

ЛЕКЦИЯ №1

Понятие модели и процесса моделирования

Цель - формирование системы знаний по методологии, методике и инструментарию построения экономических моделей, их анализа и использования.

Задание – изучение теории и приобретение практических навыков моделирования и анализа экономических объектов и процессов на макро-, мезо- и микроэкономическом уровне.

Предмет – методология, методы и процессы экономико-математического моделирования.

Моделирование - один из способов исследования систем.

Модель -образ реальной системы (объекта, процесса) в материальной или теоретической форме. Этот образ отражает существенные свойства объекта, он замещает реальный объект в ходе исследования и управления. Моделирование основывается на принципе аналогии, т.е. возможности изучения реального объекта (системы) не непосредственно, а опосредованно, через рассмотрение подобного ему и более доступного объекта (модели).

Целью моделирования является повышение эффективности управления экономикой на разных уровнях управления. Экономическое управление осуществляется на макро- и микроэкономическом уровнях. На макроуровне объектами управления являются народное хозяйство в целом, отрасли и сектора экономики, на микроуровне - предприятия и рынки.

В самом общем смысле под моделью понимают логическое (словесное) или математическое описание компонентов и функций, отображающих существенные свойства моделируемого объекта или процесса, обычно рассматриваемых как системы или элементы системы с определенной точки зрения. Модель используется как условный образ, сконструированный для упрощения исследования объекта.

Экономико-математическая модель оказывается в этих условиях основным средством экспериментального исследования экономики, т. к. обладает следующими свойствами:

- имитирует реальный экономический процесс (или поведение объекта);
- обладает относительно низкой стоимостью;
- может многократно использоваться;
- учитывает различные условия функционирования объекта.

Модель может и должна отражать внутреннюю структуру экономического объекта с заданных (определенных) точек зрения, а если она неизвестна, то лишь его поведение, используя при этом принцип «Черного ящика».

Различается характер подобия между моделируемым объектом и моделью:

- физическое — объект и модель имеют одинаковую или сходную физическую природу;
- структурное — наблюдается сходство между структурой объекта и структурой модели;
- функциональное — объект и модель выполняют сходные функции при соответствующем воздействии;

- динамическое — существует соответствие между последовательно изменяющимися состояниями объекта и модели;
- вероятностное — существует соответствие между процессами вероятностного характера в объекте и модели;
- геометрическое — существует соответствие между пространственными характеристиками объекта и модели.

В литературе нет устоявшегося определения экономико-математической модели. *Экономико-математическая модель* — математическое описание экономического процесса или объекта, осуществленное в целях их исследования или управления ими: математическая запись решаемой экономической задачи (поэтому часто термины задача и модель употребляются как синонимы).

Возможны и другие определения экономико-математической модели:

1. Специальная конструкция показателей и параметров, объединяемая (в явном или неявном виде) системой уравнений в единое целое.
2. Некоторое математическое выражение, состоящее из совокупности связанных между собой математическими (количественными) зависимостями математических величин, все или часть из которых являются экономическими величинами.
3. Математическое описание планово-экономической задачи, позволяющее осуществить законченный цикл расчета ее параметров на основе внешних (исходных) данных.

Будем в дальнейшем понимать под *экономико-математической моделью* совокупность взаимосвязанных математических зависимостей (уравнений или неравенств), формально отражающих условия функционирования реальных экономических объектов. Другими словами, экономико-математическая модель — это математическое отображение исследуемого экономического объекта (процесса), с помощью которого изучается его функционирование и оценивается изменение его эффективности при возможных изменениях входных характеристик. Многократная же реализация экономико-математических моделей в этом процессе и называется *экономико-математическим моделированием*.

Таким образом, под *экономико-математическим моделированием* будем понимать построение и изучение с помощью средств вычислительной техники экономико-математической модели, способной заменить исследуемый объект. При этом экономико-математическое моделирование дает возможность находить истину не методом дорогостоящих «проб и ошибок», а формулировать рекомендации по управлению экономикой, опираясь на прочный фундамент научного предвидения. Работа с моделью, а не с объектом, оборачивается оперативным получением подробной и наглядной информации, вскрывающей его внутренние связи, количественные характеристики и качественные параметры. Многократно уменьшаются материальные и трудовые затраты, присущие экспериментальным подходам, дающим, как

правило, лишь крупницы нужной информации. Вычислительный модельный эксперимент не подвластен каким-либо ограничениям — математическая модель может быть безопасно испытана в любых мыслимых и немыслимых условиях.

Принципиально любая модель может быть сформулирована тремя способами:

- в результате прямого наблюдения и изучения явлений действительности (феноменологический способ);
- вычленения из более общей модели (дедуктивный способ);
- обобщения более частных моделей (индуктивный способ, т. е. доказательство по индукции).

Один и тот же объект может быть описан различными моделями в зависимости:

- от взглядов и мировоззрения специалистов;
- исследовательской и практической потребности;
- возможностей математического аппарата;
- возможностей вычислительной техники;
- структуры информационного обеспечения и т. д.

Система экономико-математических моделей — это совокупность взаимосвязанных экономико-математических моделей для описания сложных экономических систем, которые невозможно воспроизвести в одной модели, достаточно детализированной для практических целей, т. к. она была бы слишком громоздкой. Поэтому для планирования народного хозяйства разрабатываются системы моделей, построенные обычно по иерархическому принципу, в несколько уровней — тогда они называются многоуровневыми.

Практическими задачами экономико-математического моделирования являются:

- анализ экономических объектов и процессов;
- прогнозирование экономических процессов;
- выработка управленческих решений на всех уровнях хозяйственной деятельности.

Агрегирование — объединение, укрупнение показателей по какому-либо признаку. С математической точки зрения агрегирование рассматривается как преобразование исходной модели в модель с меньшим числом переменных и/или ограничений. Сущность агрегирования состоит в соединении однородных элементов в более крупные.

Среди способов агрегирования можно выделить:

- сложение показателей;
- представление группы агрегируемых показателей через их среднюю величину;
- использование различных взвешивающих коэффициентов;
- использование балльных оценок.

Деагрегирование — процедура, противоположная агрегированию, применяется в случае перехода к более мелким элементам при описании какого-либо объекта, по отношению к которым единицы исходного описания

представляют агрегаты, либо к показателям, характеризующим такие элементы, вместо показателей, соответствующих их агрегатам в исходном описании.

Целесообразность дезагрегирования всегда обусловлена желанием или необходимостью получить более детальное, чем исходное описание. Однако использование дезагрегированного описания может быть сопряжено с такими трудностями, как:

- рост размерности;
- ухудшение статистических характеристик данных;
- усложнение интерпретационных задач.

Принципы моделирования

1. *Принцип информационной достаточности.* При полном отсутствии информации об исследуемой системе построение ее модели невозможно. При наличии полной информации ее моделирование лишено смысла. Существует некоторый критический уровень сведений о системе, при достижении которого может быть построена ее адекватная модель.

2. *Принцип осуществимости.* Создаваемая модель должна обеспечивать достижение поставленной цели исследования с вероятностью, существенно отличающейся от нуля, и за конечное время. Обычно задают некоторое пороговое значение P_0 вероятности достижения цели моделирования $P(t)$, а также приемлемую границу t_0 времени достижения этой цели. Модель считают осуществимой, если может быть выполнено условие $P(t_0) > P_0$.

3. *Принцип множественности моделей.* Создаваемая модель должна отражать в первую очередь те свойства реальной системы (или явления), которые влияют на выбранный показатель эффективности. Соответственно при использовании любой конкретной модели признаются лишь некоторые стороны реальности. Для более полного ее исследования необходим ряд моделей, позволяющих с разных сторон и с разной степенью детальности отражать рассматриваемый процесс.

4. *Принцип агрегирования.* В большинстве случаев сложную систему можно представить состоящей из агрегатов (подсистем), для адекватного математического описания которых оказываются пригодными некоторые стандартные математические схемы. Принцип агрегирования позволяет, кроме того, достаточно гибко перестраивать модель в зависимости от задач исследования.

5. *Принцип параметризации.* В ряде случаев моделируемая система имеет в своем составе некоторые относительно изолированные подсистемы, характеризующиеся определенным параметром, в том числе векторным. Такие подсистемы можно заменять в модели соответствующими числовыми величинами, а не описывать процесс их функционирования. При необходимости зависимость значений этих величин от ситуации может задаваться в виде таблицы, графика или аналитического выражения (формулы). Принцип параметризации позволяет сократить объем и продолжительность моделирования. Однако надо иметь в виду, что *параметризация снижает адекватность модели.*

ЭТАПЫ ПРОЦЕССА МОДЕЛИРОВАНИЯ

Моделирования условно можно поделить на шесть этапов .

1.*Постановка экономической проблемы* и ее качественный анализ. На первом этапе формулируют суть проблемы, принимают определенные предположения, выделяют важные черты и свойства и абстрагируют объект моделирования. Очерчивают первоначальную гипотезу, которая объясняет поведение и развитие объекта.

2.*Построение аналитической модели.* Определяют тип, к которому можно зачислить модель. Анализируют, можно ли поставленную задачу отнести к известной модели. Если нет, предлагается своя модель.

3.*Экономический анализ модели.* Исследуют общие свойства модели, их решения. Если доказано, что модель решения не имеет, то следующие этапы моделирования не проводятся. Построенную модель корректируют и исследования начинают сначала.

4.*Подготовка начальной информации.* Недостаток информации усложняет процесс моделирования, а отсутствие ее переводит модель из класса прикладных к классу теоретических. Этот этап свидетельствует о системности процесса моделирования, поскольку исходная информация одних моделей может стать входной для других.

5.*Численное решение.* На этом этапе разрабатывают алгоритм, составляют программы для ПЭВМ и проводят расчеты.

6.*Анализ численных результатов* и их применение. На последнем этапе исследуют корректность или некорректность построенной модели. Подтверждают или опровергают выдвинутую гипотезу относительно экономического процесса. На основе полученных результатов определяют направления совершенствования построенной модели, информационной базы и программного обеспечения.

