МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ДЕРЖАВНИЙ ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД
«ДОНЕЦЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ»
АВТОМОБІЛЬНО-ДОРОЖНІЙ ІНСТИТУТ

МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ

**до організації самостійної роботи
з дисципліни «Вища математика» (теорія ймовірностей)
для студентів спеціальностей 6.060101 «Автомобільні дороги та аеродроми», 6.040106 «Екологія і охорона навколишнього середовища та збалансоване природокористування»**

Затверджено:
навчально-методична комісія
факультету «Автомобільні дороги»
Протокол № 1 від 16.09.2010р.

Затверджено:
кафедра «Вища математика»
протокол № 1 від 31.08.2010 р.

Горлівка-2010

УДК 51 (07)

Методичні рекомендації до організації самостійної роботи з дисципліни «Вища математика» (теорія ймовірностей) для студентів спеціальностей 6.060101 «Автомобільні дороги та аеродроми», 6.040106 «Екологія і охорона навколишнього середовища та збалансоване природокористування» / укл. Т.С. Максимова, Л.І. Луценко. – Горлівка: ДВНЗ «ДонНТУ» АДІ, 2010. – 100 с.

Методичні рекомендації містять теоретичні відомості, проілюстровані значною кількістю прикладів, завдання для підготовки студентів до модульного контролю з даного розділу. Запропоновано варіанти домашнього індивідуального завдання.

Укладачі: Максимова Т.С., к. пед. н.
Луценко Л.І., доц., к. ф.-м. н.

Відповідальний за випуск: Вовк Л.П., проф., д. т. н.

Рецензент: Хребет В.Г., доц., к. ф.- м. н., кафедра «Прикладна математика»

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА

Теорія ймовірностей зародилась в XVI – XVII століттях. Її виникнення пов'язане зі спробами розв'язати задачу виграшу в азартних іграх. Кожний прихильник азартних ігор намагався знайти у випадкових явищах закономірність, яка сприяла б виграшу. Сучасна людина також у повсякденному житті стикається з випадковістю, намагаючись виявити у ній закономірність.

Перші розрахунки ймовірностей виконали Н. Тарталья і Дж. Кардано, згодом ці питання досліджували Г. Галілей, П. Ферма, Б. Паскаль, Х. Гюйгенс, Р. Декарт. Розвитку теорії ймовірностей як науки сприяло відкриття Я. Бернуллі закону великих чисел. Його результати були розвинуті А. Муавром та П. Лапласом.

Виключно важливу роль у розвитку теорії ймовірностей мали відкриття П. Л. Чебишева та його учнів А. А. Маркова і О. М. Ляпунова. Завдяки трудам цих вчених теорію ймовірностей було поставлено в ряд точних математичних наук.

Теорія ймовірностей є математичною наукою, яка вивчає закономірності у випадкових масових явищах. Знання закономірностей, яким підпорядковуються масові випадкові події, дозволяють передбачити, як ці події будуть відбуватися.

Сучасний розвиток теорії ймовірностей характеризується загальною зацікавленістю нею, а також широким її практичним застосуванням. Використання теорії ймовірностей у фізиці, хімії, техниці, екології та ін. найкраще пояснює ті причини, через які за останні десятиліття теорія ймовірностей перетворилася в одну з областей математики, яка найшвидше розвивається. Теорія ймовірностей, у зв'язку з цим, є важливою складовою фундаментальної фахової підготовки сучасних фахівців.

Оволодіння майбутніми фахівцями методами теорії ймовірностей дозволить їм здійснювати дослідження та прогнозування екологічних явищ, технологічних процесів, зокрема їх удосконалення; планувати та організовувати виробництво; оцінювати якість виробленої продукції та ін.

У посібнику представлено теоретичні відомості та приклади розв'язування задач спрямовані на організацію самостійної роботи студентів. Наведені в посібнику запитання та задачі призначені для підготовки студентів до модульного контролю з даного розділу вищої математики.

Бажаємо успіхів!

РОЗДІЛ 1 ВИПАДКОВІ ПОДІЇ

1.1 Основні поняття теорії ймовірностей

Випробування – реальний або уявний експеримент, який відбувається за певної сукупності умов і результати якого піддаються спостереженню.

Подія – наслідок випробування.

Достовірною називають подію, яка в результаті випробування обов’язково відбудеться.

Неможливою називають подію, яка в даному випробуванні не може відбутися.

Випадковою називають подію, яка в даному випробуванні може відбутися, а може не відбутися.

Рівноможливими у даному випробуванні називають події, якщо є підстави вважати, що жодна з них не є більш можливою, ніж інші.

Елементарними називають випадкові події, які не можна розкласти на простіші.

Можлива елементарна подія – це кожний із можливих результатів окремого випробування.

Сприятливими до настання події називають ті можливі елементарні події, в яких подія, що нас цікавить, відбувається.

Несумісними називають події, якщо поява однієї з них виключає появу інших подій в одному і тому ж випробуванні.

Декілька подій утворюють повну групу, якщо в результаті випробування відбудеться хоча б одна з них.

Протилежними називають дві єдиноможливі події, які утворюють повну групу.

Незалежними називаються події, для яких ймовірність однієї не залежить від появи або не появи іншої.

Залежними називаються дві події, для яких ймовірність появи однієї з них залежить від появи або непояви іншої події.

Незалежними у сукупності називають декілька подій, якщо кожна з них і будь-яка комбінація решти подій, що містить або усі інші події, або їх частину , є події незалежні.

1.2 Означення ймовірності та її основні властивості

Класичне означення ймовірності

Ймовірністю $P(A)$ події A називають відношення кількості сприятливих до настання цієї події елементарних подій до загальної кількості всіх рівноможливих несумісних елементарних подій, які утворюють повну групу, тобто

$$P(A) = \frac{m}{n}, \qquad (1.1)$$

де m – кількість елементарних подій, сприятливих події A, а n – загальна кількість всіх можливих елементарних подій.

Властивості ймовірності:

1) ймовірність достовірної події дорівнює 1, тобто

$$P(A) = \frac{n}{n} = 1;$$

2) ймовірність неможливої події дорівнює 0, тобто

$$P(A) = \frac{0}{n} = 0;$$

3) ймовірність випадкової події є додатним числом, яке знаходиться між нулем та одиницею, тобто

$$0 \le P(A) \le 1.$$

Приклад 1.1

У шухляді є 7 однотипних деталей, три з яких браковані (решта – стандартні). Навмання з шухляди беруть одну деталь. Знайти ймовірність того, що витягнута деталь: а) бракована; б) стандартна?

Розв'язання. Випробування – це витягування деталі.

а) Подія A – витягнута деталь виявилась бракованою. Кількість m елементарних подій, сприятливих до настання події A, дорівнює 3, кількість $n = 3 + 4 = 7$. $P(A) = \frac{3}{7}$.

б) Подія B – витягнута деталь виявилась бракованою. Кількість m елементарних подій, сприятливих до настання події B, дорівнює 4, кількість $n = 7$. $P(B) = \frac{4}{7}$.

Для визначення чисел m і n у означенні ймовірності застосовують ***формули комбінаторики.***

Перестановками із n елементів називають комбінації, які складаються із одних і тих самих n елементів і відрізняються тільки порядком їх розміщення. Кількість перестановок із n елементів позначається символом P_n та дорівнює:

$$P_n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!. \qquad (1.2)$$

Приклад 1.2

Скількома способами можна в ряд розташувати на стоянці 5 автомобілів?

Розв'язання. Різні способи розташування автомобілів на стоянці будуть відрізнятися одне від одного тільки порядком слідування автомобілів, тому шукана кількість способів дорівнює кількості перестановок з 5 елементів: $N = P_5 = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$.

Розміщеннями із n елементів по m елементів називають комбінації, складені n різних елементів по m елементів, які відрізняються або самими елементами, або їх порядком. Кількість розміщень із n елементів по m елементів позначається символом A_n^m та дорівнює:

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!} = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-m+1) . \qquad (1.3)$$

Приклад 1.3

Скільки сигналів можна утворити із 8 різнокольорових прапорців, взятих по 2?

Розв'язання. За умовою із чисел 8-ми елементної множини потрібно скласти комбінації, у кожній з яких по два елементи. Оскільки комбінації повинні бути впорядковані, то їх кількість буде дорівнювати кількості розміщень із 8-ми елементів по два елемента, тобто сигналів буде рівно $A_8^2 = 8 \cdot 7 = 56$.

Сполуками із n елементів по m елементів називають комбінації, складені n різних елементів по m елементів, які відрізняються хоча б одним елементом. Кількість сполук із n елементів по m елементів позначається символом C_n^m та дорівнює:

$$C_n^m = \frac{n!}{m! \cdot (n-m)!} . \qquad (1.4)$$

Приклад 1.4

Скількома способами можна вибрати 5 деталей із ящика, який містить 12 деталей.

Розв'язання. Набори деталей вважаються різними, якщо вони відрізняються хоча б однією деталлю. В якому порядку будуть вибрані деталі не має значення. У зв'язку з цим, шукана кількість способів дорівнює кількості комбінацій із 12 елементів по 5 елементів, тобто:

$$C_{12}^5 = \frac{12!}{5! \cdot 7!} = 11 \cdot 9 \cdot 8 = 792.$$

Правило суми. Якщо об’єкт a можна обрати із сукупності об’єктів m способами, а об’єкт b можна обрати із цієї ж сукупності n способами, то вибрати або a, або b можна $(n+m)$ способами.

Правило добутку. Якщо об’єкт a можна обрати із сукупності об’єктів m способами, і після кожного такого вибору об’єкт b можна вибрати n способами, то вибір пари об’єктів (a, b) у вказаному порядку може бути здійснений $(\mathrm{m}\cdot\mathrm{n})$способами.

Приклад 1.5

При дослідженні повітря 9 міст деякої області було встановлено, що у 6 містах забруднення повітря перевищує норму. Знайти ймовірність того, що серед 4-х навмання обраних міст цієї області у двох забруднення повітря перевищить норму.

Розв’язання. Подія A – серед 4-х навмання обраних міст цієї області у двох забруднення повітря перевищило норму. Скористаємося класичним означенням ймовірності, тобто формулою (1.1). Кількість n є кількістю способів, якими можна обрати 4 міста із 9. Кількість елементарних подій, які сприяють появі події A можна визначити таким чином. 2 міста, у яких забруднення перевищує норму, можна обрати C_6^2 способами. При цьому кожній двійці таких міст відповідають двійки міст, в яких забруднення повітря відповідає нормі, їх кількість дорівнює C_3^2. Число сприятливих елементарних подій дорівнює $m = C_6^2 \cdot C_3^2$.

$$P(A) = \frac{C_6^2 \cdot C_3^2}{C_9^4} = \frac{15 \cdot 3}{126} \approx 0{,}357.$$

Класичне означення ймовірності має як переваги, так і вади. Не завжди число можливих елементарних подій є кінцевим. Не завжди можливо представити результат випробування у вигляді сукупності елементарних подій, а ще важче вказати основи, які дозволяють вважати елементарні події рівноможливими. У зв’язку з цим використовують інші означення ймовірності.

Статистичне означення ймовірності

Відносною частотою (статистичною ймовірністю) появи події A називають відношення кількості випробувань, в яких ця подія відбулась до загальної кількості фактично проведених випробувань:

$$P^*(A) = \frac{m}{n}, \tag{1.5}$$

де n – кількість фактично проведених випробувань, m – кількість випробувань, в яких подія A відбулась.

В різних дослідах відносна частота змінюється мало (тим менше, чим більше проведено дослідів), коливаючись навколо деякого постійного числа. Це число є ймовірністю появи події. Отже, якщо дослідним шляхом встановлюється статистична ймовірність події, то отримане число можна прийняти за приблизне значення її ймовірності.

Приклад 1.6

Під час перевірки 5000 деталей однієї партії виявилося 32 браковані. Знайти частоту появи бракованих деталей у даній партії.

Розв'язання. Подія A – взята деталь виявилась бракованою. За формулою (1.5) $P^*(A) = \frac{32}{5000} = 0,0064$.

Геометричне означення ймовірності

Якщо результат випробування визначається випадковим положенням точки у деякій області, причому довільні положення точок у цій області рівноможливі, то використовується геометричне означення ймовірності події A, а саме:

$$P(A) = \frac{S_0}{S}, \tag{1.6}$$

де S – міра (довжина, площа або об'єм) всієї області, а S_0 – міра тієї частини області, попадання в яку сприяє появі даної події.

Приклад 1.7

По трубопроводу між пунктами A і B перекачують нафту. Відстань між пунктами дорівнює 2 км. Яка ймовірність того, що ушкодження трубопроводу відбудеться на ділянці довжиною 100 м.

Розв'язання. Подія A – віддбулось ушкодження трубопроводу на ділянці довжиною 100 м. За формулою (1.6) маємо: $P(A) = \frac{L_0}{L} = \frac{0,1}{2} = 0,05$.

Приклад 1.8

Швидкообертовий диск поділений на парну кількість рівних секторів, навперемінно пофарбованих у білий та чорний колір. По диску здійснений постріл. Знайти ймовірність того, що пуля потрапила в один з білих секторів.

Розв'язання. Подія A – пуля потрапила в один з білих секторів. Якщо R – радіус диска, того його площа $S = \pi R^2$, у білий колір пофарбована половина диска, тобто $S_0 = 0{,}5\pi R^2$. У зв'язку з цим, за формулою (1.6):

$$P(A) = \frac{S_0}{S} = \frac{0{,}5\pi R^2}{\pi R^2} = 0{,}5 .$$

1.3 Теореми додавання та множення ймовірностей

Сумою двох подій A і B називається подія $C = A + B$, яка полягає в появі події A або події B або обох цих подій.

Сумою декількох подій називається подія, яка полягає в появі хоча б однієї з цих подій.

Теорема 1 (теорема додавання ймовірностей несумісних подій)

Ймовірність появи однієї з двох несумісних подій A і B, не важливо якої, дорівнює сумі ймовірностей цих подій, тобто

$$P(A + B) = P(A) + P(B). \tag{1.7}$$

Ймовірність появи однієї з скінченного числа попарно несумісних подій дорівнює сумі ймовірностей цих подій:

$$P(A + B + C + ... + D) = P(A) + P(B) + P(C)... + P(D) . \tag{1.8}$$

Теорема 2 (теорема додавання ймовірностей повної групи подій)

Сума ймовірностей подій $A_1, A_2, ..., A_n$, що утворюють повну групу, дорівнює одиниці, тобто

$$P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_n) = 1 . \tag{1.9}$$

Теорема 3 (теорема додавання ймовірностей протилежних подій)

Сума ймовірностей протилежних подій дорівнює одиниці, тобто

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1 . \tag{1.10}$$

Приклад 1.9

Майстер обслуговує 5 верстатів, причому 26% робочого часу він проводить біля першого верстата, 10% – біля другого, 15% – біля третього, 25% – біля четвертого, 30% – біля п'ятого. Знайти ймовірність того, що у довільний момент часу він знаходиться: а) біля першого або третього верстата; б) біля першого або другого, або п'ятого верстата.

Розв'язання. Позначимо: Нехай A_i – події, які полягають у тому, що у довільний проміжок часу майстер знаходиться біля i – го верстата ($i = 1,2,3,4,5$). З умови задачі зрозуміло, що події A_i попарно несумісні (майстер не може знаходитись біля двох станків одночасно) і $P(A_1) = 0{,}20$; $P(A_2) = 0{,}10$; $P(A_3) = 0{,}15$; $P(A_4) = 0{,}25$; $P(A_5) = 0{,}30$.

1) Подію C, яка полягає в тому, що майстер знаходиться біля першого або третього верстата, можна розглядати як суму подій A_1 і A_3. Ці події несумісні, тому

$$P(C) = P(A_1 + A_3) = P(A_1) + P(A_3) = 0{,}20 + 0{,}15 = 0{,}35 .$$

2) Подію D, яка полягає в тому, що майстер знаходиться біля першого, другого або п'ятого верстата, можливо розглядати як суму подій A_1, A_2, A_5. Ці події попарно несумісні, тому

$$P(D) = P(A_1 + A_2 + A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) = 0{,}2 + 0{,}1 + 0{,}3 = 0{,}6 .$$

Добутком двох подій A і B називається подія $C = A \cdot B$, яка полягає в сумісній появі обох подій.

Добутком декількох подій називається подія, яка полягає в сумісній появі усіх цих подій.

Теорема 4 (теорема множення ймовірностей незалежних подій)

Ймовірність сумісної появи двох незалежних подій дорівнює добутку ймовірностей цих подій, тобто

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B) . \tag{1.11}$$

Ймовірність сумісної появи скінченної кількості подій, незалежних у сукупності, дорівнює добутку ймовірностей цих подій:

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot ... \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot ... \cdot P(A_n). \tag{1.12}$$

Приклад 1.10

У майстерні два верстати працюють незалежно один від одного. Ймовірність того, що протягом години перший верстат не вимагатиме уваги майстра, дорівнює 0,9, другий, відповідно, 0,85. Знайти ймовірність того, що: а) протягом години жоден верстат не вимагатиме уваги майстра; б) протягом години лише один верстат вимагатиме уваги майстра; в) протягом години обидва верстати вимагатимуть уваги майстра.

Розв'язання. Нехай подія A – перший верстат не вимагатиме уваги, B – другий верстат не вимагатиме уваги, C – жоден верстат не вимагатиме уваги, D – лише один верстат вимагатиме уваги, E – обидва верстати вимагатимуть уваги.

а) Подія C відбудеться , якщо не вимагатиме уваги жоден верстат, тобто $C = A \cdot B$. Оскільки події A і B незалежні, то за формулою (1.11) маємо: $P(C) = P(A) \cdot P(B) = 0{,}9 \cdot 0{,}85 = 0{,}765$.

б) Подія D відбудеться, якщо вимагатиме уваги перший верстат, а не другий, або навпаки, тобто $D = \overline{A} \cdot B + A \cdot \overline{B}$. За формулами (1.7) і (1.11):

$$P(D) = P(\overline{A}) \cdot P(B) + P(A) \cdot P(\overline{B}) = 0{,}1 \cdot 0{,}85 + 0{,}9 \cdot 0{,}15 = 0{,}22,$$

де $P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0{,}9 = 0{,}1$ та $P(\overline{B}) = 1 - P(B) = 1 - 0{,}85 = 0{,}15$.

в) Подія E відбудеться, якщо вимагатиме уваги перший і другий верстати, тобто $E = \overline{A} \cdot \overline{B}$. A і B незалежні, значить $\overline{A}$ і $\overline{B}$ теж незалежні. Тоді $P(E) = P(\overline{A}) \cdot P(\overline{B}) = 0{,}1 \cdot 0{,}15 = 0{,}015$.

Теорема 5 (ймовірність появи хоча б однієї з подій)

Ймовірність появи хоча б однієї з подій $A_1, A_2, ..., A_n$ незалежних у сукупності, дорівнює різниці між одиницею і добутком ймовірностей протилежних подій $\overline{A}_1, \overline{A}_2, ..., \overline{A}_n$, тобто

$$P(A) = 1 - q_1 \cdot q_2 \cdot ... \cdot q_n, \tag{1.13}$$

де $q_i = P(\overline{A}_i), i = 1,2,...,n$.

Якщо події $A_i (i = 1,2,...,n)$ мають однакову ймовірність, яка дорівнює p, то ймовірність появи хоча б однієї з цих подій дорівнює:

$$P(A) = 1 - (1 - p)^n = 1 - q^n, \tag{1.14}$$

де $q = 1 - p$.

Приклад 1.11

Для деякої місцевості середнє число літніх днів, в які температура буде перевищувати $30^\circ C$, дорівнює десяти. Знайти ймовірність того, що з 1 по 6 липня хоча б один день температура не буде перевищувати цю відмітку.

Розв'язання. Подія A – з 1 по 5 липня хоча б один день температура буде перевищувати цю відмітку, тоді $\overline{A}$ – всі п'ять днів температура не буде перевищувати $30^\circ C$. Якщо A_i – у і-тий день температура перевищить $30^\circ C$, то $P(A_i) = p = \frac{10}{92}$, а $P(\overline{A_i}) = q = 1 - \frac{10}{92} = \frac{82}{92}$. Остаточно маємо: $P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \left(\frac{82}{92}\right)^5 = 0{,}437.$

Умовною ймовірністю $P_A(B)$ називається ймовірність події B, обчислена за умови, що подія A вже відбулась.

Теорема 6 (теорема множення ймовірностей залежних подій)

Ймовірність сумісної появи двох залежних подій дорівнює добутку однієї з них на умовну ймовірність іншої, з урахуванням, що перша подія вже відбулась, тото

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P_A(B). \tag{1.15}$$

Ймовірність сумісної появи декількох залежних подій дорівнює добутку ймовірності одного з них на умовні ймовірності всієї решти, причому ймовірність кожної наступної події розраховується з урахуванням, що всі попередні події вже відбулись:

$$P(A_1 A_2 ... A_n) = P(A_1) \cdot P_{A_1}(A_2) \cdot P_{A_1 A_2}(A_3) ... P_{A_1 A_2 ... A_n}(A_n). \tag{1.16}$$

Приклад 1.12

У разі масового виготовлення виробів брак становить у середньому 1,5% загальної кількості всіх виробів. З-поміж придатних виробів 85,3% становлять вироби першого гатунку. Знайти ймовірність того, що навмання взятий виріб належить до першого гатунку.

Розв'язання. Нехай подія B – взятий виріб придатний, A – взятий виріб 1-го гатунку. Тоді $P(B) = 1 - 0{,}015 = 0{,}985$, $P_B(A) = 0{,}853$. Шукана ймовірність $P(A) = P(B) \cdot P_B(A) = 0{,}985 \cdot 0{,}853 = 0{,}84$.

