Конспект лекцій по вищій математиці

1.1. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ

1.1.1. ПРОСТІР R^n

Одне з фундаментальних понять математики — поняття функції однієї змінної — цілком природно, за аналогією, узагальнюється на довільну кількість n змінних з одночасним переходом від простору R^2 (площини) до n-вимірного простору R^n. Подамо далі докладне теоретичне обґрунтування такого узагальнення.

Множину, елементами якої є всі можливі набори впорядкованих n дійсних чисел, позначають R^n. У цій множині означують поняття відстані між будь-якими двома її елементами.

Відстань між елементами

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in R^n \text{ і } \mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in R^n,$$
$$x_i,\ y_i \in R,\ i = 1, 2, \ldots, n,$$

подається у вигляді

$$\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}\ . \tag{1}$$

Означення. Множина R^n із введеною на ній відстанню називається ***n*-вимірним простором R^n**, число n — **розмірністю** цього простору. Елемент $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in R^n$ називається **точкою** простору R^n, число x_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, — ***i*-ю координатою** цієї точки. Точки $\mathbf{x} = (0, 0, \ldots, x_i, \ldots, 0)$ n-вимірного простору R^n утворюють i-ту **координатну вісь** простору. Точка 0 = (0, 0, …, 0) називається **початком координат**.

Простір R^1 з елементами $\mathbf{x} = x_1$ — числова пряма. Простори R^2 і R^3 з елементами $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ і $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ являють собою відповідно площину і тривимірний простір.

У просторі R^n можна означити поняття **суми елементів** і **добутку елемента на дійсне число**:
якщо

$$\mathbf{x} = (x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_n),\;\; \mathbf{y} = (y_1,\, y_2,\, \ldots,\, y_n) \in R^n,$$
$$\lambda \in R,$$

то

$$\begin{gathered} \mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1 + y_1,\, x_2 + y_2,\, \ldots,\, x_n + y_n) \in R^n, \\ \boldsymbol{\lambda}\mathbf{x} = (\lambda x_1,\, \lambda x_2,\, \ldots,\, \lambda x_n) \in R^n. \end{gathered} \tag{2}$$

Як відомо з лінійної алгебри, множина R^n, в якій формулами (2) визначено суму її елементів та добуток будь-якого елемента на дійсне число, є **лінійним векторним простором**. Точку $\mathbf{x} = (x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_n)$ простору R^n називають **вектором**, а числа x_i, $i = 1, 2, \ldots, n,$ — його координатами в базисі $\mathbf{e}_1 = (1, 0, \ldots, 0)$, …, $\mathbf{e}_n = (0, 0, \ldots, 1)$.

У лінійному векторному просторі можна означити **скалярний добуток** $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, ставлячи у відповідність двом векторам $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ і $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ число

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i. \tag{3}$$

Лінійний векторний простір R^n, для елементів якого формулою (3) означено скалярний добуток, називається ***n*-вимірним евклідовим простором**.

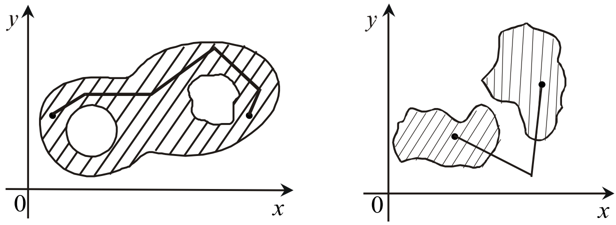
1.1.2. МНОЖИНИ ТОЧОК НА ПЛОЩИНІ ТА В R^n

Упорядкованій парі чисел (x, y) на координатній площині відповідає, як відомо, одна точка $P(x, y)$. Аналогічно, у R^n кожному набору n упорядкованих дійсних чисел відповідає одна точка $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, де числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — її координати.

З метою спрощення й унаочнення міркувань, не поступаючись їх загальністю, розглядатимемо далі множини точок переважно на площині.

Означення. Множина точок $E \subset R^n$ називається **зв'язною**, якщо будь-які дві її точки можна сполучити ламаною лінією так, щоб усі точки цієї лінії належали E.

На рис. 1.1,*а* схематично зображено зв'язну, а на рис. 1.1,*б* — незв'язну множину.

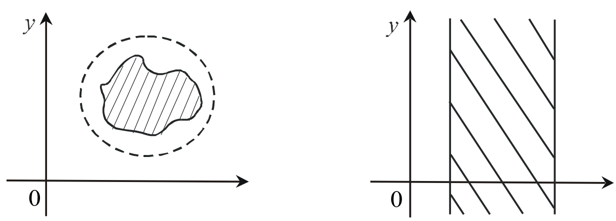


а *б*

Рис. 1.1

Означення. Множина $E \subset R^n$ називається **обмеженою**, якщо всі її точки можна вмістити у крузі скінченного радіуса.

Обмежену множину ілюструє рис. 1.2,*а*, необмежену — рис. 1.2,*б*.



а *б*

Рис. 1.2

Означення. Множина точок, координати яких задовольняють нерівність

$$\rho(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) < \delta \text{, або } \sqrt{(x_1 - x_1^0)^2 + (x_2 - x_2^0)^2 + \ldots + (x_n - x_n^0)^2} < \delta, \qquad (4)$$

називається **δ-околом точки** $P_0(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$.

Зауваження. Для двовимірного простору нерівність (4) набирає вигляду

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta .$$

Остання нерівність відповідає внутрішності круга, радіус якого $R = \delta$, а центр міститься в точці $P_0(x_0,\ y_0)$ (рис. 1.3).

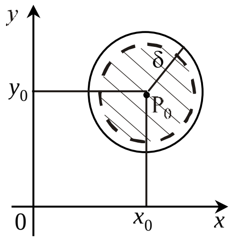


Рис. 1.3

Якщо з δ-околу точки P_0 вилучити саму точку P_0, дістанемо так званий **виколотий δ-окіл точки $\boldsymbol{P_0}$**.

Означення. Деяка точка називається **внутрішньою** щодо даної множини, коли вона належить цій множині разом із деяким своїм δ-околом, і **зовнішньою**, якщо існує її окіл, жодна точка якого не належить цій множині.

Означення. Зв'язна множина, що складається лише із внутрішніх своїх точок, називається ***відкритою*** областю, або просто ***областю***.

Множина точок $U = \{(x,\ y) \in R^2 \mid 1 < x < 3,\ 1 < y < 2\}$, зображена на рис. 1.4, є областю.

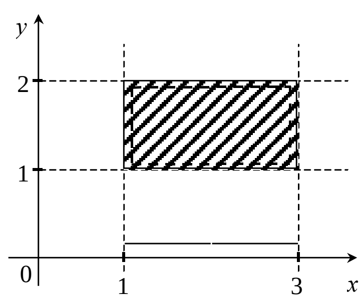


Рис. 1.4

Означення. Точка $\mathbf{x} \in E \subset R^n$ називається **межовою** для області E, якщо в будь-якому δ-околі цієї точки існують точки, що належать E, і точки, що не належать E.

Означення. Точка $\mathbf{x} \in E \subset R^n$ називається **ізольованою** точкою області E, якщо існує δ-окіл цієї точки, який не містить жодних інших точок E, крім $\mathbf{x}$.

Означення. Точка $\mathbf{x} \in R^n$ називається **граничною** точкою області E, якщо будь-який δ-окіл цієї точки містить хоча б одну точку E, відмінну від $\mathbf{x}$.

Означення. Множина межових точок області E називається **межею цієї області**.

Означення. Область, об'єднана зі своєю межею, називається **замкненою областю**.

Означення. **Діаметром області** D називається величина $d = \sup\limits_{M_1,\, M_2 \in D} \rho(M_1, M_2)$, де $\rho(M_1, M_2)$ — відстань між точками M_1 і M_2, що належать D.

Область $D = \{(x,\ y) \in R^2 \mid x^2 + y^2 \le 9\}$, зображена на рис. 1.5, є замкненою, $x^2 + y^2 = 9$ — рівняння її межі, M — межова, K — внутрішня, N — зовнішня точка цієї області.

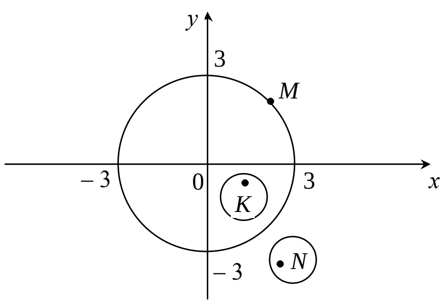


Рис. 1.5

У просторі R розглянемо множину $E = [0;\ 1] \cup \{2\}$. Внутрішніми її точками є всі точки інтервалу (0, 1); точка $x = 2$ — ізольована; усі точки відрізка [0; 1] є граничними; точки $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$ — межові.

Означення. Множина $E \subset R^n$ називається **опуклою**, якщо будь-які дві її точки можна сполучити відрізком, який належатиме цій множині. Множина, яка містить лише одну точку, також вважається опуклою.

1. Множина $E = \left\{ (x_1,\ x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 > 1 \right\}$ — є зв'язною відкритою областю, але не є опуклою.

2. Множина $E = \{(x_1,\ x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 \le 0\}$ — є зв'язною і опуклою, але не є відкритою.

1.1.3. ОЗНАЧЕННЯ ФУНКЦІЇ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

Означення. Якщо кожній точці множини D n-вимірного простору R^n за деяким законом $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ поставлено у відповідність одне і тільки одне дійсне число $z \in E \subset R$, то говорять, що в області $D \subset R^n$ задано **функцію *n* незалежних змінних**.

$$z = f(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n).$$

При цьому D називають **областю визначення функції**, а E — **областю значень функції**.

Згідно з означенням функцію $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ можна розглядати як функцію точки і записувати як $z = f(P)$.

Зокрема, коли $n = 2$, маємо функцію двох змінних $z = f(x,\ y)$, якщо кожній парі $(x,\ y) \in D$ на площині поставлено у відповідність одне і тільки одне число z.

Зауважимо, що в задачах економічного змісту найчастіше доводиться стикатися з функціями двох або трьох незалежних змінних. Тому надалі головну увагу приділятимемо саме їм.

Наведемо приклади таких функцій.

Витрати виробництва даного виробу за даної технології є функцією матеріальних витрат x і витрат y на оплату робочої сили: $z = f(x,\ y)$. Це є **функція витрат виробництва**.

Розглянемо функцію двох незалежних змінних K, L, яка називається **виробничою функцією**, або **функцією Кобба—Дугласа**: $Q = CL^{\alpha}K^{\beta}$, $0 < \alpha < 1$; $0 < \beta < 1$, де Q — обсяг виробництва; C — деяка стала; L — кількість праці, яку вкладено у виробництво; K — кількість капіталу. Із наведеної рівності випливає, що частка, %, заробітної плати в загальному прибутку становить $\alpha \cdot 100$, а частка капіталу, %, $\beta \cdot 100$. Задану функцію можна подати у вигляді таблиці або графіка. Для двох факторів таким графіком може бути **рівнопродуктова крива**, для більшої їх кількості — деякий тривимірний образ. Криву, що являє собою множину точок, кожною з яких подається одна з можливих комбінацій двох факторів виробництва, котрі забезпечують однакову кількість виготовлюваної продукції, зображено на рис. 1.6.

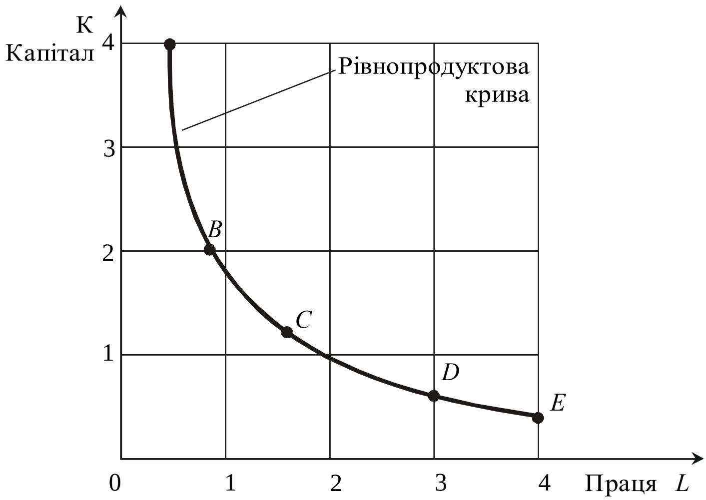


Рис. 1.6

Нехай предметами споживання є два товари A — масло та B — маргарин, ціни на які становлять відповідно p_1 та p_2. Якщо ціни на інші товари сталі, а прибуток споживачів і структура споживання не змінюються, то попит і пропозиція за кожним із товарів залежать від його ціни. Маємо:

функцію попиту на товар A: $q_1 = f_1(p_1, p_2)$;
функцію попиту на товар B: $q_2 = f_2(p_1, p_2)$;
функцію пропозиції товару A: $s_1 = f_3(p_1, p_2)$;
функцію пропозиції товару B: $s_2 = f_4(p_1, p_2)$.

Задану умовою задачі залежність можна подати такою таблицею:

Характеристика товару	Товар A — масло	Товар B — маргарин
Кількість	q_1	q_2
Ціна	p_1	p_2

Попит на масло визначатиметься функцією $q_1 = f_1(p_1, p_2)$ і залежатиме від його ціни p_1 та ціни p_2 конкурентного товару — маргарину.

Зокрема, ця функція може набирати такого вигляду:

$$q_1 = a - bp_1 + cp_2, \ a, b, c > 0,$$

або

$$q_1 = k\frac{p_2}{p_1}.$$

1.1.4. СПОСОБИ ЗАДАННЯ ФУНКЦІЇ

Функцію двох змінних, як і функцію однієї змінної, можна подати такими способами:

- **аналітично** (у вигляді формули); наприклад:

$$z = [a_1 x_1^{-\beta} + b_2 x_2^{-\beta}]^{-h/\beta}; \;\; z = x^2 + y^2 x\,.$$

- **таблично**; наприклад:

x	y			
	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	4	6	8
3	3	6	9	12
4	4	8	12	16

(таблиця множення чисел: $z = xy$)

- **графічно** (рис. 1.7);

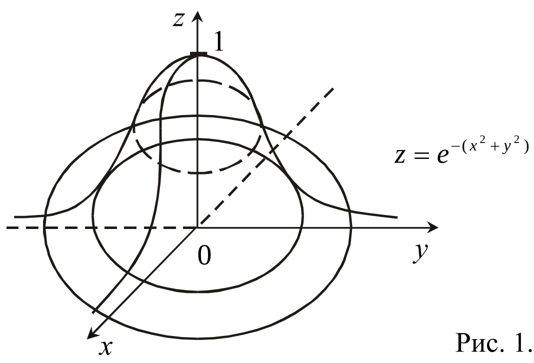


Рис. 1.7

1.1.5. ГРАФІЧНЕ ЗОБРАЖЕННЯ ФУНКЦІЇ ДВОХ ЗМІННИХ

Означення. **Графіком** функції двох змінних $z = f(x, y)$ називається множина всіх точок $(x, y, f(x, y))$ простору R^3, де $(x, y) \in R^2$.

Щоб зобразити графічно функцію двох змінних, розглянемо систему координат xyz у тривимірному просторі (рис. 1.8).

Кожній парі чисел x і y відповідає точка $P(x, y)$ площини xy. Узявши в цій точці значення функції $z = f(x, y)$, дістанемо точку у просторі R^3 з координатами (x, y, z), яка позначається символом $Q(x, y, z)$. Усі такі точки, що відповідають різним значенням незалежних змінних x і y, утворюють певну **поверхню у просторі** $\boldsymbol{R^3}$. Ця поверхня і є **графічним зображенням функції** $z = f(x, y)$.

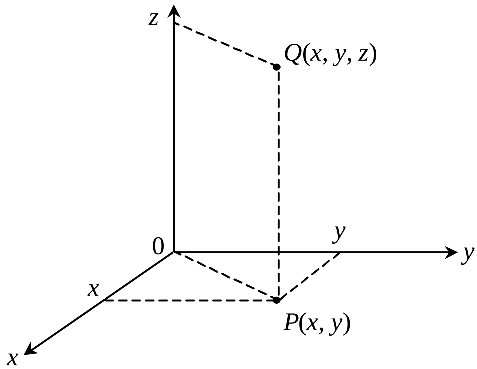


Рис. 1.8

Графічним зображенням функції $z = 4 - x - y$ є площина, що проходить через точки (0, 0, 4), (0, 4, 0), (4, 0, 0) (рис. 1.9).

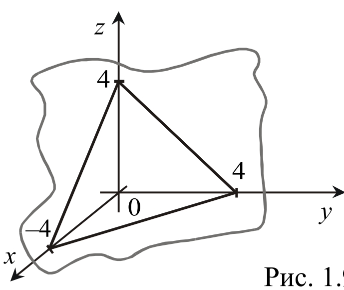


Рис. 1.9

Графічним зображенням функції $z = y^2 - x^2$ є сідло (рис. 1.10).

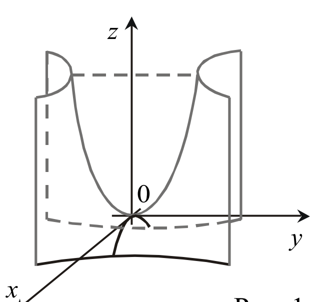


Рис. 1.10

Зауваження. На практиці побудувати графік функції двох змінних буває нелегко, оскільки потрібно зобразити на площині просторову фігуру, а це не завжди вдається.

Існує й інший спосіб геометричного зображення функції двох змінних — за допомогою ліній рівня.

Означення. **Лінією рівня** називається множина всіх точок площини, в яких функція $z = f(x, y)$ набуває однакових значень. Рівняння ліній рівня записують у вигляді $f(x, y) = c$. Для функції трьох змінних розглядають **поверхні рівня**.

Накресливши кілька ліній рівня та задавши значення на них функції, дістанемо певне уявлення про характер зміни функції.

Один з найпростіших прикладів зображення функції за допомогою ліній рівня — задання рельєфу місцевості на географічній карті. Висота місцевості над рівнем моря є функцією координат точки земної поверхні. За лініями однакової висоти, нанесеними на карту, легко уявити рельєф відповідної місцевості.

У метеорології лініями рівня є **ізотерми** та **ізобари**. В економіці — **ізокванти**, **криві індиферентності**. Лініями рівня виробничої функції є ізокванти. **Ізокванта** — крива, утворена множиною точок, що відповідають різним варіантам поєднання двох будь-яких видів витрат, котрі забезпечують постійно одну й ту саму кількість виготовлюваної продукції (рис. 1.11). **Крива індиферентності** відбиває зміну поєднання двох різних благ за умови, що загальна споживна корисність їх лишається сталою (рис. 1.12).