Классификация экономико-математических моделей

Существует большое число классификаций типов экономико-математических моделей, которые, однако, носят фрагментарный характер. И это, по-видимому, естественно, т. к. нереально охватить все многообразие социально-экономических задач, объектов и процессов, описываемых различными моделями. Для удобства рассмотрения можно выделить следующие классификационные признаки:

- 1) по способу отражения действительности;
- 2) по предназначению (цели создания и применения);
- 3) по способу логико-экономического описания моделируемых экономических систем;
- 4) по временному и пространственному признаку;
- 5) по уровню моделируемого объекта в хозяйственной иерархии;
- 6) по внутренней структуре модельного описания системы;
- 7) по сфере применения.

Наиболее общее деление моделей — по *способу отражения*

действительности. Эта классификация отражает также этапы формирования модели и степень формализации объекта или процесса:

- аналоговая модель — модель, свойства которой определяются законами, аналогичными законам изучаемой системы;
- иконическая модель (то же, что портретная модель) — точно повторяющая структуру объекта и отношения между его элементами;
- знаковая модель — модель, в которой используются символы (знаки). Соотношения между величинами, характеризующими моделируемый объект, описываются с помощью уравнений, связывающих эти символы (другое название — символическая модель);
- концептуальная модель — принципиальная основа экономико-математической модели, предназначенной для реализации различными математическими и техническими средствами, и, следовательно, для непосредственного решения задачи; это один из этапов формирования модели. Концептуальная модель не содержит никаких признаков ее реализации и отражает только сущность моделируемого процесса, т. е. это предварительное, приближенное представление о рассматриваемом объекте или процессе. Часто концептуальные модели имеют вид схемы, в которой фиксируются наиболее существенные параметры и связи между ними. На этом этапе ограничиваются обычно не количественными, а качественными категориями, т. е. например, отмечают, что такая-то переменная возрастает при убывании значений другой (а какова точно эта зависимость — выявляется на следующих стадиях разработки модели);
- структурная модель. Является одним из основных типов экономико-математических моделей при их классификации по способам выражения соотношений между внешними условиями, внутренними параметрами и искомыми характеристиками.

Наряду с функциональными моделями структурные модели отражают структуру системы, подлежащей исследованию, ее внутренние параметры, характеристики внешних возмущений;

- функциональная модель. Описывает поведение системы безотносительно к ее внутренней структуре. Если обозначить входы и выходы моделируемого объекта соответственно через X и Y , то построение функциональной модели сводится к отысканию оператора D , связывающего X и Y , т. е. $Y = D(X)$. При изучении функциональных моделей возникают гипотезы о причинах тех или иных реакций объекта на воздействие внешней среды и, таким образом, открывается путь к анализу его структуры и формированию структурных моделей.

По предназначению (цели создания и применения) различаются:

- балансовая модель, представляющая систему уравнений (балансовых соотношений), которые удовлетворяют требованию наличия ресурса и его использования;
- дескриптивная модель (описательная модель), предназначенная для описания и объяснения наблюдаемых фактов или прогноза поведения объектов, в

отличие от нормативных моделей, служащих для определения желательного состояния объекта;

- имитационная модель — модель, предназначенная для экспериментального выявления закономерностей функционирования системы и обычно включает не только связи, описываемые формальными уравнениями и неравенствами, но и логические связи, определяемые значениями переменных, формируемых в процессе реализации принятого решения.

Такие модели используются для описания сложных, трудноформализуемых процессов с целью выявления основных закономерностей поведения системы;

- нормативная модель (то же самое, что прескриптивная модель), предназначенная для определения желательного состояния объекта и должна исходить из возможностей развития системы. Нормативная модель должна сочетаться с дескриптивными (описательными) моделями.

По способу логико-математического описания моделируемых экономических систем различаются:

- аналитическая модель, представляющая математические зависимости в экономике и фиксирующая функциональную зависимость результатов от значений переменных и параметров модели;
- вероятностная модель (стохастическая модель), содержащая случайные элементы. Такая модель показывает, что, несмотря на одни и те же значения переменных и параметров, результаты расчета по такой модели различаются. Более того, они образуют некоторую область значений, подчиняющихся некоторым закономерностям;
- детерминированная модель, характеризующаяся аналитическим представлением закономерности, для которой для определенной совокупности исходных значений параметров и переменных гарантирован один и тот же единственный результат;
- дискретная модель, все переменные и параметры которой являются дискретными величинами. Такая модель может отображать как дискретные системы, так и непрерывные системы, которые для этого приводятся к дискретному виду с помощью представления непрерывных величин в качестве дискретных путем введения шкал, балльных оценок;
- линейная модель, отображающая состояние или функционирование системы таким образом, что все зависимости принимаются линейными. Такая модель может формулировать в виде одного линейного уравнения или системы линейных уравнений. В ряде случаев нелинейность может приводиться к линейной форме путем математических преобразований переменных;
- математико-статистическая модель, описывающая зависимости между входными и выходными переменными. При этом принципиально возможны две точки зрения на моделируемый процесс. Если считается, что для процесса характерны причинно-следственные связи, являющиеся функциональными, то модель является детерминированной. Если считается, что рассматриваемый процесс носит вероятностный характер, то соответствующая модель называется стохастической;

- матричная модель, построенная в форме таблиц (матриц), отображающих соотношения между элементами системы (наиболее частый случай — рассматриваются соотношения между затратами и результатами);
- нелинейная модель, отражающая состояние или функционирование системы (нелинейной или стохастической) таким образом, что все или некоторые зависимости принимаются нелинейными;
- непрерывная модель, содержащая непрерывные переменные;
- модель равновесия, которая может пониматься двояко. С одной стороны, в таких моделях предполагается, что участники экономической системы самостоятельно принимают решения, а оптимум всей системы находит при согласовании их интересов, т. е. оптимальное состояние системы приравнивается к ее равновесию, другое название — модель экономического взаимодействия;
- неравновесная модель, описывающая экономическую систему, в которой не соблюдается условие равновесия. Например, цены не уравнивают объемы спроса и предложения. Отсюда такие явления, как дефицитность или избыточность ресурсов;
- регрессионная модель, основанная на уравнении регрессии или системе регрессионных уравнений;
- сетевая модель, способная отобразить с любой степенью детализации состав и взаимосвязи работ во времени на основе применения сетевых графиков;
- числовая модель, основными элементами которой являются конкретные численные значения характеристик моделируемой системы;
- эконометрическая модель, в которой параметры оцениваются с помощью методов математической статистики. Такие модели используются в качестве средств анализа и прогнозирования конкретных экономических процессов как на макро-, так и на микроэкономическом уровне.

По временному и пространственному признаку различаются:

- гравитационная модель — модель взаимодействия между пространственными объектами в пространственном анализе экономики. Такая модель используется при исследовании процессов урбанизации, размещении промышленности, экспортно-импортных отношений, миграции населения. Общая черта этих моделей заключается в том, что сила взаимодействия (интенсивность потоков) в них зависит от значимости (величины) объектов и расстояния между ними;
- динамическая модель, которая должна содержать как минимум одну переменную, которая относится к периоду, отличному от времени, к которому относятся другие переменные, т. е. описывает экономику в развитии;
- модели с «бесконечным временем», которые трактуются как модели с проблемой «хвоста». Эта проблема призвана учесть ресурсы, которые требуют инвестиций, но дадут отдачу за пределами планового периода. Если в заданном периоде решается задача на минимум затрат при заданных объемах прибыли, то оптимальное решение получается при отсутствии инвестиций, отдача от которых будет за пределами рассматриваемого периода. Но, если не предусмотреть в модели дополнительных ограничений, связанных с проблемой

«хвоста», то основной капитал как бы «изнашивается» и рентабельность производства падает. Определение оптимального размера инвестиций в моделях развития экономики как раз и рассматривается в моделях с «бесконечным временем»;

- статическая модель, в которой все зависимости отнесены к одному моменту времени. С помощью таких моделей описываются не только статистические системы, но и динамические, для которых фиксируется их состояние в заданный момент.

При статическом подходе изучается отраслевая (межотраслевой баланс) или производственная структура, размещение производства, состояние экономики в целом (система национальных счетов);

- точечная модель — упрощенная модель экономической системы без учета процесса транспортировки, связанных с распределением по территории страны экономических объектов или удаленности стран. Этот вид модели целесообразно использовать для плановых расчетов и, особенно, в теоретических исследованиях экономики;
- трендовая модель — динамическая модель, в которой развитие экономической системы отражается через тренд ее основных экономических показателей (в частности, тренд средних величин этих показателей, их дисперсии, минимальных и максимальных уровней).

По уровню моделируемого объекта в хозяйственной иерархии:

- глобальная модель, которая имеет два назначения. Первое — наиболее общая для отдельной страны экономико-математическая модель, представляющая верхний уровень системы моделей народного хозяйства. Второе — модели, отражающие процессы глобального характера, т. е. наиболее масштабные социальные, экономические и экологические процессы, охватывающие земной шар;
- макроэкономическая модель, отражающая функционирование экономики страны или региона как единого целого. Макромодели оперируют, как правило, крупноагрегированными показателями — агрегатами (валовой национальный продукт, инвестиции). Макромодели используются для теоретического анализа наиболее общих закономерностей функционирования и развития экономики страны или региона. В практической деятельности применяются для прогнозирования экономических процессов;
- микроэкономическая модель, отражающая функционирование и структуру отдельного элемента экономической системы, его взаимодействие с другими элементами системы в процессе функционирования. Четкое разграничение между макромоделями и микромоделями отсутствует. Но к первым, как правило, относят наиболее обобщенные глобальные модели. Для микромоделей характерна большая зависимость от внешней среды, дезагрегация показателей.