Теорема 7 (теорема додавання ймовірностей сумісних подій)

Ймовірність появи хоча б однієї з двох сумісних подій дорівнює сумі ймовірностей цих подій без ймовірності їх сумісного появлення:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B). \tag{1.17}$$

Приклад 1.13

Перевезення вантажів для підприємства забезпечують два автогосподарства, які з цією метою щодня в першу зміну мають виділяти по одному автомобілю. Ймовірність виходу автомобіля на лінію в першому автогосподарстві дорівнює 0,7, а в другому 0,6. Знайти ймовірність того, що в першу зміну на підприємстві перевозитимуться вантажі.

Розв'язання. Нехай подія A – для перевезення вантажів прибув автомобіль з першого автогосподарства, B – для перевезення вантажів прибув автомобіль з другого автогосподарства, C – на підприємстві в першу зміну перевозитимуться вантажі. Тоді $C = A + B$, причому A і B – сумісні події. Маємо:

$$P(C) = P(A+B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B) = 0{,}7 + 0{,}6 - 0{,}7 \cdot 0{,}6 = 0{,}88 .$$

1.4 Формула повної ймовірності і формули Байєса

Нехай подія A може відбутися тільки за умови появи однієї із попарно несумісних подій $H_1, H_2, ..., H_n$ (гіпотези), які утворюють повну групу. Поява події A у цьому випадку означає здійснення однієї із несумісних подій $A \cdot H_1, A \cdot H_2, ..., A \cdot H_n$. Ймовірність події A дорівнює сумі добутків ймовірностей гіпотез на відповідну умовну ймовірність події A, тобто

$$P(A) = P(H_1) \cdot P_{H_1}(A) + P(H_2) \cdot P_{H_2}(A) + ... + P(H_n) \cdot P_{H_n}(A). \qquad (1.18)$$

Формула (1.18) називається ***формулою повної ймовірності.***

Приклад 1.14

Маємо три партії виробів. У першій парті 20 стандартних виробів, у другій –10 стандартних і 10 нестандартних виробів, у третій – 20 нестандартних виробів. З обраної навмання партії обирають один виріб. Знайти ймовірність того, що він стандартний.

Розв'язання. Подія A – взятий із навмання обраної партії виріб виявився стандартним; H_1 – виріб взятий із першої партії; H_2 – виріб взятий із другої партії; H_3 – виріб взятий із третьої партії.

За умовою задачі $P(H_1) = P(H_2) = P(H_3) = \dfrac{1}{3}$.

Крім того, $P_{H_1}(A) = 1$, $P_{H_2}(A) = 0{,}5$, $P_{H_3}(A) = 0$.

За формулою (1.18) отримаємо: $P(A) = \dfrac{1}{3} \cdot 1 + \dfrac{1}{3} \cdot 0{,}5 + \dfrac{1}{3} \cdot 0 = 0{,}5.$

Нехай подія A може відбутися тільки за умови появи однієї із попарно несумісних подій $H_1, H_2, ..., H_n$, які утворюють повну групу. Припустимо, що проведено випробування, в результаті якого подія A відбулась. Визначити, як змінилися ймовірності гіпотез (у звязку з тим, що A настала) надають можливість ***формули Байєса***:

$$P(H_i)=\frac{P(H_i)\cdot P_{H_i}(A)}{P(A)}, i=1,2,...,n\ . \qquad (1.19)$$

Приклад 1.15

На заводі знаходяться три автомати для виготовлення однотипних деталей. На конвеєр з першого автомата поступає 20% продукції, серед них 2% браку; з другого – 30% (3% браку); з третього – 50% (1% браку). На конвеєр було подано браковану деталь, і він зупинився. Знайти ймовірність того, що деталь виготовлена: а) першим; б) другим; в) третім автоматом.

Розв'язання. Подія A – на конвеєр потрапила бракована деталь; H_i – деталь виготовлена i – м автоматом ($i=1,2,3$).

За умовою задачі: $P(H_1)=0,2$; $P(H_2)=0,3$; $P(H_3)=0,5$. Крім того, $P_{H_1}(A)=0,02$, $P_{H_2}(A)=0,03$, $P_{H_3}(A)=0,01$.

Ймовірність події A визначимо за формулою (1.18).

$P(A)=0,2\cdot 0,02+0,3\cdot 0,03+0,5\cdot 0,01=0,018$.

Тоді за формулами (1.19) маємо:

$$P_A(H_1)=\frac{0,2\cdot 0,02}{0,018}\approx 0,22,\ P_A(H_2)=\frac{0,3\cdot 0,03}{0,018}=0,5,\ P_A(H_3)=\frac{0,5\cdot 0,01}{0,018}\approx 0,28.$$

Таким чином, з ймовірністю 0,22 деталь було виготовлено першим автоматом; з ймовірністю 0,5 деталь було виготовлено другим автоматом; з ймовірністю 0,28 деталь було виготовлено третім автоматом. Ймовірніше за все деталь було виготовлено другим автоматом.

1.5 Повторення випробувань

Випробування називаються ***незалежними***, якщо ймовірність появи випадкової події A в кожному з них не залежить від результатів інших випробувань.

Нехай здійснюється n незалежних випробувань, у кожному з яких подія A може з'явитися або не з'явитися. Ймовірність появи події A в кожному випробуванні вважається постійною та дорівнює p. Відповідно, ймовірність непояви подій A в кожному випробуванні також постійна і рівна $q=1-p$. Обчислимо ймовірність того, що при n випробуваннях випадкова подія настане рівно k раз, тобто знайдемо $P_n(k)$.

Ймовірність $P_n(k)$ залежить від двох параметрів n і p. Залежно від значень цих параметрів розрізняють наступні випадки.

1. Якщо число n невелике, а p відмінне від 0 та 1, то $P_n(k)$ шукають за ***формулою Бернуллі***.

$$P_n(k)=C_n^k\cdot p^k\cdot q^{n-k}\ . \qquad (1.20)$$

Формула (1.20) називається формулою Бернуллі.

Приклад 1.16

Для забезпечення роботи на деякому будівельному об'єкті автопідприємство має 6 автомобілів. Ймовірність виходу кожного автомобіля на лінію в першу зміну дорівнює 0,8. Знайти ймовірність нормальної роботи автопідприємства, якщо для цього в першу зміну потрібно мати на лінії не менш як 4 автомобіля.

Розв'язання. Подія A – автомобіль вийшов на лінію. $P(A) = p = 0{,}8$, тоді $q = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$. Нормальна робота автопідприємства забезпечується за умови $k \geq 4$. Шукана ймовірність $P_6(k \geq 4) = P_6(4) + P_6(5) + P_6(6)$. Остаточно за формулою Бернуллі маємо:

$$P_6(k \geq 4) = C_6^4 \cdot 0{,}8^4 \cdot 0{,}2^2 + C_6^5 \cdot 0{,}8^5 \cdot 0{,}2^1 + C_6^6 \cdot 0{,}8^6 \cdot 0{,}2^0 = 0{,}901.$$

2. Якщо число n велике, а p відмінне від 0 та 1, то $P_n(k)$ шукають за ***локальною формулою Лапласа***.

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi(x), \tag{1.21}$$

де $$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot e^{-x^2/2}, \qquad x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}.$$

При $x \geq 0$ значення функції $\varphi(x)$ можна знайти у таблиці (Додаток А). Для від'ємних значень аргументу користуються тими ж таблицями, оскільки $\varphi(x)$ парна і, значить, $\varphi(-x) = \varphi(x)$.

Приклад 1.17

Знайти ймовірність того, що на 243-кілометровій трасі перемикання передач відбудеться 70 раз, якщо ймовірність такого перемикання на кожному кілометрі цієї траси дорівнює 0,25.

Розв'язання. Подія A – передача перемкнута. За умовою $P(A) = p = 0{,}25$, тоді $q = 1 - 0{,}25 = 0{,}75$, $n = 243$, $k = 70$. Оскільки n достатньо велике число скористаємось формулою (1.21).

$$x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}} = \frac{70 - 243 \cdot 0{,}25}{\sqrt{243 \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}75}} = \frac{9{,}25}{6{,}75} = 1{,}37.$$

За таблицею (Додаток А) знайдемо $\varphi(1{,}37) = 0{,}1561$. Шукана ймовірність $P_{243}(70) = \dfrac{1}{6{,}75} \cdot 0{,}1561 = 0{,}0231$.

3. Якщо число n дуже велике, а p дуже мале (масові рідкісні явища), $P_n(k)$ знаходять за ***формулою Пуассона***.

$$P_n(k) \approx \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}, \tag{1.22}$$

де $\lambda = n \cdot p$ – середнє число появи події у різних серіях випробувань.

Приклад 1.18

Завод відправив на базу призначення 5000 моторів. Ймовірність того, що дорогою мотор буде ушкоджено, дорівнює 0, 0002. Знайти ймовірність того, що на базу прибуде 3 непридатних для використання мотори.

Розв'язання. Подія A – в дорозі мотор ушкоджено. За умовою задачі $n = 5000$; $k = 3$; $p = 0{,}0002$. Оскільки $\lambda = 5000 \cdot 0{,}0002 = 1$, то за формулою (1.22) маємо: $P_{5000}(3) = \frac{1^3}{3!} \cdot e^{-1} \approx 0{,}06$.

Нехай здійснюється n незалежних випробувань, у кожному з яких ймовірність появи події A постійна та дорівнює p $(0 \le p \le 1)$. Щоб обчислити ймовірність $P_n(k_1, k_2)$ того, що подія A з'явиться в n випробуваннях не менше k_1 і не більше k_2 разів, використовують ***інтегральну формулу Лапласа***.

$$P_n(k_1, k_2) \approx \Phi(x'') - \Phi(x'), \tag{1.23}$$

де $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int\limits_0^x e^{\frac{-x^2}{2}} dx$ – функція Лапласа;

$$x' = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}, \quad x'' = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}.$$

При $x \ge 0$ значення функції $\Phi(x)$ можна знайти у таблиці (Додаток Б). Для від'ємних значень аргументу користуються тими ж таблицями, оскільки $\Phi(x)$ непарна і, значить, $\Phi(-x) = -\Phi(x)$. Крім того при $x > 5$ приймають $\Phi(x) = 0{,}5$.

Приклад 1.19

Обстежується 1000 проб руди. Ймовірність промислового вмісту металу в кожній пробі дорівнює 0,7. Знайти ймовірність того, що кількість проб із промисловим вмістом металу буде в межах від 652 до 760.

Розв'язання. Подія A – проба містить метал. Число незалежних випробувань (перевірка проб) $n = 1000$ і ймовірність події A в окремому випробуванні $p = 0{,}7$. Необхідно знайти ймовірність того, що число появ події знаходиться між $k_1 = 652$ і $k_1 = 760$ Шукану ймовірність знайдемо за інтегральною формулою Лапласа.

$$P_{1000}(652;760) = \Phi(x'') - \Phi(x'),$$

де $x' = \dfrac{652 - 1000 \cdot 0{,}7}{\sqrt{1000 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}3}} = -3{,}31$, $x'' = \dfrac{760 - 1000 \cdot 0{,}7}{\sqrt{1000 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}3}} = 4{,}14$.

Визначивши відповідні значення функції Лапласа за таблицею (Додаток Б), маємо:

$$P_{1000}(652;760) = \Phi(4{,}14) - \Phi(-3{,}31) = 0{,}4999 + 0{,}4993 = 0{,}9992 .$$

Приклад 1.20

Знайти ймовірність того, що кількість бракованих виробів виявиться не більшою за 70, якщо ймовірність браку для кожного виробу дорівнює $0{,}005$, а число досліджуваних виробів 10000.

Розв'язання. Подія A – виріб виявився бракованим. Скористаємось формулою (1.23) при $n = 10000$, $k_1 = 0$, $k_2 = 70$.

$$x' = \frac{0 - 10000 \cdot 0{,}005}{\sqrt{10000 \cdot 0{,}005 \cdot 0{,}995}} = -7{,}09 ; \quad x'' = \frac{70 - 10000 \cdot 0{,}005}{\sqrt{10000 \cdot 0{,}005 \cdot 0{,}995}} = 2{,}84 .$$

$$P_{10000}(0;70) = \Phi(2{,}84) - \Phi(-7{,}0) = 0{,}4977 + 0{,}5 = 0{,}9977 .$$

Нехай здійснюється n незалежних випробувань, у кожному з яких ймовірність появи події A постійна та дорівнює p $(0 < p < 1)$. Ймовірність того, що відхилення відносної частоти події A від її ймовірності за модулем не перевищить заданого додатного числа ε, приблизно дорівнює подвійній функції Лапласа при $x = \varepsilon \cdot \sqrt{\dfrac{n}{pq}}$. Тобто

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \le \varepsilon\right) \approx 2 \cdot \Phi\left(\varepsilon \cdot \sqrt{\frac{n}{pq}}\right). \tag{1.24}$$

Формула (1.24) визначає ***оцінку ймовірності відхилення відносної частоти від постійної ймовірності в незалежних випробуваннях***

Приклад 1.21

Посаджено 600 зерен деякої культури з ймовірністю проростання 0,9 для кожного зерна. Знайти межу абсолютної величини відхилення частоти проростих зерен від ймовірності 0,9, якщо ця межа повинна бути гарантована з ймовірністю $P = 0{,}995$.

Розв'язання. Подія A – зерно проросло. За умовою $n = 600$, $p = 0{,}9$, $q = 1 - 0{,}9 = 0{,}1$, $P = 0{,}995$. Необхідно знайти ε. Із співвідношення (1.24) маємо:

$$P\left(\left|\frac{m}{n}-0{,}9\right|\le\varepsilon\right)=2\cdot\Phi\left(\varepsilon\cdot\sqrt{\frac{600}{0{,}9\cdot 0{,}1}}\right) \text{ або } \Phi(81{,}65\cdot\varepsilon)=0{,}4975.$$

Використовуючи таблицю (Додаток Б), знайдемо $81{,}65\cdot\varepsilon=2{,}81$. Остаточно маємо: $\varepsilon=\dfrac{2{,}81}{81{,}65}=0{,}034$.

Число k_0 появи події є ***найімовірнішим***, якщо ймовірність появи події k_0 раз не менша ймовірностей всіх інших можливих результатів випробування.

Якщо здійснюється n незалежних випробувань, у кожному з яких ймовірність появи події A постійна та дорівнює p $(0<p<1)$, то найімовірніше число k_0 визначається з нерівності.

$$n\cdot p-q\le k_0\le n\cdot p+p. \qquad (1.25)$$

Причому:

а) якщо $n\cdot p$ ціле, тоді $k_0=n\cdot p$; б) якщо число $(n\cdot p-q)$ – ціле, то існує два найімовірніші числа k_0 і k_0+1; в) якщо число $(n\cdot p-q)$ – дробове, то існує одне найімовірніше число k_0, найближче ціле до $n\cdot p+p$.

Приклад 1.22

Перевіряються на надійність 15 деталей, причому ймовірність того, що деталь пройде перевірку дорівнює 0,9. Знайти найімовірніше число деталей, які пройдуть перевірку.

Розв'язання. Подія A – деталь виявилась надійною. За умовою задачі $n=15$, $p=0{,}9$, $q=0{,}1$, тому за формулою (1.25):

$15\cdot 0{,}9-0{,}1\le k_0\le 15\cdot 0{,}9+0{,}9$ або $13{,}4\le k_0\le 14{,}4$. Оскільки $n\cdot p-q=14{,}4$ – дробове число, то $k_0=14$ найближче ціле до 14,4.

Приклад 1.23

Скільки потрібно провести незалежних випробувань з ймовірністю появи події у кожному випробуванні рівною 0,4, щоб найімовірніше число появ подій у цих випробуваннях дорівнювало 25?

Розв'язання. За умовою задачі $p=0{,}4$; $q=0{,}6$; $k_0=25$. Підставляючи дані задачі у нерівність (1.25), отримаємо систему нерівностей для визначення невідомого числа:

$$0{,}4n-0{,}6\le 25,$$

$$0{,}4n+0{,}4>25.$$

З першої нерівності системи маємо $n\le 64$, із другої – $n>61{,}5$. Тобто $62\le n\le 64$.

РОЗДІЛ 2 ВИПАДКОВІ ВЕЛИЧИНИ

Випадковою величиною називається величина, яка в результаті випробування може прийняти тільки одне можливе значення, причому наперед невідомо, яке саме.

2.1 Дискретна випадкова величина

Дискретною називають випадкову величину X, можливі значення якої утворюють скінченну або зліченну множину.

Випадкова величина вважається заданою, якщо відомий її закон розподілу.

Законом розподілу дискретної випадкової величини називають співвідношення між можливими значеннями випадкової величини та відповідними їм ймовірностями.

Закон розподілу випадкової величини може приймати різні форми.

1. Закон розподілу дискретної випадкової величини X може бути заданий у вигляді **таблиці**, перший рядок якої містить можливі значення x_i, а другий – відповідні ймовірності $p_i = P(X = x_i)$.

X	x_1	x_2	$\ldots$	x_n
P	p_1	p_2	$\ldots$	p_n

де $\sum\limits_{i=1}^{n} P_i = 1$.

2. Закон розподілу дискретної випадкової величини може бути заданий графічно. У прямокутній системі координат будують точки $M_1(x_1, p_1)$, $M_2(x_2, p_2)$, $\ldots$, $M_n(x_n, p_n)$, де x_i – можливі значення випадкової величини X **,** а p_i – відповідні ймовірності, та з'єднують їх відрізками прямих. Отриману ламану лінію називають ***многокутником розподілу*** ймовірностей (рис. 2.1).

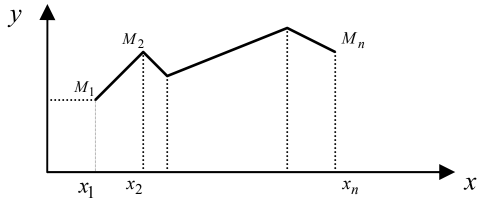

Рисунок 2.1

Приклад 2.1

Здійснюються три незалежних постріли по мішені, ймовірність влучення при кожному пострілі $p = 0{,}4$. Побудувати ряд розподілу дискретної випадкової величини X – кількість влучень у мішень.

Розв'язання. Випадкова величина X може приймати значення 0; 1; 2; 3. Знайдемо за формулою Бернуллі відповідні їм ймовірності:

$P_3(0) = C_3^0 \cdot 0{,}4^0 \cdot 0{,}6^3 = 0{,}216$;

$P_3(1) = C_3^1 \cdot 0{,}4^1 \cdot 0{,}6^2 = 0{,}216$;

$P_3(2) = C_3^2 \cdot 0{,}4^2 \cdot 0{,}6^1 = 0{,}288$;

$P_3(3) = C_3^3 \cdot 0{,}4^3 \cdot 0{,}6^0 = 0{,}064$.

Здійснемо контроль:

$P_3(0) + P_3(1) + P_3(2) + P_3(3) = 0{,}216 + 0{,}432 + 0{,}288 + 0{,}064 = 1$.

Закон розподілу випадкової величини X має вигляд:

X	0	1	2	3
P	0,216	0,432	0,288	0,064

3. Закон розподілу дискретної випадкової величини X може бути заданий аналітично, за допомогою ***функції розподілу ймовірностей.***

Функцією розподілу ймовірностей (або інтегральною функцією) випадкової величини X називають функцію $F(x)$, яка визначає ймовірність того, що випадкова величина X набуде значення менше за x, тобто

$$F(x) = P(X < x). \tag{2.1}$$

$F(x)$ є ймовірність того, що випадкова величина прийме значення, яке зображується на числовій вісі точкою, розміщеною лівіше за x (геометрична інтерпретація рівності (2.1).

Для дискретної випадкової величини функція розподілу визначається рівністю:

$$F(x) = P(X < x) = \sum_{x_i < x} P(X = x_i) . \qquad (2.2)$$

Функція розподілу дискретної випадкової величини є розривною функцією з розривами у точках, які є можливими значеннями випадкової величини і стрибками розривів, рівними ймовірностям цих значень.

Приклад 2.2

Випадкову величину X – кількість влучень у мішень, із прикладу 2.1 задати за допомогою функції розподілу ймовірностей. Побудувати графік функції розподілу.

Розв'язання. Скориставшись геометричною інтерпретацією рівності (2.1), отримаємо наступні міркування. Якщо $x \le 0$, то значень менших числа 0 випадкова величина X не приймає, і значить $F(x) = 0$. Якщо $0 < x \le 1$, то випадкова величина X може прийняти значення 0 з ймовірністю 0,216, тобто $F(x) = 0{,}216$. Якщо $1 < x \le 2$, то випадкова величина X може прийняти значення 0 з ймовірністю 0,216 або 1 з ймовірністю 0,432, тобто за теоремою складання несумісних подій маємо $F(x) = 0{,}216 + 0{,}432 = 0{,}648$. Якщо $2 < x \le 3$, то випадкова величина X може прийняти значення 0 з ймовірністю 0,216 або 1 з ймовірністю 0,432, або 2 з ймовірністю 0,288, тобто $F(x) = 0{,}216 + 0{,}432 + 0288 = 0{,}936$. Аналогічно можна отримати $F(x) = 1$ при $x > 3$.

$$F(x) = \begin{cases} 0, x \le 0; \\ 0{,}216, 0 < x \le 1; \\ 0{,}648, 1 < x \le 2; \\ 0{,}936, 2 < x \le 3; \\ 1, x > 3. \end{cases}$$

Графік інтегральної функції представлено на рис. 2.2.