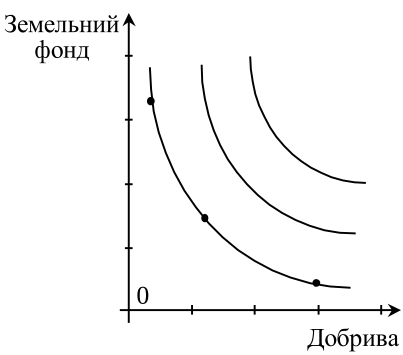


Рис. 1.11

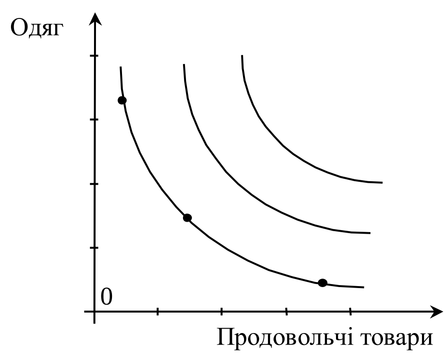


Рис. 1.12

Побудувати лінії рівня функції

$$z = \sqrt{\frac{6y}{x^2 + y^2 - 4}}.$$

● Шукане рівняння має вигляд

$$\sqrt{\frac{6y}{x^2 + y^2 - 4}} = c.$$

1. Якщо $c < 0$, то ліній рівня немає.

2. Якщо $c = 0$, то лінії рівня становлять множину всіх точок осі x, крім двох: $(\pm 2, 0)$.

3. Якщо $c > 0$, маємо $\frac{6y}{x^2 + y^2 - 4} = c^2 \Rightarrow c^2(x^2 + y^2 - 4) = 6y \Rightarrow$ $\Rightarrow x^2 + y^2 - \frac{6}{c^2}y = 4$, або $x^2 + (y - \frac{3}{c^2})^2 = 4 + \frac{9}{c^4}$. Отже, лініями рівня є кола радіусом $\sqrt{4 + \frac{9}{c^4}}$ із центром у точці $\left(0, \frac{3}{c^2}\right)$, з яких вилучено точки $(\pm 2, 0)$. Узявши $c = 1, 2, \ldots$, дістанемо сім'ю ліній рівня (рис. 1.13).

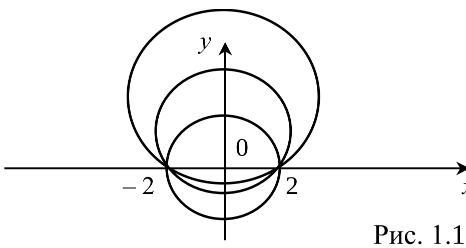


Рис. 1.13

1.1.6. ЗНАХОДЖЕННЯ ОБЛАСТІ ВИЗНАЧЕННЯ ФУНКЦІЇ ДВОХ ЗМІННИХ

Розглянемо алгоритм знаходження області визначення функції двох змінних на такому прикладі.

Знайти область визначення функції

$$z = \frac{\ln(x^2 + y^2 - 9)}{\sqrt{9x - y}}$$

та надати відповідну геометричну інтерпретацію.

1. Запишемо область визначення функції аналітично:

$$D = \{(x; y) \in R^2 \mid x^2 + y^2 - 9 > 0,\ 9x > y\}.$$

2. Замінивши нерівності в D рівностями, побудуємо лінії, що відповідають їм на координатній площині:

$$x^2 + y^2 = 9;$$
$$y = 9x.$$

3. За допомогою контрольних точок $P_1\left(\frac{1}{2},\ -\frac{3}{2}\right)$ і $P_2(1,\ 3)$ з'ясуємо розміщення D на площині й виділимо її штриховкою (рис. 1.14).

$$\left.\begin{array}{l} \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{10}{4} < 9 \\ \frac{9}{2} + \frac{3}{2} > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow P_1 \notin D;$$

$$\left.\begin{array}{l} 1^2 + 3^2 = 10 > 9 \\ 9 > 3 \end{array}\right\} \Rightarrow P_2 \in D.$$

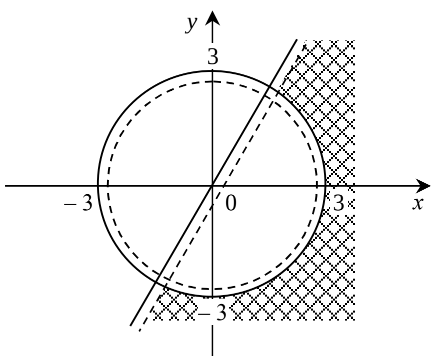


Рис. 1.14

1.1.7. ГРАНИЦЯ ФУНКЦІЇ ДВОХ ЗМІННИХ

Означення. Число A називається **границею функції** $z = f(x,\ y)$ при $x \to x_0$, $y \to y_0$, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує число $\delta > 0$, таке, що в разі виконання нерівності

$$0 < (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \delta^2,$$

справджується нерівність $|\, f(x,\ y) - A| < \varepsilon$.

Позначають:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = A,$$

або

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y) = A.$$

Наслідок. $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} c = c \quad (c = \mathrm{const});$

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} = x_0; \qquad \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} y = y_0.$$

Теорема 1.1. **Якщо функція $f(x, y)$ має границю при $(x, y) \to \to (x_0, y_0)$, то така границя тільки одна.**

Теорема 1.2. **Якщо функція $f(x, y)$ має границю при $(x, y) \to \to (x_0, y_0)$, то вона обмежена в деякому околі точки $f(x_0, y_0)$.**

Теорема 1.3. **Якщо $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x, y) = b,$ $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} g(x, y) = c$, і в деякому виколотому околі точки (x_0, y_0) виконується нерівність $f(x,y) \le g(x,y)$, то $b \le c$.**

Наслідок. **Якщо $f(x, y) \ge 0$ $(f(x, y) \le 0)$ у деякому околі точки (x_0, y_0) і $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x, y)$ існує, то ця границя невід'ємна (недодатна).**

Теорема 1.4. **Якщо $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x, y) = \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} h(x, y) = b$ і в деякому виколотому δ-околі точки (x_0, y_0) справджуються нерівності $f(x, y) \le g(x, y) \le h(x, y)$, то і $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} g(x, y) = b$.**

Теорема 1.5. **Якщо $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x, y) = b,$ $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} g(x, y) = c$, то виконуються рівності:**

$$\textbf{1)}\ \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} [f(x, y) + g(x, y)] = b + c;$$

$$2)\ \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,\, y)\,g(x,\, y)=bc\,;$$

$$3)\ \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} \frac{f(x,\, y)}{g(x,\, y)}=\frac{b}{c}\quad (c\neq 0).$$

Означення. Якщо $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,\, y)=0$, то функція $z=f(x,\, y)$ називається **нескінченно малою** при $x\to x_0,\ y\to y_0$.

Обчислити $\lim\limits_{(x,\, y)\to(-1,\, -2)} \dfrac{x^2+4y^5}{12x-3y}$.

● Застосувавши теорему 1.5 про арифметичні операції над границями, а також узявши до уваги те, що границя сталої величини дорівнює цій сталій, тобто

$$\lim_{(x,\, y)\to(-1,\, -2)} x=-1,\qquad \lim_{(x,\, y)\to(-1,\, -2)} y=-2$$

дістанемо:

$$\lim_{(x,\, y)\to(-1,-2)} \frac{x^2+4y^5}{12x-3y}=\frac{\lim\limits_{(x,\, y)\to(-1,\, -2)}\left(x^2+4y^5\right)}{\lim\limits_{(x,\, y)\to(-1,\, -2)}(12x-3y)}=$$

$$=\frac{\lim\limits_{(x,\, y)\to(-1,\, -2)} x^2+\lim\limits_{(x,\, y)\to(-1,\, -2)} 4y^5}{\lim\limits_{(x,\, y)\to(-1,\, -2)} 12x-\lim\limits_{(x,\, y)\to(-1,\, -2)} 3y}=\frac{127}{6}.$$

Обчислити $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{\ln(1+2xy)}{\sin 2xy}$.

● Візьмемо $xy=t$. Тоді з того, що $(x,\, y)\to(0,\, 0)$, випливає $t\to 0$ і задану границю можна подати у вигляді $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\ln(1+2t)}{\sin 2t}$. При $t\to 0$ маємо: $\ln(1+2t)\sim 2t$, $\sin 2t\sim 2t$. Отже,

$$\lim_{t\to 0}\frac{\ln(1+2t)}{\sin 2t}=\lim_{t\to 0}\frac{2t}{2t}=\frac{2}{2}=1.$$

Звідси, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\ln(1+2xy)}{\sin 2xy}=1$.

Зауваження. Поняття границі в точці для функції однієї змінної та функції багатьох змінних мають багато **спільного**, але існує й принципова **різниця**, з огляду на яку поняття границі функції кількох змінних є істотно більш обмеженим, ніж поняття границі функції однієї змінної.

Так, для функції багатьох змінних справджуються теореми про границю суми, добутку та частки, які аналогічні відповідним теоремам для функції однієї змінної.

Водночас маємо такі розбіжності між цими поняттями:

Якщо $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ ($f(x)$ — функція однієї змінної), то це означає, що і лівостороння і правостороння границі її дорівнюють b. Обернене твердження також правильне: з існування та збігу двох односторонніх границь випливає існування границі функції в точці.

Для функції двох змінних $z = f(x, y)$ наближення до точки (x_0, y_0) можливе нескінченною кількістю способів: і справа, і зліва, і згори, і знизу, і під деяким кутом до осі x тощо (рис. 1.15).

Більш того, до точки можна наближатися не лише по прямій, а й по складніших траєкторіях (рис. 1.16).

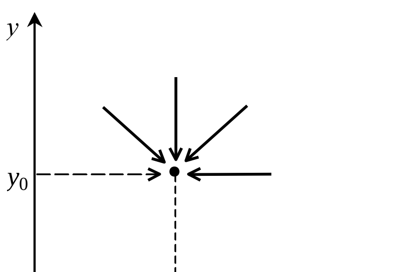


Рис. 1.15

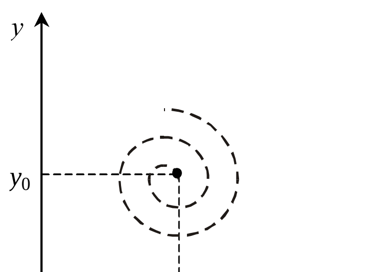


Рис. 1.16

Очевидно, що рівність $\lim\limits_{(x_0,\, y_0)} f(x, y) = b$ справджується тоді й тільки тоді, коли границя досягається в результаті наближення до точки (x_0, y_0) по будь-якій траєкторії. Отже, маємо істотне обмеження порівняно зі збігом двох односторонніх границь у разі функції однієї змінної.

Довести, що $\lim\limits_{(x,\ y)\to(0,\ 0)} \dfrac{5xy}{x^2+y^2}$ не існує.

● Наближатимемося до точки (0, 0) по прямій $y = kx$.
Якщо $y = kx$, то

$$\lim_{(x,\ y)\to(0,\ 0)} \frac{5xy}{x^2+y^2} = \lim_{(x,\ y)\to(0,\ 0)} \frac{5xkx}{x^2+k^2x^2} = \frac{5k}{1+k^2}.$$

Зауважимо, що значення границі залежить від кутового коефіцієнта прямої, наприклад:

при $k = 1$ границя дорівнює $\dfrac{5}{2}$,

при $k = 2$ границя дорівнює $\dfrac{10}{5}$ і т. д.

Отже, наближаючись до точки (0, 0) у різних напрямах, дістаємо різні границі. Це означає, що $\lim\limits_{(x,\ y)\to(0,\ 0)} \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ не існує.

Зауваження. Для функцій $n > 1$ змінних можна розглядати $n!$ так званих **повторних границь**.

У частинному випадку для функції двох змінних $z = f(x, y)$ можна розглядати дві повторні границі в точці (x_0, y_0):

$$\lim_{x\to x_0}(\lim_{y\to y_0} f(x,\ y)) \text{ і } \lim_{y\to y_0}(\lim_{x\to x_0} f(x,\ y)).$$

Наприклад, для функції $z = \dfrac{2x-y}{2x+y}$ маємо:

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\frac{2x-y}{2x+y}\right) = 1;$$

$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\frac{2x-y}{2x+y}\right) = -1.$$

Отже, змінювати порядок граничних переходів **загалом не можна**.

Скажімо, у попередньому прикладі $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{5xy}{x^2+y^2}$ не існує, але повторні границі існують: $\lim\limits_{x\to 0}\left(\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{5xy}{x^2+y^2}\right) = \lim\limits_{y\to 0}\left(\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5xy}{x^2+y^2}\right) = 0$.

1.1.8. НЕПЕРЕРВНІСТЬ ФУНКЦІЇ ДВОХ ЗМІННИХ

Означення. Функція $z = f(x,\ y)$ називається **неперервною в точці $P_0(x_0,\ y_0)$**, якщо

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x,\ y) = f(x_0,\ y_0).$$

Означення. Функція $z = f(x,\ y)$ називається **неперервною в області** (замкненій чи відкритій), якщо вона неперервна в кожній точці цієї області.

Означення. Функцію $z = f(x,\ y)$, визначену на множині $D \subset R^2$, називають **неперервною за множиною $E \subset D$ в точці $(x_0, y_0) \in D$**, якщо

$$\lim_{(x,\ y) \to (x_0,\ y_0),\ (x,\ y) \in D} f(x,\ y) = f(x_0,\ y_0).$$

Означення. Точка $(x_0,\ y_0)$ називається **точкою розриву функції** $z = f(x,\ y)$, якщо:

1) функція $z = f(x,\ y)$ не визначена в точці $(x_0,\ y_0)$;

2) функція $z = f(x,\ y)$ визначена в точці $(x_0,\ y_0)$, проте:

а) $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x,\ y)$ не існує;

б) $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x,\ y)$ існує, але не дорівнює $f(x_0,\ y_0)$.

Означення. Точка $(x_0,\ y_0)$ називається **точкою усувного розриву** функції $f(x,\ y)$, якщо $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x,\ y)$ існує, але або $f(x,\ y)$ не визначена в точці $(x_0,\ y_0)$, або $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x,\ y) \neq f(x_0,\ y_0)$.

Розглянемо функцію двох незалежних змінних

$$f(x,\ y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2} & (x^2 + y^2 > 0); \\ 0 & (x,\ y) = (0,\ 0). \end{cases}$$

Ця функція має розрив у точці (0, 0), бо в ній для функції $f(x,\ y)$ границі не існує.

Тут ми стикаємося з цікавим явищем: розглядувана функція не є неперервною в точці (0, 0) за двома змінними водночас, але є неперервною за кожною зі змінних x і y окремо.

Точки розриву можуть бути не лише ізольованими, як у попередньому прикладі, а можуть заповнювати лінії, поверхні тощо. Так, функції двох змінних $f(x,\ y)=\dfrac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$, $f(x,\ y)=\dfrac{1}{x^2+y^2-4}$ мають розриви: перша — прямі $y=\pm x$, друга — окіл $x^2+y^2=4$. Для функції трьох змінних

$$f(x,\ y,\ z)=\frac{x+y+z}{xy-z},\ \ f(x,\ y,\ z)=\frac{1}{x^2+y^2-z^2}$$

розриви заповнюють відповідно гіперболічний параболоїд $z=xy$ і конус $z^2=x^2+y^2$.

Знайти

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^4y}{x^4+y^4}.$$

● Для будь-якого $\varepsilon>0$ існує $\delta>0$, таке що для всіх точок $(x,\ y)$, які задовольняють умову $\sqrt{x^2+y^2}<\delta$ і відмінні від початку координат, справджується нерівність

$$\left|\frac{x^4y}{x^4+y^4}-0\right|=\frac{x^4}{x^4+y^4}|y|\le|y|\le\sqrt{x^2+y^2}<\delta=\varepsilon.$$

Отже,

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^4y}{x^4+y^4}=0.$$

Знайти границю функції

$$f(x,\ y)=y\sin\frac{1}{y-x}$$

в точці (0, 0) за множиною, на якій функція визначена.

● Зауважимо, що функція не визначена в точках прямої $y=x$. Тому звичайної границі в точці (0, 0) не існує. Але границя за множиною точок $D=\{(x,\ y)|x\neq y\}$, на якій функція визначена, існує і дорівнює нулю, оскільки

$$\left|\ y\sin\frac{1}{y-x}\ \right|\leq|\ y\,|.$$

Знайти значення a, при якому функція

$$z=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}, & \text{якщо}\quad x^2+y^2\neq 0;\\ a, & \text{якщо}\quad x^2+y^2=0\end{cases}$$

в точці (0, 0):

1) є неперервною за прямою $x=\alpha t$, $y=\beta t$, $\alpha^2+\beta^2\neq 0$;

2) неперервною за кривою $y=\alpha x^2$;

3) неперервною.

● 1. Наближатимемося до точки (0, 0) по прямій $x=\alpha t$, $y=\beta t$, $\alpha^2+\beta^2\neq 0$. Це означає, що виконуються рівності:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^2y}{x^4+y^2}=\lim_{t\to 0}\frac{\alpha^2t^2\beta t}{\alpha^4t^4+\beta^2t^2}=\lim_{t\to 0}\frac{\alpha^2\beta t^3}{t^2\left(\alpha^4t^2+\beta^2\right)}=\lim_{t\to 0}\frac{\alpha^2\beta t}{\alpha^4t^2+\beta^2}=0.$$

Якщо $a=0$, то дана функція буде неперервною за даною прямою.

2. Наближатимемося до точки (0, 0) по кривій $y=\alpha x^2$:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^2y}{x^4+y^2}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^2\alpha x^2}{x^4+\alpha^2x^4}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{\alpha x^4}{x^4\left(1+\alpha^2\right)}=\frac{\alpha}{1+\alpha^4}.$$

Якщо $a=\dfrac{\alpha}{1+\alpha^4}$, то розглядувана функція буде неперервною за даною прямою.

3. У точці (0, 0) функція $\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}$ має розрив, оскільки в ній границя не існує. Це випливає з 1 і 2.

Знайти точки розриву, а також точки усувного розриву функції двох змінних:

1) $z=\dfrac{x^5}{x^4+y^4}$;

2) $z=\dfrac{1}{\cos^2x+\cos^2y}$.

• 1. Функція $z=\dfrac{x^5}{x^4+y^4}$ в точці (0, 0) не існує, тому вона має в цій точці розрив. Знайдемо границю

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^5}{x^4+y^4}.$$

Для будь-якого $\varepsilon>0$ існує $\delta>0$, таке що для всіх точок $(x,\ y)$, які задовольняють умову $\sqrt{x^2+y^2}<\delta$ і відмінні від початку координат, виконується нерівність

$$\left|\frac{x^5}{x^4+y^4}-0\right|=\frac{x^4}{x^4+y^4}|x|\le|x|\le\sqrt{x^2+y^2}<\varepsilon.$$

Отже, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^5}{x^4+y^4}=0$ і функція має в точці (0, 0) усувний розрив, якщо $z=0$ у цій точці.

