3x^2+\ldots+na_nx^{n-1}+\ldots,$$
$$f''(x)=2a_2+3\cdot 2a_3x+4\cdot 3a_4x^2+\ldots+n(n-1)a_nx^{n-2}+\ldots,$$
$$f'''(x)=3\cdot 2a_3+4\cdot 3\cdot 2a_4x+5\cdot 4\cdot 3a_5x^2+\ldots+n(n-1)(n-2)a_nx^{n-3}+\ldots .$$

Підставляючи $x = 0$, дістаємо систему рівнянь

$$f(0)=a_0,\quad f'(0)=a_1,\quad f''(0)=2a_2,\quad f'''(0)=3\cdot 2a_3,\ \ldots$$

звідси знаходимо коефіцієнт a_n

$$a_0=f(0),\ a_1=f'(0),\ a_2=\frac{f''(0)}{2!},\ a_3=\frac{f'''(0)}{3!},\ \ldots,\ a_n=\frac{f^{(n)}(0)}{n!},\ \ldots$$

і розклад (14) набирає вигляду

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots \tag{15}$$

Цей ряд називається **рядом Маклорена**.

Якщо розкласти функцію $f(x)$ у ряд за степенями $(x-a)$, то отримаємо аналогічний результат і функція $f(x)$ розкладається у степеневий ряд

$$\begin{gathered} f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \\ + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \ldots . \end{gathered} \tag{16}$$

Степеневий ряд (10) називається **рядом Тейлора**.

Ряд (16) можна отримати з формули Тейлора із залишковим членом в інтегральній формі

$$\begin{gathered} f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + f''(a)\frac{(x-a)^2}{2!} + f'''(a)\frac{(x-a)^3}{3!} + \ldots \\ \ldots f^{(n)}_{(a)}\frac{(x-a)^n}{n!} + \int_a^x f^{(n+1)}(x+a-t)\frac{(t-a)^n}{n!}dt. \end{gathered} \tag{17}$$

Використовуючи теорему про середнє, знаходимо залишковий член формули Тейлора у формі Лагранжа

$$R_n(x,a) = \int_a^x f^{(n+1)}(x+a-t)\frac{(t-a)^n}{n!}dt = f^{(n+1)}(c)\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}, \quad c \in (a;x). \tag{18}$$

Теорема 5.28. **Для того, щоб збігався ряд Тейлора (16) для скільки завгодно разів диференційовної функції *f*(*x*), необхідно і достатньо, щоб залишковий член формули Тейлора (18) прямував до нуля при $n \to +\infty$.**

Дослідимо збіжність степеневого ряду

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots$$

- За ознакою Даламбера знаходимо

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}n!}{(n+1)!x^n}\right|=\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{x}{n+1}\right|=0.$$

Отже, степеневий ряд збігається при всіх значеннях x, і тому загальний член ряду прямує до нуля, тобто

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{x^n}{n!}=0. \tag{19}$$

[redacted] Розкладемо в ряд Маклорена функцію $f(x) = e^x$.

- Знаходимо значення функції похідних у точці $x = 0$

$$\begin{aligned} f(x)&=e^x, & f(0)&=1,\\ f'(x)&=e^x, & f'(0)&=1,\\ f''(x)&=e^x, & f''(0)&=1,\\ f'''(x)&=e^x, & f'''(0)&=1,\\ &\ldots \end{aligned}$$

і за формулою (16) знаходимо розклад.

$$\boxed{e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots\,.} \tag{20}$$

Цей ряд збігається при всіх значеннях x. Доведемо, що степеневий ряд збігається до функції e^x. Для цього розглянемо залишковий член

$$R_n(x,\,0)=f^{(n+1)}(c)\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}=\frac{e^c x^{n+1}}{(n+1)!}\xrightarrow[n\to+\infty]{}0,\;\; c\in(0,\;x).$$

Оскільки залишковий член збігається до нуля при будь-якому x, то рівність (20) справедлива при будь-яких значеннях x. Зокрема при $x = 1$ знаходимо розклад для числа e

$$\boxed{e=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\ldots+\frac{1}{n!}+\ldots=2{,}718281828\ldots}$$

Розглянемо розклад функції $f(x) = \sin x$ у ряд Маклорена.

- Знаходимо значення функції і похідних

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin x, & f(0) &= 0,\\ f'(x) &= \cos x, & f'(0) &= 1,\\ f''(x) &= -\sin x, & f''(0) &= 0,\\ f'''(x) &= -\cos x, & f'''(0) &= -1,\\ f^{IV}(x) &= \sin x, & f^{IV}(0) &= 0. \end{aligned}$$

Із формули (21) знаходимо розклад функцій $f(x) = \sin x$ у ряд

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + \frac{(-1)^{n+1} x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots \qquad (21)$$

Залишковий член формули Тейлора

$$R_n(x,0) = \frac{\sin(c + (2n+1)\frac{\pi}{2})}{(2n+1)!} x^{2n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0,$$

тому розклад (21) буде справедливий при будь-якому значенні x.

Диференціюючи рівність (21), знаходимо розклад функції $f(x) = \cos x$ у ряд Маклорена

$$\boxed{\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + \frac{(-1)^{n+1} x^{2n-2}}{(2n-2)!} + \ldots} \qquad (22)$$

Зазначимо, що непарна функція $y = \sin x$ містить у своєму розкладі (21) лише непарні степені x, а парна функція $y = \cos x$ містить у своєму розкладі (22) лише парні степені x.

На основі формул (17)—(22) можна вивести відому формулу Ейлера

$$\boxed{e^{iy} = \cos y + i \sin y, \quad i^2 = -1.} \qquad (23)$$

Підставляючи в ряд (20) $x = iy$, дістанемо розклад

$$e^{iy} = 1 + \frac{iy}{1!} + \frac{(iy)^2}{2!} + \frac{(iy)^3}{3!} + \frac{(iy)^4}{4!} + \frac{(iy)^5}{5!} + \frac{(iy)^6}{6!} + \ldots =$$

$$= 1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \frac{y^6}{6!} + \ldots + i\left(y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} \ldots\right) = \cos y + i \sin y,$$

що доводить формулу Ейлера.

Знайдемо біноміальний розклад Ньютона — розклад функції $f(x) = (1 + x)^m$ у ряд Маклорена.

- Знаходимо при $x = 0$ значення функції і її похідних

$$
\begin{array}{ll}
f(x) = (1+x)^m, & f(0) = 1, \\
f'(x) = m(1+x)^{m-1}, & f'(0) = m, \\
f''(x) = m(m-1)(1+x)^{m-2}, & f''(0) = m(m-1), \ldots \\
f'''(x) = m(m-1)(m-2)(1+x)^{m-3}, \ldots & f'''(0) = m(m-1)(m-2), \ldots .
\end{array}
$$

Звідси знаходимо ряд Маклорена

$$
\boxed{\begin{aligned}
(1+x)^m &= 1 + \frac{mx}{1!} + \frac{m(m-1)x^2}{2!} + \frac{m(m-1)(m-2)x^3}{3!} + \ldots \\
&+ \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n + \ldots ,
\end{aligned}} \tag{24}
$$

який збігається при $|x| < 1$.

Справедливість розкладу (24) буде доведена далі. В окремих випадках маємо розклад:

$$
\sqrt{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{\frac{1}{2}}{11}x + \frac{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)}{2!}x^2 + \frac{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)}{3!}x^3 + \ldots,
$$

$$
\frac{1}{\sqrt{1+x}} = (1+x)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{-\frac{1}{2}}{1!}x + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)}{2!}x^2 + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)}{3!}x^3 + \ldots,
$$

$$
\sqrt[3]{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{3}} = 1 + \frac{\frac{1}{3}x}{1!} + \frac{\frac{1}{3}\left(-\frac{2}{3}\right)}{2!}x^2 + \frac{\left(\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{5}{3}\right)}{3!}x^3 + \ldots .
$$

Знайдемо розклад у ряд Маклорена функції $f(x) = \ln(1 + x)$.

- Із формули (24) знаходимо

$$
f'(x) = \frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1} = 1 + \frac{(-1)}{1!}x + \frac{(-1)(-2)}{2!}x^2 + \frac{(-1)(-2)(-3)}{3!}x^3 + \ldots =
$$

$$
= 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + (-1)^n x^n + \ldots .
$$

Інтегруючи рівність, знаходимо розклад у ряд

$$
\ln(1+x) = \int_0^x (1+x)^{-1}dx = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1} + \ldots, \tag{25}
$$

справедливий при $|x| < 1$.