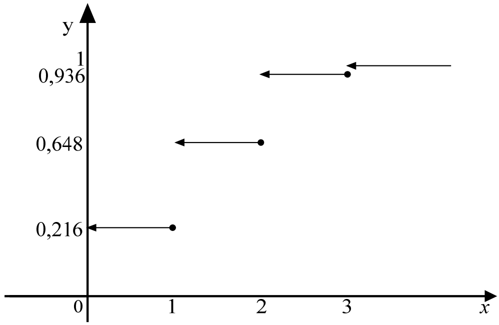

Рисунок 2.2

Властивості функції розподілу:

1) $F(x)$ – неспадна функція, тобто якщо $x_1 > x_2$, то $F(x_1) \geq F(x_2)$;

2) $F(-\infty) = 0$;

3) $F(+\infty) = 1$;

4) Ймовірність потрапляння значень випадкової величини X у інтервал $(\alpha; \beta)$ знаходять за формулою:

$$P(a \leq X < b) = F(b) - F(a) \tag{2.3}$$

2.2 Числові характеристики дискретної випадкової величини

Математичним сподіванням $M(X)$ дискретної випадкової величини X називається сума добутків усіх її можливих значень на ймовірності цих значень, тобто

$$M(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i \quad . \tag{2.4}$$

Властивості математичного сподівання $M(X)$***:***

1) $M(C) = C$, де C – константа;
2) $M(X + Y) = M(X) + M(Y)$;
3) $M(X \cdot Y) = M(X) \cdot M(Y)$;
4) $M(C \cdot X) = C \cdot M(X)$.

Ймовірнісний зміст математичного сподівання: математичне сподівання приблизно дорівнює середньому арифметичному спостережуваних значень випадкової величини.

Дисперсією D(X) випадкової величини X називається математичне сподівання квадрату відхилення випадкової величини X від її математичного сподівання, тобто:

$$D(X) = M(X - M(X))^2 \,. \tag{2.5}$$

Властивості дисперсії $D(X)$***:***

1) $D(C) = 0$;

2) $D(C \cdot X) = C^2 \cdot D(X)$;

3) $D(X + Y) = D(X) + D(Y)$.

Дисперсія характеризує розсіяння значень випадкової величини навколо її математичного сподівання.

Спрощена формула для обчислення дисперсії має вид:

$$D(X) = M(X^2) - M^2(X) . \qquad (2.6)$$

Недоліком дисперсії є те, що вона має розмірність квадрату випадкової величини, тому природньо для характеристики випадкової величини розглянути $\sqrt{D(X)}$.

Середнім квадратичним відхиленням випадкової величини X називається квадратний корінь із її дисперсії, тобто

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} \quad . \qquad (2.7)$$

П р и к л а д 2.3

Ряд розподілу випадкової величини X має вигляд:

X	0	2	4	7
P	0,2	0,5	0,2	0,1

Знайти: 1) математичне сподівання; 2) дисперсію; 3) середнє квадратичне відхилення випадкової величини.

Р о з в ' я з а н н я:

1) за формулою (2.4):

$$M(X) = 0 \cdot 0{,}2 + 2 \cdot 0{,}5 + 4 \cdot 0{,}2 + 7 \cdot 0{,}1 = 2{,}5 ;$$

2) за формулою (2.6):

$$D(X) = 0^2 \cdot 0{,}2 + 2^2 \cdot 0{,}5 + 4^2 \cdot 0{,}2 + 7^2 \cdot 0{,}1 - 2{,}5^2 = 10{,}1 ;$$

3) за формулою (2.7):

$$\sigma(X) = \sqrt{10{,}1} \approx 3{,}18 .$$

В теорії та практиці часто використовуються такі числові характеристики дискретної випадкової величини, як мода і медіана.

Модою $M_0(X)$ дискретної випадкової величини X називається її найбільш ймовірне значення, тобто

$$M_0(X) = x_i, \; P(X = x_i) = \max p_i , \; i = 1,2,...n .$$

Приклад 2.4

Модою випадкової величини X із попереднього прикладу 2.3 є її значення x=2, бо йому відповідає найбільша ймовірність 0,5.

Медіаною $M_e(X)$ дискретної випадкової величини X називають таке значення $x = m$, для якого виконується нерівність:

$$F(m) \le \frac{1}{2} \le F(m+0). \tag{2.8}$$

Таке значення m завжди існує, бо функція монотонно зростає від 0 до 1. Якщо крива $y = F(x)$ має з прямою $y = 0{,}5$ спільний відрізок, то абсцису кожної точки цього відрізка можна взяти за медіану даного розподілу. Кожний розподіл має принаймні одну медіану.

Приклад 2.5

Модою випадкової величини X із прикладу 2.2 є значення x=1, бо $F(1) \le \frac{1}{2} \le F(1+0)$, що можна побачити з графіка функції (рис.2.2).

2.3 Типові розподіли дискретної випадкової величини

2.3.1 Біноміальний розподіл

Біноміальним називають закон розподілу дискретної випадкової величини X – числа появ події A у n незалежних випробуваннях, в кожному з яких ймовірність появи події A постійна і дорівнює p.

Ця випадкова величина приймає одне з можливих значень: $0,1,2,...n$, а відповідні ймовірності визначаються формулою Бернуллі:

$$P_n(k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k} .$$

Математичне сподівання біноміального розподілу дорівнює:

$$M(X) = np . \tag{2.9}$$

Дисперсія біноміального розподілу дорівнює:

$$D(X) = npq . \tag{2.10}$$

Середнє квадратичне відхилення біноміального розподілу дорівнює:

$$\sigma(X) = \sqrt{npq} . \tag{2.11}$$

Приклад 2.6

У партії однотипних деталей, стандартні деталі складають 95%. Навмання з партії беруть 400 деталей. Знайти математичне сподівання, дисперсію та середнє квадратичне відхилення дискретної випадкової величини X – числа стандартних деталей серед 400 відібраних.

Розв'язання. Подія A – взята деталь стандартна. Випадкова величина X – число появ події A має біноміальний розподіл. Її можливі значення: $0,1,2,...,400$. Ймовірність появи стандартної деталі $p = 0,95$. Ймовірність появи нестандартної деталі $q = 1 - 0,95$.

За формулами (2.9), (2.10), (2.11) маємо:

$$M(X) = np = 400 \cdot 0,95 = 380\,;$$

$$D(X) = npq = 400 \cdot 0,95 \cdot 0,05 = 19\,;$$

$$\sigma(X) = \sqrt{npq} = \sqrt{19} \approx 4,36\,.$$

2.3.2 Розподіл Пуассона

Розподілом Пуассона називають закон розподілу дискретної випадкової величини X – числа появ події A у $n-$ незалежних випробуваннях, в кожному з яких ймовірність появи події A постійна і дорівнює p (n – велике, а p – мале).

Ця випадкова величина приймає одне з своїх можливих значень: $0,1,2,...,n$, а відповідні ймовірності розраховуються за формулою Пуассона:

$$P_n(k) \approx \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}\,,$$

де $\lambda = np$, $k = 0,1,2,...,n$.

Математичне сподівання розподілу Пуассона дорівнює:

$$M(X) = \lambda\,. \tag{2.12}$$

Дисперсія розподілу Пуассона дорівнює:

$$D(X) = \lambda\,. \tag{2.13}$$

Середнє квадратичне відхилення розподілу Пуассона дорівнює:

$$\sigma(X) = \sqrt{\lambda}\,. \tag{2.14}$$

Приклад 2.7

Прилад має 1000 мікроелементів, які працюють незалежно один від одного. Ймовірність того, що прилад зіпсується під час роботи дорівнює 0,004. Знайти математичне сподівання, дисперсію та середнє квадратичне відхилення дискретної випадкової величини X – числа мікроелементів, які вийдуть з ладу під час роботи приладу.

Розв'язання. Подія A – мікроелемент зіпсувався. Тому маємо $P(A) = p = 0{,}004$, $n = 1000$. Випадкова величина X підпорядкована закону Пуассона. За формулами (2.12), (2.13), (2.14) знаходимо:

$$M(X) = np = 1000 \cdot 0{,}004 = 4;$$

$$D(X) = np = 1000 \cdot 0{,}004 = 4;$$

$$\sigma(X) = \sqrt{4} = 2.$$

2.3.3 Геометричний розподіл

Геометричний розподіл називають законом розподілу дискретної випадкової величинии X – числа випробувань, проведених до появи події, якщо в кожному з випробувань ймовірність появи події A постійна і дорівнює p.

Ця випадкова величина приймає одне з своїх можливих значень $0,1,2,\ldots,k,\ldots$, а відповідні ймовірності розраховуються за формулами:

$$P_k = P(X = k) = pq^{k-1}, \quad k = 1,2,3,\ldots,n, \tag{2.15}$$

де p – ймовірність появи події A в кожному випробуванні, а q – ймовірність не появи події.

Математичне сподівання геометричного розподілу дорівнює:

$$M(X) = \frac{1}{p}. \tag{2.16}$$

Дисперсія геометричного розподілу дорівнює:

$$D(X) = \frac{q}{p^2}. \tag{2.17}$$

Середнє квадратичне відхилення геометричного розподілу дорівнює:

$$\sigma(X) = \frac{\sqrt{q}}{p}. \tag{2.18}$$

Приклад 2.8

Спортсмен стріляє по одній мішені до першого влучення. Знайти числові характеристики випадкової величини X – числа здійснених пострілів, якщо ймовірність влучення по мішені при одному пострілі дорівнює 0,8.

Розв'язання. Подія A – відбулося влучення в мішень. За умовою задачі $p = 0{,}8$, $q = 0{,}2$. За формулами (2.16), (2.17), (2.18) маємо:

$$M(X) = \frac{1}{p} = \frac{1}{0{,}8} = \frac{5}{4};$$

$$D(X) = \frac{q}{p^2} = \frac{0{,}2}{0{,}64} = \frac{5}{16};$$

$$\sigma(X) = \frac{\sqrt{5}}{4}.$$

2.4 Неперервна випадкова величина

Неперервною випадковою величиною називається випадкова величина, множина можливих значень якої неперервно заповнює деякий інтервал.

Неперервна випадкова величина може бути задана за допомогою інтегральної чи диференціальної функцій.

1. Функція розподілу ймовірностей або інтегральна функція визначається рівністю (2.1), а саме:

$$F(x) = P(X < x).$$

Функція розподілу ймовірностей неперервної випадкової величини є неперервною, частково-диференційованою функцією з неперервною похідною.

2. ***Функцією щільності розподілу ймовірностей*** або диференціальною функцією називається функція $f(x)$ – перша похідна від функції $F(x)$, тобто

$$f(x) = F'(x). \tag{2.19}$$

Приклад 2.9

Неперервна випадкова величина X задана інтегральною функцією розподілу:

$$F(x)=\begin{cases}0, & при\ x\le 6,\\ (x-6)^2, & при\ \ 6<x\le 7,\\ 1, & при\ \ x>7.\end{cases}$$

Знайти диференціальну функцію розподілу випадкової величини X, побудувати її графік.

Розв'язання. Скористаємось формулою (2.19), маємо:

$$f(x)=\begin{cases}0, & при\ x\le 6,\\ 2(x-6), & при\ \ 6<x\le 7,\\ 0, & при\ \ x>7.\end{cases}$$

Графік функції щільності розподілу $f(x)$ представлено на рис. 2.3.

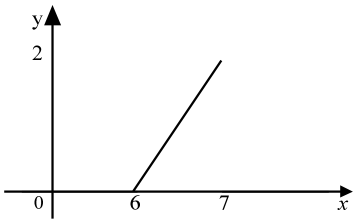

Рисунок 2.3

Графік функції щільності розподілу $f(x)$ називається ***кривою розподілу.***

Оскільки функція розподілу є первісною для щільності розподілу, то ***ймовірність потрапляння неперервної випадкової величини у заданий інтервал*** обчислюється за формулою:

$$P(a<X<b)=F(b)-F(a)=\int_a^b f(x)dx\,. \tag{2.20}$$

Для неперервної випадкової величини справедливі рівності:

$$P(a<X<b)=P(a\le X<b)=P(a<X\le b)=P(a\le X\le b)\,.$$

Приклад 2.10

Обчислити ймовірність потрапляння значень випадкової величини X, заданої у прикладі 2.9, у інтервал (6,5;8).

Розв'язання. Використовуючи наведені у прикладі 2.9 вирази для $F(x)$ і $f(x)$ та формулу (2.20), отримаємо:

$$P(6{,}5<X<8)=F(8)-F(6{,}5)=1-(6{,}5-6)^2=0{,}75$$

або

$$P(6{,}5 < X < 8) = \int\limits_{6{,}5}^{7} 2(x-6)dx + \int\limits_{7}^{8} 0dx = (x^2 - 12x)\Big|_{6{,}5}^{7} + 0 = 0{,}75\,.$$

Оскільки інтегральна функція $F(x)$ виражає ймовірність $P(X < x)$ потрапляння випадкової величини X в інтервал $(-\infty; x)$, то із формули (2.20) випливає:

$$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt\,, \tag{2.21}$$

(2.21) – формула знаходження інтегральної функції по відомій щільності розподілу.

Приклад 2.11

Неперервна випадкова величина X задана диференціальною функцією розподілу:

$$f(x) = \begin{cases} 0, \ \textit{при} \ x \le 6, \\ 2x - 12, \ \textit{при} \ \ 6 < x \le 7, \\ 0\,, \ \textit{при} \ \ x > 7. \end{cases}$$

Визначити інтегральну функцію розподілу.

Розв'язання. Ця задача обернена до задачі у прикладі 2.9. Скористаємось формулою (2.21).

Якщо $x \le 6$, то $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} 0dt = 0\,.$

Якщо $6 < x \le 7$, то

$$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{6} 0dx + \int\limits_{6}^{x} (2x-12)dx = (x^2 - 12x)\Big|_{6}^{x} =$$

$$= x^2 - 12x - (36 - 72) = x^2 - 12x + 36 = (x-6)^2.$$

Якщо $x > 7$, то

$$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{6} 0dx + \int\limits_{6}^{7} (2x-12)dx + \int\limits_{6}^{x} 0dx = (x^2 - 12x)\Big|_{6}^{7} =$$

$$= 7^2 - 12 \cdot 7 - (36 - 72) = 1.$$

Остаточно маємо: $$F(x)=\begin{cases}0, \; при \;\; x\le 6,\\ (x-6)^2, \;\; при \;\; 6<x\le 7,\\ 1, \; при \;\; x>7.\end{cases}$$

Властивості щільності розподілу ймовірностей:

а) $f(x)\ge 0$.

б) Якщо всі значення X належать інтервалу $(-\infty;+\infty)$, то:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=1 \qquad (2.22)$$

Зокрема, якщо всі значення X належать інтервалу $(a;b)$, то:

$$\int_{a}^{b} f(x)dx=1\,. \qquad (2.23)$$

2.5 Числові характеристики неперервної випадкової величини

Числові характеристики неперервної випадкової величини X за означенням дорівнюють:

$$M(X)=\int_{a}^{b} xf(x)dx \;\; \text{або} \;\; M(X)=\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx\,; \qquad (2.24)$$

$$D(X)=\int_{a}^{b} (x-M(X))^2 f(x)dx \;\; \text{або} \;\; D(X)=\int_{-\infty}^{\infty} (x-M(X))^2 f(x)dx\,; \qquad (2.25)$$

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}\,. \qquad (2.26)$$

Спрощена формула для обчислення дисперсії має вид:

$$D(X)=\int_{a}^{b} x^2 f(x)dx-M^2(X) \;\; \text{або} \;\; D(X)=\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx-M^2(X) \qquad (2.27)$$

Приклад 2.12

Знайти числові характеристики неперервної випадкової величини, заданої у прикладі 2.11.

Р о з в ' я з а н н я. Скористаємось формулами (2.24), (2.26), (2.27).

$$M(X) = \int_6^7 x(2x-12)dx = 2\int_6^7 (x^2-6x)dx = 2\left(\frac{x^3}{3} - 3x^2\right)\Bigg|_6^7 = 6\frac{2}{3}.$$

$$D(X) = \int_6^7 x^2(2x-12)dx - (M(X))^2 = 2\int_6^7 (x^3-6x^2)dx - \left(6\frac{2}{3}\right)^2 =$$

$$= 2\left(\frac{x^4}{4} - 2x^3\right)\Bigg|_6^7 - \left(6\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{89}{2} - \left(6\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{1}{18}.$$

$$\sigma(X) = \sqrt{\frac{1}{18}} \approx 0{,}24\ .$$

Числовими характеристиками неперервної випадкової величини є також мода і медіана.

Модою $M_0(X)$ неперервної випадкової величини X називається те її значення, при якому щільність розподілу ймовірностей має максимум.

Існують розподіли, які не мають моди, мають дві моди та ін.

Медіаною $M_e(X)$ неперервної випадкової величини називається те її можливе значення, яке визначається рівністю:

$$P(X < M_e(X)) = P(X > M_e(X)) = \frac{1}{2}\ . \tag{2.28}$$

Медіаною також називається те її значення, для якого:

$$F(x) = \frac{1}{2}. \tag{2.29}$$

Геометрично медіана – це абсциса точки, в якій площа, обмежена кривою розподілу, ділиться на рівні частини.

П р и к л а д 2.13

Випадкова величина задана диференціальною функцією розподілу $f(x) = -4x^2 + 8x - 3$ в інтервалі (0;2). Визначити моду випадкової величини.

Р о з в ' я з а н н я. Для визначення точки максимуму щільності знайдемо похідну та прирівняємо її до 0.

$$f'(x) = -8x + 8 = 0\ ,\ \ x = 1\ .$$

Перевіряючи знак похідної справа та зліва від 1 на інтервалі (0;2), можна впевнитися, що $x = 1$ - точка максимуму. Тобто $M_0(X) = 1$.

Приклад 2.14

Випадкова величина задана диференціальною функцією розподілу $f(x) = 2\cos 2x$ в інтервалі $(0;\frac{\pi}{4})$. Визначити моду та медіану випадкової величини.

Розв'язання. Для визначення медіани скористаємось рівністю $P(0 < X < M_e(X)) = \frac{1}{2}$, бо значення X на заданому інтервалі додатні. Маємо $\int\limits_0^{M_e(X)} 2\cos 2x dx = \frac{1}{2}$ або $\sin 2x\Big|_0^{M_e(X)} = \frac{1}{2}$. Тобто $\sin(2M_e(X)) = \frac{1}{2}$ або $2M_e(X) = \frac{\pi}{6}$, $M_e(X) = \frac{\pi}{12}$.

2.6 Початкові та центральні теоретичні моменти випадкової величини

Узагальненням основних числових характеристик випадкової величини є поняття моментів випадкової величини.

Початковим моментом к-го порядку випадкової величини X називається математичне сподівання величини X^k, тобто

$$\nu_k = M(X^k) = \begin{cases} \sum\limits_i x_i^k p_i, \textit{для дискретної випадкової величини}, \\ \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^k f(x)dx, \textit{для неперервної випадкової величини} \end{cases}. \quad (2.30)$$

Зокрема, початковим моментом першого порядку є математичне сподівання: $\nu_1 = M(X)$. За допомогою початкових моментів формулу для обчислення дисперсії можна записати як $D(X) = \nu_2 - \nu_1^2$.

Приклад 2.15

Знайти початкові моменти першого та другого порядку випадкової величини, заданої щільністю розподілу:

$$f(x)=\begin{cases}0, \ при \ x\le 6,\\ 2(x-6), \ при \ \ 6<x\le 7,\\ 0, \ при \ \ x>7.\end{cases}$$

Розв'язання. Використовуючи дані, отримані у прикладі 2.12, маємо:

$$\nu_1=M(X)=6\frac{2}{3}, \ \nu_2=M(X^2)=\frac{89}{2}.$$

Центральним моментом к-го порядку випадкової величини X називається математичне сподівання величини $(X-M(X))^k$, тобто

$$\mu_k=M(X-M(X))^k=$$

$$=\begin{cases}\sum\limits_i (x_i-M(X))^k p_i, для \ \ дискретної \ \ випадкової \ \ величини,\\ \int\limits_{-\infty}^{\infty}(x-M(X))^k f(x)dx, для \ \ неперервної \ \ випадкової \ \ величини\end{cases}. \qquad (2.31)$$

Зокрема, центральний момент першого порядку дорівнює 0: $\mu_1=M(X-M(X))=0$. Центральним моментом другого порядку є дисперсія: $\mu_2=D(X)=M(X-M(X))^2$.

Приклад 2.16

Центральним моментом другого порядку випадкової величини, заданої щільністю розподілу

$$f(x)=\begin{cases}0, \ при \ x\le 6,\\ 2(x-6), \ при \ \ 6<x\le 7,\\ 0, \ при \ \ x>7.\end{cases} \text{ є число } \mu_2=D(X)=\frac{1}{18}.$$

2.7 Типові розподіли неперервної випадкової величини

2.7.1 Рівномірний закон розподілу

Рівномірним називається розподіл ймовірностей неперервної випадкової величини X, якщо на проміжку $(a;b)$, якому належать усі можливі значення X, щільність зберігає постійне значення, тобто:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, \ \ x\in(a;b);\\ 0, \ \ x\notin(a;b).\end{cases} \qquad (2.32)$$

Графік функції щільності розподілу ймовірностей має вигляд (рис. 2.4):

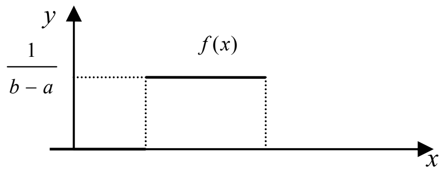

Рисунок 2.4

Числові характеристики рівномірного розподілу:

1) $M(X) = \dfrac{a+b}{2}$;

2) $D(X) = \dfrac{(b-a)^2}{12}$; (2.33)

3) $\sigma(X) = \dfrac{b-a}{2\sqrt{3}}$.