По внутренней структуре модельного описания системы различаются:

- автономная модель — часть системы моделей, которую можно анализировать

независимо от других частей. Модель целесообразно рассматривать как автономную, если рассматриваемый объект обладает определенной степенью самостоятельности;

- закрытая модель, у которой нет входов и выходов (либо они признаются неизменными и потому не принимаются во внимание при анализе). Таким образом моделируемая система, принимается как бы изолированной от внешней среды (такая система называется замкнутой или закрытой). Естественно, что на самом деле у всякой страны есть экспорт и импорт, экономика всегда тесно связана с внешней природной средой и т. д. Да и вообще, любая экономическая система не замкнута, а открыта. Однако понятие замкнутой модели применяется как научная абстракция, помогающая изучать закономерности реальной экономики. Поведение такой упрощенной модели определяется не внешними факторами, а только внутренним начальным состоянием и внутренними закономерностями развития моделируемой системы;
- открытая модель, в которой учитывается взаимодействие с окружающей средой (внешние связи), в отличие от закрытой модели, где такие связи не принимаются во внимание. Например, в открытой модели экономики страны вводятся показатели, характеризующие экспорт и импорт, или, скажем, такие внешние связи, как туризм, вывоз капиталов. Чем модель более открыта, тем больше число вариантов ее поведения, тем шире, следовательно, область допустимых решений при планировании и принятии управленческих решений. Существуют открытые модели народного хозяйства, в которых предполагается, что конечное потребление находится вне изучаемой сферы. В них конечные продукты как бы экспортируются потребителям, т. е. выводятся за пределы модели;
- комплекс моделей — это совокупность моделей, предназначенных для решения одной сложной задачи. Каждая модель из комплекса описывает ту или иную сторону моделируемого объекта или процесса на «своем» языке;
- многосекторная модель экономики страны или региона, которую можно представить как совокупность крупных секторов. Если в качестве секторов принимаются отрасли производства, то такая модель называется многоотраслевой, а если хотя бы один сектор производит более одного продукта, то модель является многопродуктовой;
- однопродуктовая модель, характеризующаяся тем, что экономика страны производит один обобщенный продукт, часть которого идет на потребление, а другая часть — на увеличение основного и оборотного капитала.

Что касается *сферы применения*, то можно отметить необозримость областей применения экономико-математических моделей.

Приведенная классификация не является, очевидно, ни всеобъемлющей, ни полной. Но она дает представление обо всем многообразии подходов к моделированию экономических процессов и косвенно свидетельствует о широте применяемого математического аппарата для формального описания этих процессов.

Лекция 2

Модели потребительского рынка

2.1. Модель поведения потребителя

Для относительного анализа микроэкономических процессов используются кривые безразличия. **Кривая безразличия** — это линия равной полезности, все точки которой характеризуют товары, которые обеспечивают потребителю одинаковый уровень полезности $U = U_0$ (рис. 2.1).

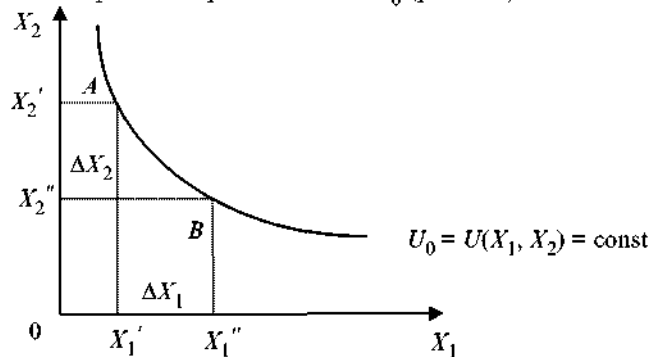


Рис. 2.1. Кривая безразличия

Форма кривых безразличия отображает готовность потребителя обменивать один товар на другой. Когда оба товара легко заменить, кривая безразличия вогнута менее. Если товары не заменяются — кривая безразличия вогнута больше.

Карта кривых безразличия — множество всех возможных уровней полезности (U_1, U_2, U_3, \dots) для определенного потребителя (рис. 2.2).

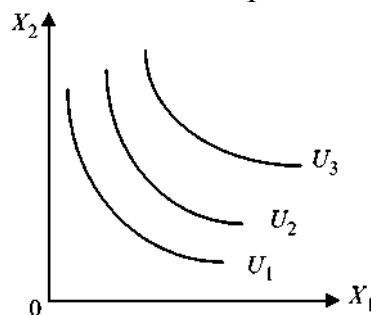


Рис. 2.2. Карта кривых безразличия

Предельная полезность MU_i блага X_i — это изменение общей полезности набора двух товаров при изменении количества данного блага на единицу. Математически предельная полезность блага X_i при неизменном количестве всех других благ есть частной производной функции полезности:

$$MU_i = \frac{\partial f(X_1, X_2)}{\partial X_i}.$$

Количество блага X_2 , от которого потребитель готов отказаться в обмен на дополнительную единицу блага X_1 при неизменном общем уровне полезности, называется **предельной нормой замещения благ (MRS)**.

$$MRS = - \frac{\Delta X_2}{\Delta X_1} = - \frac{MU_1}{MU_2}.$$

Для выпуклых кривых безразличия предельная норма замещения MRS измеряет наклон кривой безразличия.

Следующий этап модели поведения потребителя аргументируется тем,

что потребитель ограничен финансовыми ресурсами и это не дает ему возможности удовлетворить все свои потребности.

Бюджетное ограничение потребителя (графически это - бюджетная линия) - множество наборов, стоимость которых составляет R : $P_1 X_1 + P_2 X_2 = R$.

На бюджетную линию влияют орудия экономической политики: налоги, субсидии, рациональные ограничения.

Для оптимизации поведения потребителя следует совместить системы кривых безразличия с бюджетным ограничением (рис. 2.4). Потребитель избирает на линии бюджетного ограничения точку (точку оптимума), которая содержится на кривой безразличия выше других кривых безразличия.

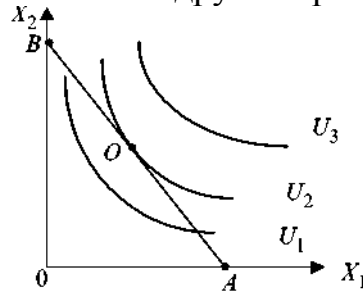


Рис. 2.4. Оптимум потребителя

В точке оптимума O предельная норма замещения двух товаров равняется их относительной цене. Линия бюджетного ограничения есть касательной к кривой безразличия. Выбор в точке O является оптимальным выбором для потребления.

$$MRS = \frac{P_1}{P_2} = -\frac{MU_1}{MU_2} \text{ або } \frac{P_1}{P_2} = \frac{MU_1}{MU_2}.$$

2.2. КЕЙНСИАНСКАЯ МОДЕЛЬ ПОТРЕБЛЕНИЯ

Кейнсианская модель потребления принадлежит к макроэкономическим моделям. По Кейнсу используемый доход Y разделяют на C — потребление и S — сбережения: $Y = C + S$.

Потребительские затраты — это затраты домохозяйств на приобретение товаров потребления и оплату услуг для удовлетворения личных потребностей. По Кейнсу потребительские затраты изменяются закономерно с изменением дохода. Исследовал эти закономерности на основе семейных бюджетов немецкий статистик XIX ст. Эрнест Энгель.

Функция потребления выражает зависимость между используемым доходом и объемом потребления и имеет вид: $C = F(Y)$ або $C = F(Y - T)$ (рис. 2.5).

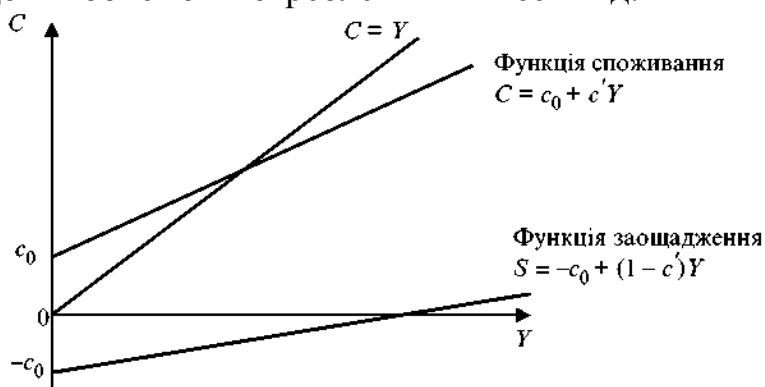


Рис. 2.5. Функция потребления и функция сбережения.

Фактором потребления в функции есть доход. $C = c_0 + c'(Y - T)$, где c_0 —

где C_0 автономное потребление, то есть объем потребления, которое не зависит от используемого дохода. Например, проживание в долг, за счет сбережений, субсидий. В долгосрочном периоде для экономики в целом автономное потребление движется к 0;

C' — **предельная склонность к потреблению** — величина, которая показывает, на сколько единиц изменится объем потребления при изменении используемого дохода на одну единицу и определяется по формуле

$$c' = MPC = \Delta C / \Delta Y,$$

где ΔC — прирост потребительских затрат; ΔY — прирост используемого дохода.

С геометрической точки зрения предельная склонность к потреблению MPC — это угол наклона кривой потребления.

Модель функции потребления: $C = c_0 + c'Y$,

где C — величина потребления домашних хозяйств; c_0 — автономное потребление; c' — предельная склонность к потреблению; Y — доход.

Сбережения S — это непотребленная часть дохода. Простейшая функция сбережения имеет вид: $S = F(Y)$. Каждой функции потребления отвечает единая функция сбережений (см. рис. 2.5):

$$S = Y - C = Y - c_0 - c'Y = -c_0 + (1 - c')Y.$$

Модель функции сбережения:

$$S = s_0 + s'Y, s' = 1 - c', s_0 = 1 - c_0,$$

где S — величина сбережений домашних хозяйств, s_0 — автономное сбережение; $1 - c' = s'$ — предельная склонность к сбережению; Y — доход.

Предельная склонность к сбережению — величина дополнительного сбережения с одной дополнительной денежной единицы используемого дохода: $MPS = \Delta S / \Delta Y$, где ΔS — прирост сбережений; ΔY — прирост используемого дохода.

Поскольку часть каждой денежной единицы (гривны), которая не потребляется, обязательно экономится, то: $MPC + MPS = 1$.

Факторы, которые не зависят от дохода и влияют на потребление и сбережение:

1. Богатство.
2. Налоги.
3. Уровень цен.
4. Отчисления на социальное страхование.
5. Ожидания.
6. Потребительская задолженность.
7. Процентная ставка.

Теория Кейнса апробировалась на основе статистических данных экономики США за 1929-1941 гг. Уравнение имело такой вид: $C = 47,6 + 0,73Y$. Дальнейшие исследования подтверждают приемлемость формулы только для краткосрочного периода. В 1946 г. американский ученый украинского происхождения С. Кузнец на основе анализа статистических данных за 1869-

1940 рр. пришел к выводу, что с возрастанием дохода средняя склонность к потреблению остается постоянной (рис. 2.6). С. Кузнец на основании официальной статистики исследовал зависимость между доходом и потреблением в США в период с 1868 по 1930 год. Оказалось, что отношения C/Y в долгосрочном периоде не имеет тенденции к снижению, а имеет вид: $C = c'Y$.