5.5.4. ПОЛІПШЕННЯ ЗБІЖНОСТІ РЯДІВ

Л. Ейлер указав способи поліпшення збіжності рядів і сумування розбіжних рядів. Ми обмежимося розглядом простих прикладів.

Для обчислення логарифмів можна використовувати розклад

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots ,$$

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5} - \ldots - \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots .$$

Ці розклади збігаються при $|x| < 1$ і розбігаються при $|x| > 1$. З розкладів знаходимо

$$\ln\frac{1+x}{1-x} = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots\right).$$

Покладемо в цьому розкладі

$$\frac{1+x}{1-x} = 1+u, \quad x = \frac{4}{2+u}$$

і дістанемо розклад у ряд

$$\ln(1+u) = 2\left(\frac{u}{2+u} + \frac{1}{3}\left(\frac{u}{2+n}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{u}{2+u}\right)^5 + \ldots + \frac{1}{2n+1}\left(\frac{u}{2+u}\right)^{2n+1} + \ldots\right). \quad (26)$$

Функціональний ряд збігається при $\left|\frac{u}{2+u}\right| < 1,$ тобто при $u > -1$.

Обчислення значення ln 4. З формули (26) знаходимо

$$\ln 4 = 2\left(\frac{3}{5} + \frac{1}{3}\left(\frac{3}{5}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{3}{5}\right)^5 + \ldots + \frac{1}{2n+1}\left(\frac{3}{5}\right)^{2n+1} + \ldots\right) = 1{,}38629436$$

Аналогічно заміна аргументу дає змогу поліпшити збіжність біноміального розкладу

$$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1!}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \\ + \frac{m(m-1)(m-1)(m-3)}{4!}x^3 + \ldots . \quad (27)$$

Слідом за Ейлером візьмемо

$$x = -\frac{u}{1+u}, \quad 1+x = \frac{1}{1+u}, \quad u = \frac{-x}{1+x},$$

$$(1+x)^m = (1+u)^{-m} = 1 - \frac{m}{1!}u + \frac{m(m+1)}{2!}u^2 - \frac{m(m+1)(m+2)}{3!}u^3 + \dots \,.$$

Повертаючись до змінної x, дістанемо розклад

$$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1!}\left(\frac{x}{1+x}\right) + \frac{m(m+1)}{2!}\left(\frac{x}{1+x}\right)^2 + \\ + \frac{m(m+1)(m+2)}{3!}\left(\frac{x}{1+x}\right)^3 + \dots \,. \tag{28}$$

На відміну від розкладу (27), який збігається при $|x| < 1$, розклад (28) збігається при $x > -0{,}5$. З розкладу (28) при $m = \frac{\mu}{\nu}$, $x = \frac{u}{a^\nu}$ дістаємо розклад у ряд

$$(a^\nu + u)^{\frac{\mu}{\nu}} = a^\mu\left(1 + \frac{\mu^u}{\nu(a^\nu + u)} + \frac{\mu(\mu+\nu)u^2}{\nu\cdot 2\nu(a^\nu+u)^2} + \frac{\mu(\mu+\nu)(\mu+2\nu)u^3}{\nu\cdot 2\nu\cdot 3\nu(a^\nu+u)^3} + \dots\right).$$

Зокрема, маємо розклад

$$\sqrt{a^2+u} = a\left(1 + \frac{1\cdot u}{2(a^2+u)} + \frac{1\cdot 3u^2}{2\cdot 4(a^2+u)^2} + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot u^3}{2\cdot 4\cdot 6(a^2+u)^3} + \dots\right),$$

$$\sqrt[3]{a^3+u} = a\left(1 + \frac{1\cdot u}{3(a^3+u)} + \frac{1\cdot 4u^2}{3\cdot 6(a^3+u)^2} + \frac{1\cdot 4\cdot 7u^3}{3\cdot 6\cdot 9(a^3+u)^3} + \dots\right),$$

$$\sqrt[4]{a^4+u} = a\left(1 + \frac{1\cdot u}{4(a^4+u)} + \frac{1\cdot 5u^2}{4\cdot 8(a^4+u)^2} + \frac{1\cdot 5\cdot 9u^3}{4\cdot 8\cdot 12(a^4+u)^3} + \dots\right),$$

$$\sqrt[5]{a^5+u} = a\left(1 + \frac{1\cdot u}{5(a^5+u)} + \frac{1\cdot 6u^2}{5\cdot 10(a^5+u)^2} + \frac{1\cdot 6\cdot 11u^3}{5\cdot 10\cdot 15(a^5+u)^3} + \dots\right).$$

[Ейлер]. Обчислимо $\sqrt{2}$. При $a = 1$, $u = 1$ знаходимо

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2\cdot 2} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 2^2} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 2^3} + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 2^4} + \dots \,.$$

Ейлер рекомендує помножити 2 на квадрат числа так, щоб підкореневий був близький до квадрата іншого числа. Так, маємо:

$$5\sqrt{2}=\sqrt{50}=\sqrt{49+1}=7\left(1+\frac{1}{2\cdot 50}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 50^2}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 50^3}+\ldots\right),$$

звідси знаходимо значення радикала

$$\sqrt{2}=\frac{7}{5}\left(1+\frac{1}{100}+\frac{1}{100}\frac{3}{200}+\frac{1}{100}\cdot\frac{3}{200}\cdot\frac{5}{300}+\ldots\right)=1{,}4142135623730\ldots .$$

5.5.5. ЗАСТОСУВАННЯ СТЕПЕНЕВИХ РЯДІВ ДО НАБЛИЖЕНИХ ОБЧИСЛЕНЬ

Степеневі ряди можуть бути застосовані для обчислення інтегралів, знаходження границь, розв'язків рівнянь. Розглянемо приклади.

Обчислимо «неінтегровний» інтеграл

$$\int_0^x \frac{\sin x}{x}dx=\int_0^x \frac{1}{x}\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots\right)dx=\ldots$$

$$=\int_0^x\left(1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\frac{x^6}{7!}+\ldots\right)dx=x-\frac{x^3}{3\cdot 3!}+\frac{x^5}{5\cdot 5!}-\frac{x^7}{7\cdot 7!}+\ldots$$

Знайдемо значення визначеного інтеграла

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx=\int_0^1\left(1-\frac{x^2}{1!}+\frac{x^4}{2!}-\frac{x^6}{3!}+\ldots\right)dx=$$

$$=1-\frac{1}{1!\cdot 3}+\frac{1}{2!\cdot 5}-\frac{1}{3!\cdot 7}+\frac{1}{4!\cdot 9}-\ldots=0{,}7468241.$$

Розглянемо еліптичний інтеграл першого роду

$$K(k)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$$

за степенями k^2. Біноміальний розклад приводить до ряду

$$\frac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}=(1-k^2\sin^2\varphi)^{-\frac{1}{2}}=$$

$$=1+\frac{1}{2}k^2\sin^2\varphi+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}k^4\sin^4\varphi+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}k^6\sin^6\varphi+\ldots,$$

інтегруючи який, знаходимо

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1+\frac{1}{2}k^2\sin^2\varphi+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}k^4\sin^4\varphi+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}k^6\sin^6\varphi+\ldots\right)d\varphi =$$

$$=\frac{\pi}{2}\left(1+\left(-\frac{1}{2}\right)^2 k^2+\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 k^4+\left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2 k^6+\ldots\right).$$

Знайдемо значення границі

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x+a^{-x}-2}{x^2}.$$

● Використовуємо розклад у степеневий ряд

$$a^x = e^{x\ln a} = 1 + x\ln a + \frac{(x\ln a)^2}{2} + \frac{(x\ln a)^3}{6} + \ldots$$

$$a^{-x} = e^{-x\ln a} = 1 - x\ln a + \frac{(x\ln a)^2}{2} - \frac{(x\ln a)^3}{6} + \ldots$$

і при цьому знаходимо

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a^x+a^{-x}-2}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{(x\ln a)^2}{x^2} = (\ln a)^2.$$

Розглянемо лінійне диференціальне рівняння

$$y'(x)(1+x) = my(x), \quad y(0)=1.$$

● Воно має розв’язок $y(x) = (1 + x)^m$, що можна перевірити підстановкою $y(x)$ у диференціальне рівняння. Шукаємо розв’язок рівняння у вигляді ряду

$$y(x) = 1 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots + a_nx^n + \ldots .$$

Підставляючи $y(x)$ у диференціальне рівняння, дістаємо рівність

$$(a_1 + a_2 2x + a_3 3x^2 + a_4 4x^3 + \ldots)(1 + x) =$$
$$= m(1 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + \ldots),$$

яка приводить до системи рівнянь

$$a_1 = m,\ 2a_2 + a_1 = ma_1,\ 3a_3 + 2a_2 = ma_2,\ 4a_4 + 3a_3 = ma_3,\ \ldots .$$

Звідси послідовно маємо:

$$a_1 = m,\;\; a_2 = a\frac{m(m-1)}{2},\;\; a_3 = \frac{m(m-1)(m-2)}{2\cdot 3},$$

$$a_4 = \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2\cdot 3\cdot 4}\ldots\; .$$

Остаточно знаходимо розв’язок рівняння у виді ряду

$$y(x) = 1 + \frac{m}{1}x + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3 +$$
$$+ \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}x^4 + \ldots,$$

що доводить справедливість біноміального розкладу (24).