2. Функція $z=\dfrac{1}{\cos^2 x+\cos^2 y}$ не існує, якщо $\cos^2 x+\cos^2 y=0$, тобто $x=\dfrac{\pi}{2}+\pi k$, $y=\dfrac{\pi}{2}+\pi n$, $k,\ n\in Z$.

Тому вона має розриви. Знайдемо границю

$$\lim_{\substack{x\to\frac{\pi}{2}+\pi k\\ y\to\frac{\pi}{2}+\pi n}}\frac{1}{\cos^2 x+\cos^2 y}=+\infty.$$

Отже, функція $\dfrac{1}{\cos^2 x+\cos^2 y}$ має в точці $\left(\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{2}\right)$ неусувний розрив.

1.1.9. НЕПЕРЕРВНІСТЬ СКЛАДЕНОЇ (СКЛАДНОЇ) ФУНКЦІЇ ДВОХ ЗМІННИХ

Означення. Нехай функція $z=f(u,v)$ визначена на множині E, а змінні u і v, у свою чергу, залежать від змінних x і y: $u=u(x,y)$, $v=v(x,y)$, причому обидві функції $u(x,y)$ та $v(x,y)$ визначені на множині D. Якщо для будь-якого $(x,y)\in D$ існує значення $(u,v)\in E$ (рис. 1.17), то говорять, що на множині **визначено**

складену (складну) функцію $z = f(u, v)$, де $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$; u, v — проміжні, x, y — незалежні змінні.

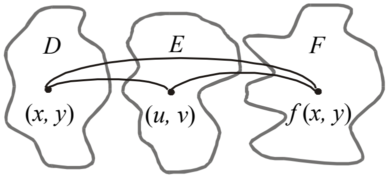


Рис. 1.17

1.1.10. ВЛАСТИВОСТІ НЕПЕРЕРВНОЇ ФУНКЦІЇ ДВОХ ЗМІННИХ

Теорема 1.7. **Якщо функція неперервна в точці, то вона обмежена деяким околом цієї точки.**

Теорема 1.8. **Якщо функції $f(x,y)$ та $g(x,y)$ неперервні в точці (x_0,y_0), то в цій точці будуть неперервними функції:**

1) $f(x,y)\pm g(x,y)$;

2) $f(x,y)g(x,y)$;

3) $f(x,y)/g(x,y)$ при $g(x_0,y_0)\neq 0$.

Теорема 1.9. **Якщо функція $f(x,y)$ неперервна на замкненій множині, то вона обмежена на цій множині.**

Теорема 1.10 (Больцано—Вейєрштрасса). **Із будь-якої обмеженої послідовності точок $M_1(x_1,y_2)$, $M_2(x_2,y_2)$, …, $M_n(x_n,y_n)$ завжди можна вилучити таку частинну послідовність (підпослідовність)**

$$M_{n1}(x_{n1},y_{n1}),\ M_{n2}(x_{n2},y_{n2}),\ \ldots,\ M_{nk}(x_{nk},y_{nk})$$

$$(n_1<n_2<\ldots<n_k,\ldots,\ n_k\to+\infty),$$

яка збігається до граничної точки.

Доведення. Застосуємо теорему Больцано—Вейєрштрасса (див.: ч. I, с. 326) для випадку лінійної послідовності. Якщо точки нашої послідовності містяться в скінченому прямокутнику $[a,b;\ c,d]$, то

$$a\le x_n\le b,\ \ c\le y_n\le d\ \ (n=1,2,3,\ldots).$$

Застосувавши теорему спочатку до послідовності $\{x_n\}$, вилучимо частинну послідовність $\{x_{n_k}\}$, яка збігається до деякої границі $\bar{x}$. Тоді для частинної послідовності точок

$$(x_{n1},\ y_{n1}),\ (x_{n2},\ y_{n2}),\ldots,\ (x_{nk},\ y_{nk}),\ldots$$

перші координати вже мають границю. Повторно застосуємо згадану теорему до послідовності других координат $\{y_{n_k}\}$ і вилучимо таку частинну послідовність $\{y_{n_{k_m}}\}$, яка також прямує до деякої границі $\bar{y}$. Звідси випливає, що частинна послідовність

$$(x_{n_{k_1}}, y_{n_{k_1}}),\ (x_{n_{k_2}}, y_{n_{k_2}}),\ \ldots,\ (x_{n_{k_m}}, y_{n_{k_m}}),\ \ldots$$

прямує до граничної точки $(\bar{x}, \bar{y})$.

Зауважимо, що обидва міркування легко переносяться на випадок простору $n > 2$ вимірів. У першому з них вимірюється, наприклад, лише кількість частин, на які розпадається задана прямокутна область у результаті поділу пополам кожного з визначених її проміжків. У загальному випадку цих проміжків буде n, а частин — усього 2^n.

Теорема 1.11 (Вейєрштрасса). **Якщо функція $f(x,y)$ неперервна на замкненій обмеженій множині, то серед її значень є як найменші, так і найбільші.**

Доведення (від супротивного) аналогічне доведенню відповідної теореми для одновимірного випадку (див.: ч. І, с. 359). Нехай функція $f(x,y)$, коли (x, y) змінюється в D, є необмеженою. Тоді для будь-якого n у D знайдеться така точка $M_n(x_n, y_n)$, що

$$|f(x_n, y_n)| > n. \tag{9}$$

Згідно з принципом вибору Больцано—Вейєрштрасса (див. ч. І, с. 326) з обмеженої послідовності $\{M_n\}$ можна вилучити частинну послідовність $\{M_{n_k}\}$, збіжну до граничної точки $\overline{M}(\bar{x}, \bar{y})$.

Зауважимо, що ця точка $\overline{M}$ необхідно має належати області D. Справді, у противному разі точки M_{n_k} усі були б від неї відмінні, тобто точка $\overline{M}$ була б точкою згущення області D, якій вона не належить, що неможливо з огляду на замкненість області D.

З неперервності функції в точці $\overline{M}$ випливає:

$$f(M_{n_k}) = f(x_{n_k}, y_{n_k}) \to f(\overline{M}) = f(\bar{x}, \bar{y}),$$

а це суперечить (9).

Друга теорема Вейєрштрасса формулюється й доводиться (з посиланням на попередню теорему) так само, як і в частині І для одновимірного випадку.

Зазначимо, що за аналогією обидві теореми Вейєрштрасса переносяться й на випадок, коли функція неперервна в будь-якій обмеженій замкненій множині *M*.

Як і в разі функції однієї змінної, для функції $f(x,y)$, визначеної та обмеженої у множині *M*, різниця між точними верхньою і нижньою межами її значень в *M* називається **коливанням функції в цій множині**. Якщо *M* — обмежена й замкнена (зокрема, якщо *M* є обмежена замкнена область) і функція f у ній неперервна, то коливанням є різниця між найбільшим і найменшим її значенням.

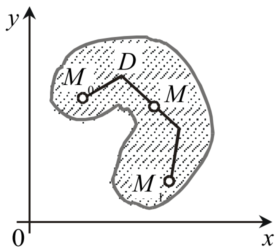


Рис. 1.18

***Теорема 1.12* (про нуль неперервної функції). Нехай функція $f(x,\ y)$ неперервна на зв'язній множині *D* і набуває у двох точках *A* і *B* цієї множини значень різних знаків. Тоді у множині *D* знайдеться така точка, що в ній функція перетворюється на нуль.**

Доведення побудуємо на зведенні до випадку функції однієї незалежної змінної.

Оскільки область *D* зв'язна, точки M_0 та M_1 можна сполучити ламаною, усі точки якої лежать у *D*. Якщо поступово перебирати вершини ламаної, то або з'ясується, що в деякій із них функція перетворюється на нуль — і тоді теорему доведено, або цього не буде. В останньому випадку знайдеться така ланка ламаної, на кінцях якої функція набуває значень різних знаків. Замінивши позначення точок, вважатимемо, що M_0 і M_1 саме і є кінцями цієї ланки. Її рівняння мають вигляд:

$$x = x_0 + t(x_1 - x_0), \underset{(0 \le t \le 1)}{\qquad\qquad} y = y_0 + t(y_1 - y_0).$$

Якщо точка $M(x, y)$ рухається вздовж цієї сторони, то початкова функція $f(x, y)$ перетворюється на складену функцію однієї змінної *t*:

$$F(t) = f(x_0 + t(x_1 - x_0),\ y_0 + t(y_1 - y_0)) \qquad (0 \le t \le 1),$$

очевидно, неперервну за теоремою 1.6 з огляду на неперервність як функції $f(x,\ y)$, так і лінійних функцій від t, підставлених замість її аргументів. Але для $F(t)$ маємо:

$$F(0) = f(x_0, y_0) < 0, \qquad F(1) = f(x_1, y_1) > 0.$$

Застосовуючи до функції $F(t)$ однієї змінної доведену для одновимірного випадку аналогічну теорему (див.: ч. I, с. 357) маємо, що $F(t') = 0$ при деякому значенні t' між 0 та 1. Тоді згідно з означенням функції $F(t)$ можемо записати:

$$f(x_0 + t'(x_1 - x_0), \quad y_0 + t'(y_1 - y_0)) = 0.$$

Точка $M'(x', y')$, де $x' = x_0 + t'(x_1 - x_0)$, $y' = y_0 + t'(y_1 - y_0)$, і є шуканою.

***Теорема 1.13* (про проміжне, або середнє значення). Нехай функція $f(x, y)$ неперервна на зв'язній множині *D* й у двох будь-яких точках *A* та *B* цієї множини набуває нерівних значень $f(A)$ і $f(B)$. Тоді на цій множині вона набуває деякого значення *M*, яке лежить між $f(A)$ і *f(B)*, тобто існує така точка $(x_0, y_0) \in D$, що $f(x_0, y_0) = M$.**

Доведення аналогічне доведенню теореми Коші для функції однієї змінної (див.: ч. I, с. 358), тобто випливає з теореми 1.12 (про нуль неперервної функції).

1.2.2. ЧАСТИННІ ПОХІДНІ ФУНКЦІЇ ДВОХ ЗМІННИХ

Нехай функція $z = f(x,\ y)$ задана в деякому околі точки $(x_0,\ y_0)$.

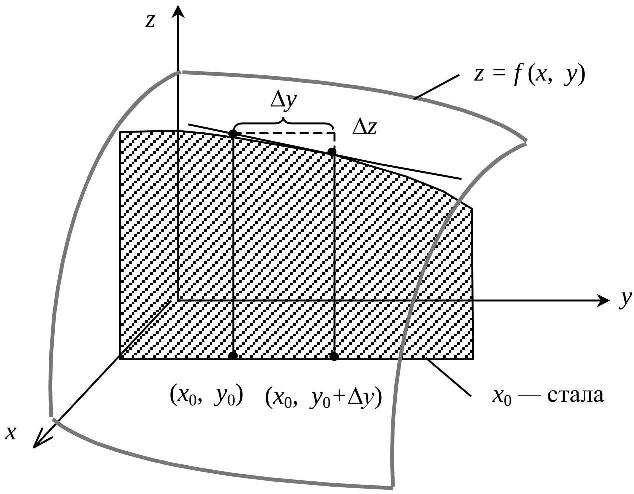


Рис. 1.20

Означення. Якщо існують скінченні границі

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x,\ y_0) - f(x_0,\ y_0)}{\Delta x};$$

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0,\ y_0 + \Delta y) - f(x_0,\ y_0)}{\Delta y},$$

то їх називають **частинними похідними функції $z = f(x, y)$ у точці $(x_0,\ y_0)$ відповідно за змінними x і y** та **позначають:** $\dfrac{\partial f(x_0,\ y_0)}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f(x_0,\ y_0)}{\partial y}$ або $f'_x(x_0,\ y_0)$, $f'_y(x_0,\ y_0)$ або $D_x f$, $D_y f$.

(Символ «∂» — так зване «де» кругле — вперше застосував Якобі.)

1.2.3. ПОВНИЙ ДИФЕРЕНЦІАЛ ФУНКЦІЇ ДВОХ ЗМІННИХ

Означення. Функція $z = f(x,\ y)$ називається **диференційовною в точці** $(x_0,\ y_0)$, якщо її повний приріст Δz можна подати у вигляді:

$$\boxed{\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y,}$$

де A, B — деякі числа; α, β — нескінченно малі при $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$. Головна лінійна частина приросту функції, тобто $\boxed{A\Delta x + B\Delta y}$, називається **повним диференціалом функції** (точніше — **першим диференціалом**) $z = f(x,\ y)$ у точці $(x_0,\ y_0)$; позначається $df(x_0,\ y_0)$ або dz. Таким чином,

$$\boxed{dz = A\Delta x + B\Delta y.} \tag{1}$$

Диференціалом незалежної змінної *x* або *y* називають її приріст, тобто за означенням беруть $dx = \Delta x$, $dy = \Delta y$.

Якщо функція f диференційовна в кожній точці множини $D \subset R^2$, то її називають **диференційовною на множині *D***.

Отже, у кожній точці, де виконується рівність (1), повний диференціал функції $z = f(x,\ y)$ обчислюється за формулою

$$\boxed{df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy.} \tag{2}$$

Теорема 1.15. **Якщо функція $z = f(x,\ y)$ диференційовна в точці $(x_0,\ y_0)$ і $dz = Adx + By$, то в точці $(x_0,\ y_0)$ існують частинні похідні**

$$\frac{\partial f(x_0,\ y_0)}{\partial x} = A, \qquad \frac{\partial f(x_0,\ y_0)}{\partial y} = B.$$

Доведення. За означенням диференційовної функції $z = f(x,\ y)$ маємо:

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y. \tag{3}$$

Узявши у (3) $\Delta y = 0$ $(\Delta x = 0)$, дістанемо $\Delta_x z(\Delta_y(z))$:

$$\Delta_x z = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \alpha\Delta x$$

$$\left(\Delta z = \frac{\partial z}{dy}\Delta x + \beta\Delta y\right).$$

Звідси

$$\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta_x z}{\Delta x} = A = \frac{\partial f(x_0,\ y_0)}{\partial x} \quad \left(\lim_{\Delta y \to 0}\frac{\Delta_y z}{\Delta y} = B = \frac{\partial f(x_0,\ y_0)}{\partial y}\right).$$

Якщо частинні похідні функції f існують у кожній точці множини $D \subset R^2$, то говорять, що ***функція f має частинні похідні на множині D***.

Аналогічно визначають і позначають частинні похідні трьох і більше змінних.

1.2.4. ЧАСТИННІ ПОХІДНІ ТА ПОВНИЙ ДИФЕРЕНЦІАЛ ФУНКЦІЇ *n*-ЗМІННИХ

Означення. Якщо існує скінченна границя

$$\lim_{\Delta x_k \to 0}\frac{f(x_1,\ \ldots,\ x_k + \Delta x_k,\ \ldots,\ x_n) - f(x_1,\ \ldots,\ x_k,\ \ldots,\ x_n)}{\Delta x_k},$$

то її називають **частинною похідною функції *f* у точці $\boldsymbol{(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)}$ за змінною $\boldsymbol{x_k}$** і позначають $\dfrac{\partial f(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)}{\partial x_k}$ або $f'_{x_k}(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$.

Похідні $\dfrac{\partial f}{\partial x_k}$, $k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n,$ називають **похідними першого порядку**.

Правило знаходження частинних похідних першого порядку

Для обчислення частинної похідної $\dfrac{\partial f}{\partial x_k}$ звичайно користуються відомими формулами і правилами диференціювання функції однієї змінної, вважаючи всі змінні, крім x_k, сталими.

Знайти частинні похідні функції

$$z = x + y^3 + \ln\left(2x + y^2\right).$$

● Функція визначена в області $y^2 > -2x$. Вважаючи, що y стале, знаходимо

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 1 + \frac{1}{2x + y^2}\,2, \qquad y^2 > -2x.$$

Вважаючи, що x стале, знаходимо

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 3y^2 + \frac{1}{2x + y^2}\,2y, \qquad y^2 > -2x.$$

Знайти частинні похідні функції

$$u = x^2 y + \sin(ax + by + cz) + \mathrm{tg}\, z.$$

● Вважаючи, що $y = \mathrm{const}$, $z = \mathrm{const}$, знаходимо

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2xy + \cos(ax + by + cz)\,a.$$

Вважаючи, що $x = \mathrm{const}$, $z = \mathrm{const}$, знаходимо

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x^2 + \cos(ax + by + cz)\,b.$$

Вважаючи, що $x = \mathrm{const}$, $y = \mathrm{const}$, знаходимо

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \cos(ax + by + cz)\,c + \frac{1}{\cos^2 z}.$$

Геометрична інтерпретація частинних похідних

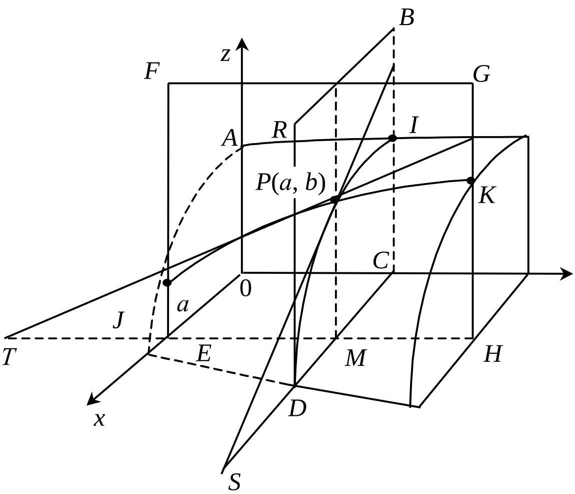


Рис. 1.21

Проведемо площину *EFGH* через точку $P(a,\ b)$ даної поверхні паралельно площині *y*0*z*. Рівняння цієї площини

$$x = a.$$

Отже, рівняння кривої, утвореної в перерізі *JPK*, буде

$$z = f(a,\ y),$$

якщо *EF* розглядати як вісь *z*, а *EH* — як вісь *y*. У цій площині $\dfrac{\partial f(x,\ y)}{\partial y}$ означає те саме, що $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, а тому $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \operatorname{tg} MTP.$

Отже, **частинна похідна $\boldsymbol{\dfrac{\partial z}{\partial y}}$ дорівнює тангенсу кута нахилу до осі *y*, дотичної до перерізу *JK* у точці *P***.

Аналогічно, якщо провести площину *BCD* через *P* паралельно площині *x*0*z*, її рівняння буде

$$y = b,$$

і в площині перерізу *DPI* частинна похідна $\dfrac{\partial f(x,\ y)}{\partial x}$ означатиме те саме, що й $\dfrac{\partial z}{\partial x}$. Звідси $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \operatorname{tg} MSP.$

Отже, **частинна похідна** $\frac{\partial z}{\partial x}$ **дорівнює тангенсу кута нахилу до осі** ***x*****, дотичної до перерізу** ***DJ*** **в точці** ***P***.

Для **повного диференціала** формула (2) узагальнюється на випадок диференційовної функції *n* змінних $f\left(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n\right)$:

$$\boxed{df = \frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}dx_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}dx_n\,.} \tag{4}$$

Знайти df, якщо $f = x + \frac{z}{x^3 + y^3}$.