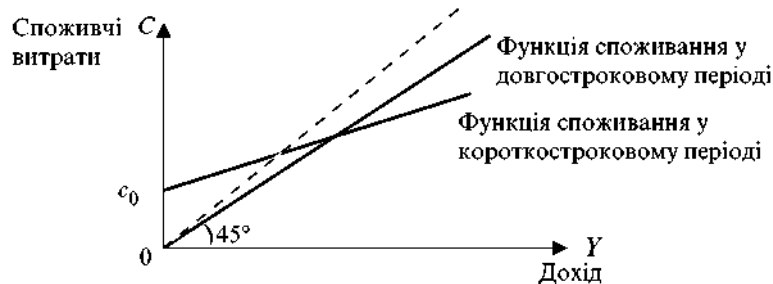


Рис. 2.6. **Функция потребления в долгосрочном и краткосрочном периодах**

Существует несколько концепций, которые объясняют эту проблему. В частности, модели временного (міжчасового) потребительского выбора И. Фишера, жизненного цикла Ф. Модильяни, перманентного дохода М. Фридмена.

2.3. МОДЕЛЬ ВРЕМЕННОГО (МІЖЧАСОВОГО) ПОТРЕБИТЕЛЬСКОГО ВЫБОРА И. ФИШЕРА

Ирвинг Фишер (1867-1947) — американский экономист, статистик, представитель неоклассической школы выдвинул гипотезу о том, что, принимая потребительские решения, рациональный человек учитывает не только текущий, но и будущий доход, то есть весь доход, который он получает на протяжении жизни.

Предложенная модель получила название **модели временного (міжчасового) потребительского выбора**. Суть ее состоит в том, что при принятии решения о потреблении в данный момент и в будущем потребители встречаются с временным (міжчасовим) бюджетным ограничением. Перед потребителем возникает проблема выбора и два временных периода: молодость (доход Y_1) и старость (доход Y_2).

В первый период лицо потребляет и экономит: $Y_1 = C_1 + S_1$, Отсюда:

$$C_1 = Y_1 - S_1; S_1 = Y_1 - C_1.$$

Во втором периоде индивид имеет доход Y_2 . Он потребляет, но не экономит, использует сбережения первого периода и полученные проценты в первый период жизни. Тогда:

$$C_2 = Y_2 + \dot{S}_1(1+r) = \dot{Y}_2 + (Y_1 - C_1)(1+r),$$

где r — реальная процентная ставка.

Преобразуем уравнение: потребление — в левую сторону, доход — в правую сторону. $C_2 = Y_2 + Y_1(1+r) - C_1(1+r)$; $C_1(1+r) + C_2 = Y_1(1+r) + Y_2$.

Поделим обе части на $1+r$, получим:

$$C_1 + \frac{C_2}{1+r} = Y_1 + \frac{Y_2}{1+r}.$$

Это — уравнение временного (міжчасового) бюджетного ограничения потребителя, который показывает, какой суммой средств должны владеть потребители на протяжении двух жизненных периодов.

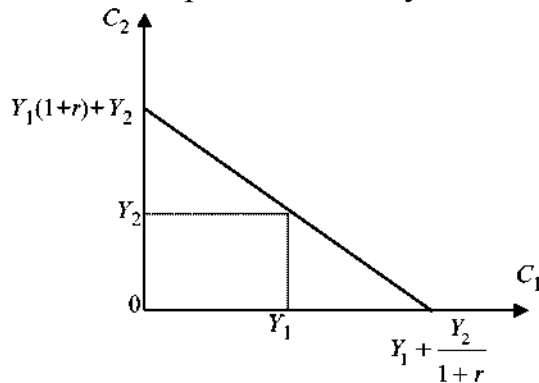


Рис. 2.7. Бюджетное ограничение потребителя по модели Фишера

Наклон линии бюджетного ограничения равен $1/(1+r)$ (рис. 2.7):

$$\frac{Y_1 + \frac{Y_2}{1+r}}{(1+r)Y_1 + Y_2} = \frac{(1+r)Y_1 + Y_2}{(1+r)Y_1 + Y_2} = \frac{1}{1+r}.$$

Преимущества потребителя между потреблением в первом и втором периодах отображают кривые безразличия. Каждая кривая безразличия характеризует равный уровень полезности для потребителя разных наборов потребления в настоящем и будущем периодах (рис. 2.8). Потребитель предоставляет преимущество высшим кривым безразличия, поскольку они обеспечивают большее потребление.

Стремление потребителей - максимизировать свою полезность ограниченную бюджетом. Оптимальная комбинация потребления в первом и втором периодах достигается в точке соприкосновения высочайшей кривой безразличия к линии бюджетного ограничения.

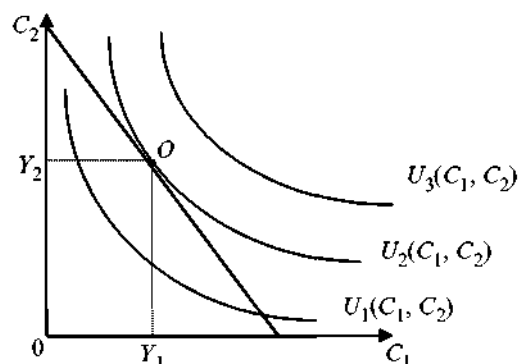


Рис. 2.8. Оптимум потребителя для модели Фишера

Наклон кривой равнодушия отображает предельную норму замещения (MRS). Наклон линии бюджетного ограничения равняется $1/(1+r)$. Итак, в точке O : $MRS = 1/(1+r)$.

На потребление влияют:

- 1) изменение дохода;

2) изменение уровня процентной ставки.

Рост дохода смещает линию бюджетного ограничения по правую сторону. При возрастании процентной ставки изменится угол наклона бюджетной линии, поскольку потребление в первом периоде уменьшится, во втором — увеличится.

Влияние реальной процентной ставки отображается в эффекте дохода и эффекте замещения. **Эффект дохода** — изменение в потреблении, вызванное переходом к высшей кривой безразличия. **Эффект замещения** — изменение в потреблении, вызванное изменением относительной цены потребления в оба периода.

2.4. МОДЕЛЬ ЖИЗНЕННОГО ЦИКЛА Ф. МОДИЛЬЯНИ

Франко Модильяни (США). Основная работа "Жизненный цикл, сбережения граждан и богатство нации". 1985 г. получил Нобелевскую премию за анализ финансовых рынков и процессов сбережения. Суть его теории состоит в том, что доход человека колеблется на протяжении жизни. В юности люди берут заем, рассчитывая на высокие заработки в будущем. В пенсионном возрасте потребления обеспечивают сбережения минувшего периода.

Предположим, что потребитель предусматривает прожить T лет, владеет богатством W , ожидает получать доход Y , на пенсию планирует пойти через R лет. Итак, на протяжении жизни потребитель получит сумму $W + RY$. При этом не учитывается процентная ставка.

Поскольку полученная на протяжении жизни сумма распределяется равномерно по T годами, то лицо потребляет ежегодно:

$$C = \frac{W + RY}{T} \text{ (гр. од.)}$$

Итак, функция потребления для рационального потребителя имеет вид:

$$C = \frac{W + RY}{T} = \frac{1}{T}W + \frac{R}{T}Y,$$

то есть, функция потребления зависит от ожидаемого дохода и текущего богатства: $C = C(Y, W)$.

Модель функции потребления Франко Модильяни приобретает вид:

$$C = \alpha W + \beta Y; \quad \alpha = 1/T; \quad \beta = R/T,$$

где α — предельная склонность к потреблению по текущему богатству; β — предельная склонность к потреблению по доходу; W — богатство; Y — доход; T — года жизни; R — количество лет, которые предполагается проработать к пенсии.

2.5. МОДЕЛЬ ПЕРМАНЕНТНОГО ДОХОДА М. ФРИДМЕНА

Милтон Фридмен (США). 1976 г. получил Нобелевскую премию за анализ теории потребления, теории и истории денежного обращения. Основные положения его теории:

1. Функция потребления имеет значения только для долгосрочного периода.

2. Потребление определяется в зависимости от постоянного

(перманентного дохода).

Перманентный доход — средневзвешенная величина из всех доходов, которые человек ожидает получить (средний доход). Гипотеза перманентного дохода базируется на теории потребительского выбора И. Фишера.

У Фридмена модель приобретает вид:

$$C_1 + \frac{C_2}{1+r} = Y_p + \frac{Y_p}{1+r},$$

где Y — перманентный доход.

Превратим уравнение относительно Y , получим:

$$Y_p = \left(\frac{1+r}{2+r} \right) \left(C_1 + \frac{C_2}{1+r} \right).$$

Текущий доход Y равняется сумме постоянного дохода Y_p и временного дохода Y_t : $Y = Y_p + Y_t$.

Временный доход — часть дохода, которую не ожидают сохранить в будущем. Это — случайное отклонение от дохода. Временный доход может быть трех видов. *Случайный* временный доход составляет случайные отклонения от обычного тренда (выигрыш в лотерее), при котором текущее потребление экономических субъектов не изменяется. *Временный доход перманентного отклонения от обычного* (повышение или понижения в должности). С изменением дохода изменяется потребление. *Ожидаемое отклонение* дохода (ожидается повышение в должности или планируются большие затраты в связи с изменением местожительства). В этом случае при неизменном текущем доходе происходит изменение потребительских затрат.

Деление текущего дохода на перманентный и временный дал возможность Фридмену решить противоречие Кейнса между долгосрочной и краткосрочной функциями потребления, по которым средняя склонность к потреблению в краткосрочном периоде имеет тенденцию к снижению, а в долгосрочном — стабильной. В долгосрочном периоде временные отклонения текущего дохода от перманентного уравниваются и функция потребления приобретает вид:

$$C = \alpha Y_p,$$

где α — коэффициент. Итак, потребление пропорционально перманентному доходу. Поделим обе части уравнения на Y , получим:

$$\frac{C}{Y} = \frac{\alpha Y_p}{Y},$$

то есть средняя склонность к потреблению зависит от отношения постоянного дохода к текущему. Итак, в года высокого дохода средняя склонность к потреблению — низкая, в года маленького дохода — высокая. В долгосрочном периоде она — постоянная.