Ймовірність потрапляння випадкової величини у заданий інтервал можна знайти за формулою:

$$P(\alpha < X < \beta) = \frac{\beta - \alpha}{b - a}. \quad (2.34)$$

Функція розподілу рівномірного закону розподілу має вигляд:

$$F(x) = \begin{cases} 0; & x \le a, \\ \dfrac{x-a}{b-a}; & a < x \le b, \\ 1; & x > b. \end{cases} \quad (2.35)$$

Графік функції розподілу має вигляд (рис 2.5):

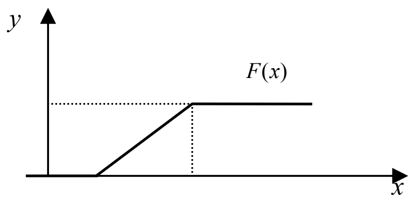

Рисунок 2.5

Приклад 2.17

Автобуси деякого маршрута йдуть строго за розкладом. Інтервал руху 5 хвилин. Знайти числові характеристики випадкової величини X – часу очікування пасажиром чергового автобуса. Знайти для випадкової величини

X функції $F(x)$ та $f(x)$. Знайти ймовірність того, що пасажир, який підійшов до зупинки, буде очікувати черговий автобус менше 3 хвилин.

Розв'язання. Випадкова величина X розподілена рівномірно на інтервалі [0;5]. За формулами (2.33) – (2.35) знаходимо:

$$M(X) = \frac{0+5}{2} = 2{,}5\ ; \qquad D(X) = \frac{(5-0)^2}{12} = 2{,}5\ ;$$

$$\sigma(X) = \sqrt{2{,}5} \approx 1.58\ ;$$

$$P(2 < X < 5) = \frac{5-2}{5-0} = \frac{3}{5}\ ;$$

$$f(x) = \begin{cases} 0; & x < 0, \\ \frac{1}{5}; & 0 \le x \le 5, \\ 0; & x > 5. \end{cases} \quad F(x) = \begin{cases} 0; & x < 0, \\ \frac{x}{5}; & 0 \le x \le 5, \\ 1; & x > 5. \end{cases}$$

2.7.2 Показниковий закон розподілу

Показниковим називається розподіл ймовірностей неперервної випадкової величини X, якщо її функція щільності розподілу має вигляд:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda \cdot e^{-\lambda x}, & x \ge 0; \\ 0, & x < 0, \end{cases} \tag{2.36}$$

де λ – параметр показникового розподілу $(\lambda > 0)$.

Графік ***функції щільності показникового розподілу*** зображено на рис 2.6:

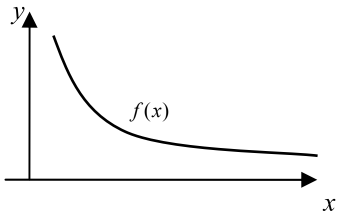

Рисунок 2.6

Інтегральна функція показникового закону має вигляд:

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & x \ge 0; \\ 0, & x < 0. \end{cases} \tag{2.37}$$

Графік інтегральної функції показникового розподілу зображено на рис 2.7:

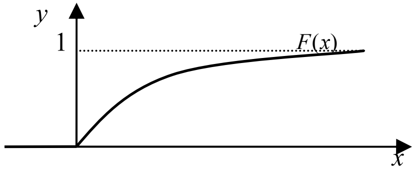

Рисунок 2.7

Числові характеристики показникового розподілу:

$$M(X)=\frac{1}{\lambda};\qquad D(X)=\frac{1}{\lambda^2};\quad \sigma(X)=\frac{1}{\lambda}. \qquad (2.38)$$

Ймовірність потрапляння випадкової величини у заданий інтервал можна знайти за формулою:

$$P(\alpha<X<\beta)=F(\beta)-F(\alpha)=e^{-\alpha}-e^{-\beta}. \qquad (2.39)$$

Приклад 2.18

Знайти числові характеристики, ймовірність попадання в інтервал $(1;2)$, диференціальну та інтегральну функції випадкової величини, яка має показниковий розподіл з параметром $\lambda=2$.

Розв'язання. За формулами (2.36) – (2.39) отримаємо:

$$M(X)=\frac{1}{2};\ D(X)=\frac{1}{4};\ \sigma(X)=\frac{1}{2};\ P(1<X<2)=e^{-1}-e^{-2}\approx 0{,}233\ .$$

$$f(x)=\begin{cases}2e^{-2x}, & x\ge 0;\\ 0, & x<0,\end{cases}\qquad F(x)=\begin{cases}1-e^{-2x}, & x\ge 0;\\ 0, & x<0.\end{cases}$$

2.7.3 Нормальний закон розподілу

Нормальним розподілом з параметрами a та σ називається розподіл ймовірностей неперервної випадкової величини X, якщо її функція щільності розподілу має вигляд:

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}. \qquad (2.40)$$

Числові характеристики нормального закону розподілу:

$$M(X)=a;\qquad D(X)=\sigma^2;\qquad \sigma(X)=\sigma. \qquad (2.41)$$

Ймовірність попадання випадкової величини у заданий інтервал можна знайти за формулою:

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right), \qquad (2.42)$$

де $\Phi(x)$ – функція Лапласа.

Ймовірність відхилення нормально розподіленої випадкової величини від її математичного сподівання обчислюється за формулою:

$$P(|X - a| < \delta) = 2 \cdot \Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right). \qquad (2.43)$$

Правило трьох сигм: ймовірність того, що відхилення нормально розподіленої випадкової величини X від її математичного сподівання по абсолютній величині буде менш потроєного середнього квадратичного відхилення, дорівнює 0,9973, тобто:

$$P(|X - a| < 3\sigma) = 0{,}9973\ . \qquad (2.44)$$

Приклад 2.19

Знайти ймовірність потрапляння нормально розподіленої випадкової величини X в інтервал $(4;9)$, якщо $a = 2$ та $\sigma = 5$.

Розв'язання. Скористаємось формулою (2.42) та отримаємо:

$$P(4 < X < 9) = \Phi\left(\frac{9-2}{5}\right) - \Phi\left(\frac{4-2}{5}\right) = \Phi(1{,}4) - \Phi(0{,}4) = 0{,}4192 - 0{,}1554 \approx 0{,}26.$$

Приклад 2.20

Врожайність ярової пшениці на 1га деякого лану виявилась нормально розподіленою випадковою величиною з середнім значенням $12\,ц/га$ та дисперсією 3,24. Обчислити ймовірність того, що врожайність із навмання обраного га буде складати $12 \pm 3\,ц/га$.

Розв'язання. X – врожайність ярової пшениці на 1га деякого лану. $a = 12$, $\sigma^2 = 3{,}24$, $\sigma = 1{,}8$. Скористаємось формулою (2.43) та отримаємо:

$$P(|X - 12| < 3) = 2 \cdot \Phi\left(\frac{3}{1{,}8}\right) \approx 2 \cdot \Phi(1{,}67) \approx 2 \cdot 0{,}45 \approx 0{,}9\,.$$

РОЗДІЛ 3 ЗАВДАННЯ ДЛЯ ПІДГОТОВКИ ДО МОДУЛЬНОГО КОНТРОЛЮ

3.1 Перелік запитань для підготовки до модульного контролю

1. Первісні поняття теорії ймовірностей: випробування, подія. Види події за можливостями їх появи.
2. Елементарні, сумісні, несумісні події. Повна група подій.
3. Сума та добуток подій.
4. Протилежні події. Ілюстрація подій за допомогою діаграм Ейлера-Вена.
5. Класичне означення ймовірності.
6. Властивості ймовірності.
7. Правило суми при підрахунку кількості елементарних подій.
8. Правило добутку при підрахунку кількості елементарних подій.
9. Елементи комбінаторики. Перестановки.
10. Елементи комбінаторики. Розміщення.
11. Елементи комбінаторики. Комбінації.
12. Обмеженість класичного означення ймовірності.
13. Геометричне означення ймовірності.
14. Статистична ймовірність.
15. Теорема додавання ймовірностей несумісних подій.
16. Властивість ймовірностей певної групи подій та протилежних подій.
17. Властивості ймовірностей протилежних подій.
18. Умовна ймовірність.
19. Незалежні, попарно незалежні та незалежні в сукупності події.
20. Загальна теорема множення ймовірностей.
21. Теорема множення для незалежних подій.
22. Неймовірність появи хоча б однієї з подій.
23. Теорема додавання ймовірностей сумісних подій.
24. Принцип практичної неможливості малоймовірних подій.
25. Формула повної ймовірності.
26. Формули Байєса.
27. Повторення випробувань.
28. Формула Бернуллі.
29. Локальна теорема Лапласа.
30. Формула Пуассона.
31. Інтегральна формула Лапласа.

32. Ймовірність відхилення відносної частоти від постійної ймовірності.

33. Поняття випадкової величини. Види випадкових величин.

34. Функція розподілу ймовірностей випадкової величини.

35. Властивості функції розподілу.

36. Закон розподілу ймовірностей дискретної випадкової величини.

37. Щільність розподілу ймовірностей випадкової величини.

38. Властивості щільності розподілу.

39. Зв'язок між функцією розподілу та щільністю ймовірностей випадкової величини.

40. Біноміальний розподіл ймовірностей.

41. Геометричний розподіл ймовірностей.

42. Закон розподілу Пуассона.

43. Математичне сподівання дискретної випадкової величини.

44. Математичне сподівання дискретної випадкової величини, розподіленої за біноміальним законом.

45. Математичне сподівання дискретної випадкової величини, розподіленої за законом Пуассона.

46. Математичне сподівання дискретної випадкової величини, розподіленої за геометричним законом.

47. Математичне сподівання неперервної випадкової величини.

48. Ймовірний зміст математичного сподівання.

49. Властивості математичного сподівання.

50. Відхилення випадкової величини від її математичного сподівання.

51. Дисперсія дискретної випадкової величини.

52. Дисперсія дискретної випадкової величини, розподіленої за біноміальним законом.

53. Дисперсія дискретної випадкової величини, розподіленої за законом Пуассона.

54. Дисперсія дискретної випадкової величини, розподіленої за законом Пуассона.

55. Формула для обчислення дисперсії.

56. Властивості дисперсії.

57. Середнє квадратичне відхилення.

58. Поняття початкових та центральних моментів.

59. Мода та медіана неперервної випадкової величини.

60. Рівномірний закон розподілу ймовірностей.

61. Числові характеристики рівномірного розподілу.
62. Функція розподілу ймовірностей рівномірного закону.
63. Показниковий закон розподілу.
64. Числові характеристики показникового розподілу.
65. Функція розподілу ймовірностей показникового закону.
66. Нормальний закон розподілу.
67. Нормальна крива (крива Гауса).
68. Ймовірність попадання в заданий інтервал нормальної випадкової величини.
69. Ймовірність заданого відхилення нормальної випадкової величини.
70. Правило трьох сигм.
71. Поняття про закон великих чисел. Нерівність Чебишева.
72. Теорема Ляпунова.
73. Теорема Бернуллі.
74. Поняття двовимірної випадкової величини.

3.2 Задачі для підготовки до модульного контролю

Безпосереднє обчислення ймовірностей подій

Задача 1

Підкидають дві монети. Яка подія найбільш ймовірна: A – монети впадуть однією стороною; B – монети впадуть різними сторонами?

Відповідь: $P(A) = P(B) = 0{,}5$.

Задача 2

У першому ящику кулі з номерами 1, 2, 3, 4, 5, у другому з номерами 6, 7, 8, 9, 10. З кожного ящика вийняли по одній кулі. Яка ймовірність того, що:

а) сума номерів вийнятих куль не менше 7;
б) сума номерів дорівнює 11;
в) сума номерів не більше 11.

Відповідь: а) 1; б) 1/5; в) 3/5.

Задача 3

При перевезенні ящика, в якому міститься 21 стандартна та 10 нестандартних деталей, загублено одну деталь. Навмання вийнята після перевезення деталь виявилась стандартною. Знайти ймовірність того, що була загублена: а) стандартна деталь; б) нестандартна деталь.

Відповідь: а) 2/3; б) 1/3.

Задача 4

У лотереї 2000 квитків. На один квиток падає виграш 100 грн; на чотири квитка – по 50 грн.; на десять – по 20 грн.; на двадцять – по 10 грн; на 165 квитків – по 1 грн. Решта квитків невиграшні. Яка ймовірність виграшу не менше 5 грн по одному квитку?

Відповідь: 0,0175.

Задача 5

Монету підкинуто два рази. Знайти ймовірність того, що хоча б один раз випав тризуб.

Відповідь: 0,75.

Задача 6

У таблиці 3.1 наведено дані про стаж осіб, які працюють у фірмі.

Таблиця 3.1

Стаж, років	*Число працівників*
Менше 1	*26*
Від 1 до 2	*36*
Від 2 до 3	*16*
Від 3 до 4	*20*
Від 4 до 5	*2*
5 і більше	*0*

Яка ймовірність того, що наступна прийнята на роботу у фірму людина, пропрацює не менше двох років?

Відповідь: 0,38.

Задача 7

Партія електролампочок складається з 10 придатних і пяти бракованих. Із партії навмання по одній беруть усі лампочки. Знайти ймовірність того, що останньою буде взято придатну.

Відповідь: 0,667.

Задача 8

В урні 10 куль: 6 білих та 4 чорних. Вийняли дві кулі. Яка ймовірність того, що обидві кулі білі?

Відповідь: 1/3.

Задача 9

Серед 17 студентів групи, з яких 8 дівчат, розігрується 7 квитків. Яка ймовірність того, що серед власників квитків опиняться 4 дівчини?

Відповідь: 0,302.

Задача 10

Із ящика, який має 6 пронумерованих виробів, навмання виймається один за одним вироби. Яка ймовірність, що номера вийнятих виробів будуть йти послідовно?

Відповідь: 0,0014.

Задача 11

З чотирьох літер розрізної азбуки складено слово «бокс». Дитина, не вміючи читати, розсипала ці літери, а потім зібрала у довільному порядку. Знайти ймовірність того, що вона знову збере слово «бокс».

Відповідь: 0,0417.

Задача 12

Із 60 запитань, які входять у екзаменаційні білети, студент підготовив 50. Яка ймовірність того, що обраний студентом білет, містить два запитання, які він знає?

Відповідь: 0,692.

Задача 13

У ящику 100 деталей, із них 10 браковані. Навмання вийнято 4 деталі. Знайти ймовірність того, що серед них: а) немає бракованих; б) немає придатних.

Відповідь: а) 0,65; б) 0,00005.

Задача 14

Прилад складається з 5 елементів, 2 з яких зношені. При вмиканні приладу вмикаються випадковим чином два елементи. Яка ймовірність того, що увімкненими виявились незношені елементи?

Відповідь: 0,3.

Задача 15

Набираючи номер телефону, абонент забув останні дві цифри, і пам'ятаючи лише, що вони різні, набрав їх навмання. Яка ймовірність того, що це правильні цифри?

Відповідь: 0,0014.

Задача 16

У коробці знаходиться 5 однакових виробів, причому 3 з них пофарбовані. Навмання вийнято 2 вироби. Знайти ймовірність того, що серед них: а) один пофарбований; б) обидва пофарбовані; в) хоча б один пофарбований.

Відповідь: а) 0,6; б) 0,3; в) 0,9.

Задача 17

У точці С, положення якої на телефонній лінії АВ довжиною L рівноможливе, відбувся обрив. Визначити ймовірність того, що точка С віддалена від точки А на відстань, не меншу l.

Відповідь: 0,25.

Задача 18

Деякий прямокутник заданий нерівностями $0 \le x \le e$; $0 \le y \le 1$. Яка ймовірність того, що навмання обрана точка потрапить в область, задану нерівностями $1 \le x \le e$; $0 \le x \le \ln x$?

Відповідь: 1/e.

Задача 19

У партії однакових деталей, кількість яких дорівнює 400, контролер виявив 25 бракованих. Чому дорівнює відносна частота появи стандартних деталей?

Відповідь 15/16.

Задача 20

Відносна частота появи бракованих деталей дорівнює 0,85. Знайти число бракованих деталей серед 20.

Відповідь: 17.

Теореми додавання та множення ймовірностей. Ймовірність появи хоча б однієї події

Задача 21

Пристрій складається з 10 елементів першого типу, 15– 2-го, 20 – 3-го та 25 – 4-го. Вийшов з ладу один елемент. Яка ймовірність того, що цей елемент був: а) 1-го або 2-го типу; б) 3-го або 4-го типу?

Відповідь: а) 5/14; б) 9/14.

Задача 22

Прогноз метеорологів: сніг з ймовірністю 0,5; вітер з ймовірністю 0,6; сніг та вітер з ймовірністю рівною 0,2. Яка ймовірність того, що буде сніг або вітер?

Відповідь: 0,9.

Задача 23

Для вчасного збирання врожаю пшениці достатньо, щоб у полі працювало два комбайни. Знайти ймовірність того, що пшеницю буде вчасно зібрано, якщо господарство має три комбайни, та ймовірності справної роботи яких дорівнюють відповідно 0,4; 0,9; 0,8.

Відповідь: 0,536.

Задача 24

У мішку змішані ниті серед яких 30% білих, решта червоні. Знайти ймовірність того, що виймані навмання дві ниті будуть одного кольору.

Відповідь: 0,58.

Задача 25

Механізм, що містить 4 однакові деталі, не працюватиме, якщо під час його складання буде взято 3 або більше деталей меншого розміру, ніж потрібно. У робітника залишилось 15 деталей, серед яких 6 меншого розміру.

Знайти ймовірність того, що механізм працюватиме, якщо робітник братиме деталі навмання.

Відповідь: 0,857.

Задача 26

Ймовірність влучення в мішень при одному пострілі дорівнює 0,2. Зроблено 10 пострілів. Знайти ймовірність хоча б одного влучення.

Відповідь: 0,8926.

Задача 27

Ймовірність влучення в мішень при одному пострілі постійна, і дорівнює 0,05. Скільки необхідно зробити пострілів, щоб з ймовірністю, не менше 0,75, мати хоча б одне влучення?

Відповідь: 28.

Задача 28

Два стрільці роблять по одному пострілу у мішень. Ймовірність влучення для першого дорівнює 0,7, для другого – 0,8. Яка ймовірність того, що влучать у мішень: а) обидва; б) лише один; в) жоден?

Відповідь: а) 0,56; б) 0,38; в) 0,06.

Задача 29

Деталі проходять три операції обробки. Ймовірність отримання браку на першій операції дорівнює 0,02; на другій – 0,03; на третій – 0,02. Знайти ймовірність отримання деталі без браку після трьох операцій.

Відповідь: 0,9316.

Задача 30

У родині троє дітей. Приймаючи народження хлопчика або дівчинки рівноможливими, знайти ймовірність того, що у родині: а) усі хлопчики; б) діти однієї статі.

Відповіді: а) 0,125; б) 0,25.

Задача 31

Відбувається повітряний бій між двома літаками: винищувачем та бомбардувальником. Стрільбу починає винищувач, який влучає з ймовірністю 0,4. Якщо бомбардувальник не збитий, він стріляє і влучає з ймовірністю 0,6. Якщо він схибив, знов стріляє винищувач і збиває з ймовірністю 0,3. Знайти ймовірність того, що: а) збитий бомбардувальник; б) збитий винищувач; в) збитий хоча б один літак.

Відповідь: а) 0,472; б) 0,36; в) 0,832.

Задача 32

Ймовірність вдалого виконання вправи для кожного з двох спортсменів дорівнює 0,5. Спортсмени виконують вправи по черзі, при чому кожен робить по дві спроби. Перший, хто виконує вправу, отримує приз. Знайти ймовірність отримання призу спортсменами.

Відповідь: 0,9375.

Задача 33

Ймовірність хоча б одного влучення у мішень при чотирьох пострілах дорівнює 0,9984. Знайти ймовірність влучення у мішень при одному пострілі.

Відповідь: 0,8.

Задача 34

Для зруйнування мосту достатньо влучення однієї авіаційної бомби. Знайти ймовірність того, що міст буде зруйновано, якщо на нього скинути чотири бомби, ймовірності влучення яких відповідно дорівнюють: 0,3; 0,4; 0,6; 0,7.

Відповідь: 0,95.

Задача 35

Річки країни досліджуються на наявність у воді деякої речовини. З'ясовано, що вода 5% річок не містить цієї речовини, вода у 10% річок містить цю речовину у кількості, яка може зашкодити здоров'ю. Вміст речовини у воді решти 85% річок відповідає нормі. Знайти ймовірність того, що у двох випадково обраних річках: а) вода за наявністю речовини відповідає нормі; б) вода однієї річки не містить речовини, а в другій перебільшує норму.

Відповідь: а) 0,7225; б) 0,01.

Задача 36

Партія насіння, яка складається з 10 мішків, приймається, якщо при перевірці обраних навмання двох мішків, насіння, яке в них міститься, виявиться відповідним стандарту. Знайти ймовірність прийняття партії, в якій у чотирьох мішках міститься нестандартне насіння.

Відповідь: 0,33.

Задача 37

Коефіцієнт використання робочого часу у двох комбайнів відповідно дорівнює 0,8 та 0,6. Вважаючи, що зупинки у роботі кожного комбайна з'являються випадково і незалежно одна від одної, визначити відносний час: а) сумісної роботи комбайнів; б) роботи лише одного комбайна; в) простою обох комбайнів.

Примітка. Коефіцієнт використання робочого часу будь-якого механізму – це відношення часу безпосередньої роботи механізму до всього робочого часу.

Відповідь: а) 48%; б) 44%; в) 8%.

Задача 38

Велика партія виробів містить 20% браку. Скільки виробів потрібно взяти з цієї партії для того, щоб ймовірність зустріти хоча б один доброякісний виріб була не менше 0,95?

Відповідь: не менш 2.

Задача 39

Ймовірність безвідмовної роботи блоку, який входить до системи, протягом деякого часу дорівнює 0,9. Для надійності системи встановлюється такий самий блок, який буде знаходитись у резерві. Яка ймовірність безвідмовної роботи системи з урахуванням резервного блоку?

Відповідь: 0,99.

Задача 40

В урні 4 зелених та 8 червоних куль. Кулі виймають по одній без повернення. Було вийнято 3 кулі. Знайти ймовірність того, що: а) перша куля була червоною, друга – зеленою, третя – червоною; б) перша була зелена, друга – червона, третя – зелена.