• Знайдемо спочатку $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial z}$:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 1 + z\left(-\frac{1}{\left(x^3 + y^3\right)^2}\right)3x^2;$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = z\left(-\frac{1}{\left(x^3 + y^3\right)^2}\right)3y^2;$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{x^3 + y^3}.$$

Звідси за формулою (4) дістанемо:

$$dx = \left(1 - \frac{3x^2 z}{\left(x^3 + y^3\right)^2}\right)dx - \frac{3y^2 z}{\left(x^3 + y^3\right)^2}dy + \frac{1}{x^3 + y^3}dz.$$

Властивості повного диференціала

Для будь-яких диференційовних функцій $u\left(x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_n\right)$, $v\left(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n\right)$ справджуються рівності:

$$d\left(\alpha u + \beta v\right) = \alpha du + \beta dv\text{, де } \alpha,\ \beta \text{ — сталі;} \tag{5}$$

$$d\left(uv\right) = vdu + udv;$$

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2},\ v \neq 0\,.$$

1.2.5. ДОСТАТНЯ УМОВА ДИФЕРЕНЦІЙОВНОСТІ ФУНКЦІЇ ДВОХ ЗМІННИХ У ТОЧЦІ

Для функції однієї змінної диференційовність та існування похідної є рівносильними твердженнями. У разі функції багатьох змінних маємо інше: існування частинних похідних — необхідна, але не достатня умова диференційовності функції в точці. Наприклад, для функції

$$z = f(x,\ y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2}, & (x,\ y) \neq (0,\ 0); \\ 0, & (x,\ y) = (0,\ 0) \end{cases}$$

у точці $(0,\ 0)$ маємо: $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 0$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$. Проте ця функція розривна в точці $(0,\ 0)$, а тому вона не може бути диференційовною в цій точці. Отже, для диференційовності функції $z = f(x,\ y)$ у точці $(x_0,\ y_0)$ не достатньо самого лише існування частинних похідних. Для диференційовності доводиться додатково вимагати неперервності частинних похідних, як це випливає з поданої далі теореми.

Теорема 1.16. **Якщо функція $z = f(x,\ y)$ у деякому околі точки $(x_0,\ y_0)$ має неперервні частинні похідні, то вона диференційовна в цій точці.**

Доведення. Розглянемо в координатній площині $x0y$ точки $P(x_0,\ y_0)$, $Q(x_0 + \Delta x,\ y_0)$ і $R(x_0 + \Delta x,\ y_0 + \Delta y)$ (рис. 1.22).

Нехай частинні похідні визначені в деякому ε-околі точки P і точка R належить даному околу. Оскільки ε-окіл точки P — це круг радіусом ε із центром у точці P, то відрізки PQ і QR цілком належать цьому околу. Отже, функція $f(x,\ y)$ визначена на відрізках PQ і QR.

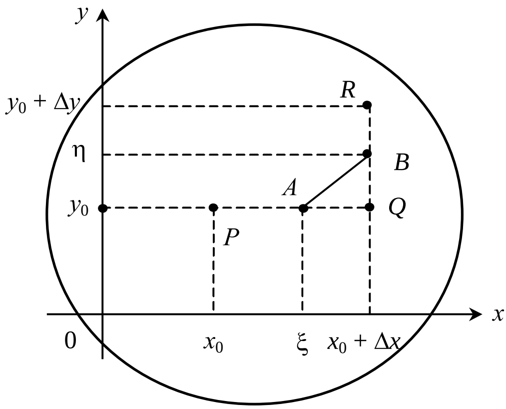


Рис. 1.22

Подамо повний приріст функції $z = f(x,\ y)$ у точці $(x_0,\ y_0)$ у вигляді

$$\Delta z = f(x_0 + \Delta x,\ y_0 + \Delta y) - f(x_0,\ y_0) =$$
$$= (f(x_0 + \Delta x,\ y_0 + \Delta y) - f(x_0 + \Delta x,\ y_0)) + (f(x_0 + \Delta x,\ y_0) - f(x_0,\ y_0)). \qquad (5)$$

На відрізку *PQ* змінна *y* має стале значення $y = y_0$, тому функція $f(x,\ y)$ на цьому відрізку є функцією однієї змінної *x*. Застосовуючи формулу Лагранжа про середнє значення, дістаємо:

$$f(x_0 + \Delta x,\ y_0) - f(x_0,\ y_0) = f'_x(\xi,\ y_0)\Delta x \qquad (6)$$

для деякого значення ξ з інтервалу $(x_0,\ x_0 + \Delta x)$. Аналогічно, на відрізку *QR* функція $f(x,\ y)$ залежить лише від *y*. Тому на проміжку $(y_0,\ y_0 + \Delta y)$ знайдеться точка η, для якої

$$f(x_0 + \Delta x,\ y_0 + \Delta y) - f(x_0 + \Delta x,\ y_0) = f'_y(\Delta x + x_0,\ \eta)\Delta y\,. \qquad (7)$$

Згідно з (6) і (7) запишемо формулу (5) у вигляді:

$$\Delta z = f'_x(\xi,\ y_0)\Delta x + f'_y(x_0 + \Delta x,\ \eta)\Delta y\,.$$

Звідси

$$\Delta z = (f'_x(x_0,\ y_0) + f'_x(\xi,\ y_0) - f'_x(x_0,\ y_0))\Delta x +$$
$$+ \left(f'_y(x_0,\ y_0) + f'_y(x_0 + \Delta x,\ \eta) - f'_y(x_0,\ y_0)\right)\Delta y =$$
$$= f'_x(x_0,\ y_0)\Delta x + f'_y(x_0,\ y_0)\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y = dz + \alpha\Delta x + \beta\Delta y,$$

де $\alpha = f'_x(\xi,\ y_0) - f'_x(x_0,\ y_0)$, $\beta = f'_y(\Delta x + x_0,\ \eta) - f'_y(x_0,\ y_0)$.

Очевидно, що при $\Delta x \to 0$ і $\Delta y \to 0$ точки A і B прямують до точки P. Частинні похідні неперервні, тому $\alpha \to 0, \ \beta \to 0,$ коли $\Delta x \to 0, \ \Delta y \to 0.$

Разом з α та β прямує до нуля і величина

$$\varepsilon = \frac{\alpha \Delta x + \beta \Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} .$$

Тому з рівності

$$\Delta z = dz + \frac{\alpha \Delta x + \beta \Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = dz + \varepsilon \rho$$

випливає диференційовність функції $z = f(x, \ y)$ у точці $(x_0, \ y_0)$.

1.2.6. ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ СКЛАДЕНОЇ ФУНКЦІЇ

Теорема 1.17. **Нехай на множині D визначено складену функцію $z = f(u, \ v)$, де $u = u(x, \ y)$, $v = v(x, \ y)$, і нехай функції $u(x, \ y)$, $v(x, \ y)$ мають у деякому околі точки $(x_0, \ y_0) \in D$ неперервні частинні похідні, а функція $f(u, \ v)$ має неперервні частинні похідні в деякому околі точки $(u_0, \ v_0)$, де $u_0 = u(x_0, \ y_0)$, $v_0 = v(x_0, \ y_0)$. Тоді складена функція $z = f(u(x, \ y), \ v(x, \ y))$ диференційовна в точці $(x_0, \ y_0)$, причому**

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}; \quad (8) \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}. \quad (9) \end{aligned}}$$

Доведення. За умовою теореми функції $u = u(x, \ y)$ і $v = v(x, \ y)$ мають неперервні частинні похідні в деякому околі точки $(x_0, \ y_0)$. Тому за теоремою 1.16 вони диференційовні в точці $(x_0, \ y_0)$:

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + \alpha_1 \Delta x + \beta_1 \Delta y,$$

$$\Delta v = \frac{\partial v}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial v}{\partial y}\Delta y + \alpha_2 \Delta x + \beta_2 \Delta y,$$

де $\alpha_1, \ \alpha_2, \ \beta_1, \ \beta_2 \to$ при $\Delta x \to 0, \ \Delta y \to 0$.

Надавши приростів лише аргументу x, дістанемо

$$\begin{aligned} \Delta_x u &= \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \alpha_1 \Delta x, \\ \Delta_x v &= \frac{\partial v}{\partial x}\Delta x + \alpha_2 \Delta x, \end{aligned} \tag{10}$$

де $\alpha_1,\ \alpha_2 \to 0$ при $\Delta x,\ \Delta y \to 0.$

Знайдемо приріст функції $z = f(x,\ y)$ за x. За умовою теореми функція $z = f(u,\ v)$ має неперервні частинні похідні в деякому околі точки $(u_0,\ v_0)$, а тому вона диференційовна в цій точці:

$$\Delta_x z = \frac{\partial z}{\partial u}\Delta_x u + \frac{\partial z}{\partial v}\Delta_x v + \alpha \Delta_x u + \beta \Delta_x v. \tag{11}$$

Підставляючи у (11) рівності (10), дістаємо:

$$\Delta_x z = \frac{\partial z}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \alpha_1 \Delta x\right) + \frac{\partial z}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\Delta x + \alpha_2 \Delta x\right) + \alpha\left(\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \alpha_1 \Delta x\right) +$$
$$+ \beta\left(\frac{\partial v}{\partial x}\Delta x + \alpha_2 \Delta x\right) = \left(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\right)\Delta x + \gamma \Delta x,$$

де

$$\gamma = \frac{\partial z}{\partial u}\alpha_1 + \frac{\partial z}{\partial v}\alpha_2 + \alpha\frac{\partial u}{\partial x} + \alpha\alpha_1 + \beta\frac{\partial v}{\partial x} + \beta\alpha_2 \text{ —}$$

нескінченно мала величина при $\Delta x \to 0$.

Тоді

$$\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta_x z}{\Delta z} = \frac{\partial z}{\partial u}\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\ \frac{\partial v}{\partial x}.$$

Аналогічно можна довести й формулу (9).

Диференційовність функції $z = f(u(x,\ y),\ v(x,\ y))$ випливає з неперервності частинних похідних $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ і $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

Знайти f'_x і f'_y для функції $f(u,\ v)$, якщо $u = xy,\ v = \dfrac{x}{y}.$

- За формулами (8) і (9) маємо:

$$f'_x = f'_u\, u'_x + f'_v\, v'_x = f'_u\,(xy)_x{}' + f'_v\left(\frac{x}{y}\right)_x' = f'_u\, y + f'_v\,\frac{1}{y};$$

$$f'_y = f'_u\, u'_y + f'_v\, v'_y = f'_u\,(xy)'_y + f'_v\left(\frac{x}{y}\right)_y' = f'_u\, x + f'_v\, x\left(-\frac{1}{y^2}\right).$$

Знайти повний диференціал функції φ, якщо $\varphi = f(u,\ v)$, $u = y/(x+y),\ v = x^2 - y^2$.

- З урахуванням формул (2) і формул (8), (9) дістаємо:
- $d\varphi = f'_u du + f'_v dv = f'_u d\left(\dfrac{y}{x+y}\right) + f'_v d\left(x^2 - y^2\right) =$

$$= f'_u \frac{(x+y)dy - yd(x+y)}{(x+y)^2} + f'_v \cdot \left(dx^2 - dy^2\right) =$$

$$= f'_u \frac{xdy - ydx}{(x+y)^2} + f'_v \cdot (2xdx - 2ydy).$$

1.2.7. ПОХІДНА ЗА НАПРЯМОМ. ГРАДІЄНТ

Означення. Нехай функція $z = f(x,\ y)$ визначена в деякому околі точки $P_0(x_0,\ y_0)$; l — деякий промінь з початком у точці $(x_0,\ y_0)$; $P(x,\ y)$ — точка на цьому промені, яка належить околу точки $(x_0,\ y_0)$ (рис. 1.23); Δl — довжина відрізка P_0P. Якщо існує $\lim\limits_{\Delta l \to 0} \dfrac{f(x,\ y) - f(x_0,\ y_0)}{\Delta l}$, то ця границя називається **похідною функції $z = f(x,\ y)$ за напрямом *l* у точці $P_0(x_0,\ y_0)$** і позначається $\dfrac{\partial z}{\partial \mathbf{l}}$.

Зокрема, $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ — похідна функції $z = f(x,\ y)$ за додатним напрямом осі *x*, а $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ — похідна функції $z = f(x,\ y)$ за додатним напрямом осі *y*.

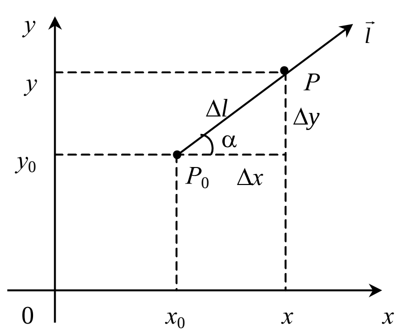


Рис. 1.23

Похідна за напрямом $\frac{\partial z}{\partial \mathbf{l}}$ характеризує швидкість зміни функції $z = f(x,\ y)$ у точці $P_0(x_0,\ y_0)$ за напрямом **l**.

Теорема 1.18. **Якщо функція $z = f(x,\ y)$ має в точці $P_0(x_0,\ y_0)$ неперервні частинні похідні, то в цій точці існує похідна $\frac{\partial z}{\partial \mathbf{l}}$ за будь-яким напрямом $\mathbf{l} = (\cos\alpha,\ \cos\beta)$, причому**

$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial \mathbf{l}} = \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{P_0} \cos\alpha + \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{P_0} \cos\beta,} \qquad (12)$$

де $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{P_0}$ і $\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{P_0}$ — значення частинних похідних у точці $P_0(x_0,\ y_0)$.

Доведення. За умовою теореми функція $z = f(x,\ y)$ має в точці $(x_0,\ y_0)$ неперервні частинні похідні, тому за теоремою 1.16 вона диференційовна в цій точці:

$$\Delta z = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y + \gamma_1 \Delta x + \gamma_2 \Delta y,$$

де γ_1, γ_2 — нескінченно малі величини при $\Delta x \to 0,\ \Delta y \to 0.$ Тоді

$$\frac{\Delta z}{\Delta l} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\Delta x}{\Delta l} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\Delta y}{\Delta l} + \gamma_1 \frac{\Delta x}{\Delta l} + \gamma_2 \frac{\Delta x}{\Delta l}.$$

Із трикутника P_0PK (рис. 1.23) маємо:

$$\frac{\Delta x}{\Delta l} = \cos\alpha, \quad \frac{\Delta y}{\Delta l} = \sin\alpha = \cos\beta.$$

Звідси

$$\frac{\Delta z}{\Delta l} = \frac{\partial z}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial z}{\partial y}\cos\beta + \gamma_1 \cos\alpha + \gamma_2 \cos\beta.$$

Якщо $\Delta l \to 0$, то $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$, а отже $\gamma_1 \to 0,\ \gamma_2 \to 0.$ Звідси

$$\frac{\partial z}{\partial \mathbf{l}} = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x,\ y_0 + \Delta y) - f(x_0,\ y_0)}{\Delta l} = \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{P_0} \cos\alpha + \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{P_0} \cos\beta.$$

Знайти похідну функції $u = x\sin(x+y)$ у точці $M(1,\ 1)$ за напрямом $\mathbf{l} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

• Знайдемо та обчислимо частинні похідні в точці $(1, 1)$ функції $u = x\ \sin(x+y)$:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{(1,\ 1)} = \left.(\sin(x+y) + x\cos(x+y))\right|_{(1,\ 1)} = \sin 2 + \cos 2;$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{(1,\ 1)} = \left.(x\cos(x+y))\right|_{(1,\ 1)} = \cos 2.$$

Тоді за формулою (12) маємо:

$$\frac{\partial z}{\partial l} = (\sin 2 + \cos 2)\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \cos 2\ \frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sin 2}{\sqrt{2}}\ .$$

Означення. Вектор з координатами $\left(\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{P_0},\ \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{P_0}\right)$, який характеризує напрям максимального зростання функції $z = f(x,\ y)$ в точці $P_0(x_0,\ y_0)$, називається **градієнтом функції $\boldsymbol{z = f(x,\ y)}$ у цій точці** і позначається $\mathbf{grad}\,\mathbf{z}$:

$$\boxed{\mathbf{grad}\,\mathbf{z} = \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\mathbf{P_0}} \mathbf{i} + \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\mathbf{P_0}} \mathbf{j},} \qquad (13)$$

де **i**, **j** — одиничні орти.

Знайти градієнт функції $f = yx^y$ у точці $M(2,\ 1)$.

• Запишемо та обчислимо частинні похідні в точці $M(2,\ 1)$:

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_M = \left. y\ yx^{y-1}\right|_M = 2^0 = 1;$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_M = \left.\left(x^y + y\,x^y \ln x\right)\right|_M = 2 + 2\ln 2.$$

Тоді згідно з (13) $\mathbf{grad}\,\mathbf{f} = 1\mathbf{i} + (2 + 2\ln 2)\mathbf{j}$, або $\mathbf{grad}\,\mathbf{f} = (1,\ 2 + 2\ln 2)$.

Аналогічно для диференційовної функції $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ у точці $P_0(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ **похідна за напрямом довільного одиничного вектора** $\mathbf{l} = (\cos\alpha_1, \cos\alpha_2, \ldots, \cos\alpha_n)$, $\sum_{k=1}^{n} \cos\alpha_k = 1$ подається так:

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial \mathbf{l}} = \sum_{k=1}^{n} \left.\frac{\partial f}{\partial x_k}\right|_{P_0} \cos\alpha_k.}$$

Означення. **Градієнтом диференційовної функції** $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *у точці* $P_0(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ називають вектор $\mathbf{grad\,f} = \sum_{k=1}^{n} \left.\frac{\partial f}{\partial x_k}\right|_{P_0} \mathbf{i_k}$, $k = 1, 2, \ldots, n$, де $\mathbf{i_k}$ — одиничні орти, а значення частинних похідних $\left.\frac{\partial f}{\partial x_k}\right|_{P_0}$ обчислені в точці $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$.

Властивості:

1. $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{l}} = \mathbf{grad f} \cdot \mathbf{l}$.
2. $\max\limits_{\mathbf{l}} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{l}} = |\mathbf{grad f}|$.
3. Якщо $\mathbf{grad f} \neq 0$, то похідна $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{l}}$ досягає найбільшого значення при $\mathbf{l} = \frac{\mathbf{grad f}}{|\mathbf{grad f}|}$.

1.2.8. ЧАСТИННІ ПОХІДНІ І ПОВНІ ДИФЕРЕНЦІАЛИ ВИЩИХ ПОРЯДКІВ

Нехай функція $z = f(x, y)$ має частинні похідні в усіх точках множини D. Візьмемо будь-яку точку $(x, y) \in D$. Якщо в цій точці існують частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial z}{\partial y}$, то вони залежать від x і y, тобто вони є функціями двох змінних. Отже, можна ставити питання про відшукання їх частинних похідних. Якщо вони існують, їх називають **частинними похідними другого порядку** і позначають відповідно $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ (читаємо: «де два зет по де ікс квадрат») або z''_{xx}, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ або z^2_{yy}, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ або z''_{xy}, $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ або z''_{yx}. Аналогічно визначаються і позначаються частинні похідні третього і вищих порядків.