Исследования Фридмена постатистическими данными с 1905 по 1967 г. дали результат: $C = 0,88 Y_p$.

Лекция № 3

Макроэкономические равновесные модели

Среди многочисленных определений равновесия экономической системы наиболее распространены два: одно исходит из рассмотрения свойств системы, другое из рассмотрения воздействующих на нее сил.

I. Равновесие — это такое состояние системы, которое характеризуется равенством спроса и предложения всех ресурсов. В этом смысле синонимом термина «равновесие» является сбалансированность.

II. Равновесие — это такое состояние системы, при котором ни один из многих взаимосвязанных участников системы не заинтересован в изменении этого состояния, т. к. он не может ничего выиграть, но может проиграть.

В экономике наиболее распространено использование понятия «равновесия» при анализе рынка. Под равновесием спроса и предложения на какой-либо продукт на рынке обычно понимают соотношение цен, производственных возможностей производителя и бюджетных возможностей потребителей, которые обеспечивают равенство объемов спроса и предложения на данный продукт. Рынок находится в состоянии равновесия, если имеет место равенство объемов спроса и предложения по всем продаваемым на нем продуктам.

Равновесие экономической системы рассматривается двояко:

- как статическое — т. е. положение, состояние равновесия;
- как динамическое, т. е. уравновешенный, или сбалансированный процесс развития, соответствующий равновесному сбалансированному росту.

Макроэкономика исследует национальное хозяйство в целом, то есть всю совокупность рынков. В экономической теории множество рынков сводится к трем: рынок благ (совокупность рынков товаров и услуг); финансовый рынок (совокупность рынков ценных бумаг и денег); рынок факторов производства (совокупность рынков труда и капитала).

На рынке благ равновесие достигается, если объем **ВВП** равняется запланированным затратам всех субъектов товарного рынка на куплю товаров и услуг, которые произведены в стране. Спрос и предложение дохода на этом рынке зависят от общего уровня цен: $Y_s = Y_d$.

На рынке денег равновесие достигается, если количество предложенных банковской системой денег в экономике уравнивается спросом на них: $M_s = M_d$.

Рынок ценных бумаг, или рынок кредита, охватывает всю совокупность долгосрочных бумаг, которые приносят процент. Цена ценных бумаг является обратно зависимой величиной от ставки процента: $1/r$. Равновесие достигается, если спрос и предложение на рынке ценных бумаг совпадают: $B_s = B_d$.

На рынке труда равновесие достигается, если количество предложенных рабочих мест уравнивается с предложением рабочей силы: $N_s = N_d$.

В состоянии общего экономического равновесия действует **закон Вальраса (1834-1910)**, по которому в экономике, которая состоит из n

взаимосвязанных рынков, на n -м рынке всегда будет равновесие, если оно будет достигнуто на всех других $n-1$ рынках. Закон вытекает из того, что совокупный спрос и совокупное предложение всех благ выражаются через их цены: товаров и услуг Y через P , ценных бумаг B через $1/r$, труда N через W , денег M через 1 .

Модель приобретает вид:

$$PY_d + (1/r)B_d + WN_d + M_d = PY_s + (1/r)B_s + WN_s + M_s.$$

Модель Вальраса приобретает вид:

$$P(Y_d - Y_s) + (1/r)(B_d - B_s) + W(N_d - N_s) + (M_d - M_s) = 0.$$

Макроэкономический анализ по закону Вальраса должен исследовать $n-1$ рынок. Поэтому из анализа, как правило, изымается самый сложный — рынок ценных бумаг.

В основу макроэкономического анализа положена модель экономического кругооборота.

Модель экономического кругооборота с участием государства для закрытой экономики содержит в себе сектора: домохозяйства, фирмы и государство и два вида рынков: рынок благ и рынок ресурсов. Поток "доходы-затраты" действуют в противоположных направлениях, а суммарный поток доходов равняется суммарному потоку затрат в условиях равновесия.

Государство принимает участие в регулировании экономики тремя способами: 1) взиманием налогов;

2) осуществлением государственных затрат;

3) регулированием количества денег в экономике.

Кейнсианская теория равновесия

Функция денежного спроса в теории Кейнса определяется двумя главными параметрами:

1) увеличением дохода, способствующим росту числа и масштабов сделок (трансакционный спрос);

2) колебаниями процентных ставок, отражающим спекулятивный спрос.

В простейшей форме кейнсианская модель определения национального дохода может быть выражена системой уравнений. Основные переменные в ней:

Y — национальный доход;

C — потребление;

I — инвестиции;

R — процентные ставки (эндогенные макропеременные);

G — государственные закупки;

M — денежное предложение (экзогенные переменные);

P — уровень цен (условно-постоянная величина).

В этих обозначениях основные параметры кейнсианской модели имеют вид:

- уровень дохода $Y = C + I + G$;
- потребительский спрос $C = a + b(1 - t) \cdot Y$;
- инвестиционный спрос $I = e + d \cdot R$;
- денежный спрос $M = (k \cdot Y - h \cdot R) P$.

Здесь a, b, e, d, k, h — постоянные, определяемые на основе статистики, а t — время.

Модель совокупного спроса и совокупного предложения — базовая модель макроэкономического равновесия (рис. 3.1).

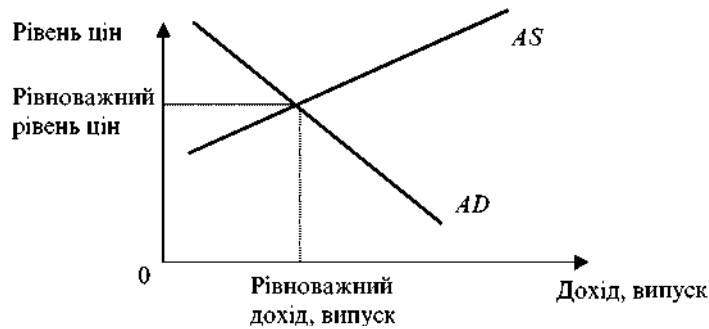


Рис. 3.1. Кейнсианская модель $AD-AS$

Модель совокупного спроса и совокупного предложения анализирует причины колебаний уровня цен и реальных объемов национального производства. Совокупный спрос и совокупное предложение агрегируются соответственно из равновесных величин спроса и предложения на всех рынках товаров и услуг.

Совокупный спрос (AD) — это общий объем отечественных товаров и услуг, который готовы купить домохозяйства, фирмы, государство и экономические субъекты других стран при определенном уровне внутренних цен.

Отрицательный наклон кривой совокупного спроса определяется тремя ценовыми факторами:

- 1) эффектом богатства;
- 2) эффектом процентной ставки;
- 3) эффектом обменного курса.

Совокупное предложение (AS) — это объем товаров и услуг, который предлагается экономикой для продажи при каждом уровне цен. Величина совокупного предложения определяется имеющимися в экономике капиталом, трудом и технологией и может быть записана на основе производственной функции.

Классическая модель совокупного предложения (рис. 3.2) — модель для долгосрочного периода.

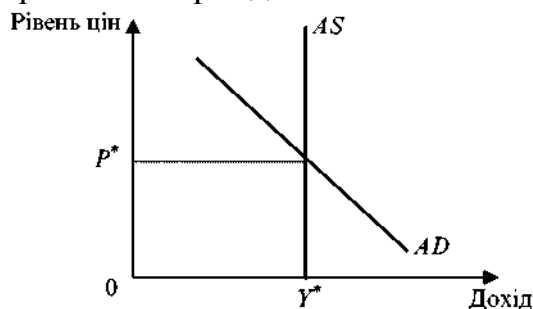


Рис. 3.2. Классическая модель совокупного предложения

Ценовые факторы совокупного предложения:

1. Изменение процентной ставки.
2. Изменение уровня цен.

Неценовые факторы совокупного предложения:

1. Изменения цен на ресурсы.
2. Изменения в производительности труда.
3. Изменения налогов из предприятий и субсидий.

При изменении неценовых факторов изменяются средние затраты. Прямая совокупного предложения смещается влево или вправо.

Пересечение прямых совокупного спроса AD и долгосрочного прямого совокупного предложения AS определяет равновесный доход, выпуск и равновесный уровень цен. Когда экономика достигает долгосрочного равновесия, заработная плата и цены изменяются таким образом, чтобы краткосрочная прямая совокупного предложения LAS также прошла через эту точку. В точке A имеет место двойное равновесие (рис. 3.3).

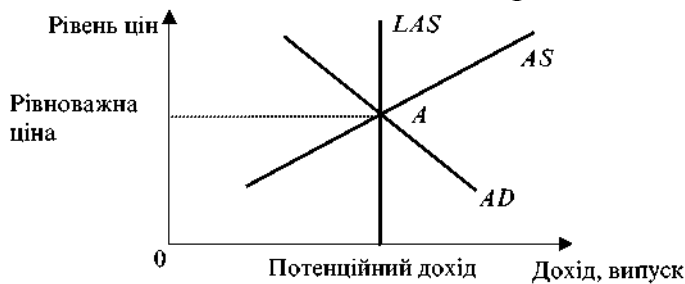


Рис. 3.3. Двойное равновесие в модели $AD-AS$

Инвестиции — это экономические ресурсы, которые направляются на увеличение реального капитала общества. В макроэкономике базовой инвестиционной функцией есть функция, которая зависит от процентной ставки. Реальная процентная ставка — плата за приобретение денежного капитала для инвестирования. Функция инвестиций является нисходящей и отображает обратную зависимость между процентной ставкой и инвестициями. Фактические инвестиции делятся на плановые и unplanned. Это деление отображается в модели экономического равновесия "затраты-выпуск", графическая интерпретация которой имеет название "кейнсианский крест" (рис. 3.4).