Відповідь: а) 56/165; б) 4/55.

Формула повної ймовірності. Формули Байєса

Задача 41

Для посіву пшениці заготовлено насіння, серед якого 95% 1-го сорту, 3% – 2-го та 2% – 3-го сорту. Ймовірність того, що з насінини виросте колосок, в якому не менш ніж 50 зерен, для першого сорту насіння становить 0,5, для другого – 0,2, для третього – 0,1. Знайти ймовірність того, що навмання взятий колосок у разі такого посіву матиме не менш як 50 зерен.

Відповідь: а) 0,25; б) 0,25; в) 0,21.

Задача 42

На двох автоматичних верстатах виробляють однакові вироби. Ймовірність виробництва деталей вищого ґатунку на першому верстаті дорівнює 0,92, на другому – 0,8. Вироблені на обох верстатах нерозділені деталі знаходяться на складі, причому деталей, виготовлених на першому верстаті, у три рази більше ніж на другому. Знайти ймовірність того, що навмання взята деталь опиниться вищого ґатунку.

Відповідь: 0,89.

Задача 43

В урну, в якій є 2 кулі, поклали білу кулю, після чого з урни навмання дістали одну кулю. Знайти ймовірність того, що ця куля опиниться білою, якщо рівноможливі усі можливі варіанти первинного складу куль за кольором.

Відповідь: 0,67.

Задача 44

У першій урні міститься 10 куль, з них 8 білих; у другій урні 20 куль, з них 4 білі. З кожної урни навмання дістали по одній кулі, а потім з цих двох куль навмання обрали одну. Яка ймовірність того, що вона біла?

Відповідь: 0,5.

Задача 45

У кожній з трьох урн знаходиться 6 чорних та 4 білих кулі. З першої урни навмання взяли одну кулю і переклали в іншу урну. Знайти ймовірність того, що куля, яку навмання взяли з третьої урни, виявиться білою.

Відповідь: 0.4.

Задача 46

Два автомати виробляють однакові деталі, які надходять на загальний конвеєр. Перший автомат виробляє вдвічі більше деталей ніж другий. Перший автомат виробляє у середньому 60% деталей вищого ґатунку, а другий – 84%. Деталь, яку навмання взяли з конвеєру опинилась вищого ґатунку. Яка ймовірність того, що деталь вироблена першим автоматом?

Відповідь: 0,5882.

Задача 47

Кількість вантажівок, які проїжджають по шосе, на якому знаходиться бензоколонка, відноситься до кількості легкових автомашин, які проїжджають по цьому ж шосе, як 3:2. Ймовірність того, що буде заправлятися вантажівка, дорівнює 0,1; для легкової машини ця ймовірність дорівнює 0,2. До бензоколонки під'їхала машина. Знайти ймовірність того, що це вантажівка.

Відповідь: 0,4286.

Задача 48

У групі з 10 студентів, які прийшли на іспит, три підготовлені відмінно; чотири – добре; два – задовільно та один – незадовільно. Відмінно підготовлений студент може відповісти на всі 20 запитань, добре підготовлений – на 16, задовільно – на 10, незадовільно – на 5. Викликаний навмання студент відповів на три довільних запитання. Знайти ймовірність того, що цей студент підготовлений: а) відмінно; б) незадовільно.

Відповідь: а) 0,58; б) 0,002.

Задача 49

Пасажир для купівлі квитка може звернутися до однієї з чотирьох кас з ймовірністю 0,2; 0,3; 0,4; 0,1 відповідно. Ймовірність того, що у мить звернення його квиток буде у касі дорівнює 0,6; 0,3; 0,8; та 0,5 відповідно. Пасажир звернувся до однієї з кас і отримав квиток. Яка ймовірність того, що квиток було куплено у першій касі?

Відповідь: 6/29.

Задача 50

Дослідження хімічного складу руди, вказує на присутність у ній одного з трьох хімічних елементів. Ймовірності вмісту кожного з них у руді відповідно дорівнюють $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{3}$. Для уточнення хімічного складу руди призначається черговий аналіз, який дає позитивний результат із ймовірністю 0,1 у випадку присутності першого елемента, із ймовірністю 0,2 – другого, 0,9 – третього елемента. Аналіз було здійснено пять разів та мав чотири рази позитивний результат і один раз негативний. Знайти ймовірність вмісту у руді кожного елемента після проведення аналізу.

Відповідь: 0,002; 0,01; 0,0988.

Повторення випробувань

Задача 51

Із партії, в якій 12 стандартних і 4 нестандартні деталі, навмання беруться 3 деталі з поверненням. Знайти ймовірність того, що серед узятих деталей: а)усі три стандартні; б) не більш як одна нестандартна; в) принаймні одна нестандартна.

Відповідь: а) 0,42; б) 0,84; в) 0,58.

Задача 52

Зерна пшениці проростають з ймовірністю 0,95. Знайти ймовірність того, що із 2000 посіяних зерен зійде від 1880 до 1920.

Відповідь: 0,8288.

Задача 53

Ймовірність появи події у кожному з незалежних випробувань дорівнює 0,8. Скільки потрібно виконати випробувань, щоб з ймовірністю 0,9 можна було очікувати, що подія з’явиться не менше 75 разів?

Відповідь: 100.

Задача 54

Ймовірність появи події у кожному з 900 незалежних випробувань дорівнює 0,5. Знайти ймовірність того, що відносна частота появи події відхилиться від її ймовірності по абсолютній величині не більш ніж на 0,02.

Відповідь: 0,7698.

Задача 55

Для метеликів деякого виду ймовірність появи потомства з відкладання личинок – 0,01. Яка ймовірність того, що з 2000 відкладених личинок, з’явиться 1000 метеликів?

Відповідь: розв’язати задачу самостійно.

Задача 56

Виробникам кишенькових калькуляторів відомо з досвіду роботи, що 1% вироблених й проданих калькуляторів мають дефекти та їх повинні замінити за гарантією. Велика фірма купила 500 калькуляторів. Яка ймовірність того, що п'ять або більше калькуляторів потрібно буде замінити? (розрахунок здійснити за формулами Бернуллі та Пуассона).

Відповідь: 0,56039.

Задача 57

Яку частку виробів першого сорту має виробляти автомат, щоб у партії із 100 навмання взятих виробів найімовірніша кількість виробів 1-го сорту дорівнювала 80?

Відповідь: 79; 21; 80; 2.

Дискретна випадкова величина

Задача 58

Закон розподілу випадкової величини X заданий таблицею:

X	*-4*	*1*	*2*	*5*	*9*
p	*0,1*	*0,1*	*0,5*	*?*	*0,2*

Побудувати багатокутник розподілу, знайти функцію розподілу та ймовірності таких подій: а) $1 < X < 5$; б) $X < 5$; в) $X \leq 5$.

Відповідь: а) 0,5; б) 0,7; в) 0,8.

Задача 59

Випадкова величина X задана за допомогою функції розподілу:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -4; \\ 0,1, & -4 \prec x \leq -1; \\ 0,3, & -1 \prec x \leq 2; \\ 0,5, & 2 \prec x \leq 5; \\ 0,8, & 5 \prec x \leq 8; \\ 1, & x \succ 8. \end{cases}$$

Знайти: $P(-4 < X \leq 2)$; $P(X > 2)$; $P(X \geq 5)$; $P(X \leq 2)$.

Відповідь: 0,5; 0,5; 0,5; 0,5.

Задача 60

Кожна з шести лампочок з ймовірністю 0,1 має дефект. Лампочку вкручують у патрон та вмикають струм. При вмиканні струму дефектна лампочка одразу перегорає, після чого замінюється іншою. Побудувати ряд розподілу випадкової величини X – числа лампочок, які будуть випробувані.

Задача 61

Під час дослідження води у деякому водоймищі може знадобитися від однієї до п'яти проб з ймовірностями 0,07, 0,21, 0,55, 0,16, 0,01 відповідно. Скласти закон розподілу випадкової величини Х – кількості зроблених проб, знайти її числові характеристики. З'ясувати, чому дорівнює середнє число проб, необхідних для дослідження 3-х таких водоймищ.

Відповідь: ≈ 9 .

Задача 62

Випадкова величина Х характеризується рядом розподілу:

X	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*
P	*0,2*	*0,4*	*0,3*	*0,08*	*0,02*

Знайти її математичне сподівання та дисперсію.

Відповідь: $M(X) = 1{,}32$; $D(X) = 0{,}8966$.

Задача 63

Ймовірність влучення стрілком у мішень дорівнює 2/3. Стрілок зробив 15 пострілів. Знайти математичне сподівання та дисперсію випадкової величини X – числа влучень у мішень.

Відповідь: $M(X) = 10$; $D(X) = \frac{10}{3}$.

Задача 64

Дискретна випадкова величина X приймає три значення: $x_1 = 4$ з ймовірністю $p_1 = 0{,}5$; $x_2 = 6$ з ймовірністю $p_2 = 0{,}3$ та x_3 з ймовірністю p_3 . Знайти x_3 та p_3 , якщо відомо, що $M(X) = 8$.

Відповідь: 21; 0,2.

Задача 65

Відомі можливі значення дискретної випадкової величини X: $x_1 = -1$; $x_2 = 0$; $x_3 = 1$, а також відомі математичні сподівання цієї величини та її квадрату: $M(X) = 0{,}1$; $M(X^2) = 0{,}9$. Знайти ймовірність p_1, p_2, p_3, відповідну можливим значенням.

Відповідь: 0,4; 0,1; 0,5.

Задача 66

У партії з 10 деталей міститься 3 нестандартні. Навмання відібрано 2 деталі. Знайти математичне сподівання випадкової величини X – числа нестандартних деталей серед відібраних.

Відповідь: $M(X) = \dfrac{3}{5}$.

Задача 67

Дискретна випадкова величина X має два можливі значення: x_1 та x_2, причому $x_1 < x_2$. Ймовірність того, що X прийме значення x_1, дорівнює 0,6. Знайти закон розподілу величини X, якщо $M(X) = 1{,}4$, $D(X) = 0{,}24$.

Відповідь: $x_1 = 1$; $x_2 = 2$; $p_2 = 0{,}4$.

Неперервна випадкова величина

Задача 68

Випадкова величина X підпорядкована закону розподілу з щільністю $f(x)$, причому:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ a(3x - x^2), & 0 \le x < 3; \\ 0, & x > 3. \end{cases}$$

Знайти: 1) коефіцієнт *a*; 2) ймовірність потрапляння випадкової величини до інтервала (1; 2).

Відповідь: 1) $a = \dfrac{2}{9}$; 2) $p = \dfrac{13}{27}$.

Задача 69

Випадкова величина X задана функцією розподілу:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & при \quad x < 1; \\ \dfrac{x-1}{2}, & при \quad 1 \le x \le 3; \\ 1, & при \quad x > 3. \end{cases}$$

Знайти щільність розподілу випадкової величини X. Знайти ймовірності потрапляння випадкової величини X, у інтервали: а) (1,5; 2,5); б) (2,5; 3,5).

Відповідь: а) 0,5; б) 0,25.

Задача 70

Задана функція щільності розподілу випадкової величини X:

$$f(x) = \begin{cases} a \sin x, & при \quad x \in [0; \pi]; \\ 0, & при \quad x \notin [0; \pi]. \end{cases}$$

Знайти значення параметру a.

Відповідь: $a = 5$.

Задача 71

Задана інтегральна функція неперервної випадкової величини X:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0; \\ \sin 2x, & 0 \prec x \le \dfrac{\pi}{4}; \\ 1, & x > \dfrac{\pi}{4}. \end{cases}$$

Знайти диференціальну функцію $f(x)$.

Задача 72

Задана диференціальна функція неперервної випадкової величини X:

$$f(x) = \begin{cases} \sin x, & при \quad x \in (0; \pi/2]; \\ 0, & при \quad x \notin (0; \pi/2]. \end{cases}$$

Знайти інтегральну функцію.

Задача 73

Випадкова величина X на інтервалі (0; 5) задана диференціальною функцією $f(x)=\dfrac{2}{25}x$, зовні цього інтервала $f(x)=0$. Знайти дисперсію.

Відповідь: $D(X)=\dfrac{25}{18}$.

Задача 74

Знайти математичне сподівання та дисперсію випадкової величини X, якщо:

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x\le -2; \\ \dfrac{x}{4}+\dfrac{1}{2}, & -2<x\le 2; \\ 1, & x>2. \end{cases}$$

Відповідь: $M(X)=6$; $D(X)=\dfrac{4}{3}$.

Задача 75

Знайти ймовірність того, що X прийме значення, яке належить проміжку $\left(\dfrac{\pi}{6};\dfrac{\pi}{4}\right)$, якщо $f(x)=\dfrac{2}{3}\sin x$ в інтервалі $\left(0;\dfrac{\pi}{3}\right)$, зовні цього інтервала $f(x)=0$.

Відповідь: $\dfrac{\sqrt{2}}{9}$.

Задача 76

Знайти числові характеристики, диференціальну та інтегральну функції та ймовірність потрапляння у проміжок $(3;5)$ неперервної випадкової величини X, рівномірно розподіленої на проміжку $(2;10)$.

Відповідь: $M(X)=6$; $D(X)=\dfrac{16}{3}$.

Задача 77

Час відправлення міжміського автобуса рівномірно розподілений на часовому проміжку від 0.00 до 20.00. Визначити ймовірність того, що пасажир, який прибув на станцію о 16.00, встигне на автобус.

Відповідь: 0,2.

Задача 78

Написати диференційну та інтегральну функції показникового розподілу, якщо параметр $\lambda = 5$. Знайти її числові характеристики.

Відповідь: $M(X) = 0{,}2$; $D(X) = 0{,}04$; $\sigma(X) = 0{,}2$.

Задача 79

Неперервна випадкова величина X розподілена за показниковим законом, заданим при $x \geq 0$ диференціальною функцією $f(x) = 0{,}04e^{-0{,}04x}$; при $x < 0$ функція $f(x) = 0$. Знайти ймовірність того, що в результаті випробування X потрапить в інтервал (1;2).

Відповідь: 0,038.

Задача 80

Час безперервної роботи автоматичного верстата розподіляється за показниковим законом. При якому значенні параметра λ з ймовірністю не менше 0,98 буде гарантована неперервна робота верстата протягом 4 годин.

Відповідь: $\lambda \leq 0{,}005051$.

Задача 81

Нормально розподілена випадкова величина X задана функцією:

$$f(x) = \frac{1}{5\sqrt{2\pi}} e^{\frac{(x-1)^2}{50}}.$$

Знайти її числові характеристики.

Відповідь: $M(X) = 1$; $D(X) = 25$; $\sigma(X) = 5$.

Задача 82

Математичне сподівання та середнє квадратичне відхилення нормально розподіленої випадкової величини X відповідно дорівнюють 20 та 5. Знайти ймовірність того, що у результаті випробування X прийме значення, яке знаходиться у проміжку (15; 25).

Відповідь: 0,6826.

Задача 83

Розподіл ухилів на дорогах є випадковою величиною X, яка описується нормальним законом. Величину математичного сподівання M(X) для середньо пересіченої місцевості можна прийняти рівною 0, бо під час руху автомобіля в одному напрямі половина ухилів буде уявляти собою підйоми, інша половина – спуски. Визначити середнє квадратичне відхилення розподілу ухилів, при якому ймовірність $P(0{,}21 < X < 0{,}57)$.

Задача 84

Відбувається вимірювання діаметру валу без систематичних (одного знаку) помилок. Випадкові помилки вимірювання X підпорядковані нормальному закону з $\sigma = 10\,мм$. Знайти ймовірність того, що вимірювання буде здійснено з помилкою, яка за абсолютною величиною не більш 15 мм.

Відповідь: 0,8664.

Задача 85

Автомат виготовляє кульки. Кулька вважається придатною, якщо відхилення X діаметру кульки від проектного розміру за абсолютною величиною менше 0,7 *мм*. Вважаючи, що випадкова величина X розподілена нормально з $\sigma = 0{,}4\,мм$, знайти, скільки буде придатних кульок серед 100 вироблених.

Відповідь: 92.

Задача 86

Випадкова величина X розподілена нормально з математичним сподіванням $a = 10$. Ймовірність потрапляння у проміжок (10;20) дорівнює 0,3. Чому дорівнює ймовірність потрапляння у проміжок (0;10)?

Відповідь: 0,3.

Задача 87

Випадкова величина X розподілена нормально з $a = 10$ та $\sigma = 5$. Знайти інтервал, в який з ймовірністю 0,9973 потрапляє у результаті випробування величина X.

Відповідь: (-5;25).

Задача 88

Процент вмісту води у вугіллі є нормально розподіленою випадковою величиною з математичним сподіванням, рівним 16% та середнім квадратичним відхиленням, рівним 4%. Знайти ймовірність того, що у навмання взятій пробі вугілля виявиться від:

а) 10% до 20% води;

б) менше 5% води;

в) більше 32%?

Відповідь: а) 81,8%; б) 15,9%; в) 2,3%.

Задача 89

Технічними умовами передбачено, що довжина заготівки деякої деталі має бути між 24 і 25 см. Якщо довжина деталі розподіляється нормально з a=24,6 *см* і $\sigma = 0{,}4$ *см*, то яка частка заготівок матиме довжину, що виходить за межі, задані технічними умовами?

Відповідь: 22,55%.

РОЗДІЛ 4 ДОМАШНЄ ІНДИВІДУАЛЬНЕ ЗАВДАННЯ

Варіант 1

1.1 У коробці знаходяться 8 однакових виробів, причому 3 із них пофарбовано. Навмання беруть 4 вироби. Знайти ймовірність того, що серед них немає пофарбованих.

1.2 Для сигналізації про аварію встановлено три незалежно працюючих сигналізатори. Ймовірність того, що під час аварії сигналізатор спрацює, дорівнює 0,9 для першого сигналізатора, 0,8 – для другого та 0,7 – для третього. Знайти ймовірність того, що під час аварії спрацює тільки один сигналізатор.

1.3 Кожний виріб перевіряється одним з двох товарознавців. Ймовірність того, що виріб буде перевіряти перший товарознавець, дорівнює 0,45, а другий – 0,55. Ймовірність того, що стандартний виріб буде визнаний стандартним першим товарознавцем, дорівнює – 0,95, а другим – 0,9. Знайти: а) ймовірність того, що стандартний виріб під час перевірки буде визнано стандартним; б) ймовірність того, що виріб перевірявся другим товарознавцем, яким він був визнаний стандартним.

1.4 Ймовірність появи події у кожному з 10000 незалежних випробувань дорівнює 0,75. Знайти ймовірність того, що подія з'явиться не менш 9600 разів.

1.5 Випадкова величина X задана законом розподілу:

X	*1*	*3*	*5*	*7*	*8*
P	*0,2*	*0,3*	*0,2*	*?*	*0,2*

Знайти:

а) математичне сподівання;

б) дисперсію;

в) середнє квадратичне відхилення;

г) інтегральну функцію розподілу.

Побудувати графік інтегральної функції розподілу.

1.6 Знайти закон розподілу випадкової дискретної величини X, яка може приймати тільки два значення: x_1 з ймовірністю $p_1 = 0{,}9$ та x_2, причому $x_1 < x_2$. Математичне сподівання $M(X) = 3{,}1$ та дисперсія $D(X) = 0{,}09$.

1.7 Випадкова величина X задана інтегральною функцією $F(x)$. Знайти:

а) щільність розподілу ймовірностей;

б) математичне сподівання та дисперсію випадкової величини X.

Побудувати графіки інтегральної та диференціальної функцій.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0; \\ x^2, & 0 < x \le 1; \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$

1.8 Випадкові помилки вимірювань діаметрів сталевих кілець при масовому виготовленні підпорядковані нормальному закону з середнім квадратичним відхиленням $\sigma = 1 мм$. Припускаючи, що вимірювання відбувається без систематичної помилки, визначити ймовірність того, що вимірювання діаметру кільця відбудеться з випадковою помилкою, яка за абсолютною величиною не більше 1,5 мм. Знайти диференціальну функцію розподілу заданої випадкової величини.

Варіант 2

2.1 На складі зберігаються 20 телевізорів, причому 6 з них виготовлені фірмою «SONY». Знайти ймовірність того, що серед п'яти навмання взятих телевізорів виявиться 4 телевізори фірми «SONY».

2.2 На картках написано букви А, А, А, Р, Р, Т. Картки було перемішано та розкладено в ряд. Знайти ймовірність того, що вийде слово АРАРАТ.

2.3 В обчислювальній лабораторії є 7 клавішних автоматів та 3 напівавтомати. Ймовірність того, що при виконанні деяких обчислень автомат не зламається, дорівнює 0,95; для напівавтомату ця ймовірність становить 0,9. Навмання обравши пристрій, студент здійснює обчислення. Знайти ймовірність того, що обчислювальний пристрій не зламається до закінчення роботи. Знайти ймовірність того, що обчислення виконувались на автоматі, якщо відомо, що обчислювальний пристрій не зламався під час виконання роботи.

2.4 Пристрій складається із 2000 елементів, які працюють незалежно один від одного. Ймовірність відмови для кожного елемента становить 0,002. Знайти ймовірність того, що відмовить більшість елементів.

2.5 Випадкова величина X задана законом розподілу:

X	0	1	2	3	4
P	$?$	$0{,}2$	$0{,}5$	$0{,}1$	$0{,}2$

Знайти:
а) математичне сподівання;
б) дисперсію;
в) середнє квадратичне відхилення;
г) інтегральну функцію розподілу.
Побудувати графік інтегральної функції розподілу.

2.6 Знайти закон розподілу випадкової дискретної величини X, яка може приймати тільки два значення: x_1 з ймовірністю $p_1 = 0{,}7$ та x_2, причому $x_1 < x_2$. Математичне сподівання $M(X) = 3{,}3$ та дисперсія $D(X) = 0{,}21$.