Степеневі ряди можна перемножати за звичайними правилами. Якщо відомі розклади

$$y_1(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5a^5 + \ldots,$$
$$y_2(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + b_4x^4 + b_5x^5 + \ldots,$$

то знаходимо добуток степеневих рядів за формулою

$$y_1(x)y_2(x) = a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)x + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0)x^2 +$$
$$+ (a_0b_3 + a_1b_2 + a_2b_1 + a_3b_0)x^3 + (a_0b_4 + a_1b_3 + a_2b_2 + a_3b_1 + a_4b_0)x^4 +$$
$$+ (a_0b_5 + a_1b_4 + a_2b_3 + a_3b_2 + a_4b_1 + a_5b_0)x^5 + \ldots\; .$$

[redacted]: Знайдемо розклад у степеневий ряд функції

$$\cos x\cdot e^x = \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + \ldots\right)\left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + \ldots\right) =$$
$$= 1 + x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{30} + \ldots\; .$$

Аналогічно виконується ділення степеневих рядів.

Нехай шукаємо розклад у степеневий ряд відношення

$$\frac{a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots + a_nx^n + \ldots}{b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + \ldots + b_nx^n + \ldots} =$$
$$= c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^n + \ldots + c_nx^n + \ldots\; .$$

Припустимо, що $b_0 \neq 0$, бо при $b_0 = 0$, $a_0 \neq 0$ не дістанемо степеневого ряду. Операцію ділення замінимо операцією множення степеневих рядів

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots + a_n x^n =$$
$$= (b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + \ldots + b_n x^n + \ldots)\times$$
$$\times (c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \ldots + c_n x^n + \ldots).$$

Із системи рівнянь

$$\begin{aligned}
&a_0 = b_0 c_0,\\
&a_1 = b_0 c_1 + b_1 c_0,\\
&a_2 = b_0 c_2 + b_1 c_1 + b_2 c_0,\\
&a_3 = b_0 c_3 + b_1 c_2 + b_2 c_1 + b_3 c_0, \ldots,\\
&a_n = b_0 c_n + b_1 c_{n-1} + b_2 c_{n-2} + \ldots + b_n c_0, \ldots
\end{aligned}$$

при $b_0 \neq 0$ знаходимо послідовно c_0, c_1, c_2, …, c_n.

Знайдемо розклад у степеневий ряд функції

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{x - \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^5}{120} + \ldots}{1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24} \ldots}.$$

Оскільки функція $y = \operatorname{tg} x$ — непарна, то розклад $\operatorname{tg} x$ у степеневий ряд містить лише непарні степені x

$$\frac{x - \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^5}{120} - \ldots}{1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24} - \ldots} = c_1 x + c_3 x^3 + c_5 x^5 + \ldots,$$

з рівності

$$x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \ldots = \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \ldots\right)(c_1 x + c_3 x^3 + c_5 x^5 + \ldots)$$

знаходимо систему рівнянь

$$1 = c_1,\ -\frac{1}{6} = c_3 - \frac{1}{2} c,\ \frac{1}{120} = c_5 - \frac{1}{2} c_3 + \frac{1}{24} c_1, \ldots,$$

з якої послідовно знаходимо

$$c_1 = 1,\ c_3 = \frac{1}{3},\ c_5 = \frac{2}{15}, \ldots;\quad \operatorname{tg} x = x + \frac{1}{3} x^3 + \frac{2}{15} x^5 + \ldots,$$

Уміючи перемножувати ряди, можна підставляти ряд у ряд.

Знайдемо розклад у степеневий ряд функції

$$(1+x)^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)} = e^{\frac{1}{x}\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}\ldots\right)} = e^{1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\frac{x^3}{4}+\frac{x^4}{5}} = e\cdot e^{y},$$

$$y \equiv -\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\frac{x^3}{4}+\frac{x^4}{5}-\ldots\ .$$

Підставляючи ряд у ряд,

$$e^{y} = 1+y+\frac{y^2}{2}+\frac{y^3}{6}+\frac{y^4}{4}+\ldots = 1+\left(-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\frac{x^3}{4}+\frac{x^4}{5}+\ldots\right)+$$

$$+\frac{1}{2}\left(-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\frac{x^3}{4}+\ldots\right)^2+\frac{1}{6}\left(-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\ldots\right)^3+\frac{1}{24}\left(-\frac{x}{2}+\ldots\right)^4=$$

$$=1-\frac{1}{2}x+\frac{7}{12}x^2-\frac{17}{24}x^3+\frac{629}{720}x^4+\ldots\ .$$

Остаточно знаходимо розклад у степеневий ряд

$$(1+x)^{\frac{1}{x}} = e\left(1-\frac{1}{2}x+\frac{7}{12}x^2-\frac{17}{24}x^3+\frac{629}{720}x^4+\ldots\right).$$

Степеневі ряди можна використовувати для розв’язування рівнянь і пошуку неявних функцій.

Знайдемо розв’язок рівняння

$$y+e^{y}-x-x^3-1=0;\quad y(0)=0$$

відносно неявної функції $y = y(x)$.

● Шукаємо розклад у вигляді ряду

$$y = a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+\ldots\ .$$

Підставляючи ряд у рівняння і прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях x нулю, приходимо до системи рівнянь

$$2a_1-1=0,\ \ 2a_2+\frac{1}{2}a_1^2=0,\ \ 2a_3+a_1a_2+\frac{1}{6}a_1^3-1=0,$$

$$2a_4+a_1a_3+\frac{1}{2}a_2^2+\frac{1}{2}a_1^2a_2+\frac{1}{24}a_1^4=0,\ldots,$$

з якої знаходимо послідовно коефіцієнти

$$a_1=\frac{1}{2},\ \ a_2=-\frac{1}{16},\ \ a_3=\frac{97}{192},\ \ a_4=\frac{-195}{768},\ldots$$

і розклад неявної функції у степеневий ряд

$$y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{16}x^2+\frac{97}{192}x^3-\frac{195}{768}x^4+\ldots\ .$$

5.6. РЯДИ ФУР'Є

Функціональні ряди необхідні для наближеного завдання довільних функцій сумою відомих елементарних функцій.

$$f(x) = a_1\varphi_1(x) + a_2\varphi_2(x) + \ldots + a_n\varphi_n(x) + \ldots$$

При застосуванні ПЕОМ, щоб запам'ятати функцію $f(x)$, слід запам'ятати числовий вектор (a_1, a_2, …, a_n), якщо функції $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, …, φ_n, … є в програмах ЕОМ.

Степеневі ряди дають змогу подавати функції, які неперервні і безліч разів диференційовні. Щоб наближено з будь-яким степенем точності представляти розривні функції або функції з розривами похідних, слід використати інші функціональні ряди. Частіше використовуються ряди з ортогональними функціями.

5.6.1. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ

Означення. Система функцій

$$\varphi_0(x),\ \varphi_1(x),\ \varphi_2(x),\ \ldots,\ \varphi_n(x),\ \ldots, \qquad (1)$$

що задані на відрізку $[a, b]$, називається **ортогональною з вагою** $h(x)$ $\left(h(x) \geq 0,\ 0 < \int\limits_a^b h(x)dx < \infty\right)$, якщо для будь-яких двох функцій виконана **умова ортогональності**

$$\boxed{\int\limits_a^b h(x)\varphi_n(x)\varphi_m(x)dx = 0 \quad (k \neq m;\ k, m = 0, 1, 2, \ldots, n).} \qquad (2)$$

Система функцій (1) називається **ортонормованою**, якщо виконується умова

$$\boxed{\|\varphi_k\| \equiv \left(\int\limits_a^b h(x)\varphi_k^2(x)dx\right)^{\frac{1}{2}} = 1 \ \ (k = 0, 1, \ldots, n, \ldots).} \qquad (3)$$

Для ортонормованої системи функцій $\varphi_k(x)$ числа

$$a_k = \int\limits_a^b h(x)f(x)\varphi_k(x)dx \ \ (k = 0, 1, 2, \ldots, n, \ldots)$$

називаються *коефіцієнтом Фур'є* для функції $f(x)$.