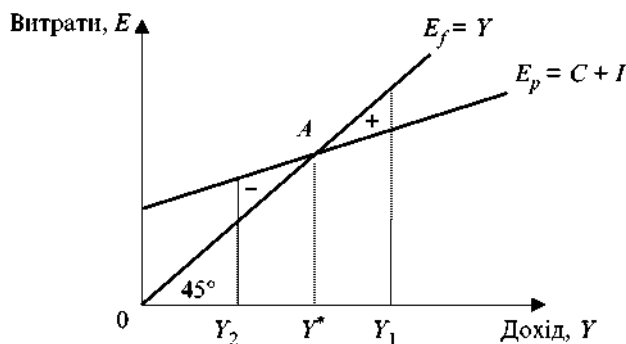


Рис. 3.4. Модель "затраты-выпуск"

Биссектриса означает, что фактические и плановые затраты совпадают, "+" — незапланированный рост, "-" — уменьшение инвестиций в товарно-

материальные запасы. В точке *A*, где затраты совпадают с доходом, достигается равенство плановых и фактических инвестиций, то есть устанавливается макроэкономическое равновесие. Если фактический доход превышает равновесный, фирмы производят больше, чем покупатели приобретают. Происходит неплановый рост инвестиций в товарные запасы, и производство будет иметь тенденцию к спаду, поскольку экономика постоянно стремится достичь равновесия. Если равновесный доход превышает фактический, происходит неплановое сокращение инвестиций в товарные запасы и производство будет иметь тенденцию к возрастанию.

ЛЕКЦИЯ 4

Применение производственных функций в макро- и микроэкономике

1 Понятие производственной функции

Производственная функция одной переменной $Y = f(x)$ — функция, независимая переменная которой принимает значения объемов затрачиваемого ресурса (фактора производства), а зависимая переменная — значения объемов выпускаемой продукции. В связи с этим производственная функция называется *одноресурсной*, или *однофакторной* ПФ, ее область определения — множество неотрицательных действительных чисел. Символ функции является характеристикой производственной системы, преобразующей ресурс в выпуск. В микроэкономике считают, что y — это максимально возможный объем выпуска продукции, если ресурс затрачивается или используется в количестве x единиц. В макроэкономике такое понимание не совсем корректно, так как при ином распределении ресурсов между структурными единицами экономики выпуск может быть иным, поэтому ПФ — это статистически устойчивая связь между затратами ресурса и выпуском. Более правильной считается запись $y=f(x, a)$, где a — вектор параметров ПФ.

Рассмотрим простую ПФ вида $f(x) = ax^b$, где x — величина затрачиваемого ресурса (например, рабочего времени), $f(x)$ — объем выпускаемой продукции (например, число готовых деталей), величины a и b — параметры ПФ. Исходя из поведения данной функции следует, что с ростом величины затрачиваемого ресурса x объем выпуска y растет, однако при этом каждая дополнительная единица ресурса дает все меньший прирост объема y выпускаемой продукции. Это обстоятельство отражает фундаментальное положение экономической теории, подтвержденное на практике и называемое *законом убывающей эффективности*.

ПФ имеют различные области использования с реализацией принципа «затраты — выпуск» как на микро-, так и на макроуровне.

Микроэкономические ПФ используются для описания взаимосвязи между величиной затрачиваемого или используемого ресурса x в течение определенного времени и выпуском продукции y , осуществляемым конкретным субъектом хозяйствования.

Макроэкономические ПФ можно использовать для описания взаимосвязей между годовыми затратами труда в масштабе региона или страны и годовым конечным выпуском продукции (или дохода) этого региона или страны в целом, а также для решения задач анализа, планирования и прогнозирования. На микроэкономическом уровне затраты и выпуск могут измеряться в натуральных или в стоимостных единицах и показателях; например, годовые затраты труда — в человекочасах или в рублях выплаченной заработной платы; выпуск продукции может быть представлен в штуках или других натуральных единицах (тоннах, метрах и т. п.) или в виде своей стоимости. На макроэкономическом уровне затраты и выпуск измеряются обычно в стоимостных показателях, представляя собой стоимостные (ценностные) агрегаты, т. е. суммарные величины произведений объемов затрачиваемых (или

используемых) ресурсов и выпускаемых продуктов на их цены.

Производственная функция *нескольких переменных* — это функция вида $y = f(x) = f(x_1, \dots, x_n, a)$, независимые переменные x_i которой принимают значения объемов затрачиваемых или используемых ресурсов (число переменных n равно числу ресурсов), а значение функции имеет величину объемов выпуска; a — вектор параметров. В связи с этим такие производственные функции называются *многоресурсными*, или *многофакторными*.

Для *отдельного субъекта хозяйствования*, выпускающего однородный продукт, ПФ $f(x_1, \dots, x_n)$ могут связывать объем выпуска (в натуральном или стоимостном выражении) с затратами рабочего времени по различным видам трудовой деятельности, комплектующих изделий, энергии, основного капитала, измеряемым обычно в натуральных единицах (производственные функции такого типа характеризуют действующие технологии субъектов хозяйствования).

При построении ПФ для *отдельного региона* или страны в целом в качестве величины годового выпуска чаще всего берут совокупный продукт (доход) региона или страны, исчисляемый обычно в неизменных, а не в текущих ценах, в качестве ресурсов рассматривают: основной капитал $K(x_1)$ — объем используемого в течение года основного капитала; живой труд $L(x_2)$ — количество единиц затрачиваемого в течение года живого труда, исчисляемые обычно в стоимостном выражении. В результате строят *двухфакторную* ПФ $f(x_1; x_2)$, или $Y = f(K, L)$. Далее от двухфакторных производственных функций переходят к трехфакторным, при этом в качестве третьего фактора иногда вводятся объемы используемых природных ресурсов. Кроме того, если производственные функции строятся по данным временных рядов, то в качестве особого фактора роста производства можно включить технический прогресс.

ПФ $f(x_1; x_2)$ называется *статической*, если ее параметры и характеристика f не зависят от времени t , т. е. можно иметь представление в виде временных рядов: $x_1(0), x_1(1), \dots, x_1(T)$; $x_2(0), x_2(1), \dots, x_2(T)$; $y(0), y(1), \dots, Y(T)$; $y(t) = f(x_1, x_2(t))$. Здесь t — номер года, $t = 0, 1, \dots, T$; $t = 0$ — базовый год временного промежутка, охватывающего годы $1, 2, \dots, T$.

Для моделирования проблем отдельного региона или страны в целом и решения задач как на макро-, так и на микроэкономическом уровне часто используется производственная функция Кобба—Дугласа:

$$y = a_0 x_1^{a_1} x_2^{a_2}$$

где a_0, a_1, a_2 — параметры ПФ, являющиеся положительными постоянными числами, причем часто a_1 и a_2 таковы, что $a_1 + a_2 = 1$

В практических приложениях ПФКД обычно x_1 равняется объему *используемого* основного капитала или объему используемых основных фондов K ($x_1 = K$), $x_2 = L$ — затратам живого труда, тогда она приобретает вид:

$$Y = a_0 * K^{a_1} L^{a_2}$$

Графиком ПФ вида $y = a_0 x_1^{a_1} x_2^{a_2}$: ($a_1 + a_2 = 1$) в трехмерном пространстве

выступает двумерная поверхность, являющаяся конической поверхностью. Необходимо отметить, что с ростом затрат первого ресурса объем выпуска y растет, но каждая дополнительная единица первого ресурса обеспечивает все меньший прирост выпуска y (например, если число работников и их квалификация остаются неизменными, а число обслуживаемых ими станков, которое уже достаточно велико, увеличивается, скажем, в два раза, то это не ведет к двойному росту объема выпуска). Если $a_1 + a_2 < 1$, то графиком ПФКД является поверхность, которая напоминает выпуклую вверх «горку», крутизна которой падает, если точка (x_1, x_2) перемещается на «северо-восток» по координатной плоскости.

Пусть линейные аддитивные ПФ имеют вид: $y = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2$ (двухфакторная). Переход от мультипликативной ПФ к аддитивной осуществляется с помощью операции логарифмирования. Для двухфакторной мультипликативной ПФ $y = a_0x_1^{a_1}x_2^{a_2}$ этот переход имеет вид:

$$\ln y = \ln a_0 + a_1 \ln x_1 + a_2 \ln x_2.$$

Полагая $\ln y = w$, $\ln x_1 = v_1$ и $\ln x_2 = v_2$, получаем аддитивную ПФ вида $w = \ln a_0 + a_1v_1 + a_2v_2$. Выполняя обратный переход из аддитивной ПФ, можно получить мультипликативную производственную функцию.

Если сумма показателей степени в ПФКД $y = a_0K^{a_1}L^{a_2}$ равна единице ($a_1 + a_2 = 1$), то ее можно записать в несколько иной форме:

$$Y/L = a_0K^{a_1}L^{a_2}/L = a_0K^{a_1}/L^{(1-a_2)} = a_0K^{a_1}/L^{a_1} = a_0(K/L)^{a_1}$$

Дроби Y/L и K/L называются соответственно производительностью труда и капиталовооруженностью труда. Производительность труда растет медленнее его капиталовооруженности (этот вывод справедлив для случая статической ПФКД в рамках существующих технологии и ресурсов).

Обратная дробь Y/K называется производительностью капитала, или капиталоемкостью, а обратные дроби K/Y и L/Y называются соответственно капиталоемкостью и трудоемкостью выпуска продукции.

ПФ называется динамической, если:

а) время t фигурирует в качестве самостоятельного фактора производства, влияющего на объем выпускаемой продукции;

б) параметры ПФ и ее характеристика f зависят от времени t , если параметры ПФ оцениваются по данным временных рядов (объем ресурсов и выпуска) продолжительностью T_0 лет, то экстраполяцию по такой производственной функции следует рассчитывать не более чем на $T_0/3$ лет вперед.

При построении ПФ влияние НТП учитывается множителем e^{pt} , где p ($p > 0$) — характеризующий темп прироста выпуск, осуществляемый под влиянием НТП:

$$y(t) = e^{pt} f(x_1(t), x_2(t))$$

где $t=0, 1, \dots, T$.

Данная ПФ — простейшая динамическая ПФ, содержащая нейтральный (не материализованный в одном из факторов) технический прогресс. В сложных случаях НТП, выступающий как трудо- или капиталосберегающий

фактор, может воздействовать непосредственно на производительность и капиталоотдачу.

В целом выбор аналитической формы ПФ $y = f(x_1, x_2)$ обусловливается теоретическими соображениями учета особенностей взаимосвязей между конкретными ресурсами (при микроэкономическом уровне), особенностей параметризации (реальных или экспертных данных, преобразуемых в параметры ПФ). Отметим, что оценка параметров ПФ обычно проводится с помощью метода наименьших квадратов.