2.7 Випадкова величина X задана інтегральною функцією $F(x)$. Знайти:
а) щільність розподілу ймовірностей;
б) математичне сподівання та дисперсію випадкової величини X.
Побудувати графік інтегральної та диференціальної функції.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 1; \\ \dfrac{x^2 - x}{2}, & 1 < x \le 2; \\ 1, & x > 2. \end{cases}$$

2.8 Випадкова величина X розподілена за нормальним законом із щільністю $f(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-3)^2}{3}}$. Визначити: а) ймовірність потрапляння її значень у проміжок $(1;7)$; б) проміжок, в якому з практичною достовірністю опиняться всі значення випадкової величини.

Варіант 3

3.1 Набираючи номер телефону, абонент забув останні дві цифри і вважаючи, що ці цифри різні та непарні, набрав їх навмання. Знайти ймовірність того, що набрано потрібні цифри.

3.2 Ймовірність того, що потрібна винахіднику деталь знаходиться у першому, другому або третьому ящику дорівнює 0,4, 0,7 та 0,9 відповідно. Знайти ймовірність того, що потрібна винахіднику деталь міститься не менш, чим у двох ящиках.

3.3 У директора компанії є два списки з прізвищами претендентів на вільні вакансії. У першому списку – прізвища 6 жінок та 3 чоловіків. У другому – прізвища 4 жінок і 7 чоловіків. Випадково прізвище одного з претендентів із першого списку переноситься в другий, після чого із другого списку навмання обирається одне із прізвищ. Яка ймовірність того, що був обраний чоловік? Знайти ймовірність того, що у другий список було перенесене прізвище жінки, якщо із другого списку був обраний чоловік.

3.4 Ймовірність того, що окремий виріб деякого заводу стандартний, дорівнює 0,98. Визначити ймовірність того, що з партії, яка складається з 10000 виробів цього заводу, бракованих виявиться не більше 230.

3.5 Випадкова величина X задана законом розподілу:

X	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*
P	*0,3*	*0,1*	*0,2*	*0,1*	*?*

Знайти:

а) математичне сподівання;

б) дисперсію;

в) середнє квадратичне відхилення;

г) інтегральну функцію розподілу.

Побудувати графік інтегральної функції розподілу.

3.6 Знайти закон розподілу випадкової дискретної величини X, яка може приймати тільки два значення: x_1 з ймовірністю $p_1 = 0{,}1$ та x_2, причому $x_1 < x_2$. Математичне сподівання $M(X) = 5{,}8$ та дисперсія $D(X) = 0{,}36$.

3.7 Випадкова величина X задана інтегральною функцією $F(x)$. Знайти:

а) щільність розподілу ймовірностей;

б) математичне сподівання та дисперсію випадкової величини X.

Побудувати графіки інтегральної та диференціальної функцій.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0; \\ x^3, & 0 < x \le 1; \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$

3.8 Під час дослідної стрільби було виявлено, що відхилення X точки влучення від цілі підпорядковано нормальному закону розподілу з $M(X) = 0$ і $D(X) = 4$. Вказати ймовірність того, що $|X| \le 1$.

Варіант 4

4.1 Із 5 карток з буквами А, Б, В, Г, Д послідовно обираються 3 та розкладаються в ряд. Знайти ймовірність того, що дістали слово «ДВА».

4.2 В ящику 12 деталей, серед яких 8 пофарбованих. Винахідник навмання бере 4 деталі. Знайти ймовірність того, що серед них виявиться не менше трьох пофарбованих.

4.3 У першій урні міститься 3 білих та 7 чорних кулі, у другій – 6 білих та 4 чорних. Із кожної урни взяли по одній кулі, а потім з цих двох куль навмання обрали одну. Знайти ймовірність того, що ця куля біла. Знайти ймовірність того, що із першої урни було взято білу кулю, якщо куля, навмання обрана з двох куль, виявилась білою.

4.4 Посівний фонд містить 92% насіння 1-го ґатунку. Навмання взято 150 зерен. Знайти ймовірність того, що серед них 140 зерен 1-го ґатунку.

4.5 Випадкова величина X задана законом розподілу:

X	1	3	5	7	8
P	$0{,}3$	$?$	$0{,}1$	$0{,}2$	$0{,}1$

Знайти:

а) математичне сподівання;

б) дисперсію;

в) середнє квадратичне відхилення;

г) інтегральну функцію розподілу.

Побудувати графік інтегральної функції розподілу.

4.6 Знайти закон розподілу випадкової дискретної величини X, яка може приймати тільки два значення: x_1 з ймовірністю $p_1 = 0{,}2$ та x_2, причому $x_1 < x_2$. Математичне сподівання $M(X) = 2{,}6$ та дисперсія $D(X) = 0{,}64$.

4.7 Випадкова величина X задана інтегральною функцією $F(x)$. Знайти:

а) щільність розподілу ймовірностей;

б) математичне сподівання та дисперсію випадкової величини X.

Побудувати графік інтегральної та диференціальної функцій.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0; \\ 3x^2 + 2x, & 0 < x \le \dfrac{1}{3}; \\ 1, & x > \dfrac{1}{3}. \end{cases}$$

4.8 Припускається, що діаметр валиків, які виготовляються на автоматичному верстаті, є випадковою величиною з нормальним розподілом, параметри якого $M(X) = 3{,}4\,мм$, $D(X) = 0{,}0001\,мм^2$. В яких межах, згідно з «правилом трьох сигм», можна практично забезпечити діаметр валика?

Варіант 5

5.1 На картках написані літери А, Б, Н, Р, У. Картки перемішуються та розкладаються у рядок. Знайти ймовірність того, що вийде слово «БУРАН».

5.2 Для деякої місцевості середнє число похмурих днів у червні дорівнює шести. Знайти ймовірність того, що 1, 2 та 3 червня буде сонячна погода.

5.3 В ящику міститься 20 деталей першого заводу, 50 – другого та 30 – третього. Ймовірність того, що деталь першого заводу відмінної якості дорівнює 0,9, для деталей другого та третього заводів – відповідно 0,6 та 0,8. Знайти ймовірність того, що навмання взята з ящика деталь виявиться відмінної якості. Знайти ймовірність того, що взята навмання деталь відмінної якості виготовлена на другому заводі.

5.4 Гральну кістку кидають 180 разів. Знайти ймовірність того, що одиниця з'явиться не менше 125 і не більше 160 разів.

5.5 Випадкова величина X задана законом розподілу:

X	*2*	*4*	*5*	*6*	*7*
P	*0,3*	*0,2*	*0,1*	*0,1*	*?*

Знайти:

а) математичне сподівання;

б) дисперсію;

в) середнє квадратичне відхилення;

г) інтегральну функцію розподілу.

Побудувати графік інтегральної функції розподілу.

5.6 Знайти закон розподілу випадкової дискретної величини X, яка може приймати тільки два значення: x_1 з ймовірністю $p_1 = 0{,}1$ та x_2, причому $x_1 < x_2$. Математичне сподівання $M(X) = 1{,}9$ та дисперсія $D(X) = 0{,}09$.

5.7 Випадкова величина X задана інтегральною функцією $F(x)$. Знайти:

а) щільність розподілу ймовірностей;

б) математичне сподівання та дисперсію випадкової величини X.

Побудувати графік інтегральної та диференціальної функцій.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 2; \\ \dfrac{x}{2} - 1, & 2 < x \le 4; \\ 1, & x > 4. \end{cases}$$

5.8 У цеху виготовлюються деталі, в яких розмір діаметра є нормально розподіленою випадковою величиною з $M(X) = 5 см$, а

$D(X) = 0{,}81 см^2$. Знайти межі, в яких слід очікувати розмір діаметра деталі, щоб ймовірність невиходу за ці межі була рівною 0,95.

Варіант 6

6.1 Під час перевірки дисків 120 колес на неспівісність отворів для кріпильних болтів виявилось 15 бракованих. Визначити частоту бракованих виробів для цієї партії.

6.2 У читальному залі є 20 підручників з теорії ймовірностей, серед яких п'ять у палітурці. Бібліотекар навмання обрав 3 підручники. Знайти ймовірність того, що хоча б два підручники виявляться у палітурці.

6.3 70% деталей, що надійшли для складання, виготовлено автоматом, який дає 2% браку, 30% – автоматом, який дає 5% браку. Знайти ймовірність того, що навмання взята деталь виявилась бракованою. Знайти ймовірність того, що взята бракована деталь виготовлена першим автоматом.

6.4 Радіотелеграфна станція передає цифровий текст. У зв'язку з наявністю перешкод, кожна цифра незалежно від інших може бути неправильно прийнята з ймовірністю 0,01. Знайти ймовірність того, що в тексті з 1100 цифр буде менше 20 помилок.

6.5 Випадкова величина X задана законом розподілу:

X	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*
P	*?*	*0,2*	*0,3*	*0,1*	*0,2*

Знайти:

а) математичне сподівання;

б) дисперсію;

в) середнє квадратичне відхилення;

г) інтегральну функцію розподілу.

Побудувати графік інтегральної функції розподілу.

6.6 Знайти закон розподілу випадкової дискретної величини X, яка може приймати тільки два значення: x_1 з ймовірністю $p_1 = 0{,}9$ та x_2, причому $x_1 < x_2$. Математичне сподівання $M(X) = 4{,}1$ та дисперсія $D(X) = 0{,}09$.

6.7 Випадкова величина X задана інтегральною функцією $F(x)$. Знайти:

а) щільність розподілу ймовірностей;

б) математичне сподівання та дисперсію випадкової величини X.

Побудувати графік інтегральної та диференціальної т функцій.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0; \\ \dfrac{x^2}{9}, & 0 < x \le 3; \\ 1, & x > 3. \end{cases}$$

6.8 Із гармати здійснюються постріли вздовж вісі Ox. Припускається, що далекість польоту снаряда розподілена нормально з математичним сподіванням 50 м. Знайти кількість відсотків снарядів, що: а) здійснять переліт від 40 до 60 м; б) пролетять відстань менше середньої далекості.

Варіант 7

7.1 Для доступу у комп'ютерну мережу оператору необхідно набрати пароль з 4 цифр. Оператор забув або не знає необхідного коду. З якою ймовірністю можливо відчинити замок з першої спроби, якщо: а) цифри у коді не повторюються; б) повторюються?

7.2 Пристрій містить три незалежно працюючих елементи. Ймовірності відмови елементів відповідно дорівнюють 0,04, 0,05 та 0,06. Знайти ймовірність відмови пристрою, якщо для цього достатньо, щоб відмовив хоча б один елемент.

7.3 При переливанні крові треба врахувати групу крові донора і хворого. Людині, яка має четверту групу крові, можна перелити кров будь-якої групи; людині з другою або третьою групами крові можна перелити кров тієї ж групи, або першої; людині з першою групою можна перелити тільки кров першої групи. Серед населення 33,7% мають першу, 37,5% – другу, 20,9% – третю і 7,9% – четверту групу крові. Знайти ймовірність того, що переливання можна здійснити, якщо є один донор.

7.4 Ймовірність народження хлопчика дорівнює 0,512. Знайти ймовірність того, що різниця між кількістю хлопчиків та дівчат із 100 народжених не перебільшить 10.

7.5 Випадкова величина X задана законом розподілу:

X	*-1*	*0*	*1*	*2*	*3*
P	*?*	*0,2*	*0,2*	*0,3*	*0,1*

Знайти:

а) математичне сподівання;

б) дисперсію;

в) середнє квадратичне відхилення;

г) інтегральну функцію розподілу.

Побудувати графік інтегральної функції розподілу.

7.6 Знайти закон розподілу випадкової дискретної величини X, яка може приймати тільки два значення: x_1 з ймовірністю $p_1 = 0{,}3$ та x_2, причому $x_1 < x_2$. Математичне сподівання $M(X) = 3{,}1$ та дисперсія $D(X) = 1{,}89$.

7.7 Випадкова величина X задана інтегральною функцією $F(x)$. Знайти:

а) щільність розподілу ймовірностей;

б) математичне сподівання та дисперсію випадкової величини X.

Побудувати графік інтегральної та диференціальної функцій.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0; \\ \dfrac{x^2}{4}, & 0 < x \le 2; \\ 1, & x > 2. \end{cases}$$

7.8 Помилка вимірювання відстані між двома населеними пунктами підпорядкована нормальному закону з математичним сподіванням 16 км та середнім квадратичним відхиленням 100 м. Знайти ймовірність того, що помилка вимірювання відстані між цими пунктами не менш 15,7 км.

Варіант 8

8.1 На 9 вакантних місць із визначеної спеціальності претендують 15 безробітних – 10 чоловіків та 5 жінок, які перебувають на обліку в центрі зайнятості. Претендентів обирають навмання. Знайти ймовірність того, що роботу отримають 4 жінки.

8.2 Перевірка партії рису, розфасованого по 0,5 кг, дала такі результати: 20% усіх пачок були по 498г, 60% – по 500г, 20% – по 502г. Із партії навмання взято дві пачки. Знайти ймовірність того, що: 1) обидві пачки мають однакову масу; 2) загальна маса пачок відхиляється від норми на 4г.

8.3 Агент з нерухомості намагається продати земельну ділянку під забудову. Він вважає, що ділянка буде продана протягом найближчих 6 місяців з ймовірністю 0,9, якщо економічна ситуація в регіоні не буде погіршуватись. За інших умов ймовірність продати ділянку дорівнює 0,5. Економіст, який консультує агента, вважає, що з ймовірністю 0,7, економічна ситуація в регіоні протягом наступних 6 місяців буде погіршуватися. Чому дорівнює ймовірність того, що ділянка буде продана протягом наступних 6 місяців?

8.4 Ймовірність того, що цінна культура, яка цікавить селекціонерів не проросте у даних умовах, дорівнює 0,2. Знайти ймовірність того, що із 2500 посаджених зерен проросте не менш 2330.

8.5 Випадкова величина X задана законом розподілу:

X	-2	-1	0	1	2
P	0,1	0,4	?	0,1	0,3

Знайти:

а) математичне сподівання;

б) дисперсію;

в) середнє квадратичне відхилення;

г) інтегральну функцію розподілу.

Побудувати графік інтегральної функції розподілу.

8.6 Знайти закон розподілу випадкової дискретної величини X, яка може приймати тільки два значення: x_1 з ймовірністю $p_1 = 0{,}5$ та x_2, причому $x_1 < x_2$. Математичне сподівання $M(X) = 3$ та дисперсія $D(X) = 1$.

8.7 Випадкова величина X задана інтегральною функцією $F(x)$. Знайти:

а) щільність розподілу ймовірностей;

б) математичне сподівання та дисперсію випадкової величини X;

Побудувати графік інтегральної та диференціальної функцій.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le -\frac{\pi}{2}; \\ Cos\ x, & -\frac{\pi}{2} < x \le 0; \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

8.8 Вимірювальний прилад має систематичну помилку 5 мм (a) і $\sigma = 25мм$. Яка ймовірність того, що помилка вимірювання не перебільшить за абсолютною величиною 50 мм, якщо помилка вимірювання підпорядкована нормальному закону?

Варіант 9

9.1 Серед 20 дорожніх мостів, обраних для обстеження на деформацію прогину прогонових споруд, 5 містять деформації, які перевищують припустимі норми. Визначити ймовірність того, що 3 навмання обраних для випробувань моста містять прогини прогонових споруд, які перевищують припустимі норми.

9.2 Ймовірність того, що стрілець виб'є 10 очків одним пострілом, дорівнює 0,1. Ймовірність вибити 9 очків дорівнює 0,3; ймовірність вибити 8 та менше очків дорівнює 0,6. Знайти ймовірність того, що одним пострілом стрілець виб'є не менше 9 очків.

9.3 Кожний виготовлений заводом виріб може мати дефект з ймовірністю *p*. У цеху є три контролери, кожний з яких виявляє дефект з ймовірністю $P_i(i = 1,2,3)$. Ймовірності потрапляння деталі на перевірку до кожного контролера однакові. Виріб, який не буде забраковано в цеху, перевіряє ВТК заводу, де дефект виявляється з ймовірністю p_0. Визначити ймовірність того, що: 1) виріб буде забраковано в цеху; 2) вибір буде забраковано в ВТК заводу.

9.4 Обстежується 500 проб руди. Ймовірність промислового вмісту металу в кожній пробі дорівнює 0,7. Знайти ймовірність того, що кількість проб із промисловим вмістом металу буде в межах від 300 до 370.

9.5 Випадкова величина X задана законом розподілу:

X	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*
P	*?*	*0,2*	*0,3*	*0,1*	*0,2*

Знайти:

а) математичне сподівання;

б) дисперсію;

в) середнє квадратичне відхилення;

г) інтегральну функцію розподілу.

Побудувати графік інтегральної функції розподілу.

9.6 Знайти закон розподілу випадкової дискретної величини X, яка може приймати тільки два значення: x_1 з ймовірністю $p_1 = 0{,}4$ та x_2, причому $x_1 < x_2$. Математичне сподівання $M(X) = 2{,}6$ та дисперсія $D(X) = 0{,}24$.

9.7 Випадкова величина X задана інтегральною функцією $F(x)$. Знайти:

а) щільність розподілу ймовірностей;

б) математичне сподівання та дисперсію випадкової величини X.

Побудувати графік інтегральної та диференціальної функцій.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0; \\ 2Sin\ x, & 0 < x \le \dfrac{\pi}{6}; \\ 1, & x > \dfrac{\pi}{6}. \end{cases}$$

9.8 Випадкова величина X розподілена нормально з математичним сподіванням 30. Ймовірність потрапляння X в інтервал $(10;20)$ дорівнює 0,44. Чому дорівнює ймовірність потрапляння X в інтервал $(40;50)$?

Варіант 10

10.1 Поломка автомобіля відбулась на ділянці шосе між 50 та 90 км. Визначити ймовірність того, що ця помилка відбулась між 60 та 62 км.

10.2 У типографії 4 копіювальні машини. Ймовірність того, що в даний момент працює будь-яка з машин, дорівнює 0,9. Знайти ймовірність того, що в даний момент працює хоча б одна з машин.

10.3 У корпорації обговорюється маркетинг нового продукту, який надходить на ринок. Спираючись на попередні оцінки експертів, визначається ймовірність того, що новий товар буде більш вищої якості в порівнянні з аналогами в 0,5, такої ж якості – в 0,3, гіршої якості – в 0,2. Опитування ринку вказує на те, що новий товар конкурентоспроможний. Із попереднього досвіду проведення опитувань випливає, що якщо товар дійсно конкурентноспроможний, то прогноз такого ж висновку має ймовірність, яка дорівнює 0,7. Якщо товар такий як і аналог, то ймовірність того, що опитування вкаже на його перевагу, дорівнює 0,4. І якщо товар більш низької якості, то ймовірність того, що опитування вкаже на його конкурентоспроможність, дорівнює 0,2. З врахуванням результату опитування потрібно оцінити ймовірність того, що товар дійсно більш високої якості і тому, більш конкурентоспроможний у порівнянні з аналогами.

10.4 Частка довгих волокон у партії бавовни становить у середньому 0,6 загальної кількості волокон. Скільки потрібно взяти волокон, щоб найімовірніше число довгих волокон серед них дорівнювало 40?

10.5 Випадкова величина X задана законом розподілу:

X	0	2	3	4	5
P	$0,3$	$0,1$	$0,3$	$?$	$0,2$

Знайти:

а) математичне сподівання;

б) дисперсію;

в) середнє квадратичне відхилення;

г) інтегральну функцію розподілу.

Побудувати графік інтегральної функції розподілу.

10.6 Знайти закон розподілу випадкової дискретної величини X, яка може приймати тільки два значення: x_1 з ймовірністю $p_1 = 0{,}9$ та x_2, причому $x_1 < x_2$. Математичне сподівання $M(X) = 4{,}1$ та дисперсія $D(X) = 0{,}09$.

10.7 Випадкова величина X задана інтегральною функцією $F(x)$. Знайти:

а) щільність розподілу ймовірностей;

б) математичне сподівання та дисперсію випадкової величини X.

Побудувати графік інтегральної та диференціальної функцій.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le \frac{3\pi}{4}; \\ Cos\ 2x, & \frac{3\pi}{4} < x \le \pi; \\ 1, & x > \pi. \end{cases}$$

10.8 Відбувається вимірювання довжини стриженя без систематичних (одного знаку) помилок. Випадкові помилки вимірювання підпорядковані нормальному закону з середнім квадратичним відхиленням 60 мм. Знайти ймовірність того, що вимірювання буде здійснено з помилкою, яка за абсолютною величиною не перевищує 80 мм.

Варіант 11

11.1 У коробці міститься 6 однакових пронумерованих кубиків. Навмання один за одним виймають всі кубики. Знайти ймовірність того, що номери витягнутих кубиків з'являться в порядку зростання чи убування.

11.2 Під час виготовлення диска колеса контролюється неспіввісність отворів для кріпильних болтів, неспіввісність центрального отвору і зовнішнього диска кромок спиць та неплощинність. За допомогою статистичного аналізу встановлено, що ймовірність браку за цих умов відповідно дорівнює 0,2; 0,3; 0,1. Всі види браку з'являються незалежно один від одного. Яка ймовірність того, що навмання обраний з конвеєру диск виявиться бракованим?

11.3 В урну, яка містить 5 куль, поклали білу кулю. Яка ймовірність того, що із урни буде вийнята біла куля, якщо всі припущення про початковий склад куль за кольором рівноможливі? Яка ймовірність того, що в урні містилось дві білих кулі, якщо з неї була вийнята біла куля?

11.4 Ймовірність влучення в мішень при одному пострілі дорівнює 0,12. Знайти ймовірність того, що при 150 пострілах кількість влучень буде від 15 до 20.

11.5 Випадкова величина X задана законом розподілу:

X	*-5*	*-3*	*0*	*3*	*4*
P	*0,1*	*0,1*	*0,6*	*?*	*0,1*

Знайти:

а) математичне сподівання;

б) дисперсію;

в) середнє квадратичне відхилення;

г) інтегральну функцію розподілу.