Наближене подання функції $f(x)$

$$f(x) \approx f_n(x) \equiv a_0\varphi_0(x) + a_1\varphi_1(x) + \ldots + a_n\varphi_n(x)$$

є в деякому випадку найкращим. Справді, розглянемо довільну функцію

$$P_n(x) \equiv c_0\varphi_0(x) + a_1\varphi_1(x) + \ldots + a_n\varphi_n(x)$$

і виберемо коефіцієнти c_0, c_1, …, c_n так, щоб різниця $\|f - P_n\|$ була найменшою. З формули (3) знаходимо рівність

$$\|f - P_n\|^2 = \int_a^b h(x)\left(f(x) - \sum_{k=0}^{n} c_k\varphi_k(x)\right)^2 dx =$$

$$= \|f\|^2 - 2\sum_{k=0}^{n} c_k a_k + \sum_{k=0}^{n} c_k^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=0}^{n} a_k^2 + \sum_{k=0}^{n}(c_k - a_k)^2.$$

Звідси випливає, що значення $\|f - P_n\|^2$ буде найменшим, якщо $c_k = a_k$ ($k = 0, 1, 2, \ldots, n$). При цьому справедлива рівність

$$\|f - f_n\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=0}^{n} a_k^2. \tag{4}$$

Оскільки ліва частина рівності (4) невід’ємна, то буде справедлива *нерівність Бесселя*

$$\sum_{k=0}^{n} a_k^2 \le \|f\|^2. \tag{5}$$

Для нескінченної ортонормованої системи функцій $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, …, $\varphi_n(x)$, … ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k\varphi_k(x) = a_0\varphi_0(x) + a_1\varphi_1(x) + a_2\varphi_2(x) + \ldots + a_n\varphi_n(x) + \ldots$$

називається *рядом Фур’є*. З нерівності Бесселя

$$\boxed{\sum_{k=0}^{\infty} a_k^2 \le \|f\|^2}$$

випливає збіжність ряду $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k^2$ і відношення для коефіцієнта Фур’є

$$\lim_{k \to +\infty} a_k = 0.$$

За функції $\varphi_k(x)$ ($k = 0, 1, 2, \ldots, n$) часто використовуються многочлени. При $h(x) \equiv 1$ на відрізку $[-1; 1]$ можна використовувати ортогональні многочлени Лагранжа

$$\varphi_n(x) = \frac{1}{n!2^n}\left((x^2-1)^n\right)^{(n)} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Для перших многочленів маємо вирази

$$\varphi_0(x) = 1,$$
$$\varphi_1(x) = x,$$
$$\varphi_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2-1),$$
$$\varphi_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3-3x),$$
$$\varphi_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4-30x^2+3),$$
$$\varphi_5(x) = \frac{1}{8}(63x^5-70x^3+15x), \ldots .$$

Розкладемо за поліномами Лежандра функцію $y = |x|$; $x \in [-1, 1]$. Оскільки функція $y = |x|$ парна, то розклад міститиме лише парні поліноми Лежандра. Дістанемо

$$|x| \approx a + b(3x^2-1) + (35x^4-30x^2+3)$$

знаходимо з рівнянь

$$\int_0^1 x dx = a\int_0^1 1 dx, \quad \int_0^1 x(3x^2-1)dx = b\int_0^1 (3x^2-1)^2 dx;$$

$$\int_0^1 x(35x^4-30x^2+3)dx = c\int_0^1 (35x^4-30x^2+3)^2 dx$$

коефіцієнти $a = \dfrac{1}{2}$, $b = \dfrac{5}{16}$, $c = -\dfrac{3}{128}$. Маємо наближену рівність

$$|x| \approx y = \frac{1}{2} + \frac{5}{16}(3x^2-1) - \frac{3}{128}(35x^4-30x^2+3) =$$
$$= \frac{15}{128} + \frac{105}{64}x^2 - \frac{105}{128}x^4.$$

Наведемо значення многочлена при різних значеннях аргументу.

Таблиця 5.1

x	y	x	y
0	0,1172	± 0,6	0,6015
± 0,2	0,1815	± 0,8	0,8312
± 0,4	0,3587	± 1,0	0,9375

Графік функції $y(x)$ представлено на рис. 5.2

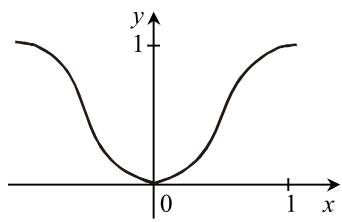

Рис. 5.2

При $h(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ на відрізку [– 1; 1] ортогональну систему функцій утворює система **многочленів Чебишова першого роду**

$$T_n(x)=\cos(n\arccos x),$$

яка задовольняє рівняння

$$T_{n+1}(x)=2xT_n(x)-T_{n-1}(x).$$

Для перших многочленів маємо явний вираз

$$T_0(x)=1,$$
$$T_1(x)=x,$$
$$T_2(x)=2x^2-1,$$
$$T_3(x)=4x^3-3x,$$
$$T_4(x)=8x^4-8x^2+1,$$
$$T_5(x)=16x^5-20x^3+5x, \ldots\ .$$

Ці многочлени часто використовуються в наближених обчисленнях.

5.6.2. ТРИГОНОМЕТРИЧНА СИСТЕМА ФУНКЦІЙ

Розглядається
основна система тригонометричних функції

$$1,\ \cos x,\ \sin x,\ \cos 2x,\ \sin 2x,\ \ldots,\ \cos nx,\ \sin nx, \ldots \qquad (6)$$

Покажемо, що ця система функцій є ортогональною на відрізку $[-\pi, \pi]$. Справді, маємо рівність

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx dx = 0 \quad (n = 1, 2, 3, \ldots);$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cdot \cos mx dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx dx = 0 \quad (m \neq n,\ m, n = 1, 2, 3, \ldots);$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \sin mx dx = 0 \quad (n, m = 1, 2, 3, \ldots).$$

які доводять ортогональні системи функції (6).

Використовуючи рівність

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1^2 dx = 2\pi,\ \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx dx = \pi \quad (n = 1, 2, 3, \ldots),$$

можна віднормувати систему функції (6) і привести її до виду

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\ \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}},\ \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}},\ \frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}},\ \frac{\sin 2x}{\sqrt{\pi}},\ \ldots,\ \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}},\ \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}},\ \ldots .$$

Означення. **Рядом Фур’є** для функції $f(x)$, заданою на відрізку $[-\pi, \pi]$, називається ряд

$$\boxed{\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx),} \qquad (7)$$

де коефіцієнти a_n, b_n визначаються за формулами

$$\boxed{a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx,} \quad \boxed{b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx \ (n = 0, 1, 2, \ldots).} \qquad (8)$$

Числа a_n, b_n називаються *коефіцієнтами Фур’є.*

5.6.3. УМОВИ ЗБІЖНОСТІ РЯДУ ФУР'Є

Зазначимо без доведення ряд умов, у разі виконання яких збігається ряд Фур'є (7).

Теорема 5.29. **Якщо ряди $\sum\limits_{n=0}^{\infty}|a_n|$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|b_n|$ збігаються, то ряд Фур'є (7) збігається рівномірно і його сума $f(x)$ є неперервною функцією.**

Теорема 5.30. **Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[-\pi, \pi]$, має неперервну похідну $f'(x)$ на $[-\pi, \pi]$ і $f(-\pi) = f(\pi)$, то ряд Фур'є для $f(x)$ збігається в усіх точках до $f(x)$, тобто при $x \in [-\pi, \pi]$ буде справедлива рівність**

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx). \tag{9}$$

Теорема 5.31. **Якщо функція $f(x)$ і її похідні є кусково-неперервними на $[-\pi; \pi]$, то ряд Фур'є збігається до $f(x)$ в усіх точках неперервності і в точці розриву $x = x_0$ збігається до значення**

$$\frac{1}{2}(f(x_0+0) + f(x_0-0)).$$

Нагадаємо, що функція називається **кусково-неперервною**, якщо вона всюди неперервна за винятком, можливо, скінченної кількості точок розриву першого роду.