2 Формальные свойства, предельные (маржинальные) и средние значения производственных функций

Производственная функция $f(x_1, x_2)$ должна удовлетворять ряду свойств:

- а) без ресурсов нет выпуска;
- б) с ростом затрат хотя бы одного ресурса объем выпуска растет;
- в) с ростом затрат одного (i -го) ресурса при неизменном количестве другого ресурса величина прироста выпуска на каждую дополнительную единицу i -го ресурса не растет (закон убывающей эффективности);
- г) производственная функция является однородной функцией степени $p > 0$: при $p > 1$ с ростом масштаба производства в t раз ($t > 1$) объем выпуска возрастает в t^p раз (т. е. имеем рост эффективности производства при росте масштаба производства); при $p < 1$ имеем падение эффективности производства от роста масштаба производства; при $p = 1$ — постоянную эффективность производства при росте его масштаба или независимость удельного выпуска от масштаба производства.

Заметим, что для ПФКД вида $y = a_0 x_1^{a_1} x_2^{a_2}$ ($a_1 + a_2 = 1$) свойства а—г выполняются.

Для линейной ПФ $y = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2$ ($a_0 > 0$, $a_1 > 0$, $a_2 > 0$) ряд свойств (а (при $a_0 = 0$) и г не выполняются).

Для непрерывной и дифференцированной двухфакторной производственной функции формула может быть записана с использованием частных производных функции двух переменных:

$$MPL = \frac{\partial F(L, K)}{\partial L}; \quad MPK = \frac{\partial F(L, K)}{\partial K}.$$

Технологическая норма замещения $MRTS$ показывает выбор между двумя факторами в производстве. Она измеряет пропорцию, в которой фирме нужно заменить один фактор другим, чтобы оставить выпуск без изменений.

$$MRTS(K, L) = \frac{\Delta L}{\Delta K} = - \frac{MPK}{MPL}.$$

Для построения двухфакторной функции выбираем разные комбинации ресурсов, которые обеспечивают один и тот же объем выпуска, и наносим точки с соответствующими координатами (L, K) на координатную плоскость. Получим линию неизменного выпуска — изокванту (рис. 4.1). **Изокванта** — кривая, которая показывает все возможные комбинации ресурсов (L, K) , которые разрешают получить определенный фиксированный объем производства (Q).

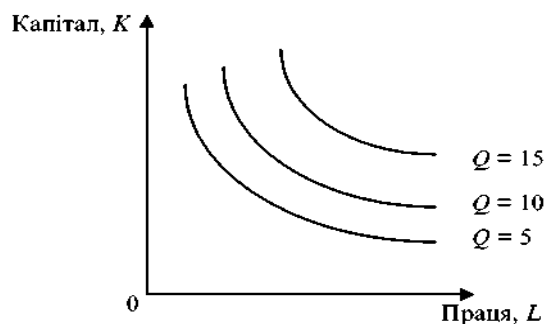


Рис. 4.1. Карта изоквант

Совокупность изоквант одной производственной функции, каждая из которых отвечает определенному объему выпуска продукции, называется картой изоквант.

Изокванты производственной функции **Кобба-Дугласа** имеют вид кривых, рассмотренных на рис 4.1. Они выпуклые в сторону начала координат и не пересекают их, и приближаются к координатным осям. Это означает, что факторы производства могут лишь частично заменять друг друга, но полная замена невозможна, то есть $F(0, K) = F(L, 0) = 0$.

Функция с фиксированными пропорциями факторов, которая имеет название **производственной функции Леонтьева** (рис. 4.2): $Q = \min(aL, bK)$; $a, b > 0$.

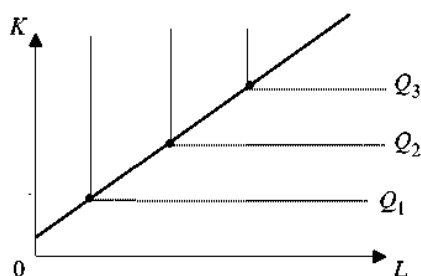


Рис. 4.2. Производственная функция Леонтьева

Линейная производственная функция с полным замещением факторов производства (рис. 4.3): $Q = aL + bK$; $a, b > 0$. Для случая $a = b = 1$ (рис. 4.3) $\Delta K/\Delta L = 1$.

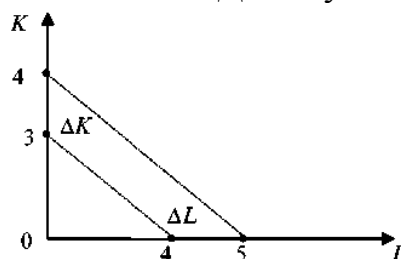


Рис. 4.3. Линейная производственная функция с полным замещением факторов производства

Линейная ПФ имеет нулевую «кривизну» и соответственно бесконечную эластичность замещения σ . ПФКД имеет эластичность замещения, равную единице. Функция Леонтьева имеет нулевую эластичность замещения: ресурсы в ней должны использоваться в заданной пропорции и не могут замещать друг друга. В реальной экономике степень взаимозаменяемости ресурсов может быть различной, соответственно различной может быть и эластичность замещения.

ЛЕКЦИЯ 5 БАЛАНСОВЫЕ МОДЕЛИ

Моделирование межотраслевых связей

Межотраслевое моделирование является частью макроэкономического моделирования и служит для анализа и оценки состояния общего экономического равновесия национальной экономики. Национальная экономика в межотраслевом балансе представлена рядом чистых отраслей, связанных между собой финансовыми потоками от реализации продукции, работ и услуг. Чистые отрасли - это условные отрасли, представляющие производство одного или нескольких однородных продуктов.

Экономические связи между чистыми отраслями, непродуцирующей сферой и внешним миром при производстве и распределении продукции, работ и услуг представляются в стоимостном выражении с помощью таблицы межотраслевого баланса (МОБ).

Структура табл. 2.1 представлена тремя заполненными квадрантами. Все показатели производства и распределения продукции, работ и услуг даны в стоимостном выражении за год.

Таблица 5.1

Таблица межотраслевого баланса производства и распределения продукции, работ и услуг

Производящие отрасли		Потребляющие отрасли						Конечный продукт, X	Валовой продукт, Y		
		→									
		1	2	3	...	j	...	n			
Производящие отрасли	1	X_{11}			...			X_{1n}	Y_1	X_1	
	2	X_{21}			...			X_{2n}	Y_2	X_2	
	3	X_{31}			...			X_{3n}	Y_3	X_3	
	↓		.						.	.	
	i	X_{i1}				1			X_{in}	2	.
	:	:		:						.	.
	n	X_{n1}			...			X_{nn}	Y_n	X_n	
<i>Амортизация</i>		C_1	C_2					C_n			
<i>Оплата труда</i>		V_1	V_2			3		V_n	4		
<i>Чистый доход</i>		m_1	m_2					m_n			
Валовой продукт		X_1	X_2					X_n			

В первом квадранте отражены данные о взаимных поставках продукции,

работ, услуг между отраслями. Первый квадрант называется квадрантом промежуточного потребления и характеризует промежуточное потребление (затраты) или промежуточный спрос отраслей при производстве продукции, работ, услуг:

X_{ij} - стоимость продукции i -й отрасли, поставленной в j -ю отрасль в течение года, или стоимость продукции i -й отрасли, потребленной j -й отраслью в течение года;

i -я строка - промежуточное потребление продукции i -й отрасли всеми отраслями;

j -й столбец - потребление (затраты) в j -й отрасли продукции всех отраслей при производстве своей продукции;

X_i - стоимость валового продукта, произведенного i -й отраслью в течение года.

Второй квадрант называется квадрантом конечного использования (потребления) или конечного спроса. В нем представлено конечное использование продукции отраслей, распределенное на конечное потребление (C_i), инвестиции (I_i), экспорт (E_i) и импорт (M_i), сальдо во внешней торговле ($E_i - M_i$). Конечное потребление включает потребление домашних хозяйств (населения), государства и некоммерческих организаций.

Третий квадрант называется квадрантом добавленной стоимости. В нем представлена добавленная стоимость, присоединенная в отраслях к затратам продукции других отраслей при производстве продукции, работ, услуг. Добавленная стоимость, произведенная в отраслях народного хозяйства, включает: оплату труда (V_j), амортизацию (потребление основного капитала) (C_j), чистый доход (m_j). Четвертый квадрант не заполняется.

В состав отраслей в МОБ входят отрасли материального производства: промышленность (энергетика, машиностроение, легкая и пищевая промышленность, строительство, сельское хозяйство) и отрасли нематериальных услуг (жилищно-коммунальное хозяйство, банковская сфера, здравоохранение, образование, наука и др.). В реальный межотраслевой баланс входит около 30 отраслей. Межотраслевой баланс за прошедший год называется отчетным межотраслевым балансом.

Рассмотрим основные соотношения межотраслевого баланса.

Валовая продукция i -й потребляющей отрасли равна сумме ее материальных затрат и условно-чистой продукции:

$$X_j = \sum_{i=1}^n x_{ij} + Z_j \quad (j = 1..n)$$

Валовая продукция i -й производящей отрасли (X_i) равна сумме материальных затрат потребляющих ее продукцию отраслей и конечной продукции данной отрасли:

$$X_i = \sum_{j=1}^n x_{ij} + Y_i \quad (i = 1..n).$$

Валовый национальный продукт равен сумме валовых продуктов отраслей:

$$\sum_{j=1}^n X_j = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n x_{ij} + \sum_{j=1}^n Z_j$$

$$\sum_{i=1}^n X_i = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_{ij} + \sum_{i=1}^n Y_i$$

Отсюда, должно соблюдаться равенство между итогом третьего квадранта и итогом второго квадранта.

$$\sum_{j=1}^n Z_j = \sum_{i=1}^n Y_i$$

Коэффициент прямых затрат (a_{ij}) показывает, какое количество продукции i -й отрасли необходимо, учитывая только прямые затраты, для производства единицы продукции j -й отрасли:

$$a_{ij} = \frac{x_{ij}}{X_j} \quad (j = 1..n).$$

С учетом этой формулы систему уравнений баланса можно переписать в виде

$$X_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot X_j + Y_i \quad (i = 1..n).$$

Если ввести в рассмотрение матрицу коэффициентов прямых затрат $A=(a_{ij})$, вектор-столбец валовой продукции $X = (X_i)$ и вектор-столбец конечной продукции $Y = (Y_i)$, то ЭММ межотраслевого баланса примет вид:

$$X = AX + Y.$$

С помощью этой модели, которую называют моделью В. Леонтьева или моделью «затраты-выпуск», можно выполнять три варианта расчетов:

1) задав в модели величины валовой продукции каждой отрасли, можно определить объем конечной продукции каждой отрасли:

$$Y = (E - A) \cdot X.$$

2) задав величины конечной продукции всех отраслей, можно определить величины валовой продукции каждой отрасли:

$$X = (E - A)^{-1} \cdot Y.$$

3) задав для ряда отраслей величины валовой продукции, а для всех остальных отраслей задав объемы конечной продукции, можно найти величины конечной продукции первых отраслей и объемы валовой продукции вторых.