Нехай функція $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ в околі точки $x_0 = \left(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0\right)$ має частинну похідну першого порядку $\frac{\partial u}{\partial x_k}$.

Означення. Частинну похідну функції $\frac{\partial u}{\partial x_k}$ за змінною x_l називають **частинною похідною другого порядку за змінними x_l і x_k** і позначають $\frac{\partial^2 u}{\partial x_l \partial x_k}$ або $f''_{x_l x_k}$.

Отже, за означенням:

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial x_l \partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_l}\left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right).}$$

Якщо $l = k$, похідну $\frac{\partial^2 u}{\partial x_l \partial x_k}$ позначають $\frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2}$.

***Означення*. Частинною похідною порядку $m \in N$** називають частинну похідну першого порядку за будь-якою змінною від будь-якої похідної $m-1$ порядку.

Частинні похідні за різними змінними називають **мішаними частинними похідними**.

***Теорема 1.19.* Якщо дві мішані похідні порядку *m*, що відрізняються лише порядком диференціювання, неперервні в деякій точці, то їх значення в цій точці збігаються.**

Знайти $\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}$, якщо $z = x^3 y^4$.

● Маємо: $\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\right) =$

$$= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\left(3x^2 y^4\right)\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(12x^2 y^3\right) = 36x^2 y^2.$$

Знайти $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ і $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ для функції $z = \cos\left(x^2 + y^2\right)$.

- $$\left.\begin{array}{ll} \dfrac{\partial z}{\partial x} = -2x\sin\left(x^2+y^2\right), & \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -4xy\cos\left(x^2+y^2\right) \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = -2x\sin\left(x^2+y^2\right), & \dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = -4xy\cos\left(x^2+y^2\right) \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}.$$

Означення. **Диференціалом другого порядку функції $z = f(x,\ y)$** називається диференціал її повного диференціала:

$$\boxed{d^2 z = d(dz).}$$

Аналогічно визначаються диференціали третього і вищих порядків:

$$\boxed{\begin{array}{l} d^3 z = d\left(d^2 z\right) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots . \\ d^m z = d\left(d^{m-1} z\right) \end{array}}$$

Для диференціала порядку *m* справджується залежність:

$$\boxed{d^m u = \sum_{k=1}^{m} C_m^k \frac{\partial^m u}{\partial x^{m-k} \partial y^k} dx^{m-k} dy^k.} \tag{14}$$

У частинному випадку при $m = 2$ формула (14) набирає вигляду:

$$\boxed{d^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} dxdy + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} dy^2.} \tag{15}$$

Зауваження. Для складеної функції $\omega = f(x,\ y)$, де $x = x(u,\ v)$, $y = y(u,\ v)$, другий її диференціал, загалом, не подається через *dx* і *dy* згідно з формулою (15). Отже, **для порядку** $m \geq 2$ **не виконується властивість інваріантності форми диференціала щодо вибору змінних**.

У разі функції n змінних $u = f(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$ формула (14) набирає вигляду:

$$d^m u = \sum C_m^{\alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_n} \frac{\partial^m u}{\partial x_1^{\alpha_1}\ \ldots\ \partial x_n^{\alpha_n}} dx_1^{\alpha_1}\ \ldots dx_n^{\alpha_n},$$

$$\text{де}\quad C_m^{\alpha_1,\ldots,\ \alpha_n} = \frac{m!}{\alpha_1!\ \alpha_2!\ \ldots \alpha_n!}, \tag{16}$$

де підсумовування виконується за всіма цілими невід'ємними α_i, такими що $\sum\limits_{k=1}^{m} \alpha_k = m$.

При $m = 2$ формула (16) подається так:

$$d^2 u = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} dx_k^2 + 2 \sum_{\substack{i,\ k=1 \\ i<k}}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} dx_i dx_k.$$

Знайти $d^2 z$, якщо $z = \cos x \operatorname{tg} y$.

• $\dfrac{\partial z}{\partial x} = -\sin x \operatorname{tg} y$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \cos x \dfrac{1}{\cos^2 y}$;

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\cos x \operatorname{tg} y$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\sin x \dfrac{1}{\cos^2 y}$; $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \cos x \left(\dfrac{2 \sin y}{\cos^3 y} \right)$.

Згідно з (15) маємо:

$$d^2 z = -\cos x \operatorname{tg} y dx^2 - 2 \sin x \frac{1}{\cos^2 y} dx dy + \frac{2 \cos x \sin y}{\cos^3 y} dy^2.$$

1.2.9. ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ НЕЯВНОЇ ФУНКЦІЇ

І. Функція двох змінних. Функція $f(x,\ y) = 0$ визначає одну зі змінних x або y як неявну функцію іншої змінної. Поданий вираз — це деяке рівняння, що містить x та y і всі члени якого перенесені в ліву частину. Нехай $u = f(x,\ y)$. Тоді $\dfrac{du}{dx} = \dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial y} \dfrac{dy}{dx}$.

Проте оскільки $f(x,\ y) = 0$, то $u = 0$ і $\dfrac{du}{dx} = 0$. Звідси

$$\frac{\partial f}{dx}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx}=0. \qquad (17)$$

Розв'язавши рівняння (17) відносно $\frac{dy}{dx}$ (вважаючи, що $\frac{\partial f}{\partial x}$ і $\frac{\partial f}{\partial y}$ існують), знайдемо залежність

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}} \qquad \left(\frac{\partial f}{\partial y}\neq 0\right). \qquad (18)$$

Це так звана **формула диференціювання неявної функції**.

Нею подаються відносні швидкості зміни значень x щодо значень y, чим забезпечується незмінність $f(x, y)$. Геометрично це означає, що точка (x, y) рухається вздовж кривої, рівняння якої є $u = f(x, y)$, а (18) визначає для будь-якого моменту напрям її руху.

Для функції $x^2y^4+\sin y=0$ знайти $\frac{dy}{dx}$.

• Нехай

$$f(x,\ y)=x^2y^4+\sin y,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=2xy^4,\quad \frac{\partial f}{\partial y}=4x^2y^3+\cos y.$$

З рівняння (18) знаходимо:

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{2xy^4}{4x^2y^3+\cos y}.$$

Відомо, що змінна x, проходячи через значення $x = 3$ дм, зростає зі швидкістю 2 дм/с. З'ясуємо, з якою швидкістю має змінюватись y при $y = 1$ дм, щоб функція $2xy^2 - 3x^2y$ лишалася сталою.

• Нехай

$$f(x,\ y)=2xy^2-3x^2y;$$

знаходимо частинні похідні цієї функції за x і за y:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=2y^2-6xy,\quad \frac{\partial f}{\partial y}=4xy-3x^2.$$

Підставляючи в (18), маємо:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2y^2 - 6xy}{4xy - 3x^2}, \quad \text{або} \quad \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = -\frac{2y^2 - 6xy}{4xy - 3x^2}.$$

За умовою $x = 3$, $y = 1$, $\frac{dx}{dt} = 2$, звідки $\frac{dy}{dt} = -\frac{32}{15}$ (дм/с).

Знайти похідні від функцій

1. $u = z^2 + y^3 + zy,$
$z = \sin x,\ y = e^x.$

• $\frac{du}{dx} = 3e^{3x} + e^x(\sin x + \cos x) + \sin 2x.$

2. $u = \operatorname{arctg}(xy),\ y = e^x.$

• $\frac{du}{dx} = \frac{e^x(1+x)}{1+x^2e^{2x}}.$

3. $u = \ln(a^2 - \rho^2),\ \rho = a\sin\theta.$

• $\frac{du}{d\theta} = -2\operatorname{tg}\theta.$

4. $u = v^3 + vy,\ v = \ln s,\ y = e^s.$

• $\frac{du}{ds} = \frac{3v^2 + y}{s} + ve^s.$

5. $u = \frac{e^{ax}(y - z)}{a^2 + 1},$
$y = a\sin x,\ z = \cos x.$

• $\frac{du}{dx} = e^{ax}\sin x.$

II. Функція трьох змінних. Нехай $P\,(x, y, z)$ — точка на поверхні, заданій рівнянням:

$$u = F(x,\ y,\ z) = 0, \tag{19}$$

і нехай PC і AP — перерізи, що утворюються площинами, проведеними через точку P паралельно площинам $Y0Z$ і $X0Z$ (рис. 1.24).

Для точок кривої *AP* змінна *y* лишається сталою. Отже, згідно з (19) *z* є неявною функцією лише *x*, а на підставі (16) виконується рівність:

$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}}.} \tag{20}$$

Геометрична інтерпретація. Формула (20) визначає тангенс кута нахилу кривої *AP* у точці *P* до осі 0*x*.

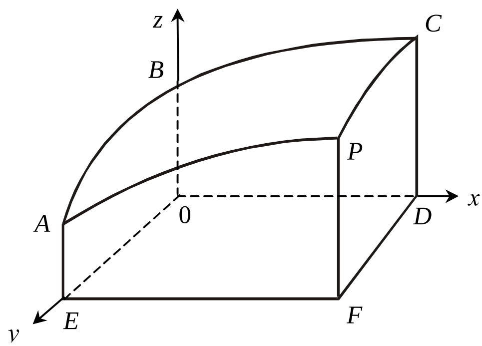


Рис. 1.24

У лівій її частині замість $\frac{dz}{dx}$ записано $\frac{\partial z}{\partial x}$, оскільки згідно з (19) змінна *z* була спочатку неявною функцією *x* і *y* (формулу (20) виведено за припущення, що величина *y* лишається сталою).

Аналогічно нахил кривої *PC* до осі 0*y* у точці *P* задається рівнянням:

$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial y}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}}.} \tag{21}$$

1.2.10. ФОРМУЛА ТЕЙЛОРА ДЛЯ ФУНКЦІЇ ДВОХ ЗМІННИХ

Нехай функція двох змінних $z = f(x, y)$ в околі точки (x_0, y_0) має неперервні похідні всіх порядків до m включно. Тоді в цьому околі справджується рівність:

$$f(x;\, y) = \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{k} C_k^i \frac{\partial^k f(x_0;\, y_0)}{\partial x^{k-i} \partial y^i} (x - x_0)^{k-i} (y - y_0)^i + O(\rho^m), \qquad (23)$$

де $\rho = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$, $x \to x_0$, $y \to y_0$.

Означення. Многочлен

$$P_m(x;\, y) = \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{k} C_k^i \frac{\partial^k f(x_0;\, y_0)}{\partial x^{k-i} \partial y^i} (x - x_0)^{k-i} (y - y_0)^i$$

називають **многочленом Тейлора *m*-го порядку** функції $f(x, y)$, а функцію

$$\boxed{r_m(x,\, y) = f(x,\, y) - P_m(x,\, y)}$$

— **залишковим членом *m*-го порядку формули Тейлора.**

Формулу (23) називають **формулою Тейлора *m*-го порядку функції *f*(*x*, *y*) в околі точки (x_0, y_0) із залишковим членом у формулі Пеано**. Зокрема, при $x_0 = y_0 = 0$ формулу (23) називають **формулою Маклорена**.

Якщо функція $f(x, y)$ має в околі точки (x_0, y_0) неперервні похідні до $(m + 1)$-го порядку включно, то для будь-якої точки (x, y) із цього околу знайдеться точка $(\xi,\, \eta) = (x_0 + \theta(x - x_0),\ y_0 + \theta(y - y_0))$, $0 < \theta < 1$, така що

$$f(x, y) = P_m(x, y) + \frac{1}{(m+1)!} \sum_{i=0}^{m+1} C_{m+1}^i \frac{\partial^{m+1} f(\xi; \eta)}{\partial x^{m+1-i} \partial y^i} (x - x_0)^{m+1-i} (y - y_0)^i, \qquad (24)$$

де $P_m(x, y)$ — многочлен Тейлора.

Формулу (24) називають **формулою Тейлора із залишковим членом у формі Лагранжа**. Якщо функція $f(x, y)$ подається у вигляді (23), (24), то говорять, що вона розкладена **за формулою Тейлора в околі точки (x_0, y_0)**.

Для функцій трьох і більшої кількості змінних формула Тейлора виводиться аналогічно.

Наприклад, для функції $z = f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ у точці $(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$ формула (23) набирає вигляду

$$f = \sum_{k=0}^{\infty}\sum \frac{1}{\alpha_1!\ldots\alpha_n!}\frac{\partial^k f(x_1^0; x_2^0; \ldots; x_n^0)}{\partial x_1^{\alpha_1}\ldots\partial x_n^{\alpha_n}}(x_1 - x_1^0)^{\alpha_1}\ldots(x_n - x_n^0)^{\alpha_n} + \mathrm{o}(\rho^m),$$

де $\rho = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_1 - x_i^0)^2}$, $x_i \to x_i^0$ $i = 1, 2, \ldots, n$ і підсумовування виконується за всіма цілими невід'ємними α_i, такими що $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i = k$.

1.2.11. ВИЗНАЧНИК ЯКОБІ (ЯКОБІАН)

Важливим формальним засобом дослідження функцій є визначники, утворені з частинних похідних.

Нехай дано n функцій n змінних:

$$\begin{aligned} y_1 &= f_1(x_1; x_2; \ldots; x_n) \\ y_2 &= f_2(x_1; x_2; \ldots; x_n) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n &= f_n(x_1; x_2; \ldots; x_n) \end{aligned} \tag{25}$$

які визначені в деякій n-вимірній області D і мають у ній неперервні похідні за всіма змінними. Складемо із цих похідних визначник

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial y_2}{\partial x_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial y_n}{\partial x_1} & \frac{\partial y_n}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial y_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}. \tag{26}$$

Визначник (26) **називають функціональним визначником Якобі, або якобіаном, системи функцій** (25) за ім'ям німецького математика Якобі, який уперше вивчив його властивості.

Позначають якобіан символом

$$\frac{D(y_1, y_2, .., y_n)}{D(x_1, x_2, ..., x_n)}.$$

Якобіан має властивості, які подібні до властивостей звичайної похідної. Глибша аналогія між похідними та якобіанами розкривається в теорії неявних функцій, особливо коли йдеться про заміну змінних у кратних інтегралах.

1.2.12. ЕКОНОМІЧНИЙ ЗМІСТ ЧАСТИННИХ ПОХІДНИХ

Нехай задано функцію $z = f(x, y)$.

Означення*. Частинною еластичністю функції *f* відносно *x називається величина

$$\varepsilon_{f,x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{\Delta f}{f}}{\frac{\Delta x}{x}} = x \frac{f'_x}{f}. \tag{27}$$

Частинною еластичністю функції *f* відносно *y* називається величина

$$\varepsilon_{f,y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\frac{\Delta f}{f}}{\frac{\Delta y}{y}} = y \frac{f'_y}{f}. \tag{28}$$

Інтерпретація. $\boxed{\frac{\Delta f}{f} \approx \varepsilon_{f,x} \frac{\Delta x}{x}}$:

Відсоткове відношення функції наближено дорівнює відсотковому відношенню змінної x з коефіцієнтом $\varepsilon_{f,x}$ (коли y — величина стала).

Найчастіше в економіці застосовують поняття *еластичності попиту.*

Нехай функції $q_1 = f_1(p_1, p_2)$ і $q_2 = f_2(p_1, p_2)$ виражають попит на товари A і B, що залежать від цін p_1 і p_2 на зазначені товари. Частинні еластичності попиту щодо цін p_1 і p_2 за формулами (27) і (28) набирають вигляду:

$$\varepsilon_{q_1, p_1} = \frac{p_1}{q_1} \frac{\partial q_1}{\partial p_1}, \qquad \varepsilon_{q_1, p_2} = \frac{p_2}{q_1} \frac{\partial q_1}{\partial p_2};$$

$$\varepsilon_{q_2,\,p_1}=\frac{p_1}{q_2}\frac{\partial q_2}{\partial p_1},\quad \varepsilon_{q_2,p_2}=\frac{p_2}{q_2}\frac{\partial q_2}{\partial p_2}.$$

Інтерпретація. Частинна еластичність $\varepsilon_{q_1,\,p_1}$ попиту на товар *A* щодо ціни p_1 цього товару наближено подає відсоток підвищення (або зниження) попиту на товар *A*, якщо його ціна зростає на 1%, а ціна товару *B* лишається незмінною.

Частинна еластичність ε_{q_1,p_2} попиту на товар *A* щодо ціни товару *B* наближено подає відсоток підвищення (зниження) попиту на товар *A*, якщо ціна товару *B* зростає на 1%, а товару *A* залишається без змін.

Функція попиту на товар *A* подається у вигляді

$$q_1=f(p_1,p_2)=20-2p_1+p_2.$$

Знайти частинні коефіцієнти еластичностей.

● Маємо

$$\varepsilon_{q_1,p_1}=-\frac{2p_1}{20-2p+p_2},\quad \varepsilon_{q_1,p_2}=\frac{p_2}{20-2p_1+p_2}.$$

Для цін $p_1=2$, $p_2=4$

$$\varepsilon_{q_1,p_1}=\frac{-4}{20}=-0{,}2.$$

Це означає, що коли ціна товару *A* зростає на 1%, а товару *B* залишається без змін, то попит на товар знижується на 0,2%. Рівність

$$\varepsilon_{q_1,p_2}=\frac{4}{20}=0{,}2$$

відбиває аналогічну залежність: якщо ціна товару *B* зростає на 1% за незмінної ціни товару *A*, то попит на цей товар зростає приблизно на 0,2%.

1.3. ДОСЛІДЖЕННЯ ФУНКЦІЙ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

1.3.1. ПОНЯТТЯ ЕКСТРЕМУМУ ФУНКЦІЇ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

Означення. Точка $\left(x_1^0,\,x_2^0,\ldots,\,x_n^0\right)$ називається **точкою максимуму функції** $\boldsymbol{z=f\left(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n\right)}$, якщо існує окіл точки $\left(x_1^0,\ \ x_2^0,\ \ldots,\ \ x_n^0\right)$, для всіх точок якого виконується нерівність

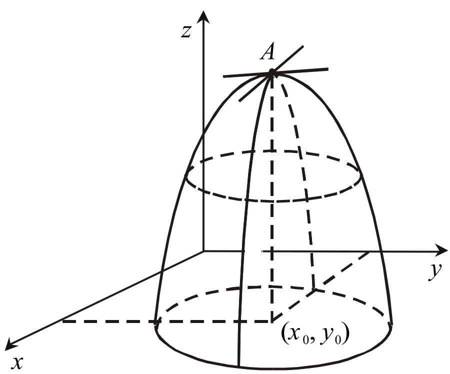
$$f(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n) \le f\left(x_1^0,\ x_2^0,\ \ldots,\ x_n^0\right).$$

Означення. Точка $\left(x_1^0,\ x_2^0,\ \ldots,\ x_n^0\right)$ називається **точкою мінімуму функції** $\boldsymbol{z = f\left(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n\right)}$, якщо існує окіл точки $\left(x_1^0,\ x_2^0,\ \ldots,\ x_n^0\right)$, для всіх точок якого виконується нерівність

$$f\left(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n\right) \ge f\left(x_1^0,\ x_2^0,\ \ldots,\ x_n^0\right).$$

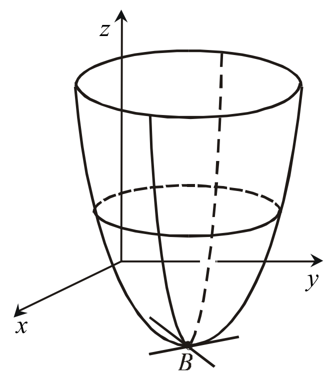
Точки максимуму і мінімуму називаються **точками екстремуму**.