Теорема 5.32. **Нехай функція $f(x)$ і є похідна $f'(x)$ — кусково-неперервна на відрізку $[-\pi, \pi]$.**

Тоді ряд Фур'є збіжний у кожній точці. У точках неперервності $f(x)$ ряд Фур'є збігається до значення

$$\frac{1}{2}\left[f(x_0-0) + f(x_0+0)\right].$$

Якщо $f(-\pi) = f(x)$, то в точці $x = \pi$ ряд Фур'є збіжний зі значенням $\frac{1}{2}\left[f(-\pi+0) + f(\pi-0)\right]$.

Отже, у ряд Фур'є можна розкладати функції достатньо загального виду. Оскільки всі функції основної системи тригонометричних функцій є періодичними зі спільним періодом 2π, то сума ряду Фур'є буде періодичною з періодом 2π.

5.6.4. ОБЧИСЛЕННЯ ІЗ ЗАСТОСУВАННЯМ РЯДІВ ФУР'Є

Коефіцієнти ряду Фур'є можна знайти за формулою (8). Зауважимо, що для парної функції $f(x)$ усі коефіцієнти $b_n = 0$ ($n = 1, 2, 3, \ldots$). Отже, парні функції розкладаються тільки за $\cos nx$. Аналогічно, непарні функції розкладаються лише за $\sin nx$ ($n = 1, 2, 3, \ldots$).

Розкладемо в ряд Фур'є функцію

$$f(x) = \frac{\pi}{4}, \ 0 \le x \le \pi, \ \ f(x) = -\frac{\pi}{4}, \ -\pi \le x < 0.$$

- Функція непарна, тому знаходимо лише коефіцієнти b_n

$$b_n = 1, \ b_2 = 0, \ b_3 = \frac{1}{3}, \ b_4 = 0, \ b_5 = \frac{1}{5}, \ldots .$$

Остаточно маємо ряд Фур'є

$$f(x) = \sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{5}\sin 5x + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2k-1)}{2k-1}.$$

На рис. 5.3 подано $f(x)$ і частинні суми ряду

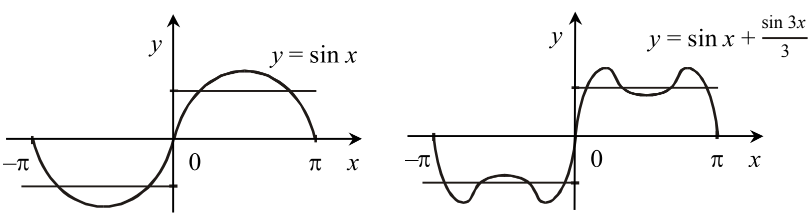

Рис. 5.3

При $x = \frac{\pi}{2}$ маємо рівності

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7}.$$

Розкласти в ряд Фур'є парну функцію $f(x) = |x|$, $x \in [-\pi, \pi]$. Знаходимо коефіцієнти a_n ($n = 1, 2, 3, \ldots$):

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x dx = \pi, \ a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x \cos nx d = -\frac{2}{\pi n^2}(1 + (-1)^{n+1}).$$

● Знаходимо розклад в ряд Фур’є

$$|x|=\frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi}\cos x-\frac{4}{\pi\cdot 3^2}\cos 3x-\frac{4}{\pi 5^2}\cos 5x-\frac{4}{\pi 7^2}\cos 7x-\ldots\ .$$

При $x = 0$ дістанемо рівність

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\ldots=\frac{\pi^2}{8}.$$

Виходячи з цієї рівності можна обчислити значення ряду

$$\overset{=}{S}=\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{6^2}+\ldots=1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\ldots$$

$$+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{6^2}+\frac{1}{8^2}+\ldots=\frac{\pi^2}{8}+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots\right)=\frac{\pi^2}{8}+\frac{1}{4}\overset{=}{S}.$$

Звідси дістаємо значення суми ряду, яку знайшов Ейлер:

$$\overset{=}{S}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}. \tag{10}$$

Якщо функція $f(x)$ задана на відрізку $[0, \pi]$, то її можна довільним чином задати на інтервалі $[-\pi, 0)$ і потім розкласти в ряд Фур’є, який використовуємо лише при $x \in [0, \pi]$. Якщо функцію $f(x)$ продовжимо парним способом, то функція $f(x)$ буде розкладатися за $\cos nx$, якщо продовжити непарним способом, то функція $f(x)$ буде розкладатися за $\sin nx$.

Розкладемо функцію $f(x) = \sin x$ на відрізку $[0, \pi]$ в ряд Фур’є за косинусами.

● Матимемо

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x dx=\frac{4}{\pi},\quad a_1=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\cos x dx=0,$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\cos x dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(\sin(n+1)x-\sin(n-1)x)dx=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(\frac{1+(-1)^n}{n+1}-\frac{1+(-1)^n}{n-1}\right)=\frac{1+(-1)^n}{\pi}\cdot\frac{-2}{n^2-1}\quad(n=2,3,\ldots).$$

Остаточно знаходимо розклад у ряд Фур’є при $x \in [0, \pi]$

$$\sin x=\frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi(2^2-1)}\cos 2x-\frac{4}{\pi(4^2-1)}\cos 4x-$$

$$-\frac{4}{\pi(6^2-1)}\cos 6x-\frac{4}{\pi(8^2-1)}\cos 8x-\ldots.$$

5.6.5. КОМПЛЕКСНА ФОРМА РЯДУ ФУР'Є

Згідно з формулами Ейлера

$$\cos nx = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \ \sin nx = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

ряд Фур'є (9) можна записати у вигляді

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}, \qquad (11)$$

де позначено

$$c_0 = \frac{a_0}{2}, \ c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}, \ c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2} \ \ (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Для дійсної функції $f(x)$ коефіцієнти c_n, c_{-n} — комплексно спряжені.

Коефіцієнти c_n можна знаходити за формулами

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots). \qquad (12)$$

Зауважимо, що система тригонометричних функцій e^{inx} (n = 0, ± 1, ± 2, …) є ортогональною на відрізку [–π, π]

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{inx} \cdot e^{imx} dx = 0 \ \ (n \neq m; \ n, m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Розкладемо в ряд Фур'є функцію $f(x) = x$, $x \in [-\pi, \pi]$.

- Знаходимо коефіцієнти Фур'є c_n (n = 0, ± 1, ± 2, …):

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x e^{-inx} dx = \frac{1}{2\pi} \left(x \frac{e^{-inx}}{(-in)^2} \right) \Bigg|_{x=-\pi}^{x=\pi} = \frac{i(-1)^n}{n} \ (n \neq 0),$$

$$c_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \cdot dx = 0.$$

Отримаємо розклад функції в комплексний ряд Фур'є

$$x = \sum_{n=-\infty, n\neq 0}^{\infty} \frac{i(-1)^n}{n} e^{inx} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n} \sin nx.$$

ВПРАВИ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ

1—40. Дослідити збіжність нескінченних рядів, загальні члени яких u_n подаються наведеними далі виразами:

1. $(-1)^n \sin\frac{\pi x}{\sqrt{n}}$. **2.** $(-1)^n \sin\frac{\pi x}{\sqrt{n^3}}$. **3.** $(-1)^n \frac{x^n}{\sqrt{n(n+1)}}$.

4. $n^k \cdot \mathrm{tg}^p\left(\frac{\pi x}{n^l}\right)$. **5.** $n^k \cdot \log^p\left(1+\frac{x}{n^l}\right)$. **6.** $n^k \cdot \left[\left(1+\frac{a}{n^l}\right)^m - 1\right]^p$.

7. $\left[\left(\frac{n^l+a}{n^l+b}\right)-1\right]^p$. **8.** $n^k \cdot \left(\frac{n^l+a}{n^m+b}\right)^p$. **9.** $n^k \cdot \left(a^n-1\right)^p$.