Побудувати графік інтегральної функції розподілу.

11.6 Знайти закон розподілу випадкової дискретної величини X, яка може приймати тільки два значення: x_1 з ймовірністю $p_1 = 0{,}9$ та x_2, причому $x_1 < x_2$. Математичне сподівання $M(X) = 4{,}1$ та дисперсія $D(X) = 0{,}09$.

11.7 Випадкова величина X задана функцією щільності розподілу:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{c}{\sqrt{4 - x^2}}, & при \quad x \in (-2;\ 2); \\ 0\ , & при \quad x \notin (-2;\ 2). \end{cases}$$

Знайти:

а) коефіцієнт C;

б) функцію розподілу $F(x)$;

в) математичне сподівання $M(X)$;

г) дисперсію $D(X)$;

д) середнє квадратичне відхилення $\sigma(X)$;

е) ймовірність потрапляння значень випадкової величини X до інтервалу $(0;1)$.

11.8 Процент вмісту води у вугіллі є нормально розподіленою випадковою величиною з математичним сподіванням, рівним 16% та середнім квадратичним відхиленням, рівним 4%. Знайти ймовірність того, що у навмання взятій пробі вугілля виявиться від 12% до 24% води.

Варіант 12

12.1 Задумано двозначне число, цифри якого різні. Знайти ймовірність того, що випадково назване двозначне число дорівнює задуманому.

12.2 Торговий агент пропонує клієнтам ілюстровану книгу. Із попереднього досвіду відомо, що в середньому 1 із 65 клієнтів, яким він пропонує книгу, купує її. Протягом деякого проміжку часу, він запропонував книгу 3 клієнтам. Чому дорівнює ймовірність того, що він продасть їм не більше двох книг?

12.3 На фабриці три верстата виготовляють відповідно 25, 35, 40% всіх виробів. Серед їх продукції брак складає відповідно 5, 4 та 2%. Випадковим чином відібрано один виріб. Яка ймовірність того, що він бракований? Знайти ймовірність того, що виріб виготовлено на третьому верстаті, якщо він опинився бракованим.

12.4 Ймовірність потрапляння в баскетбольну корзину для даного спортсмена дорівнює 0,4. Визначити ймовірність того, що із 100 зроблених ним кидків по корзині число влучень буде відхилятися від 40 не більше чим на 1.

12.5 Випадкова величина X задана законом розподілу:

X	5	6	7	8	9
P	0,2	0,1	0,3	0,2	?

Знайти:
а) математичне сподівання;
б) дисперсію;
в) середнє квадратичне відхилення;
г) інтегральну функцію розподілу.
Побудувати графік інтегральної функції розподілу.

12.6 Знайти закон розподілу випадкової дискретної величини X, яка може приймати тільки два значення: x_1 з ймовірністю $p_1 = 0{,}8$ та x_2, причому $x_1 < x_2$. Математичне сподівання $M(X) = 3{,}4$ та дисперсія $D(X) = 0{,}64$.

12.7 Випадкова величина X задана функцією щільності розподілу:

$$f(x) = \begin{cases} x - c\ , & при \quad x \in (1;\ 2); \\ 0\ , & при \quad x \notin (1;\ 2). \end{cases}$$

Знайти:
а) коефіцієнт C;
б) функцію розподілу $F(x)$;
в) математичне сподівання $M(X)$;
г) дисперсію $D(X)$;
д) середнє квадратичне відхилення $\sigma(X)$;
е) ймовірність потрапляння значень випадкової величини X до інтервалу $\left(0; \frac{2}{3}\right)$.

12.8 Вважається, що відхилення довжини деталей, що виготовляються, від стандарту є випадковою величиною розподіленою за нормальним законом. Якщо стандартна довжина дорівнює $a = 40 см$ і середнє квадратичне відхилення $\sigma = 0{,}4 см$, то яку точність довжини деталі можна забезпечити з ймовірністю 0,8?

Варіант 13

13.1 Прогноз метеорологів: дощ з ймовірністю 0,4; вітер з ймовірністю 0,7; дощ та вітер з ймовірністю рівною 0,2. Яка ймовірність того, що буде дощ або вітер?

13.2 Ймовірність того, що подія відбудеться хоча б один раз у трьох незалежних випробуваннях, дорівнює 0,936. Знайти ймовірність того, що подія відбудеться в одному випробуванні.

13.3 У двох ящиках міститься по 20 деталей, причому в першому ящику – 16, а в другому – 13 стандартних деталей. З першого ящика навмання взяли одну деталь та переклали в другий. Знайти ймовірність того, що взята після цього деталь із другого ящика виявиться стандартною.

13.4 Відомо, що особи, вік яких перевищує 70 років 75% – жінки. Знайти ймовірність того, що в групі з 750 людей цього віку рівно 480 – жінок.

13.5 Випадкова величина X задана законом розподілу:

X	3	4	5	6	7
P	0,3	0,2	0,1	0,3	?

Знайти:

а) математичне сподівання;

б) дисперсію;

в) середнє квадратичне відхилення;

г) інтегральну функцію розподілу.

Побудувати графік інтегральної функції розподілу.

13.6 Знайти закон розподілу випадкової дискретної величини X, яка може приймати тільки два значення: x_1 з ймовірністю $p_1 = 0{,}3$ та x_2, причому $x_1 < x_2$. Математичне сподівання $M(X) = 4{,}1$ та дисперсія $D(X) = 29{,}5$.

13.7 Випадкова величина X задана функцією щільності розподілу:

$$f(x) = \begin{cases} c(x-2), & при \quad x \in (2;\ 3); \\ 0, & при \quad x \notin (2;3). \end{cases}$$

Знайти:

а) коефіцієнт C;

б) функцію розподілу $F(x)$;

в) математичне сподівання $M(X)$;

г) дисперсію $D(X)$;

д) середнє квадратичне відхилення $\sigma(X)$;

е) ймовірність потрапляння значень випадкової величини X до інтервалу $\left(\frac{5}{2};4\right)$.

13.8 Тривалість горіння електричної лампи із деякої партії виявилась нормально розподіленою випадковою величиною з середнім значенням 1250 год. та $\sigma = 50 год$. Вказати ймовірність того, що тривалість горіння навмання взятої лампи буде складати $1250 \pm 90 год$.

Варіант 14

14.1 На автостоянці є 10 автомобілів, розташованих у випадковому порядку в ряд. Визначити ймовірність того, що 3 визначених автомобіля опиняться поряд.

14.2 Ймовірність виграшу в лотереї дорівнює 0,01. Дехто вирішив купувати по одному білету з кожного тиражу, доки не виграє. Знайти ймовірність того, що він буде брати участь у третьому тиражі.

14.3 У лівій кишені 10 монет по 50 коп. і 6 монет по 25 коп., а у правій 4 монети по 50 коп. та 1 монета у 25 коп. Із лівої кишені навмання переклали у праву одну монету. Після цього з правої кишені навмання взяли одну монету – вона виявилася в 50 коп. Знайти ймовірність того, що з лівої кишені була перекладена монета в 25 коп.

14.4 Для забезпечення роботи на деякому будівельному об'єкті автопідприємство має 5 автомобілів. Ймовірність виходу кожного автомобіля на лінію в першу зміну дорівнює 0,7. Знайти ймовірність нормальної роботи автопідприємства, якщо для цього в першу зміну потрібно мати на лінії не менш як 3 автомобілі.

14.5 Випадкова величина X задана законом розподілу:

X	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*
P	*0,1*	*0,3*	*?*	*0,1*	*0,2*

Знайти:

а) математичне сподівання;

б) дисперсію;

в) середнє квадратичне відхилення;

г) інтегральну функцію розподілу.

Побудувати графік інтегральної функції розподілу.

14.6 Знайти закон розподілу випадкової дискретної величини X, яка може приймати тільки два значення: x_1 з ймовірністю $p_1 = 0{,}5$ та x_2, причому $x_1 < x_2$. Математичне сподівання $M(X) = 4{,}5$ та дисперсія $D(X) = 22{,}5$.

14.7 Випадкова величина X задана функцією щільності розподілу:

$$f(x) = \begin{cases} c \cdot \cos x, & при \quad x \in (-\pi/2\,;\,\pi/2); \\ 0, & при \quad x \notin (-\pi/2\,;\,\pi/2). \end{cases}$$

Знайти:

а) коефіцієнт C;

б) функцію розподілу $F(x)$;

в) математичне сподівання $M(X)$;

г) дисперсію $D(X)$;

д) середнє квадратичне відхилення $\sigma(X)$;

е) ймовірність потрапляння значень випадкової величини X до інтервалу $\left(-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right)$.

14.8 Результати вимірювання відстані між двома населеними пунктами підпорядкована нормальному закону з математичним сподіванням 16 *км* та середнім квадратичним відхиленням 100 *м*. Знайти ймовірність того, що помилка вимірювання відстані між цими пунктами не більше 16, 25 *км*.

Варіант 15

15.1 На автостоянці 10 автомобілів, які стоять в ряд, у випадковій послідовності. Визначити ймовірність того, що 3 однакові автомобілі опиняться поставленими поруч.

15.2 Два стрільці, ймовірність попадання яких дорівнює 0,7 та 0,88, роблять по одному пострілу по мішені. Знайти ймовірність хоча б одного попадання у ціль.

15.3 В ящику міститься 20 деталей першого заводу, 50 – другого та 30 – третього. Ймовірність того, що деталь першого заводу відмінної якості дорівнює 0,9, для другого та третього заводів – відповідно 0,6 та 0,8. Знайти ймовірність того, що якість деталі, яку дістали, відмінна.

15.4 Відомо, що у Франції 19% населення – це люди старші за 60 років. Знайти ймовірність того, що у місті з 10 тис. мешканців, 8 тис. не старші 60 років.

15.5 Випадкова величина X задана законом розподілу:

X	*3*	*5*	*6*	*7*	*8*
P	*0,1*	*?*	*0,1*	*0,4*	*0,2*

Знайти:

а) математичне сподівання;

б) дисперсію;

в) середнє квадратичне відхилення;

г) інтегральну функцію розподілу.

Побудувати графік інтегральної функції розподілу.

15.6 Знайти закон розподілу випадкової дискретної величини X, яка може приймати тільки два значення: x_1 з ймовірністю $p_1 = 0{,}4$ та x_2, причому $x_1 < x_2$. Математичне сподівання $M(X) = 5{,}8$ та дисперсія $D(X) = 35{,}8$.

15.7 Випадкова величина X задана функцією щільності розподілу:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{c\cdot(1+x^2)}, & при \quad x\in(0;\,1);\\ 0\quad, & при \quad x\notin(0;1).\end{cases}$$

Знайти:

а) коефіцієнт C ;

б) функцію розподілу $F(x)$;

в) математичне сподівання $M(X)$;

г) дисперсію $D(X)$;

д) середнє квадратичне відхилення $\sigma(X)$;

е) ймовірність потрапляння значень випадкової величини X до інтервалу $(0;\sqrt{3})$.

15.8 Врожайність ярової пшениці на 1га деякого лану виявилась нормально розподіленою випадковою величиною з середнім значенням $16ц/га$ та дисперсією 2,25. Обчислити ймовірність того, що врожайність із навмання обраного га буде складати $16\pm 2ц/га$.

Варіант 16

16.1 У партії з 20 деталей, 15 стандартних. Навмання відібрані 6 деталей. Знайти ймовірність того, що серед них 4 стандартні.

16.2 Ймовірність появи події у кожному випробуванні дорівнює 0,4. Випробування відбуваються до появи події. Знайти ймовірність того, що знадобиться виконати чотири випробування.

16.3 Три стрільці відкрили вогонь по мішені, причому дві кулі її вразили. Знайти ймовірність того, що третій стрілець влучив у мішень, якщо ймовірність влучення першим, другим та третім стрільцем дорівнює відповідно 0,8, 0,9, 0,7.

16.4 Відомо, що 23% автомобілів, які виробляє деяка фірма, йдуть на експорт. Знайти ймовірність того, що з 25 тис. виготовлених автомобілів у країні залишиться не менше 20 тис.

16.5 Випадкова величина X задана законом розподілу:

X	*1*	*3*	*5*	*7*	*9*
P	*0,5*	*?*	*0,02*	*0,1*	*0,3*

Знайти:

а) математичне сподівання;

б) дисперсію;

в) середнє квадратичне відхилення;

г) інтегральну функцію розподілу.

Побудувати графік інтегральної функції розподілу.

16.6 Знайти закон розподілу випадкової дискретної величини X, яка може приймати тільки два значення: x_1 з ймовірністю $p_1 = 0{,}3$ та x_2, причому $x_1 < x_2$. Математичне сподівання $M(X) = 4{,}8$ та дисперсія $D(X) = 26{,}4$.

16.7 Випадкова величина X задана функцією щільності розподілу:

$$f(x) = \begin{cases} c \cdot \sin x & при \quad x \in (0;\ \pi); \\ 0 & при \quad x \notin (0; \pi). \end{cases}$$

Знайти:

а) коефіцієнт C;

б) функцію розподілу $F(x)$;

в) математичне сподівання $M(X)$;

г) дисперсію $D(X)$;

д) середнє квадратичне відхилення $\sigma(X)$;

е) ймовірність потрапляння значень випадкової величини X до інтервалу $\left(0; \frac{\pi}{4}\right)$.

16.8 Якої ширини повинно бути поле допуску, щоб з ймовірністю не більше 0,0027 зроблена деталь з контрольованим розміром виявилась поза полем допуску, якщо випадкове відхилення розміру від середини поля допуску підпорядковується нормальному розподілу з $a = 0$ та $\sigma = 5мм$?

Варіант 17

17.1 У книзі 500 сторінок. Чому дорівнює ймовірність того, що навмання відкрита сторінка матиме номер, кратний 7?

17.2 Ймовірність влучення в мішень з першої гармати дорівнює 0,6, з другої – 0,8, з третьої – 0,5. Мішень буде уражена, якщо трапиться хоча б два влучення. Кожна гармата зробила по одному пострілу. Знайти ймовірність того, що мішень буде уражено.

17.3 Серед студентів інституту 30% – першокурсники, 35% студентів навчаються на другому курсі, на третьому та четвертому курсах їх 20% та 15% відповідно. Показники деканатів свідчать, що на першому курсі 20% студентів склали сесію тільки на відміні оцінки, на другому – 30%, на третьому – 35%, на четвертому – 40% відмінників. Навмання викликаний до деканату студент виявився відмінником. Чому дорівнює ймовірність того, що це студент першого курсу?

17.4 30% населення деякого міста мешкає у власних будинках. Знайти ймовірність того, що з 1000 випадково відібраних мешканців не менш 500 проживають у державних квартирах.

17.5 Випадкова величина X задана законом розподілу:

X	2	6	10	14	18
P	?	0,2	0,3	0,2	0,1

Знайти:

а) математичне сподівання;

б) дисперсію;

в) середнє квадратичне відхилення;

г) інтегральну функцію розподілу.

Побудувати графік інтегральної функції розподілу.

17.6 Знайти закон розподілу випадкової дискретної величини X, яка може приймати тільки два значення: x_1 з ймовірністю $p_1 = 0{,}1$ та x_2, причому $x_1 < x_2$. Математичне сподівання $M(X) = 3{,}8$ та $M(X^2) = 14$.

17.7 Випадкова величина Х задана функцією щільності розподілу:

$$f(x) = \begin{cases} cx + 2, & при \quad x \in (0;\ 1/3); \\ 0, & при \quad x \notin (0;1/3). \end{cases}$$

Знайти:

а) коефіцієнт C;

б) функцію розподілу $F(x)$;

в) математичне сподівання $M(X)$;

г) дисперсію $D(X)$;

д) середнє квадратичне відхилення $\sigma(X)$;

е) ймовірність потрапляння значень випадкової величини X до інтервалу $\left(0; \frac{1}{6}\right)$.

17.8 Випадкова величина X розподілена нормально з щільністю ймовірності: $f(x) = \frac{1}{40\sqrt{2\pi}} e^{\frac{(x-30)^2}{3200}}$. Знайти ймовірність того, що випадкова величина не потрапить в інтервал від 10 до 100.

Варіант 18

18.1 На площині накреслені два концентричні кола, радіуси яких 5 та 10 см. відповідно. Знайти ймовірність того, що точка, кинута навмання у велике коло, потрапить у кільце, створене побудуванням окружностей.

18.2 Ймовірність влучення в мішень першим стрільцем дорівнює 0,6, а другим – 0,9. Знайти ймовірність того, що ціль буде уражена тільки одним пострілом.

18.3 На рис. 4.1 зображено схему доріг. Туристи вийшли з пункту О, обираючи навмання на розвилці доріг один із можливих шляхів. Яка ймовірність того, що вони потраплять до пункту А?

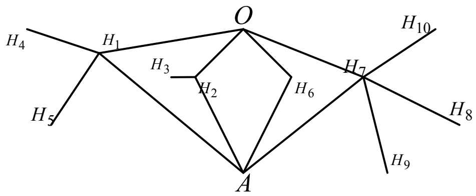

Рисунок 4.1

18.4 Для метеликів деякого виду ймовірність появи потомства з відкладання личинок – 0,005. Яка ймовірність того, що з 1000 відкладених личинок, з'явиться не менше 10 метеликів?

18.5 Випадкова величина X задана законом розподілу:

X	-2	0	2	4	6
P	0,1	0,5	?	0,1	0,2

Знайти:

а) математичне сподівання;

б) дисперсію;

в) середнє квадратичне відхилення;

г) інтегральну функцію розподілу.

Побудувати графік інтегральної функції розподілу.

18.6 Знайти закон розподілу випадкової дискретної величини X, яка може приймати тільки два значення: x_1 з ймовірністю $p_1 = 0,2$ та x_2, причому $x_1 < x_2$. Математичне сподівання $M(X) = 3,6$ та $M(X^2) = 13,6$.

18.7 Випадкова величина X задана функцією щільності розподілу:

$$f(x) = \begin{cases} cx, & при \quad x \in (0;\ 5); \\ 0, & при \quad x \notin (0; 5). \end{cases}$$

Знайти:

а) коефіцієнт C;

б) функцію розподілу $F(x)$;

в) математичне сподівання $M(X)$;

г) дисперсію $D(X)$;

д) середнє квадратичне відхилення $\sigma(X)$;

е) ймовірність потрапляння значень випадкової величини X до інтервалу $(3;4)$.

18.8 Діаметр деталі, ява виготовлена деяким цехом, є випадковою величиною, розподіленою за нормальним законом з дисперсією $0{,}0004 см^2$ та математичним сподіванням $3{,}7 см$. В яких межах можна практично гарантувати діаметр деталі?

Варіант 19

19.1 З 10 лотерейних білетів 4 виграшні. Знайти ймовірність того, що із навмання взятих 5 білетів 2 виграшні.

19.2 При передачі тексту 10% літер приймаються невірно. Яка ймовірність того, що всі п'ять літер даного слова будуть прийняті вірно?

19.3 Серед авіаліній деякого аеропорту 60% – місцеві, 30% – по СНД та 10% – міжнародні. Серед пасажирів місцевих авіаліній 50% мандрують у справах, пов'язаних з бізнесом. На лініях СНД таких пасажирів 60%, на міжнародних – 90%. З пасажирів, які прибули обирається один. Чому дорівнює ймовірність, що він прибув з країн СНД у справах?

19.4 Відомо, що з 1500 студентів 650 – іногородні. Знайти ймовірність того, що на другому курсі, серед 220 осіб, більше 150 студентів – іногородні.

19.5 Випадкова величина X задана законом розподілу:

X	*10*	*15*	*20*	*25*	*30*
P	*?*	*0,2*	*0,1*	*0,4*	*0,1*

Знайти:

а) математичне сподівання;

б) дисперсію;

в) середнє квадратичне відхилення;

г) інтегральну функцію розподілу;

д) побудувати графік інтегральної функції розподілу.

19.6 Знайти закон розподілу випадкової дискретної величини X, яка може приймати тільки два значення: x_1 з ймовірністю $p_1 = 0{,}3$ та x_2, причому $x_1 < x_2$. Математичне сподівання $M(X) = 2{,}4$ та $M(X^2) = 6{,}6$.

19.7 Випадкова величина X задана функцією щільності розподілу:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{cx}{81}, & при \quad x \in (0;\ 9); \\ 0\ , & при \quad x \notin (0; 9). \end{cases}$$

Знайти:

а) коефіцієнт C;

б) функцію розподілу $F(x)$;

в) математичне сподівання $M(X)$;

г) дисперсію $D(X)$;

д) середнє квадратичне відхилення $\sigma(X)$;

е) ймовірність потрапляння значень випадкової величини X до інтервалу $(8;\infty)$.

19.8 Під час обстеження роботи автоматичної лінії виявилось, що довжина деталі, яку вона випускає, є нормально розподіленою випадковою величиною з середнім значенням $30 см$ та $\sigma = 0{,}50 см$. Для стандартної деталі відхилення довжини від $30 см$ не повинно перевищувати $0{,}80 см$. Обчислити ймовірність того, що навмання взята деталь буде задовільняти вимогам стандарта.

Варіант 20

20.1 Для перевезення 50 виробів першого типу та 75 виробів другого типу використовувався залізничний состав. У дорозі пошкоджено два вироби. Знайти ймовірність того, що пошкоджені вироби різних типів.

20.2 Кожна літера слова «математика» написана на окремій картці. Картки ретельно перемішані. Послідовно дістають чотири картки. Яка ймовірність скласти слово «тема»?

20.3 Експедиція проводить дослідження для визначення ймовірності присутності нафти на місці ймовірного буріння свердловини. Спираючись на результати попередніх досліджень, вважають, що ймовірність наявності нафти на досліджуваному місці дорівнює 0,4. На останньому етапі дослідження робиться сейсмічний тест, який має деяку степінь надійності: якщо на досліджуваному місці нафта є, то тест вкаже на її наявність у 85% випадків; якщо нафти немає, то у 10% випадків тест може помилково вказати на її наявність. Сейсмічний тест вказав на наявність нафти. Чому дорівнює ймовірність того, що нафта на цьому місці дійсно присутня?