Графічна інтерпретація



Точка *A* — точка максимуму

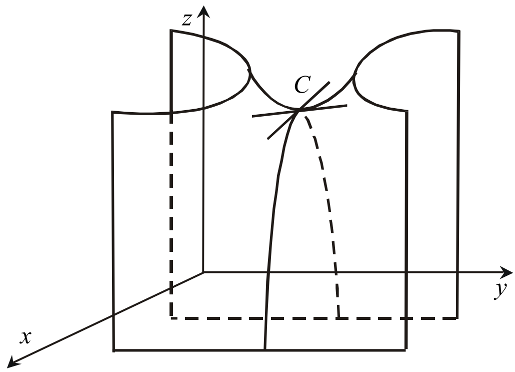
Рис. 1.25



Точка *B* — точка мінімуму

Рис. 1.26

Можливий ще й такий варіант екстремальної точки: так звана **сідлова точка** (рис. 1.27).



Точка С — сідлова точка

Рис. 1.27

1.3.2. НЕОБХІДНІ УМОВИ ІСНУВАННЯ ЕКСТРЕМУМУ

Теорема 1.20. **Для точки екстремуму $x^0=(x_1^0,\ x_2^0,\ldots,\ x_n^0)$ функції $z=f\left(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n\right)$ частинні похідні $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}\left(x^0\right)$ $\left(i=1,\ \ldots,\ n\right)$ або дорівнюють нулю, або не існують.**

Доведення. Розглянемо функцію $\varphi\left(x_1\right)=f\left(x_1,\ x_2^0,\ \ldots,\ x_n^0\right)$ однієї змінної, визначеної умовами теореми в деякому околі точки x_1^0 дійсної осі. У точці x_1^0 функція $\varphi\left(x_1\right)$ має екстремум. Тоді, оскільки $\varphi'(x_1^0)=\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(x_1^0,\ x_2^0,\ldots,\ x_n^0)$, то або $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}\left(x^0\right)=0$, або $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}\left(x^0\right)$ не існує (за теоремою для функції однієї змінної).

Аналогічно доводимо випадки $i=2,\ \ldots,\ n$.

Означення. Точки, в яких функція визначена, а її частинні похідні дорівнюють нулю або не існують, називають **критичними точками** цієї функції.

1.3.3. ДОСТАТНІ УМОВИ ІСНУВАННЯ ЕКСТРЕМУМУ

Теорема 1.21. **Нехай функція $z=f(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$ — двічі неперервно диференційовна в околі стаціонарної точки $x^0=(x_1^0,\ x_2^0,\ \ldots,\ x_n^0)$. Тоді точка $x^0=(x_1^0,\ x_2^0,\ \ldots,\ x_n^0)$:**

1) є точкою мінімуму функції, якщо

$$d^2 f(x^0)\geq 0, \tag{2}$$

причому рівність виконується лише за умови

$$\sum_{i=1}^{n} dx_i^2=0;$$

2) є точкою максимуму функції, якщо

$$d^2 f(x^0)\leq 0, \tag{3}$$

причому рівність виконується лише за умови

$$\sum_{i=1}^{n} dx_i^2=0;$$

3) не є точкою екстремуму, якщо $d^2 f(x^0)$ набуває як додатних, так і від'ємних значень.

Умови 1)—3) означають відповідно, що квадратична форма відносно диференціалів незалежних змінних

$$d^2 f(x^0)=\sum_{i,\ j=1}^{n}\frac{\partial^2 f(x_0)}{\partial x_i \partial x_j}dx_i dx_j$$

додатно визначена, від'ємно визначена, невизначена.

Доведення. **1. Умови існування екстремуму.** Нехай функція $f(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$ визначена, неперервна і має неперервні похідні першого і другого порядків у околі деякої *стаціонарної точки* $(x_1^0,\ x_2^0,\ \ldots,\ x_n^0)$. Розкладаючи різницю

$$\Delta=f(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)-f(x_1^0,\ x_2^0,\ \ldots,\ x_n^0)$$

за формулою Тейлора, дістаємо

$$\Delta = \frac{1}{2}\Big\{ f''_{x_1^2}\Delta x_1^2 + f''_{x_2^2}\Delta x_2^2 + \ldots + f''_{x_n^2}\Delta x_n^2 + 2 f''_{x_1 x_2}\Delta x_1 \Delta x_2 + \\ + 2 f''_{x_1 x_3}\Delta x_1 \Delta x_3 + \ldots + 2 f''_{x_{n-1} x_n}\Delta x_{n-1}\Delta x_n \Big\} = \frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{n} f''_{x_i x_k}\Delta x_i \Delta x_k\,, \tag{4}$$

де $\Delta x_i = x_i - x_i^0$; усі похідні обчислені в деякій точці

$$\left(x_1^0 + \theta\Delta x_1,\ x_2^0 + \theta\,\Delta x_2,\ \ldots,\ x_n^0 + \theta\Delta x_n\right) \quad \left(0 < \theta < 1\right).$$

Введемо значення

$$f''_{x_i x_k}\left(x_1^0,\ x_2^0,\ \ldots,\ x_n^0\right) = a_{ik} \quad \left(i,\ k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n\right),\ a_{ik} = a_{ki}\left(\alpha_{ik} = \alpha_{ki}\right) \tag{5}$$

так, що

$$f''_{x_i x_k}\left(x_1^0 + \theta\Delta x_1,\ \ldots,\ x_n^0 + \theta\Delta x_n\right) = a_{ik} + \alpha_{ik}$$

і

$$\alpha_{ik} \to 0 \text{ при } \Delta x_1 \to 0,\ \ldots,\ \Delta x_n \to 0. \tag{6}$$

Тепер вираз (4) можна записати у вигляді

$$\Delta = \frac{1}{2}\left\{ \sum_{i,\ k=1}^{n} a_{ik}\Delta x_i \Delta x_k + \sum_{i,\ k=1}^{n} \alpha_{ik}\Delta x_i \Delta_k \right\}. \tag{7}$$

На першому місці в дужках міститься *другий диференціал* функції f у розглядуваній точці. Він являє собою **квадратичну форму** від змінних $\Delta x_1,\ \ldots,\ \Delta x_n$:

$$\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}\Delta x_i \Delta x_k. \tag{8}$$

На підставі властивостей цієї квадратичної форми й відшукуємо відповідь на запитання, яке нас цікавить.

Нагадаємо, що у вищій алгебрі квадратичну форму

$$\sum_{i,\ k=1}^{n} a_{ik} y_i y_k \quad (a_{ik} = a_{ki}) \tag{9}$$

від змінних $y_1,\ \ldots,\ y_n$ називають **визначеною додатною (від'ємною)**, якщо вона має **додатні (від'ємні)** значення при всіх значеннях аргументів, що не дорівнюють одночасно нулю.

Відомий критерій Сільвестра є необхідною і достатньою умовою визначеності й додатності квадратичної форми (8). Цей критерій подається ланцюжком нерівностей:

$$a_{11}>0,\quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}>0,\quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}>0,\ \ldots,\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}>0.$$

Визначена від'ємна форма зі зміною знака всіх її членів перетворюється на визначену додатну, і навпаки. Згідно з цим легко знайти й характеристику від'ємної форми: вона подається ланцюжком нерівностей, який випливає із записаного щойно зі зміною знаку нерівностей *через одну* (починаючи з першої від'ємної).

За допомогою цих понять сформульовано умови теореми 1.21.

Розглянемо відстань

$$\rho=\sqrt{\Delta x_1^2+\ldots+\Delta x_n^2}$$

між точками $\left(x_1^0,\ \ldots,\ x_n^0\right)$ і $\left(x_1,\ \ldots,\ x_n\right)$. Виносячи у (7) за дужку ρ і беручи

$$\frac{\Delta x_i}{\rho}=\xi_i\quad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n),$$

подаємо вираз для Δ у вигляді

$$\Delta=\frac{\rho^2}{2}\left\{\sum_{i,\ k=2}^{n}a_{ik}\xi_i\xi_k+\sum_{i,\ k=1}^{n}a_{ik}\xi_i\xi_k\right\}. \tag{10}$$

Числа ξ_i одночасно не перетворюються на нуль, а тому якщо форма (8) — *додатна*, то перша сума в дужках в (10) має завжди додатний знак. Більш того, оскільки

$$\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2=1, \tag{11}$$

то знайдеться таке стале додатне число m, що при всіх можливих значеннях ξ_i виконуватиметься нерівність

$$\sum_{i,\ k=1}^{n}a_{ik}\xi_i\xi_k\geq m.$$

Справді, ця сума подає неперервну функцію аргументів ξ_i як на всьому просторі, так і у множині M тих точок $\left(\xi_1,\ \ldots,\ \xi_n\right)$, які задовольняють співвідношення (11) («сферична поверхня»). Але ця множина замкнена, тобто містить усі свої точки скупчення, а тоді, за теоремою Вейєрштрасса, зазначена сума набуває в M і *найменшого* значення m, причому лише додатного (як і всі її значення в M).

Водночас згідно з (6) друга сума в (10) для достатньо малих ρ, очевидно, буде за абсолютною величиною вже меншою від *m*, так що весь вираз у дужках буде *додатним*. Тому в достатньо малій сфері із центром у точці $\left(x_1^0,\ \ldots,\ x_n^0\right)$ різниця Δ буде додатна, звідки й випливає, що в зазначеній точці функція $f\left(x_1,\ \ldots,\ x_n\right)$ має мінімум.

Аналогічно досліджуємо й випадок, коли форма (8) буде визначеною, але від'ємною.

2. Умови відсутності екстремуму. Квадратична форма (9) називається **невизначеною**, якщо вона може набувати значень протилежних знаків.

Нехай при $\Delta x_i = h_i\ \left(i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n\right)$ форма (8) набуває додатного значення:

$$\sum_{i,\ k=1}^{n} a_{ik} h_i h_k > 0\,, \tag{12}$$

а при $\Delta x_i = \overline{h}_i\ \left(i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n\right)$ — від'ємного:

$$\sum_{i,\ k=1}^{n} a_{ik} \overline{h}_i \overline{h}_k < 0\,.$$

Візьмемо спочатку

$$\Delta x_i = h_i t \ \text{ при } \ t \neq 0\ \ \left(i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n\right),$$

що відповідає руху вздовж *по прямій*, яка сполучає точки $\left(x_1^0,\ \ldots,\ x_n^0\right)$ і $\left(x_1^0 + h_1,\ \ldots,\ x_n^0 + h_n\right)$. Виносячи в (7) за дужки t^2, дістаємо

$$\Delta = \frac{t^2}{2}\left\{\sum_{i,\ k=1}^{n} a_{ik} h_i h_k + \sum_{i,\ k=1}^{n} a_{ik} h_i h_k\right\}.$$

Перша сума в дужках згідно з (12) є *певне додатне* число (12). Що ж до другої суми, то її коефіцієнти прямують до 0 при $t \to 0$, а водночас, очевидно, і всі $\Delta x_i \to 0$. Отже, при достатньо малому *t* вираз у фігурних дужках (а з ним і вся різниця Δ) стає *додатним*, тобто в точках зазначеної прямої, достатньо близьких до $\left(x_1^0,\ \ldots,\ x_n^0\right)$, виконується нерівність

$$f\left(x_1,\ \ldots,\ x_n\right) > f\left(x_1^0,\ \ldots,\ x_n^0\right).$$

Проте якщо взяти

$$\Delta x_i = \overline{h}_i t \ \text{ при } \ t \neq 0\ \ \left(i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n\right),$$

тобто рухатися вздовж другої прямої, що сполучає точку $\left(x_1^0, \ldots, x_n^0\right)$ з точкою $\left(x_1^0 + \bar{h}_1, \ldots, x_n^0 + \bar{h}_n\right)$, то в її точках, достатньо близьких до $\left(x_1^0, \ldots, x_n^0\right)$, тобто таких, що відповідають достатньо малому *t*, виконується нерівність

$$f\left(x_1, \ldots, x_n\right) < f\left(x_1^0, \ldots, x_n^0\right).$$

Цим доведено, що в досліджуваній точці не може бути ні максимуму, ні мінімуму. ♦

Може статися, що форма (9), хоча й не набуває значень *різних* знаків, усе ж не є визначеною, оскільки перетворюється на нуль не лише при нульових значеннях аргументів. У такому разі форму називають **напіввизначеною**.

Випадок, коли форма (8) є *напіввизначеною*, вважається «сумнівним». Залежно від поводження вищих похідних у цьому разі екстремум може бути, а може й бути. Зокрема, вищі похідні доводиться залучати й тоді, коли всі похідні другого порядку в досліджуваній точці перетворюються на нуль.

«Сумнівний» випадок ми не досліджуватимемо.

Зауваження. 1. Для функції $f(x)$ однієї змінної форма (8) зводиться до одночлена

$$f''(x_0)\Delta x^2,$$

де x_0 — досліджувана точка. Ця «форма» є визначеною — додатною при $f''(x_0) > 0$ і від'ємною при $f''(x_0) < 0$.

2. Для функції $z = f(x, y)$ двох змінних форма

$$a_{11}\Delta x^2 + 2a_{12}\Delta x\Delta y + a_{22}\Delta y^2$$

при $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0$, буде *визначеною* (додатною при $a_{11} > 0$ і від'ємною при $a_{11} < 0$), а при $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 < 0$ — *невизначеною*.

Отже, якщо

1) $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0$, то у стаціонарній точці (x_0, y_0) функція $f(x, y)$ має екстремум: $a_{11} < 0$ — точка максимуму; $a_{11} > 0$ — точка мінімуму;

2) $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 < 0$ — у точці (x_0, y_0) функція $f(x, y)$ не має екстремуму;

3) $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0$ — сумнівний випадок.

1.3.4. ГЕССІАН

Другий диференціал функції багатьох змінних $u = f\left(x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n\right)$

$$d^2u = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2}dx_2 + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_m}\partial x_m\right)^2 u \qquad (13)$$

є симетричною квадратичною формою відносно диференціалів незалежних змінних $dx_1,\ dx_2, ...,\ dx_m$.

Означення. **Матриця квадратичної форми (13), елементи якої є частинними похідними другого порядку функції $f\left(x_1,\ x_2,\ ...,x_m\right)$, тобто $\boxed{a_{ik} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k}}$, називається *матрицею Гессе*:**

$$\boldsymbol{H} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \ldots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_m} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \ldots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_m \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_m \partial x_2} & \ldots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_m^2} \end{pmatrix}. \qquad \mathbf{(14)}$$

Визначник матриці H називається **гессіаном**.

У частинному випадку функції двох змінних достатні умови екстремуму з використанням гессіана формулюються так.

Теорема 1.22. **Нехай функція $z = f(x, y)$ двічі неперервно диференційовна в околі стаціонарної точки (x_0, y_0). Тоді точка (x_0, y_0):**

1) є точкою мінімуму, якщо в ній

$$\Delta_1 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} > 0, \quad \det H = \Delta_2 = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{vmatrix} > 0;$$

2) є точкою максимуму, якщо в ній

$$\Delta_1 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} < 0, \quad \det H = \Delta_2 = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{vmatrix} > 0;$$

3) не є точкою екстремуму, якщо

$$\det H = \Delta_2 = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{vmatrix} < 0;$$

4) потрібне додаткове дослідження за допомогою диференціалів вищих порядків, якщо

$$\det H = \Delta_2 = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{vmatrix} = 0.$$

Дослідити функцію $u = 3\left(x^2 + y^2\right) - x^3 + 4y$ на екстремум.

- 1. Знаходимо частинні похідні першого порядку:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 6x - 3x^2, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = 6y + 4.$$

2. Розв'язавши систему рівнянь

$$\begin{cases} 6x - 3x^2 = 0, \\ 6y + 4 = 0, \end{cases}$$

знаходимо стаціонарні точки $\left(0; -\frac{2}{3}\right)$ і $\left(2; -\frac{2}{3}\right)$.

3. Обчислюємо частинні похідні другого порядку:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 6 - 6x, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 6.$$

4. У точці $\left(0; -\frac{2}{3}\right)$ визначники Δ_1 і Δ_2 відповідно такі:

$$\Delta_1 = 6 > 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} = 36 > 0.$$

У точці $\left(2; -\frac{2}{3}\right)$ маємо:

$$\Delta_1 = -6, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} = -36 < 0.$$

5. Отже, за теоремою 1.22 точка $\left(0; -\frac{2}{3}\right)$ є точкою мінімуму; у точці $\left(2; -\frac{2}{3}\right)$ екстремуму немає.

Обчислюємо значення функції в точці мінімуму:

$$u_{\min} = 3 \cdot \frac{4}{9} - 0 - \frac{8}{3} = \frac{12}{9} - \frac{24}{9} = -\frac{12}{9}.$$

Дослідити функцію $u = x^2 + y^2 + (z+1)^2 - xy + x$ на екстремум.

1. Знайдемо частинні похідні першого порядку:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x - y + 1, \ \frac{\partial u}{\partial y} = 2y - x; \ \frac{\partial u}{\partial z} = 2(z+1).$$

2. Розв'язавши систему

$$\begin{cases} 2x - y + 1 = 0, \\ 2y - x = 0, \\ 2(z+1) = 0, \end{cases}$$

знайдемо стаціонарну точку $\left(-\frac{2}{3}; -\frac{1}{3}; -1\right)$.

3. Обчислимо частинні похідні другого порядку:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2, \ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2; \ \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 2; \ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -1; \ \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = -1; \ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} = 0; \ \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = 0.$$

4. Матриця Гессе має вигляд:

$$H = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

5. У точці $\left(-\frac{2}{3}; -\frac{1}{3}; -1\right)$ всі головні мінори цієї матриці додатні: $\Delta_1 = 2$, $\Delta_2 = 3$, $\Delta_3 = 6$.