Для того чтобы обеспечить положительный конечный выпуск по всем отраслям необходимо и достаточно, чтобы выполнялось одно из перечисленных ниже условий:

— Определитель матрицы $(E-A)$ не равен нулю, т. е. матрица $(E-A)$ имеет обратную матрицу $(E-A)^{-1}$

— Матричный ряд

$$E + A + A^2 + A^3 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} A^k$$

сходится, причем его сумма равна обратной матрице $(E-A)^{-1}$.

— Наибольшее по модулю собственное значение матрицы A , т.е. решение уравнения строго меньше единицы.

$$|\lambda E - A| = 0$$

— Все главные миноры матрицы $(E-A)$, т. е. определители матриц, образованных элементами первых строк и первых столбцов этой матрицы, порядка от 1 до n , положительны.

Обозначим обратную матрицу как

$$B = (E - A)^{-1} = (b_{ij}).$$

Тогда для любой i -й отрасли можно получить соотношение:

$$X_i = \sum_{j=1}^n b_{ij} \cdot Y_j \quad (i = 1..n).$$

Коэффициент полных затрат (b_{ij}) показывает, какое количество продукции i -й отрасли нужно произвести, чтобы с учетом прямых и косвенных затрат этой продукции получить единицу конечной продукции j -й отрасли.

Полные затраты отражают использование ресурса на всех этапах изготовления и равны сумме прямых и косвенных затрат на всех предыдущих стадиях производства продукции.

Индексы цен в модели межотраслевого баланса

Предположим, что по отношению к межотраслевому балансу в будущем году прогнозируется изменение цен в каждой отрасли j в p_j раз по отношению к текущему году при тех же натуральных значениях векторов X и Y (величины p_j называются индексами изменения цен). Тогда в таблицу МОБ можно ввести индексы цен и получить новую таблицу (табл. 2.2), по которой можно построить модель равновесных цен.

Таблица 5.2 Межотраслевой баланс с учетом индекса цен

Отрасли	Промежуточное потребление				Конечный продукт	Валовой продукт
	1	2	...	n		
1	$p_1 X_{11}$...	$p_1 X_{1n}$	$p_1 Y_1$	$p_1 X_1$
2	$p_2 X_{21}$...	$p_2 X_{2n}$	$p_2 Y_2$	$p_2 X_2$
		
n	$p_n X_{n1}$...	$p_n X_{nn}$	$p_n Y_n$	$p_n X_n$
Добавленная стоимость	Z'_1		...	Z'_n		
Валовой продукт	$p_1 X_1$...	$p_n X_n$		

В табл. 5.2 также выполняются балансовые соотношения

$$p_i X_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} p_i X_j + p_i Y_i,$$

$$p_j X_j = \sum_{i=1}^n p_i X_{ij} + Z'_j,$$

$$i, j = 1, 2, \dots, n,$$

$$\sum_{j=1}^n Z'_j = \sum_{i=1}^n p_i Y_i,$$

где Z'_j - новые значения добавленной стоимости.

Уравнения для вектора индексов цен (**модель равновесных цен**)

$$p_j = \sum p_i a_{ij} + d_j,$$

$$\sum_{j=1}^n d_j X_j = \sum_{i=1}^n p_i Y_i,$$

$$\text{где } d_j = \frac{Z'_j}{X_j}, j = 1, 2, \dots, n.$$

В матричном виде уравнения запишутся как

$$p = pA + d,$$

$$(d, X) = (p, Y),$$

$$p > 0, d > 0,$$

где $p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ - вектор-строка индексов цен;

$d = (d_1, d_2, \dots, d_n)$ - вектор-строка долей добавленной стоимости в валовом выпуске отраслей в новом варианте межотраслевого баланса.

Для определения вектора индексов цен достаточно решить систему уравнений (2.15), откуда получаем

$$p = d(E - A)^{-1}$$

или

$$p^T = ((E - A)^{-1})^T d^T,$$

где - символ транспонирования, векторы p и d являются строками, а векторы p^T и d^T являются столбцами.

Если матрица A продуктивна, то уравнения имеют положительное решение $p > 0$, если $d > 0$.

Значения векторов X и Y в этой модели имеют вид

$$X' = (p_1 X_1, p_2 X_2, \dots, p_n X_n),$$

$$Y' = (p_1 Y_1, p_2 Y_2, \dots, p_n Y_n).$$

Из табл. 5.2 следует, что модель Леонтьева для значений векторов будет иметь вид

$$X' = A' X' + Y'$$

$$A' = \left\| a_{ij} \frac{p_i}{p_j} \right\|.$$

где

Таким образом, коэффициенты прямых затрат нового межотраслевого баланса выражаются через старые коэффициенты и индексы цен следующим образом:

$$a'_{ij} = a_{ij} \frac{p_i}{p_j}.$$

Модель равновесных цен позволяет прогнозировать цены на продукцию отраслей при известных значениях величин норм добавленной стоимости.

Кроме того, модель равновесных цен позволяет прогнозировать изменение цен и инфляцию, являющиеся следствием изменения цены в одной из отраслей.

С помощью межотраслевого баланса решают следующие задачи:

1. По таблице межотраслевого баланса найти матрицу прямых и полных затрат.
2. Задав вектор конечной продукции, определить вектор валовой продукции.
3. Задав вектор валовой продукции, определить вектор конечной продукции.
4. Задав по одним компонентам вектор конечной продукции, а по другим- вектор валовой продукции, определить неизвестные значения векторов.
5. При новых значениях добавленной стоимости найти индексы цен и построить новую таблицу межотраслевого баланса.
6. По заданной матрице прямых затрат и вектору конечной продукции, установить продуктивность матрицы прямых затрат, определить коэффициенты полных затрат.
7. Найти векторы валового выпуска, добавленной стоимости, затрат, доли затрат и добавленной стоимости в валовом продукте, межотраслевые поставки продукции, составить таблицу межотраслевого баланса.

ДИНАМИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ МЕЖОТРАСЛЕВОГО БАЛАНСА

Основное отличие динамической модели межотраслевого баланса от статистической заключается в том, что размеры капитальных вложений ежегодно здесь не являются известными, а находятся из модели.

Пусть:

$x_i(t)$ - объем продукции i -й отрасли в t -м году планового периода;

T - длительность планового периода (в годах);

$b_{ij}(t)$ - капитальные расходы продукции i -й отрасли в t -м году, который обеспечивает увеличение продукции j -й отрасли на единицу;

k_{ij}^r - часть капитальных вложений продукции i -й отрасли для увеличения продукции j -й отрасли за r лет до завершения строительства (от всего размера капитальных вложений продукции i -й отрасли для увеличения продукции j -й отрасли);

τ - период от начала капитальных вложений к получению за их счет дополнительной продукции;

$y_i(t)$ - конечная продукция i -й отрасли в t -м году за исключением расходов и капиталовложений, связанных с расширением производства;

Δx_j - изменение продукции j -й отрасли. Используя введенные обозначения, динамическую модель межотраслевого баланса можно описать следующей системой уравнений :

$$x_i(t) = \sum_{j=1}^n a_{ij}(t)x_j(t) + \sum_{j=1}^n \sum_{r=1}^{\tau} b_{ij}(t)k_{ij}^2 \Delta x_j(t+r) + y_i(t)$$

Объем продукции 1-ї отрасли Расходы на производство Расходы на капитальные вложения на Конечная продукция без расходов и капиталовложений

$i = 1, 2, \dots, n; t = 1, 2, \dots, T$

Из этой модели аналогично предыдущей находятся объемы продукции отраслей в каждом году планируемого периода, а также расходы на капитальные вложения в отраслевой и временной структуре.

МЕЖПРОДУКТОВЫЙ БАЛАНС

Межпродуктовый баланс используется для обеспечения полной взаимосвязи планов производства группы взаимозависимых предприятий или группы цехов одного предприятия.

Рассмотрим межпродуктовую балансовую модель на примере предприятия, у которого в каждом цехе осуществляется только один вид продукции в объеме $X_i (i = 1, \dots, n)$. Отдельный вид продукции может быть использован в качестве промежуточного продукта, который идет на внутреннее потребление (передан другим цехам), и как конечный продукт, который поступает непосредственно потребителю.

Обозначим через x_{ij} — количество продукции i — го виду, потребляемой для изготовления j -ї продукции в количестве X_j через Y_i — выпуск конечной продукции i -го вида.

Потребность в производстве продукции i - го вида (валовой выпуск) равняется сумме промежуточного и конечного продукта :

$$X_i = \sum_{j=1}^n x_{ij} + Y_i$$

Обозначим через a_{ij} — норму расхода продукции i — го виду на производство продукции j -того вида $a_{ij} = \frac{x_{ij}}{X_j}$. Это так называемый коэффициент прямых расходов. Тогда

$$x_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot X_j + Y_i$$

или в матричной форме

$$X = A \cdot X + Y$$

Из этого балансового уравнения можно найти:

1) валовой выпуск продукции путем умножения матрицы коэффициентов полных расходов на вектор конечной продукции : $X = (E - A)^{-1} \cdot Y$,

2) распределение продукции между цехами путем умножения коэффициентов прямых расходов на валовой выпуск:

$$x_{ij} = a_{ij} \cdot x_j$$