10. $\sqrt[p]{n^p+1}-n.$ **11.** $\left[\sqrt[3]{n^3+1}-\sqrt[4]{n^4+1}\right]\sqrt{n}.$

12. $\sqrt{n^2+an+b}-\sqrt{n^2+a_1n+b_1}.$

13. $\sqrt{n^2+an+b}-\sqrt[3]{n^3+a_1n+b_1}.$

14. $e^{\frac{1}{n}}-a-\frac{b}{n}.$

15. $\ln\frac{n+1}{n-1}-\frac{a}{n}.$

16. $a\sin\frac{\pi}{n}-b\ln\frac{n+1}{n}.$

17. $n\left[\mathrm{tg}\frac{\pi}{n}-\frac{\pi}{n}\right].$

18. $\left(\mathrm{tg}\frac{\pi x}{n^k}-\sin\frac{\pi x}{n^k}\right)^p.$

19. $\ln\cos\left(\frac{\pi}{n^p}\right).$

20. $a^{\frac{1}{n}}-a^{\sin\frac{1}{n}}.$

21. $\sin\frac{\pi}{n}-\sin\frac{\pi}{n+1}.$

22. $\left(ch\frac{1}{n}-1\right)^p.$

23. $\left(sh\frac{1}{n}-\frac{1}{n}\right)^p.$

24. $\left[\mathrm{arctg}\frac{\pi}{n}-\mathrm{arctg}\frac{\pi}{n+1}\right]\sqrt{n}.$

25. $\left[\arcsin\frac{\pi}{n}-\mathrm{arctg}\frac{\pi}{n}\right]\cdot n.$

26. $\ln\left(\frac{ne^{\frac{1}{n}}}{1+\sqrt{n^2+1}}\right).$

27. $\frac{1\cdot3\cdot5\cdots2n+1\;\;2n+1}{2\cdot4\cdot6\cdots2n+2\;\;2n+3}.$

28. $\frac{1\cdot3\cdot5\cdots2n-1}{2\cdot4\cdot6\cdots2n}\cdot\frac{1}{n^p}.$

29. $\dfrac{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}{(1+a)(2+a)\cdots(n+a)}\cdot n^p$.

30. $\left[\dfrac{a(a+1)\cdots(a+n-1)}{b(b+1)\cdots(b+n-1)}\right]^p,\quad b>a.$.

31. $\dfrac{(a+1)(2a+1)\cdots(na+1)}{(b+1)(2b+1)\cdots(nb+1)}\cdot\left(\dfrac{b}{a}\right)^n (a>0,\ b>0).$

32. $\dfrac{(1\cdot 2\cdot 3\cdots n)^2}{1\cdot 2\cdot 3\cdots 2n}\cdot 2^{2n}\cdot\dfrac{1}{n^p}.$ **33.** $\left[\dfrac{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}{3\cdot 5\cdot 7\cdots(2n+1)}\right]^p.$

34. $\left[\dfrac{a(a+1)\cdots(a+n-1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}\right]^p,\quad 0<a<1.$

35. $\dfrac{a(a+1)\cdots(a+n-1)}{1\cdot 2\cdots n}\cdot\dfrac{1}{n^p},\ a>0.$

36. $\left[\dfrac{1\cdot 2\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}\right]^p\cdot\dfrac{1}{n^q}.$ **37.** $\left[\dfrac{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}\right]^p\cdot\dfrac{1}{n^q}.$

38. $\dfrac{\left(a^2+\dfrac{1}{4}\right)\left(a^2+\dfrac{9}{4}\right)\cdots\left(a^2\dfrac{(2n-1)^2}{4}\right)}{(1\cdot 2\cdot 3\cdots n)^2}.$

39. $\dfrac{(2a+1)(2a+3)(2a+5)\cdots(2a+4n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n\cdot(2a+2)(2a+4)\cdots(2a+2n)\cdot 2^{2n}}\quad (a\ge 0).$

40. $\dfrac{(2n-2-a)(2n-4-a)\cdots(2-a)a(a+1)(a+3)\cdots(a+2n-1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots 2n}$

(випадки a додатного парного і від’ємного — виключаються).

41—55. Подані далі функції розкласти в ряд за цілими додатними степенями x і вказати застосований закон утворення коефіцієнтів і границь збіжності ряду:

41. $\dfrac{5-x}{12-x-x^2}.$ **42.** $\dfrac{2-x+x^2}{(1-x)^3}.$ **43.** $\dfrac{x}{\sin x}.$ **44.** $x\,\mathrm{ctg}\,x.$

45. $\dfrac{x^2}{chx-1}.$ **46.** $\dfrac{x}{\log(1+x)}.$ **47.** $\dfrac{x}{e^x-1}.$

48. $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{arctg}\dfrac{x\sqrt{2}}{1-x^2}.$ **49.** $\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\log\dfrac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1}.$

50. $\dfrac{1}{3}\log\dfrac{1+2x+x^2}{1-x+x^2}.$ **51.** $\dfrac{1}{3}\mathrm{arctg}\dfrac{x}{1-x^2}+\dfrac{2}{3}\mathrm{arctg}\,x.$

52. $\frac{1}{2\sqrt{3}}\log\frac{1+x\sqrt{3}+x^2}{1-x\sqrt{3}+x^2}$.

53. $\frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{5}}{x^2}$.

54. $\operatorname{arctg}(x+1)$.

55. $\log(1-x+x^2)$.

56—73. Визначити суми поданих далі рядів і вказати області збіжності рядів:

56. $\frac{1}{3}+\frac{x}{1\cdot 4}+\frac{x^2}{1\cdot 2\cdot 5}+\cdots+\frac{x^n}{n!\cdot(n+3)}+\cdots$

57. $x-\frac{x^3}{1\cdot 3}+\frac{x^5}{3\cdot 5}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n-1)(2n+1)}+\cdots$

58. $\frac{x^3}{1\cdot 3}-\frac{x^4}{2\cdot 4}+\frac{x^5}{3\cdot 5}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{(n-2)n}+\cdots$

59. $\frac{1}{3!}+\frac{2x^2}{5!}+\frac{3x^4}{7!}+\cdots+\frac{nx^{2n-2}}{(2n+1)!}+\cdots$

60. $\frac{1}{2}x^2+\frac{2}{3}x^3+\frac{3}{4}x^4+\cdots+\frac{n}{n+1}x^{n+1}+\cdots$

61. $\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^4+\frac{3}{5}x^5+\cdots+\frac{n}{n+2}x^{n+2}+\cdots$

62. $x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}+\cdots+(-1)^n\left(\frac{x^{3n+1}}{3n+1}-\frac{x^{3n+2}}{3n+2}\right)+\ldots$

63. $$\frac{x^3}{3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{x^5}{3\cdot 5}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{x^7}{5\cdot 7}+\cdots+$$
$$+\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot(2n-3)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot(2n-2)}\cdot\frac{x^{2n+1}}{(2n-1)(2n+1)}+\cdots$$

64. $\frac{1\cdot 2}{3!}x^3-\frac{3\cdot 4}{5!}x^5+\frac{5\cdot 6}{7!}x^7-\cdots+(-1)^{n+1}\frac{(2n-1)2n}{(2n+1)!}x^{2n+1}+\ldots$

65. $x+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{7}x^7+\cdots+(-1)^n\left[\frac{x^{4n+1}}{4n+1}+\frac{x^{4n+3}}{4n+3}\right]+\ldots$

66. $x-\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{5}x^5+\frac{1}{7}x^7+\cdots+(-1)^n\left[\frac{x^{4n+1}}{4n+1}-\frac{x^{4n+3}}{4n+3}\right]+\cdots$

67. $\frac{x^4}{1\cdot 4}+\frac{x^6}{3\cdot 6}+\frac{x^8}{5\cdot 8}+\cdots+\frac{x^{2n}}{(2n-3)2n}+\cdots$

68. $x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{4}x^4+\cdots+\left(\frac{x^{4n+1}}{4n+1}-\frac{x^{4n+2}}{4n+2}+\frac{x^{4n+4}}{4n+4}\right)+\cdots$

69. $\frac{x^3}{3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{x^4}{4}+\frac{1\cdot 2}{2\cdot 4}\cdot\frac{x^5}{5}+\cdots+\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-7)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n-6)}\cdot\frac{x^n}{n}+\cdots$

70. $a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots$ за умови:

$$\alpha a_{n+2}+\beta a_{n+1}+\gamma a_n=0 \text{ для } n\geq 0.$$

71. $1+x+2x^2+3x^3+5x^4+8x^5+\ldots+a_nx^n+\cdots$ при

$$a_{n+2}=a_{n+1}+a_n \quad (n\geq 0).$$

72. $a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots$ за умови:

$$(n+2)\alpha a_{n+2}+(n+1)\beta a_{n+1}+n\gamma a_n=0 \text{ для значень } n\geq 1.$$

73. $1+2x-x^2+\frac{1}{2}x^4-\frac{2}{5}x^5+\cdots+a_nx^n+\cdots$ при

$$(n+2)a_{n+2}+(n+1)a_{n+1}+na_n=0 \text{ для значень при } n\geq 0.$$

74—90. Знайти суми таких числових рядів:

74. $1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots+(-1)^n\left[\frac{1}{3n+1}-\frac{1}{3n+2}\right]+\cdots$

75. $1-\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\cdots+(-1)^n\left[\frac{1}{4n+1}-\frac{1}{4n+3}\right]+\cdots$

76. $1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+(-1)^n\left[\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}\right]+\cdots$

77. $1-\frac{1}{5}+\frac{1}{9}-\frac{1}{13}+\cdots+(-1)^n\cdot\frac{1}{4n+1}+\cdots$

78. $1+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots+(-1)^n\left[\frac{1}{4n+1}+\frac{1}{4n+3}\right]+\cdots$

79. $1-\frac{1}{7}+\frac{1}{13}-\frac{1}{19}+\cdots+(-1)^n\cdot\frac{1}{6n+1}+\cdots$

80. $1+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}-\frac{1}{11}+\cdots+(-1)^n\left[\frac{1}{6n+1}+\frac{1}{6n+5}\right]+\cdots$

81. $\frac{3}{2\cdot 4}-\frac{5}{4\cdot 6}+\frac{7}{6\cdot 8}-\cdots+(-1)^{n+1}\frac{2n+1}{2n(2n+2)}+\cdots$

82. $\frac{1}{1\cdot 3}-\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}-\cdots(-1)^n\cdot\frac{1}{(2n+1)(2n+3)}+\cdots$

83. $\frac{1}{1\cdot 2}-\frac{1}{4\cdot 5}+\frac{1}{7\cdot 8}-\cdots+(-1)^n\cdot\frac{1}{(3n+1)(3n+2)}+\cdots$

84. $\frac{1}{1\cdot 3}-\frac{1}{5\cdot 7}+\frac{1}{9\cdot 11}-\cdots+(-1)^n\cdot\frac{1}{(4n+1)(4n+3)}+\cdots$

85. $\frac{1}{2\cdot 3}-\frac{1}{4\cdot 5}+\frac{1}{6\cdot 7}-\cdots+(-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{2n(2n+1)}+\cdots$

86. $\frac{1}{1\cdot 5}+\frac{1}{9\cdot 13}+\frac{1}{17\cdot 21}+\cdots+\frac{1}{(8n+1)(8n+5)}+\cdots$

87. $\frac{1}{1\cdot 3}-\frac{3}{5\cdot 7}+\frac{5}{9\cdot 11}-\cdots+(-1)^{n}\cdot\frac{2n+1}{(4n+1)(4n+3)}+\cdots$

88. $\frac{1}{3\cdot 5}-\frac{1}{7\cdot 9}+\frac{1}{11\cdot 13}-\frac{1}{15\cdot 17}+\cdots+(-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{(4n-1)(4n+1)}+\cdots$

89. $\frac{1}{1\cdot 7}+\frac{1}{13\cdot 19}+\frac{1}{25\cdot 31}+\cdots+\frac{1}{(12n+1)(12n+7)}+\cdots$

90. $\frac{1}{5\cdot 7}-\frac{1}{11\cdot 13}+\frac{1}{17\cdot 19}-\cdots+(-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{(6n-1)(6n+1)}+\cdots$

91. Довести, що сума ряду

$$\frac{C_0}{1\cdot 2\cdot 3\cdots k}+\frac{C_1}{(a+1)(a+2)\cdots(a+k)}+$$
$$+\frac{C_2}{(2a+1)(2a+2)\cdots(2a+k)}+\cdots+\frac{C_n}{(na+1)(na+2)\cdots(na+k)}+\cdots$$

виражається інтегралом

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdots(k-1)}\int_0^1(1-t)^{k-1}f(t^a)dt,$$

якщо

$$C_0+C_1x+C_2x^2+\cdots+C_nx^n+\cdots=f(x)\ \text{при}\ |x|<1.$$

92—118. На підставі результату 91 знайти суми таких рядів:

92. $\sum_0^\infty\frac{1}{(2n+1)(2n+2)}$.

93. $\sum_0^\infty\frac{1}{(3n+1)(3n+2)}$.

94. $\sum_0^\infty\frac{1}{(4n+1)(4n+2)}$.

95. $\sum_1^\infty\frac{(-1)^{n-1}}{n(n+1)}$.

96. $\sum_0^\infty\frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)}$.

97. $\sum_0^\infty\frac{(-1)^n}{(3n+1)(3n+2)}$.

98. $\sum_0^\infty\frac{(-1)^n}{(4n+1)(4n+2)}$.

99. $\sum_1^\infty\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$.

100. $\sum_0^\infty\frac{1}{(2n+1)(2n+2)(2n+3)}$.

101. $\sum_0^\infty\frac{1}{(3n+1)(3n+2)(3n+3)}$.

102. $\sum\limits_0^{\infty}\dfrac{1}{(4n+1)(4n+2)(4n+3)}$.

103. $\sum\limits_0^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n(n+1)(n+2)}$.

104. $\sum\limits_0^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)(2n+3)}$.

105. $\sum\limits_0^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(3n+1)(3n+2)(3n+3)}$.

106. $\sum\limits_0^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(4n+1)(4n+2)(4n+3)}$.

107. $\sum\limits_0^{\infty}\dfrac{1}{(2n+1)(2n+2)(2n+3)(2n+4)}$.

108. $\sum\limits_0^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)(2n+3)(2n+4)}$.

109. $\sum\limits_1^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}\cdot\dfrac{1}{(2n+1)(2n+2)}$.

110. $\sum\limits_1^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}\cdot\dfrac{1}{(2n+1)(2n+2)(2n+3)}$.

111. $\sum\limits_0^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2n+1}\cdot\dfrac{1}{(4n+3)(4n+4)(4n+5)}$.

112*. $\sum\limits_0^{\infty}(-1)^n\cdot\dfrac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots2n}\cdot\dfrac{1}{(2n+1)(2n+2)}$.

113*. $\sum\limits_0^{\infty}\dfrac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots2n}\cdot\dfrac{1}{(2n+1)(2n+2)}$.

114*. $\sum\limits_0^{\infty}(-1)^n\cdot\dfrac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots2n}\cdot\dfrac{1}{(2n+1)(2n+2)(2n+3)}$.

115*. $\sum\limits_0^{\infty}\dfrac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots2n}\cdot\dfrac{1}{(2n+1)(2n+2)(2n+3)}$.

116. $\sum\limits_1^{\infty}\dfrac{1}{m(2n+1)(2n+2)(2n+3)}$.

117. $\sum\limits_0^{\infty}(-1)^n\cdot\dfrac{1}{(n+3)(n+4)(n+5)}\cdot\dfrac{1}{2^n}$.

118. $\sum\limits_0^{\infty}(-1)^n\cdot\dfrac{1}{(2n+2)(2n+3)(2n+4)}\cdot\dfrac{1}{3^n}$.

Вказівка. У задачах, позначених *, коефіцієнти $\dfrac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots2n}$ при $n=0$ умовно вважаються рівними 1.

119. Довести, що сума ряду

$$C_0+\frac{1}{2}C_2+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}C_3+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}C_4+\cdots$$

представлена визначеним інтегралом $\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin^2\varphi)d\varphi$, якщо

$$C_0+C_1x+C_2x^2+C_3x^3+\cdots=f(x) \text{ при } 0<x<1.$$

120. Довести, що сума ряду

$$C_1+\frac{2}{3}C_3+\frac{2\cdot 4}{3\cdot 5}C_5+\frac{2\cdot 4\cdot 6}{3\cdot 5\cdot 7}C_7+\cdots$$

дорівнює визначеному інтегралу $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin\varphi)d\varphi$, якщо

$$C_1x+C_3x^3+C_5x^5+\cdots=f(x) \text{ при } 0<x<1.$$

121—134. На підставі результатів 119—120 знайти суми таких рядів.

121. $\sum\limits_1^\infty \frac{(-1)^{n-1}}{n}\cdot\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}$.

122. $\sum\limits_0^\infty \frac{(-1)}{2n+1}\cdot\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}$.

123*. $\sum\limits_0^\infty (-1)^n\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}$.

124*. $\sum\limits_0^\infty (-1)^n\cdot\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}\cdot\frac{1}{2^n}$.

125*. $\sum\limits_0^\infty (-1)^n\cdot\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}{3\cdot 5\cdot 7\cdots(2n+1)}$.

126*. $\sum\limits_0^\infty (-1)^n\cdot\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}{3\cdot 5\cdot 7\cdots(2n+1)}\cdot\frac{1}{2^n}$.