Отже, у точці $\left(-\frac{2}{3}; -\frac{1}{3}; -1\right)$ функція має мінімум

$$u_{\min} = \left(-\frac{2}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 + 0 - \frac{2}{9} - \frac{2}{3} = -\frac{1}{3}.$$

1.3.5. ПОНЯТТЯ УМОВНОГО ЕКСТРЕМУМУ

Нехай на відкритій множині $D \in R^n$ задано функції

$f(x), \varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_m(x), m < n, \; x = (x_1, \; x_2, \ldots, x_n),$

і нехай E — множина точок, координати яких задовольняють рівняння

$$\varphi_1(x) = 0, \varphi_2(x) = 0, \ldots, \varphi_m(x) = 0. \qquad (15)$$

Рівняння (15) називаються **рівняннями зв'язку, або обмеженнями.**

Означення. Точка $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ називається **точкою умовного максимуму функції $z = f(x_1, \; x_2, \ldots, x_n)$** відносно рівняння зв'язку (15), якщо існує такий окіл точки x^0, для всіх точок $x \neq x^0$ якого, що задовольняють рівняння зв'язку, виконується нерівність:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \le f(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0).$$

Якщо за цих умов виконується нерівність

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \ge f(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0),$$

то точку $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ називають **точкою умовного мінімуму функції $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$** при обмеженнях (15).

Функція $z = xy$ відносно рівняння зв'язку

$\varphi(x,\ y) = y - x = 0$ у точці (0, 0) має умовний мінімум, бо z = (0, 0) = 0, а в точках (ε, ε), що задовольняють рівняння зв'язку, значення функції додатні.

Означення. Точки умовного максимуму і мінімуму називають **точками умовного екстремуму**. Умовний екстремум називають іноді **відносним екстремумом**.

Геометрична інтерпретація (рис. 1.28).

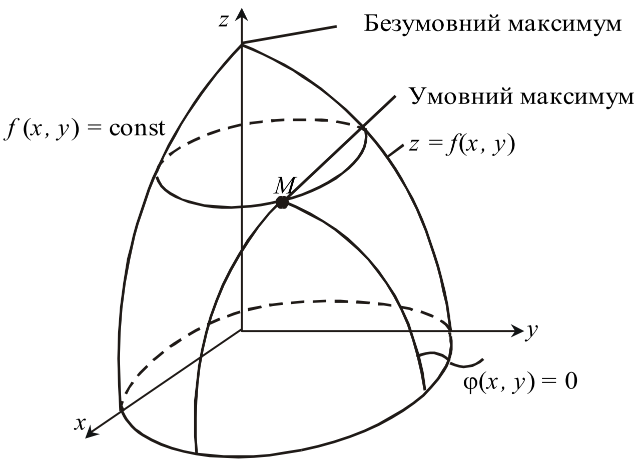


Рис. 1.28

1.3.7. МЕТОД ЛАГРАНЖА ЗНАХОДЖЕННЯ ТОЧОК УМОВНОГО ЕКСТРЕМУМУ

Нехай функції $z = f(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$, $\varphi_i(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$, $i = 1,\ 2,\ \ldots,\ m$, неперервно диференційовні в околі точки $(x_1^0,\ x_2^0,\ \ldots,\ x_n^0)$ і ранг матриці Якобі

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial x_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \dfrac{\partial\varphi_m}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial\varphi_m}{\partial x_n} \end{pmatrix} \tag{17}$$

у цій точці дорівнює m.

Означення. Функцію $L(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n) = f(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n) + \sum\limits_{i=1}^{m}\lambda_i\varphi_i(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$ називають **функцією Лагранжа**, параметри $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots,\ \lambda_m$ — **множниками Лагранжа**.

***Теорема 1.23. (Необхідна умова існування умовного екстремуму).* Для того щоб точка $(x_1^0,\ x_2^0,\ \ldots,\ x_n^0)$ була точкою умовного екстремуму функції $z = f(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$ при рівняннях зв'язку $\varphi_i(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n) = 0$, $i = 1,\ 2,\ \ldots,\ m$, необхідно, щоб її координати при деяких значеннях $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots,\ \lambda_m$ задовольняли систему рівнянь:**

$$\frac{\partial L(x_1^0,\ x_2^0,\ \ldots,\ x_n^0)}{\partial x_k} = 0, \quad k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n, \tag{18}$$

$$\varphi_i(x_1^0,\ x_2^0,\ \ldots,\ x_n^0) = 0, \quad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ m. \tag{19}$$

Умови (18), (19) означають, що точка $(x_1^0,\ x_2^0,\ \ldots,\ x_n^0)$ є стаціонарною точкою функції Лагранжа і її координати задовольняють рівняння зв'язку.

Доведення. Запишемо рівності виду (18)

$$\sum_{j=n+1}^{n+m}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j} + \lambda_j\frac{\partial\varphi_m}{\partial x_j}\right)dx_j = 0, \tag{20}$$

де, як і раніше, $dx_{n+1},\ \ldots,\ dx_{n+m}$ означають диференціали неявних функцій; похідні обчислені в точці $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$.

Візьмемо значення множників $\lambda_i = \lambda_i^0 (i = 1,\ \ldots,\ m)$ так, щоб перетворювалися на нуль коефіцієнти при *залежних* диференціалах $dx_{n+1},\ \ldots,\ dx_{n+m}$:

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} + \lambda_1^0 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_j} + \ldots + \lambda_m^0 \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_j} = 0 \tag{21}$$

$$(j = n+1,\ \ldots,\ n+m).$$

Це зробити можна, оскільки визначник системи лінійних рівнянь (20), з яких визначаються $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots,\ \lambda_m$, відмінний від нуля. При вибраних значеннях множників (20) набере вигляду

$$\sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} + \lambda_1^0 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_j} + \ldots + \lambda_m^0 \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_j} \right) dx_j = 0. \tag{22}$$

Тут ми знову маємо лише диференціали *незалежних* змінних, тому коефіцієнти при них мають бути нулями. Отже, поряд з (21) дістаємо

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} + \lambda_1^0 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_j} + \ldots + \lambda_m^0 \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_j} = 0 \quad (j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n). \tag{23}$$

Тепер для визначення $n+m$ невідомих $x_1,\ \ldots,\ x_{n+m}$ та ще m множників $\lambda_1,\ \ldots,\ \lambda_m$ маємо стільки ж рівнянь — m рівностей зв'язку і $n+m$ рівнянь:

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} + \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_j} + \ldots + \lambda_m \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_j} = 0 \ \ (j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n+m).$$

Для того щоб спростити запис цих рівнянь, звичайно вводять *допоміжну* функцію

$$L = f + \lambda_1 \varphi_1 + \ldots + \lambda_m \varphi_m .$$

Тоді зазначені рівності можна подати у вигляді

$$\frac{\partial L}{\partial x_j} = 0 \ \ (j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n+m). \tag{24}$$

Теорема 1.24. (Достатня умова умовного екстремуму.) **Нехай функції $f(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$, $\varphi_i(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$, $i = 1,\ 2,\ \ldots,\ m$, двічі неперервно диференційовні в околі точки $(x_1^0,\ x_2^0,\ \ldots,\ x_n^0)$ і не-**

хай у цій точці виконуються необхідні умови існування екстремуму функції $f\left(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n\right)$ при обмеженнях (19).

Тоді в разі виконання умов

$$d\varphi_i\left(x_1^0,\ x_2^0,\ \ldots,\ x_n^0\right)=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\varphi_i\left(x_1^0,\ x_2^0,\ \ldots,\ x_n^0\right)}{\partial x_k}dx_k=0,\ \sum_{k=1}^{n}dx_k^2>0 \quad (25)$$

другий диференціал $d^2L\left(x_1^0,\ x_2^0,\ \ldots,\ x_n^0\right)$ функції Лагранжа є додатно (від'ємно) визначеною квадратичною формою. А це означає, що функція $f\left(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n\right)$ у точці $\left(x_1^0,\ x_2^0,\ \ldots,\ x_n^0\right)$ має умовний строгий мінімум (максимум).

Якщо за умов (25) другий диференціал $d^2L\left(x_1^0,\ x_2^0,\ \ldots,\ x_n^0\right)$ є невизначеною квадратичною формою, то в точці $\left(x_1^0,\ x_2^0,\ \ldots,\ x_n^0\right)$ умовного екстремуму немає.

Доведення. Припустимо існування і неперервність *інших* похідних для функцій f і $\varphi_j\left(j=1,\ 2,\ \ldots,\ m\right)$. Нехай тепер точка $M_0\left(x_1^0,\ \ldots,\ x_{n+m}^0\right)$ разом із множниками $\lambda_1^0,\ \ldots,\ \lambda_m^0$ задовольняє сформульовані раніше *необхідні* умови.

Висновок про існування в цій точці (відносного) екстремуму залежить від знака різниці

$$\Delta=f\left(x_1,\ \ldots,\ x_{n+m}\right)-f\left(x_1^0,\ \ldots,\ x_{n+m}^0\right),$$

з тим лише істотним застереженням, що і точка $\left(x_1,\ \ldots,\ x_{n+m}\right)$ задовольняє рівняння зв'язку (19). Легко зрозуміти, що для таких точок приріст функції f можна замінити на приріст функції L (де всі множники λ_i ми вважаємо такими, що дорівнюють λ_i^0):

$$\Delta=L\left(x_1,\ \ldots,\ x_{n+m}\right)-L\left(x_1^0,\ \ldots,\ x_{n+m}^0\right).$$

Оскільки в точці M_0 виконуються умови (24) — у цьому й полягає сенс переходу до функції L, — зазначений приріст можна записати за формулою Тейлора:

$$\Delta=\frac{1}{2}\left\{\sum_{j,\ k=1}^{n+m}A_{jk}\Delta x_j\Delta x_k+\sum_{j,\ k=1}^{n+m}\alpha_{jk}\Delta x_j\Delta x_k\right\},$$

де

$$\Delta x_j=x_j-x_j^0,\ A_{jk}=L''_{x_jx_k}\left(x_1^0,\ \ldots,\ x_{n+m}^0\right)$$

$$\left(j,\ k=1,\ 2,\ \ldots,\ n+m\right)$$

і $\alpha_{jk} \to 0$, якщо $\Delta x_1 \to 0, \ldots, \Delta x_n \to 0$ (останні прирости $\Delta x_{n+1}, \ldots, \Delta x_{n+m}$ при цьому самі собою будуть нескінченно малими згідно з неперервністю функцій (21)).

Якщо замінити тут усі прирости Δx_j відповідними диференціалами dx_j, то стосовно *незалежних* змінних нічого не зміниться. Що ж до *залежних* змінних, то така заміна зумовлює лише необхідність узяти замість коефіцієнтів α_{jk} інші нескінченно малі β_{jk}:

$$\Delta = \frac{1}{2}\left\{\sum_{j,\ k=1}^{n+m} A_{jk}dx_j dx_k + \sum_{j,\ k=1}^{n+m} \beta_{jk}dx_j dx_k\right\}.$$

Перехід до диференціалів зручний, оскільки диференціали залежних і незалежних змінних пов'язані системою *лінійних* співвідношень. З огляду на те, що визначник системи (20) у точці M_0, за припущенням, — не нуль, то залежні диференціали можна лінійно подати через незалежні. Підставивши їх вирази у Δ, замість першої суми дістанемо *квадратичну форму відносно диференціалів* $dx_1, \ldots, dx_n$.

А тепер можна показати, що **коли ця форма буде визначеною і притому додатною (від'ємною), то в досліджуваній точці досягатиметься відносний мінімум (максимум), а якщо форма невизначена, то відносного екстремуму немає**.

Знайти умовний екстремум функції $u = 5 - 3x - 4y$ відносно рівняння зв'язку $\varphi(x,\ y) = x^2 + y^2 - 25 = 0$.

● Функції u і φ двічі неперервно диференційовні. Ранг матриці Якобі (17) в даному разі дорівнює 1 у всіх точках, що задовольняють рівняння зв'язку. Отже, можна скористатися методом Лагранжа. Запишемо функцію Лагранжа

$$L(x,\ y) = 5 - 3x - 4y + \lambda\left(x^2 + y^2 - 25\right).$$

Згідно з необхідними умовами (18), (19) дістанемо систему

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = -3 + 2\lambda x = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = -4 + 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 - 25 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{3}{2\lambda} \\ y = \dfrac{2}{\lambda} \\ \dfrac{9}{4\lambda^2} + \dfrac{16}{4\lambda^2} = 25 \quad \dfrac{25}{4\lambda^2} = 25 \quad 4\lambda^2 = 1 \quad \lambda = \pm\dfrac{1}{2}, \end{cases}$$

з якої знайдемо $x=3$, $y=4$ при $\lambda=\frac{1}{2}$ і $x=-3$, $y=-4$ при $\lambda=-\frac{1}{2}$. Отже, функція u може мати умовний екстремум лише у двох точках: $(3,\ 4)$ і $(-3,\ -4)$. Обчислимо другий диференціал функції Лагранжа:

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2}=2\lambda\ ;\ \frac{\partial^2 L}{\partial u \partial y}=0\ ,\ \frac{\partial^2 L}{\partial y^2}=2\lambda\ ,$$

звідки $d^2L=2\lambda\left(dx^2+dy^2\right)$.

Знайдемо перший диференціал функції φ: $d\varphi=2xdx+2ydy$. У точках $(3,\ 4)$ і $(-3,\ -4)$ диференціали dx і dy, пов'язані рівністю:

$$6dx+8dy=0\ ,\ \text{або}\ dy=-\frac{6}{8}dx.$$

У разі виконання цієї умови другий диференціал функції Лагранжа в точці $(3;\ 4)$ є додатно визначеною квадратичною формою

$$d^2L=dx^2-\frac{6}{8}dx^2=\frac{1}{4}dx^2\ ,$$

а в точці $(-3,\ -4)$ — від'ємно визначеною формою

$$d^2L=-\frac{1}{4}dx^2\ .$$

Отже, функція u в точці $(3,\ 4)$ має умовний мінімум, а в точці $(-3,\ -4)$ — умовний максимум.

1.3.8. МЕТОД НАЙМЕНШИХ КВАДРАТІВ

Нехай $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$ — послідовність значень незалежної змінної, а $y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n$ — послідовність відповідних значень залежної змінної.

Необхідно дібрати пряму, яка «найліпше» відбивала б залежність між x і y. Це означає, що відхилення фактичних значень функції від дібраної прямої мають бути мінімальними.

Нехай

$$\hat{y}=a+bx$$

є рівняння цієї прямої. Маємо:

$$\hat{y}_1=a+bx_1\ ,\ \hat{y}_2=a+bx_2\ ,\ \ldots,\ \hat{y}_n=a+bx_n\ .$$

Відхилення від фактичних значень функції становлять:

$$y_i - \hat{y}_i = y_i - \left(a + bx_i\right) = y_i - a - bx_i \quad \left(i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n\right).$$

Ці відхилення можуть бути додатними або від'ємними, тому пряму добираємо так, щоб сума квадратів відхилень

$$f = (y_1 - a - bx_1)^2 + (y_2 - a - bx_2)^2 + \ldots + (y_n - a - bx_n)^2$$

була найменшою. Отже, потрібно знайти такі a і b, щоб функція f досягала мінімуму. Необхідна умова існування мінімуму полягає в тому, що

$$\frac{\partial f}{\partial a} = 0,\ \frac{\partial f}{\partial b} = 0\ .$$

Маємо

$$(y_i - a - bx_i)^2 = y_i^2 + a^2 + b^2 x_i^2 - 2ay_i + 2abx_i - 2bx_i y_i\ ,$$

отже,

$$f = \sum_{i=1}^{n}(y_i - a - bx_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} y_i^2 + na^2 + b^2\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2a\sum_{i=1}^{n} y_i + 2ab\sum_{i=1}^{n} x_i - 2b\sum_{i=1}^{n} x_i y_i .$$

Обчислюємо

$$\frac{\partial f}{\partial a} = 2na - 2\sum_{i=1}^{n} y_i + 2b\sum_{i=1}^{n} x_i = 0,$$

звідки

$$\sum_{i=1}^{n} y_i = na + b\sum_{i=1}^{n} x_i$$

і

$$\frac{\partial f}{\partial b} = 2b\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + 2a\sum_{i=1}^{n} x_i - 2\sum_{i=1}^{n} x_i y_i = 0,$$

звідки

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i = a\sum_{i=1}^{n} x_i + b\sum_{i=1}^{n} x_i^2 .$$

Таким чином, дістали систему двох рівнянь з двома змінними a і b, які визначають пряму, що «найліпше» відбиває процес змінювання функції:

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} y_i = na + b\sum_{i=1}^{n} x_i ,}$$

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i = a\sum_{i=1}^{n} x_i + b\sum_{i=1}^{n} x_i^2.} \qquad (26)$$

Методом найменших квадратів знайти пряму, якою подається залежність величини y від величини x для заданої сукупності спостережень:

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y_i	3,2	1,8	1,1	0,3	– 0,2	– 2,2	– 2,3	– 4,1	– 5

● Пряму $y = a + bx$ знаходимо із системи рівнянь (26). Допоміжні обчислення вміщуємо у таблиці:

	x_i	y_i	$x_i y_i$	x_i^2
	1	3,2	3,2	1
	2	1,8	3,6	4
	3	1,1	3,3	9
	4	0,3	1,2	16
	5	– 0,2	– 1	25
	6	– 2,2	– 13,2	36
	7	– 2,3	– 16,1	49
	8	– 4,1	– 32,8	64
	9	– 5	– 45	81
$\sum_{i=1}^{n}$	45	– 7,4	– 96,8	285

Знаючи коефіцієнти, записуємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} 9a + 45b = -7{,}4 \\ 45a + 285b = -96{,}8. \end{cases}$$

Розв’язавши її, дістанемо

$$a = 4{,}18,\ b = -1.$$

Отже, шукана пряма має рівняння

$$y \approx -x + 4{,}18.$$

Геометрична інтерпретація (рис. 1.29).

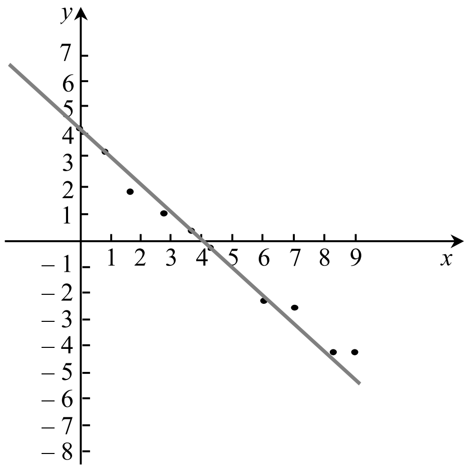


Рис. 1.29

1.3.9. ВИРІВНЮВАННЯ ЗА ДОПОМОГОЮ КРИВИХ

1. Вирівнювання за допомогою параболи

Нехай $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$ — послідовність значень незалежної змінної x, а $y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n$ — послідовність відповідних значень залежної змінної.

Точки $(x_1,\ y_1),\ (x_2,\ y_2),\ \ldots,\ (x_n,\ y_n)$ утворюють деяку лінію. Нехай потрібно дібрати параболу, яка б «найліпше» відбивала залежність y від x. При цьому термін «найліпше» означає, що сума квадратів відхилень значень функції від дібраної параболи мінімальна.