127*. $\sum\limits_0^\infty \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}{3\cdot 5\cdot 7\cdots(2n+1)}$.

128*. $\sum\limits_1^\infty (-1)^n\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}{3\cdot 5\cdot 7\cdots(2n+1)}\cdot\frac{1}{3^n}$.

129. $\sum\limits_1^\infty \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}\cdot\frac{1}{2n}$.

130*. $\sum\limits_0^\infty \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}{3\cdot 5\cdot 7\cdots(2n+1)}\cdot\frac{1}{2^n}$.

131*. $\sum\limits_0^\infty (-1)^n\cdot\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}\cdot\frac{1}{a^n}\quad(a\ge 1)$.

132*. $\sum_{0}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}\cdot\frac{1}{a^n}\quad (a>1).$

133*. $\sum_{0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}{3\cdot 5\cdot 7\cdots(2n+1)}\cdot\frac{1}{a^n}\quad (a\geq 1).$

134*. $\sum_{0}^{\infty}\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}{3\cdot 5\cdot 7\cdots(2n+1)}\cdot\frac{1}{a^n}\quad (a>1).$

Вказівка. У задачах, позначених *, коефіцієнти $\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}$ і $\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}{3\cdot 5\cdot 7\cdots(2n+1)}$ при $n = 0$ умовно вважаються рівними 1.

135. Довести, що сума ряду $\frac{C_0}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{C_2}{3^2}+\cdots+\frac{C_{n-1}}{n^2}+\cdots$ дорівнює — $\int_0^1 f(x)\log x dx$, якщо $C_0+C_1x+\ldots+C_nx^n+\ldots=f(x)$ при $|x|<1$.

136—139. На підставі результату 135 знайти суми таких рядів:

136*. $\sum_{0}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}\cdot\frac{1}{(2n+1)^2}.$

137*. $\sum_{0}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}\cdot\frac{1}{(n+1)^2}.$

138*. $\sum_{0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}\cdot\frac{1}{(n+1)^2}.$

139*. $\sum_{0}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}\cdot\frac{1}{(2n+3)^2}.$

140—168. Розкладемо в тригонометричні ряди (ряди Фур'є) такі функції:

140. $f(x) = -1$ при $-\pi < x < 0$, $f(x) = +1$ при $0 < x < \pi$.

141. $f(x) = 0$ при $-\pi < x < 0$, $f(x) = +1$ при $0 < x < \pi$.

142. $f(x) = x$ при $0 < x < \pi$.

143. $f(x) = 0$ при $-\pi < x < +\pi$.

144. $f(x) = |x|$ при $-\pi < x < +\pi$.

145. $f(x) = 0$ при $-\pi < x < 0$, $f(x) = x$ при $0 < x < \pi$.

146. $f(x) = x$ при $0 < x < \pi$, $f(x) = \pi$ при $\pi < x < 2\pi$.

147. $f(x) = x$ при $0 < x < \frac{\pi}{2}$, $f(x) = \pi - x$ при $\frac{\pi}{2} < x < \pi$.

148. $f(x) = bx$ при $-\pi < x < 0$, $f(x) = ax$ при $0 < x < \pi$.

149. $f(x) = x^2$ при $-\pi < x < +\pi$. **150.** $f(x) = x^2$ при $0 < x < 2\pi$.

151. $f(x) = x^2$ при $0 < x < \pi$.

152. $f(x) = -x^2$ при $-\pi < x < 0$, $f(x) = x^2$ при $0 < x < \pi$.

153. $f(x) = 0$ при $-\pi < x < 0$, $f(x) = x^2$ при $0 < x < \pi$.

154. $f(x) = \pi^2 - x^2$ при $-\pi < x < \pi$.

155. $f(x) = x(\pi^2 - x^2)$ при $-\pi < x < \pi$.

156. $f(x) = (\pi^2 - x^2)^2$ при $-\pi < x < +\pi$.

157. $f(x) = \sin x$ при $0 < x < \pi$.

158. $f(x) = \sin x$ при $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$.

159. $f(x) = \cos x$ при $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$.

160. $f(x) = \cos x$ при $0 < x < \pi$. **161.** $f(x) = x \sin x$ при $-\pi < x < \pi$.

162. $f(x) = x \cos x$ при $-\pi < x < \pi$. **163.** $f(x) = \operatorname{logsin}\frac{x}{2}$ $0 < x < 2\pi$.

164. $f(x) = \sin \mu x$ при $-\pi < x < \pi$ (μ не ціле).

165. $f(x) = \cos \mu x$ при $-\pi < x < \pi$ (μ не ціле).

166. $f(x) = shx$ при $-\pi < x < \pi$.

167. $f(x) = chx$ при $-\pi < x < \pi$.

168. $f(x) = e^x$ при $-\pi < x < \pi$.

169—187. Задачі на обчислення скінченних різниць.

169. Беручи $S_k = 1^k + 2^k + 3^k + \cdots + (n-1)^k$, обчислити S_k при $k = 3$, 4, … 9.

170. Беручи $T_k = 1^k - 2^k + 3^k - 4^k + \cdots + (2n-1)^k$, обчислити T_k при $k = 2, 3, \ldots 9$.

Обчислити суми.

171. $1\cdot 3 - 2\cdot 4 + 3\cdot 5 - 4\cdot 6 + \cdots + (2n-3)(2n-1)$.

172. $1\cdot 3 + 2\cdot 4 + 3\cdot 5 + 4\cdot 6 + \cdots + (2n-2)2n$.

173. $$\begin{aligned}&1\cdot 2\cdot 3\cdots k + 2\cdot 3\cdot 4\cdots(k+1) + \cdots\\&+(n-k+1)(n-k+1)(n-k+2)\cdots n\end{aligned}.$$

174. $$\frac{1}{1\cdot 3} - \frac{1}{2\cdot 4} + \frac{1}{3\cdot 5} - \frac{1}{4\cdot 6} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n(n+2)} + \cdots$$

175. $$\frac{1}{1\cdot 4} + \frac{1}{2\cdot 5} + \frac{1}{3\cdot 6} + \frac{1}{4\cdot 7} + \cdots + \frac{1}{n(n+3)} + \cdots$$

176. $$\frac{8}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \frac{11}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} + \frac{14}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6} + \cdots + \frac{3n+5}{n(n+1)(n+2)(n+3)} + \cdots$$

177. $\frac{10}{3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}+\frac{36}{5\cdot 7\cdot 9\cdot 11}+\cdots+\frac{2n^2-3n+1}{n(n+2)(n+4)(n+6)}+\cdots$
(n — непарне).

178. $\frac{1}{1\cdot 5\cdot 9}+\frac{1}{2\cdot 6\cdot 10}+\frac{1}{3\cdot 7\cdot 11}+\cdots+\frac{1}{n(n+4)(n+8)}+\cdots$

179. $\frac{1^2}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}+\frac{2^2}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}+\cdots+\frac{n^2}{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}+\cdots$

180. $\frac{1^2}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}-\frac{2^2}{3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}\cdot n^2}{(n+1)(n+3)(n+5)(n+7)}+\cdots$

181. $\frac{3}{1\cdot 4\cdot 7}+\frac{5}{2\cdot 5\cdot 8}+\frac{7}{3\cdot 6\cdot 9}+\cdots+\frac{2n+1}{n(n+3)(n+6)}+\cdots$

182. $\frac{2}{1\cdot 3\cdot 5}-\frac{5}{2\cdot 4\cdot 6}+\frac{8}{3\cdot 5\cdot 7}-\cdots+(-1)^{n-1}\cdot\frac{3n-1}{n(n+2)(n+4)}+\cdots$

Обчислити за допомогою формули Ейлера—Маклорена такі суми і вказати степінь точності:

183. $1+\frac{1}{3^5}+\frac{1}{5^5}+\frac{1}{7^5}+\cdots$ з точністю до $\frac{1}{10^5}$.

184. $\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\cdots+\frac{1}{99}$ з точністю до $\frac{1}{10^6}$.

185. $\frac{1}{100}+\frac{1}{103}+\frac{1}{106}+\cdots+\frac{1}{397}$ з точністю до $\frac{1}{10^8}$.

186. $\frac{1}{\sqrt{100}}+\frac{1}{\sqrt{101}}+\frac{1}{\sqrt{102}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{9999}}$ з точністю до $\frac{1}{10^9}$.

187. $\frac{1}{500\ln 500}+\frac{1}{501\ln 501}+\cdots+\frac{1}{999\ln 999}$ з точністю до $\frac{1}{10^5}$.

(ln — знак натурального логарифма).