Нехай $$\hat{y} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$
є така парабола. Тоді

$$\begin{aligned}
&\hat{y}_1 = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2,\\
&\hat{y}_2 = a_0 + a_1 x_2 + a_2 x_2^2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\hat{y}_n = a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2.
\end{aligned}$$

Парабола дібрана найліпше, якщо сума квадратів відхилень заданих значень $y_1, y_2, ..., y_n$ від її відповідних точок

$$f(a_0,\ a_1,\ a_2)=\left(a_0+a_1x_1+a_2x_1^2-y_1\right)^2+\left(a_0+a_1x_2+a_2x_2^2-y_2\right)^2+$$
$$+\ldots+\left(a_0+a_1x_n+a_2x_n^2-y_n\right)^2$$

мінімальна.

Необхідні умови існування мінімуму функції являють собою залежності:

$$\frac{\partial f}{\partial a_0}=0,\ \frac{\partial f}{\partial a_1}=0,\ \frac{\partial f}{\partial a_2}=0.$$

Оскільки

$$f(x_0,\ a_1,\ a_2)=\sum_{i=1}^{n}\left(a_0+a_1x_i+a_2x_i^2-y_i\right)^2,$$

то

$$\frac{\partial f}{\partial a_0}=\sum_{i=1}^{n}2\left(a_0+a_1x_i+a_2x_i^2-y_i\right)^2\cdot 1=0,$$
$$\frac{\partial f}{\partial a_1}=\sum_{i=1}^{n}2\left(a_0+a_1x_i+a_2x_i^2-y_i\right)^2x_i=0,$$
$$\frac{\partial f}{\partial a_2}=\sum_{i=1}^{n}2\left(a_0+a_1x_i+a_2x_i^2-y_i\right)^2x_i^2=0.$$

Поділивши на 2 обидві частини кожної з трьох останніх рівностей та розбивши кожну суму на доданки, дістанемо:

$$\boxed{\begin{cases} na_0+a_1\sum\limits_{i=1}^{n}x_i+a_2\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2=\sum\limits_{i=1}^{n}y_i,\\ a_0\sum\limits_{i=1}^{n}x_i+a_1\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2+a_2\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^3=\sum\limits_{i=1}^{n}x_iy_i,\\ a_0\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2+a_1\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^3+a_2\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^4=\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2y_i^2. \end{cases}} \qquad (27)$$

Із системи (27) визначаємо невідомі коефіцієнти a_0, a_1, a_2.

2. Вирівнювання за допомогою гіперболи

Нехай $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$ — послідовність значень незалежної змінної x, а $y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n$ — послідовність відповідних значень залежної змінної y. Точки $(x_1,\ y_1)$, $(x_2,\ y_2)$, …, $(x_n,\ y_n)$ утворюють деяку лінію. Потрібно знайти гіперболу, яка «найліпше» відбиває залежність між x і y.

Запишемо рівняння шуканої гіперболи у вигляді

$$y = a + \frac{b}{x}.$$

Тоді

$$\hat{y}_1 = a + \frac{b}{x_1},\ \hat{y}_2 = a + \frac{b}{x_2},\ \ldots,\ \hat{y}_n = a + \frac{b}{x_n}.$$

Гіперболу дібрано найліпше, якщо функція

$$f(a,\ b) = \sum_{i=1}^{n}\left(a + \frac{b}{x_i} - y_i\right)^2$$

досягає мінімуму. Узявши $\frac{1}{x_i} = z_i$, дістанемо

$$f(a,\ b) = \sum_{i=1}^{n}(a + bz_i - y_i)^2.$$

Необхідна умова існування мінімуму така:

$$\frac{\partial f}{\partial a} = \sum_{i=1}^{n} 2(a + bz_i - y_i)\cdot 1 = 0,\ \text{або}\ \sum_{i=1}^{n}(a + bz_i - y_i) = 0.$$

Звідси

$$\boxed{na + b\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i} = \sum_{i=1}^{n} y_i,} \qquad (28)$$

$$\frac{\partial f}{\partial a} = \sum_{i=1}^{n} 2(a + bz_i - y_i)z_i = 0.$$

Отже,

$$\sum_{i=1}^{n} az_i + b\sum_{i=1}^{n} z_i^2 = \sum_{i=1}^{n} z_i y_i,$$

або

$$\boxed{a\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i} + b\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i^2} = \sum_{i=1}^{n}\frac{y_i}{x_i}.} \qquad (29)$$

Розв’язуючи систему рівнянь (28), (29), обчислюємо шукані значення a і b.

3. Вирівнювання за допомогою показникової кривої

Нехай $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — послідовність значень незалежної змінної x, а $y_1, y_2, \ldots, y_n$ — послідовність відповідних значень залежної змінної y. Точки $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$ утворюють деяку лінію. Необхідно знайти показникову криву, яка б найліпше відбивала залежність між x і y.

Нехай

$$\hat{y} = ab^x$$

є рівняння шуканої показникової кривої. Його можна подати також у вигляді:

$$\ln\hat{y} = \ln a + x\ln b.$$

Скориставшись позначеннями $\ln a = A,\ \ln b = B,$ дістанемо рівняння

$$\ln\hat{y} = A + Bx.$$

За методом найменших квадратів знаходимо систему рівнянь з двома невідомими:

$$\boxed{\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n}\ln y_i &= nA + B\sum_{i=1}^{n}x_i, \\ \sum_{i=1}^{n}x_i\ln y_i &= A\sum_{i=1}^{n}x_i + B\sum_{i=1}^{n}x_i^2. \end{aligned}} \qquad (30)$$

Розв'язавши цю систему, відшукаємо значення A і B, а далі — і найліпше дібрану показникову криву.

Методом найменших квадратів для даної сукупності спостережень знайти зазначені далі криві.

1. Параболу:

x_i	16	17	18	19	20	21	22
y_i	28	15	6	1	0	3	10

2. Гіперболу:

x_i	0,125	0,25	0,5	1	2	4	8
y_i	170	80	50	30	20	15	12,5

3. Лінію типу показникової:

x_i	0,6	0,8	1	1,2	1,4	1,6
y_i	1,26	5	7,95	20	79,8	154

1. Коефіцієнти параболи $y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ знаходимо із системи рівнянь (27). Допоміжні обчислення подаємо в таблиці:

	x_i	y_i	$x_i y_i$	x_i^2	x_i^3	x_i^4	$x_i^2 y_i$
	16	28	448	256	4096	65536	7168
	17	15	255	289	4913	83521	4335
	18	6	108	324	5832	104976	1944
	19	1	19	361	6859	130321	361
	20	0	0	400	8000	160000	0
	21	3	63	441	9261	194481	1323
	22	10	220	484	10648	235256	4840
$\sum_{i=1}^{7}$	133	63	1113	2555	49609	973091	19971

Знаючи коефіцієнти системи рівнянь (27), можемо подати її так:

$$\begin{cases} 7a_0 + a_1 133 + a_2 2555 = 63, \\ a_0 133 + a_1 2555 + a_2 49609 = 1113, \\ a_0 2555 + a_1 49609 + a_2 973091 = 19971 \end{cases}$$

Звідси

$$a_0 = 780, \quad a_1 = -79, \quad a_2 = 2.$$

Отже, найліпше дібрана парабола має рівняння

$$y = 2x^2 - 79x + 780.$$

2. Гіперболу $y = a + \frac{b}{x}$ знаходимо із системи рівнянь (28), (29). Допоміжні обчислення подаємо в таблиці:

	x_i	y_i	$\frac{1}{x_1}$	$\frac{1}{x_i^2}$	$\frac{x_i}{y_i}$
	0,125	170	8	64	1360
	0,25	90	4	16	360
	0,5	50	2	4	100
	1	30	1	1	30
	2	20	0,5	0,25	10
	4	15	0,25	0,0625	3,75
	8	12,5	0,125	0,015625	1,5625
$\sum_i$	15,875	387,5	15,875	85,328125	1865,3125

Оскільки коефіцієнти системи рівнянь (28), (29) відомі, її можна записати так:

$$\begin{cases} 7a + b15{,}875 = 387{,}5, \\ a15{,}875 + b85{,}328125 = 1865{,}3125. \end{cases}$$

Звідси

$$a = 10, \quad b = 20.$$

Отже, рівняння шуканої гіперболи є

$$y = 10 + \frac{20}{x}.$$

3. Лінію типу показникової кривої $y = ab^x$ знаходимо із системи рівнянь (30). Допоміжні обчислення подаємо в таблиці:

	x_i	y_i	$\log y_i$	$x_i \log y_i$	x_i^2
	0,6	1,26	0,1003	0,06018	0,36
	0,8	5	0,6989	0,55912	0,64
	1	7,95	0,9003	0,9003	1
	1,2	20	1,3010	1,5612	1,44
	1,4	79,5	1,9004	2,66056	1,96
	1,6	154	2,1875	3,5	2,56
$\sum_{n=1}^{6}$	6,6	267,71	7,0884	9,24136	7,96

Знаючи коефіцієнти системи рівнянь (30), записуємо її так:

$$\begin{cases} 6A + B6{,}6 = 7{,}0884, \\ 6{,}6A + B7{,}96 = 9{,}24136. \end{cases}$$

Звідси

$$A = \frac{\begin{vmatrix} 7{,}088 & 6{,}6 \\ 9{,}2413 & 7{,}96 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 6 & 6{,}6 \\ 6{,}6 & 7{,}96 \end{vmatrix}} = \frac{56{,}42048 - 60{,}9925}{47{,}76 - 43{,}56} = \frac{-4{,}57202}{4{,}2} \approx -1{,}08857;$$

$$B = \frac{\begin{vmatrix} 6 & 7{,}0884 \\ 6{,}6 & 9{,}2414 \end{vmatrix}}{4{,}2} = \frac{55{,}4484 - 46{,}7834}{4{,}2} = \frac{8{,}665}{4{,}2} \approx 2{,}0631.$$

Тоді

$$a = 10^A = 0{,}081, \quad b = 10^B \approx 115.$$

Отже, рівняння шуканої лінії показникового типу набирає вигляду:

$$y = 0{,}081 \cdot 115^x.$$

1.3.10. НАЙБІЛЬШЕ ТА НАЙМЕНШЕ ЗНАЧЕННЯ ФУНКЦІЇ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

Нехай функція $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ визначена і неперервна в деякій обмеженій замкненій області D і за винятком окремих точок має в цій області скінченні частинні похідні. За теоремою Вейєрштрасса в цій області знайдеться точка $x_{\max}$ ($x_{\min}$), в якій функція набуває найбільшого (найменшого) значення. Якщо точка $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ лежить усередині області D, то в ній функція має максимум (мінімум), а отже, у цьому разі точка $x_{\max}$ ($x_{\min}$) міститься серед «підозрілих» на екстремум точок. Але свого найбільшого (найменшого) значення функція може досягати і на межі області.

З огляду на сказане маємо таке правило:

Для того щоб знайти найбільше (найменше) значення функції $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ в області D, потрібно знайти всі внутрішні точки, «підозрілі» на екстремум, обчислити значення функції в них і порівняти зі значеннями функції в межових точках області; найбільше (найменше) із цих значень і буде найбільшим (найменшим) значенням у всій області.

Нехай потрібно знайти значення функції

$$u = \sin x + \sin y - \sin(x + y)$$

у трикутнику, обмеженому віссю x, віссю y і прямою $x + y = 2\pi$ (рис. 1.30).

• Маємо

$$u'_x = \cos x - \cos(x + y),\ u'_y = \cos y - \cos(x + y).$$

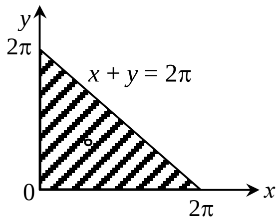


Рис. 1.30

Усередині області похідні перетворюються на нуль в єдиній точці $\left(\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right)$, де $u = \frac{3\sqrt{3}}{2}$. Оскільки на межі області, тобто на прямих $x = 0$, $y = 0$ і $x + y = 2\pi$, функція дорівнює нулю, то, очевидно, знайдена точка $\left(\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right)$ і надає функції найбільшого значення.

1.3.11. ДОТИЧНА ПЛОЩИНА ДО ПОВЕРХНІ

Означення. Пряма лінія називається **дотичною до поверхні в точці *P***, якщо вона є граничним положенням січної, що проходить через P і через близьку до неї точку P' на цій поверхні, коли P', рухаючись по поверхні, наближається до P.

***Теорема 1.25.* Усі дотичні лінії до поверхні в даній точці лежать в одній і тій самій площині, яку називають *дотичною площиною* до цієї точки.**

Доведення. Нехай дано рівняння поверхні

$$F(x,\ y,\ z) = 0 \tag{31}$$

і точку $P(x, y, z)$ на ній. З наближенням точки P' до точки P по кривій C, що лежить на поверхні і проходить через точки P і P', січна PP' наближатиметься до дотичної до кривої C в точці P. Нехай рівняння кривої C задано параметрично:

$$x = \varphi(t),\ \ y = \psi(t),\ \ z = \chi(t).$$

Ці значення x, y, z мають тотожно задовольняти (31). А оскільки диференціал функції (31) при таких x, y, z має дорівнювати нулю, то

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{dz}{dt} = 0.$$

Це рівняння показує, що така дотична до кривої C, косинуси кутів якої з осями координат пропорційні до

$$\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt},$$

є перпендикулярною до прямої, косинуси кутів якої з осями визначаються відношеннями:

$$\frac{\partial F}{\partial x} : \frac{\partial F}{\partial y} : \frac{\partial F}{\partial z}.$$

А оскільки C є довільною кривою на поверхні, що проходить через точку P, доходимо висновку: якщо замінити точку $P(x, y, z)$ точкою $P_1(x_1, y_1, z_1)$, то всі дотичні до поверхні в точці P_1 лежатимуть на площині

$$\boxed{\frac{\partial F}{\partial x}(x - x_1) + \frac{\partial F}{\partial y}(y - y_1) + \frac{\partial F}{\partial z}(z - z_1) = 0.} \tag{32}$$

Отже, дістали **рівняння площини, дотичної в точці (x_1, y_1, z_1) до поверхні**, рівняння якої:

$$F(x, y, z) = 0.$$

У разі, коли рівняння поверхні дано у формі $z = f(x, y)$, беремо

$$F(x, y, z) = f(x, y) - z = 0.$$

Маємо:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial y}, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial y}, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = -1.$$

Обчислюючи ці значення для точки $P_1(x_1, y_1, z_1)$ і підставляючи в (32), дістаємо:

$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial x}(x - x_1) + \frac{\partial z}{\partial y}(y - y_1) - (z - z_1) = 0.} \tag{33}$$

Це є **рівняння дотичної площини в точці P_1(x_1, y_1, z_1) до поверхні, що описується рівнянням $z = f(x, y)$**.

Повний диференціал функції z від x і y набирає вигляду

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy.$$

Подамо геометричну інтерпретацію цього результату. Дотична площина до поверхні $z = f(x, y)$ у точці $P(x, y, z)$, згідно з (33) має рівняння

$$Z - z = \frac{\partial z}{\partial x}(X - x) + \frac{\partial z}{\partial y}(Y - y), \tag{34}$$

де X, Y, Z — змінні координати будь-якої точки P' площини. Підставивши у (34)

$$X = x + dx \text{ і } Y = y + dy,$$

знайдемо:

$$Z - z = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy. \tag{35}$$

Порівнюючи (35) і (36), дістаємо:

$$dz = Z - z. \tag{36}$$

Отже, доведено таку теорему.

Теорема 1.26. **Повний диференціал функції $f(x, y)$, який відповідає приростам dx і dy, дорівнює відповідному приросту координати z дотичної площини до поверхні $z = f(x, y)$.**

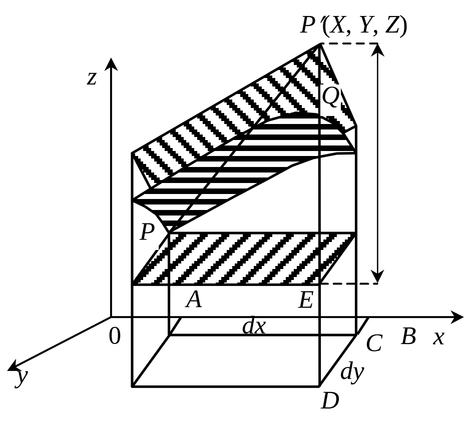


Рис. 1.31

Так, на рис. 1.31 PP' є дотичною площиною до поверхні PQ у точці $P(x, y, z)$.

Нехай $AB = dx$ і $CD = dy$.

Тоді $dz = Z - z = DP' - DE = EP'$.

1.3.12. НОРМАЛЬ ДО ПОВЕРХНІ

Означення. **Нормаллю до поверхні в даній точці** називається пряма, що проходить через цю точку перпендикулярно до дотичної площини до поверхні в цій точці.

Косинуси кутів між осями координат та будь-якою прямою, перпендикулярною до дотичної площини (32), пропорційні до

$$\frac{\partial F_1}{\partial x_1},\ \frac{\partial F_1}{\partial y_1},\ \frac{\partial F_1}{\partial z_1}.$$

Отже, **рівняння нормалі до поверхні** $F(x,y,z)=0$ в точці (x_1, y_1, z_1) подається у вигляді

$$\boxed{\frac{x-x_1}{\frac{\partial F}{\partial x}}=\frac{y-y_1}{\frac{\partial F}{\partial y}}=\frac{z-z_1}{\frac{\partial F}{\partial z}}.} \qquad (37)$$

Аналогічно згідно з (33) записуємо рівняння нормалі до поверхні $z = f(x, y)$ у точці (x_1, y_1, z_1):

$$\boxed{\frac{x-x_1}{\frac{\partial z}{\partial x}}=\frac{y-y_1}{\frac{\partial z}{\partial y}}=\frac{z-z_1}{-1}.}$$

Знайти рівняння дотичної до площини і рівняння нормалі до сфери $x^2 + y^2 + z^2 = 14$ в точці (1, 2, 3).

● Нехай

$$F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-14,$$

звідки

$$\frac{\partial F}{\partial x}=2x,\ \frac{\partial F}{\partial y}=2y,\ \frac{\partial F}{\partial z}=2z;$$

$$x_1 = 1,\ y_1 = 2,\ z_1 = 3,$$

а тому

$$\frac{\partial F}{\partial x}=2,\ \frac{\partial F}{\partial y}=4,\ \frac{\partial F}{\partial z}=6.$$

Підставляючи ці значення в (32), знаходимо рівняння дотичної площини:

$$2(x-1)+4(y-2)+6(z-3)=0,$$

або

$$x+2y+3z=14,$$

підставляючи їх у (37), дістаємо рівняння нормалі:

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{4}=\frac{z-3}{6},$$

$$z = 3x \text{ і } 2z = 3y.$$