20.4 Для квітучого плодового дерева деякого виду, з 20% цвітінь з'являються плоди, а решта опадає з різних причин. На гілці 85 цвітінь. Знайти ймовірність того, що на ній з'явиться від 15 до 30 плодів.

20.5 Випадкова величина X задана законом розподілу:

X	*1*	*4*	*7*	*10*	*13*
P	*0,1*	*0,2*	*0,5*	*0,1*	*?*

Знайти:

а) математичне сподівання;

б) дисперсію;

в) середнє квадратичне відхилення;

г) інтегральну функцію розподілу.

Побудувати графік інтегральної функції розподілу.

20.6 Знайти закон розподілу випадкової дискретної величини X, яка може приймати тільки два значення: x_1 з ймовірністю $p_1 = 0{,}6$ та x_2, причому $x_1 < x_2$. Математичне сподівання $M(X) = 3{,}2$ та $M(X^2) = 12{,}4$.

20.7 Випадкова величина X задана функцією щільності розподілу:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0; \\ 3x^2 + c, & 0 < x \le 1; \\ 0, & x > 1. \end{cases}$$

Знайти:

а) коефіцієнт C;

б) функцію розподілу $F(x)$;

в) математичне сподівання $M(X)$;

г) дисперсію $D(X)$;

д) середнє квадратичне відхилення $\sigma(X)$;

е) ймовірність потрапляння значень випадкової величини X до інтервалу $\left(\frac{1}{2};2\right)$.

20.8 Розмір деталі задається полем допуска 10-12 *мм*. Виявилось, що середній розмір деталі дорівнює 11,4 *мм*, а середнє квадратичне відхилення – 0,7 *мм*. Вважаючи, що розмір деталі підпорядковується закону нормального розподілу, визначити ймовірність брака по завищеному та заниженому розміру.

Варіант 21

21.1 У групі з 25 студентів на іспиті отримали: 5 студентів – відмінно; 7 – добре; 8 – задовільно. Яка ймовірність того, що три студенти, навмання викликані до дошки, на іспиті отримали незадовільну оцінку?

21.2 В електричний ланцюг увімкнені паралельно два прилади, які не взаємодіють один з одним. Ймовірність виходу з ладу першого приладу дорівнює 0,1, а другого – 0,2. Знайти ймовірність того, що вузол не вийде з ладу.

21.3 Експортно-імпортуюча фірма збирається підписати контракт на постачання сільгосптехніки в одну з розвинутих країн. Якщо головний конкурент фірми не буде претендувати на підписання контракту, то ймовірність отримання контракту оцінюється в 0,45, у протилежному випадку – в 0,25. За оцінками експертів компанії ймовірність того, що конкурент висуне свої пропозиції, дорівнює 0,4. Чому дорівнює ймовірність підписання контракту?

21.4 Відомо, що ймовірність появи літери A у російському тексті дорівнює 0,064 (з урахуванням пробілів та знаків). Яка ймовірність того, що на сторінці, яка містить 44 рядки (в одному рядку 30 символів), літера A зустрічається менше 64 разів?

21.5 Випадкова величина X задана законом розподілу:

X	2	12	22	32	42
P	$0,1$	?	$0,4$	$0,3$	$0,1$

Знайти:

а) математичне сподівання;

б) дисперсію;

в) середнє квадратичне відхилення;

г) інтегральну функцію розподілу.

Побудувати графік інтегральної функції розподілу.

21.6 Знайти закон розподілу випадкової дискретної величини X, яка може приймати тільки два значення: x_1 з ймовірністю $p_1 = 0,2$ та x_2, причому $x_1 < x_2$. Математичне сподівання $M(X) = 5,2$ та $M(X^2) = 30,2$.

21.7 Випадкова величина X задана функцією щільності розподілу:

$$f(x) = \begin{cases} c, & x \in [0; 0.5]; \\ 2, & x \in [0.5; 1]; \\ 0, & x \notin [0; 1]. \end{cases}$$

Знайти:

а) коефіцієнт C;

б) функцію розподілу $F(x)$;

в) математичне сподівання $M(X)$;

г) дисперсію $D(X)$;

д) середнє квадратичне відхилення $\sigma(X)$;

е) ймовірність потрапляння значень випадкової величини X до інтервалу $\left(\frac{1}{2}; 1\right)$.

21.8 Припускається, що довжина болтів, які виготовлюються на автоматичному верстаті, є нормально розподіленою випадковою величиною з математичним сподіванням, рівним 5,6 *см*. Ймовірність того, що навмання взятий болт має розмір від 5,65 *см* до 5,67 *см*, дорівнює 0,2. Чому дорівнює ймовірність того, що розмір навмання взятого болта буде від 5, 53 до 5, 55 см?

Варіант 22

22.1 На полці у випадковій послідовності розставлені 40 книжок, серед яких знаходиться трьохтомник О.С. Пушкіна. Знайти ймовірність того, що ці томи стоять поряд, у послідовності зростання номерів зліва направо.

22.2 При ввімкненні запалювання, двигун починає працювати з ймовірністю 0,9. Знайти ймовірність того, що: 1) двигун починає працювати при другому запалюванні; 2) для введення двигуна у роботу прийдеться ввімкнути запалювання не більше двох разів.

22.3 В ящику 4 деталі. Всі припущення про кількість стандартних деталей серед них однаково ймовірні. Знайти ймовірність того, що навмання обрана деталь опинилась стандартною.

22.4 Приймальниця з першого пред’явлення прийняла 92% продукції. Яка ймовірність того, що в партії з 80 деталей забраковано 6 або 7 деталей?

22.5 Випадкова величина X задана законом розподілу:

X	*1,5*	*3,5*	*5,5*	*7,5*	*9,5*
P	*0,1*	*0,3*	*0,3*	*0,2*	*?*

Знайти:

а) математичне сподівання;

б) дисперсію;

в) середнє квадратичне відхилення;

г) інтегральну функцію розподілу.

Побудувати графік інтегральної функції розподілу.

22.6. Знайти закон розподілу випадкової дискретної величини X, яка може приймати тільки два значення: x_1 з ймовірністю $p_1 = 0{,}4$ та x_2, причому $x_1 < x_2$. Математичне сподівання $M(X) = 4$ та $M(X^2) = 22$.

22.7 Випадкова величина X задана функцією щільності розподілу:

$$f(x) = \begin{cases} cx^{-|x|}, & при \quad |x| \le 1; \\ 0, & при \quad |x| < 1. \end{cases}$$

Знайти:

а) коефіцієнт C;

б) функцію розподілу $F(x)$;

в) математичне сподівання $M(X)$;

г) дисперсію $D(X)$;

д) середнє квадратичне відхилення $\sigma(X)$;

е) ймовірність потрапляння значень випадкової величини X до інтервалу $(0;2)$.

22.8 Помилка вимірювання відстані між двома населеними пунктами підпорядкована нормальному закону з математичним сподіванням 16 *км* та середнім квадратичним відхиленням 100 *м*. Знайти ймовірність того, що помилка вимірювання відстані між цими пунктами не менше 15, 8 *км*.

Варіант 23

23.1 Підкинули три монети. Знайти ймовірності подій: A – на першій монеті випав герб; B – випало два герби; C – випало не більше двох гербів.

23.2 Є три ящики, які містять по 10 деталей. У першому ящику 8, у другому – 7 та у третьому – 10 стандартних деталей. Із кожного ящика навмання виймають по одній деталі. Знайти ймовірність того, що з трьох деталей хоча б одна нестандартна.

23.3 На хімічному заводі встановлена аварійна сигналізація. Коли виникає аварійне становище, звуковий сигнал спрацьовує з ймовірністю 0,95. Звуковий сигнал може спрацювати випадково без аварійного становища з ймовірністю 0,02. Реальна ймовірність аварійного становища дорівнює 0,004. Відомо, що спрацював звуковий сигнал. Чому дорівнює ймовірність реального аварійного становища?

23.4 Для вступу в деякий університет необхідно скласти вступні іспити. У середньому їх складають 25% абітурієнтів. У приймальну комісію надійшло 1889 заяв. Знайти ймовірність того, що 500 абітурієнтів вдало складуть іспити.

23.5 Випадкова величина X задана законом розподілу:

X	-25	-20	-15	-10	-5
P	0,2	0,2	0,3	?	0,1

Знайти:

а) математичне сподівання;

б) дисперсію;

в) середнє квадратичне відхилення;

г) інтегральну функцію розподілу.

Побудувати графік інтегральної функції розподілу.

23.6 У лотереї розігрується один мотоцикл вартістю 500 грн та годинник вартістю 40 грн. Знайти математичне сподівання та середнє квадратичне відхилення виграшу.

23.7 Випадкова величина X задана функцією щільності розподілу:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{c}{x^4}, & при \quad x \geq 2; \\ 0, & при \quad x < 2. \end{cases}$$

Знайти:

а) коефіцієнт C;

б) функцію розподілу $F(x)$;

в) математичне сподівання $M(X)$;

г) дисперсію $D(X)$;

д) середнє квадратичне відхилення $\sigma(X)$;

е) ймовірність потрапляння значень випадкової величини X до інтервалу $(0;4)$.

23.8 Результати вимірювання відстані між двома населеними пунктами підпорядковані нормальному закону з математичним сподіванням 16 *км* та середнім квадратичним відхиленням 100 *м*. Знайти ймовірність того, що помилка вимірювання відстані між цими пунктами не менше 15, 75 *км*, але не більше 16, 3 *км*.

Варіант 24

24.1 У записаному телефонному номері три останні цифри стерлись. Припускаючи, що всі комбінації трьох стертих цифр рівноймовірні, знайти ймовірність того, що: а) стерлись різні цифри, відмінні від 1, 3, 5; б) стерлись однакові цифри.

24.2 Визначити ймовірність того, що викликаний навмання студент є відмінником, якщо з групи – 25% невстигаючі студенти, а 25% встигаючих студентів – відмінники.

24.3 У будівельному загоні 70% першокурсників та 30% другокурсників. Серед першокурсників 10% дівчат, а серед студентів другого курсу – 5%. Всі дівчата по черзі чергують на кухні. Знайти ймовірність того, що у випадково обраний день на кухні чергують першокурсниці.

24.4 З урни, яка містить дві білих та дві чорних кулі, виймають 250 разів та повертають назад кулі. Знайти ймовірність того, що число появ білої кулі знаходиться між 48 та 54.

24.5 Випадкова величина X задана законом розподілу:

X	*12*	*15*	*18*	*21*	*24*
P	*?*	*0,2*	*0,2*	*0,1*	*0,1*

Знайти:

а) математичне сподівання;

б) дисперсію;

в) середнє квадратичне відхилення;

г) інтегральну функцію розподілу.

Побудувати графік інтегральної функції розподілу.

24.6 Два стрільці стріляють по мішені. Ймовірність влучення першим стрільцем дорівнює 0,5, а другим – 0,4. Скласти закон розподілу числа влучень, знайти математичне сподівання та дисперсію.

24.7 Випадкова величина X задана функцією щільності розподілу:

$$f(x)=\begin{cases} c\cdot e^{-7x}, & при \quad x\geq 0; \\ 0, & при \quad x<0. \end{cases}$$

Знайти:

а) коефіцієнт C;

б) функцію розподілу $F(x)$;

в) математичне сподівання $M(X)$;

г) дисперсію $D(X)$;

д) середнє квадратичне відхилення $\sigma(X)$;

е) ймовірність потрапляння значень випадкової величини X до інтервалу $(-\infty;7)$.

24.8 Випадкова величина X – зріст випадково обраного студента. Вона підпорядкована нормальному закону з $a=174 см$. Майже всі студенти мають зріст у проміжку від 156 до 192 см. Використовуючи правило трьох сігм, знайти середнє квадратичне відхилення σ. Визначити ймовірність того, що зріст навмання обраного студента більше ніж 180 см.

Варіант 25

25.1 В ящику знаходиться 30 однакових куль, пронумеровані від 1 до 30. Навмання дістають одну кулю. Яка ймовірність того, що номер кулі буде кратний 3 або 5?

25.2 Три стрільці зробили по одному пострілу. Ймовірність влучення у ціль першим стрільцем дорівнює 0,7; другим – 0,6; третім – 0,9. Знайти ймовірність того, що буде хоча б два промахи.

25.3 Друга зміна у цеху виробляє у два рази менше виробів ніж перша, а браку у неї у 1,5 рази більше. Деталі з обох змін склали разом. Взята звідти деталь опинилась бракована. Знайти ймовірність того, що вона зроблена другою зміною.

25.4 Підручник виданий тиражем 10000 примірників. Ймовірність того, що підручник зброшурований невірно, дорівнює 0,0001. Знайти ймовірність того, що тираж містить не більше 3 бракованих книг.

25.5 Випадкова величина X задана законом розподілу:

X	45	50	55	60	65
P	0,3	0,2	?	0,2	0,1

Знайти:

а) математичне сподівання;

б) дисперсію;

в) середнє квадратичне відхилення;

г) інтегральну функцію розподілу.

Побудувати графік інтегральної функції розподілу.

25.6 Три студенти складають іспит з теорії ймовірностей. Ймовірність вдалої здачі іспиту кожного з них відповідно дорівнює 0,9; 0,85; 0,8. Скласти закон розподілу дискретної величини X – числа студентів, які складуть іспит.

25.7 Випадкова величина X задана функцією щільності розподілу:

$$f(x) = \begin{cases} cx, & x \in [0;1); \\ 1, & x \in (1;3/2]; \\ 0, & x \notin [0;3/2]. \end{cases}$$

Знайти:

а) коефіцієнт C;

б) функцію розподілу $F(x)$;

в) математичне сподівання $M(X)$;

г) дисперсію $D(X)$;

д) середнє квадратичне відхилення $\sigma(X)$;

е) ймовірність потрапляння значень випадкової величини X до інтервалу $(\infty;1)$.

25.8 Автомат штампує деталі. Довжина деталі, яка контролюється, – Х, підпорядкована нормальному закону з *а*=50 *мм* (проектна довжина). Фактично довжина виготовлених деталей $32мм \le X \le 68мм$. Знайти ймовірність того, що довжина навмання взятої деталі: а) більше 5 *мм*; б) менше 40 *мм*.

Варіант 26

26.1 Мають дев'ять однакових карток з номерами 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Навмання беруть 4 картки та розкладають у ряд. Яка ймовірність того, що отримаємо число 8973?

26.2 Два з трьох незалежно працюючих прилади відмовили. Знайти ймовірність того, що відмовили перший та другий прилад, якщо ймовірність відмови першого, другого та третього приладу відповідно дорівнюють 0,2, 0,3, 0,4.

26.3 В ящику 11 деталей, із них тільки 7 стандартні. Навмання виймають три деталі та відкладають у бік. Потім з ящика виймають ще одну деталь. Яка ймовірність того, що вона стандартна?

26.4 Комутатор установи обслуговує 300 абонентів. Ймовірність того, що протягом однієї хвилини абонент подзвонить на комутатор, дорівнює 0,01. Знайти ймовірність того, що протягом однієї хвилини подзвонять більше 50 абонентів.

26.5 Випадкова величина X задана законом розподілу:

X	-1	4	9	14	19
P	?	0,2	0,4	0,1	0,1

Знайти:
а) математичне сподівання;
б) дисперсію;
в) середнє квадратичне відхилення;
г) інтегральну функцію розподілу.
Побудувати графік інтегральної функції розподілу.

26.6 Визначити постійну ймовірність влучення в мішень при кожному пострілі та число зроблених пострілів, якщо середнє число влучень дорівнює 72, а середнє квадратичне відхилення випадкової величини, яка характеризує число влучень, дорівнює 6.

26.7 Випадкова величина X задана функцією щільності розподілу:

$$f(x) = \begin{cases} c\sqrt{x}, & x \in (0;2); \\ 0, & x \notin (0;2). \end{cases}$$

Знайти:
а) коефіцієнт C;
б) функцію розподілу $F(x)$;
в) математичне сподівання $M(X)$;
г) дисперсію $D(X)$;
д) середнє квадратичне відхилення $\sigma(X)$;
е) ймовірність потрапляння значень випадкової величини X до інтервалу $(0;1)$.

26.8 Маса вагону – випадкова величина, розподілена за нормальним законом з $a = 65$ т та $\sigma = 0{,}9$ т. Знайти ймовірність того, що черговий вагон має масу не більше 70 т, але не менше 60 т.

Варіант 27

27.1 На п'яти картках написано по одній цифрі з набору 1, 2, 3, 4, 5. Навмання обирають, одну за одною дві картки. Яка ймовірність того, що число на другій картці більше ніж на першій?

27.2 В мішку знаходяться нитки, серед яких 30% білі, а решта – червоні. Визначити ймовірність того, що вийняті навмання три нитки одного кольору.

27.3 У спеціалізовану лікарню надходять в середньому 70% хворих з захворюванням K, решта – з захворюванням M. Ймовірність повного вилікування хвороби K дорівнює 0,8, хвороби M – 0,9. Хворий, що надійшов до лікарні був виписаний здоровим. Яка ймовірність, що він хворів хворобою K ?

27.4 Гральна кістка підкинута 200 разів. Знайти ймовірність того, що цифра 6 випала 30 разів.

27.5 Випадкова величина X задана законом розподілу:

X	*14*	*20*	*26*	*32*	*38*
P	*0,5*	*0,2*	*0,1*	*0,1*	*?*

Знайти:

а) математичне сподівання;

б) дисперсію;

в) середнє квадратичне відхилення;

г) інтегральну функцію розподілу.

Побудувати графік інтегральної функції розподілу.

27.6 Надати перелік можливих значень дискретної випадкової величини X: $x_1 = 1$; $x_2 = 2$; $x_3 = 3$, а також відомі $M(X) = 2{,}3$ та $M(X^2) = 5{,}9$. Знайти ймовірності, відповідні можливим значенням X.

27.7 Випадкова величина X задана функцією щільності розподілу:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & x \in [0;1]; \\ cx, & x \in (1; 3/2]; \\ 0, & x \notin [0; 3/2]. \end{cases}$$

Знайти:

а) коефіцієнт C;

б) функцію розподілу $F(x)$;

в) математичне сподівання $M(X)$;

г) дисперсію $D(X)$;

д) середнє квадратичне відхилення $\sigma(X)$;

е) ймовірність потрапляння значень випадкової величини X до інтервалу $(1;\infty)$.

27.8 При зважуванні на терезах припускаються випадкові помилки з дисперсією, рівною 100, та систематична помилка +20 *г*. Випадкові помилки мають нормальний закон розподілу з математичним сподіванням, рівним 0. Визначити ймовірність того, що помилка при зважуванні предмета за абсолютною величиною не перевищить 50 г.

Варіант 28

28.1 Визначити ймовірність того, що серія навмання обраної облігації не містить однакових цифр, якщо номер серії може бути будь-яким п'ятизначним числом, починаючи з 00001.

28.2 В урні 8 білих та 7 чорних куль. Вийняли дві кулі. Знайти ймовірність того, що вони різного кольору.

28.3 Радіолампа, яка встановлена в телевізор, може належати одній з трьох партій з ймовірностями 0,25, 0,25 та 0,5 відповідно. Ймовірності того, що лампа буде працювати задану кількість годин, для цих партій відповідно дорівнюють: 0,1, 0,2 та 0,4. Визначити ймовірність того, що встановлена в телевізор лампа буде працювати задану кількість годин.

28.4 Менеджер ресторану з досвіду знає, що 70% людей, зробивших замовлення на вечір, прийдуть у ресторан повечеряти. Одного вечора менеджер вирішив прийняти 20 замовлень, хоча у ресторані було лише 15 вільних столиків. Чому дорівнює ймовірність, що рівно 15 відвідувачів прийдуть на замовлені місця?

28.5 Випадкова величина X задана законом розподілу:

X	*4*	*7*	*10*	*13*	*16*
P	*?*	*0,2*	*0,1*	*0,3*	*0,2*

Знайти:

а) математичне сподівання;

б) дисперсію;

в) середнє квадратичне відхилення;

г) інтегральну функцію розподілу.

Побудувати графік інтегральної функції розподілу.

28.6 У деякому цеху брак становить 5% всіх виробів. Скласти закон розподілу числа бракованих виробів серед навмання взятих 6 виробів. Знайти математичне сподівання та дисперсію цієї випадкової величини.

28.7 Випадкова величина X задана функцією щільності розподілу:

$$f(x) = \begin{cases} xe^{-cx^2}, & x \geq 0; \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Знайти:

а) коефіцієнт C;

б) функцію розподілу $F(x)$;

в) математичне сподівання $M(X)$;

г) дисперсію $D(X)$;

д) середнє квадратичне відхилення $\sigma(X)$;

е) ймовірність потрапляння значень випадкової величини X до інтервалу $(0;2)$.

28.8 Деталі, які виговляються цехом, за розміром діаметрів підпорядковані нормальному розподілу з a=5 *см*, $D(X)=0{,}81 см^2$. Знайти ймовірність того, що діаметр навмання взятої деталі: а) від 4 до 7 *см*; б) відрізняється від математичного сподівання не більше чим на 2 *см*.

Варіант 29

29.1 Відомо, що при виготовленні деякої деталі виходить 4% браку. З 500 виготовлених деталей перші 10 відібраних опинились не бракованими. Знайти ймовірність того, що наступна деталь опиниться бракованою.

29.2 Велика торгівельна компанія займається оптовим продажем матеріалів для будівництва та ремонту житла, та, маючи список покупців у трьох регіонах, розсилає їм поштою каталог товарів. Менеджер компанії розраховує, що ймовірність того, що компанія не отримає відгуків на розіслані пропозиції для кожного регіона, дорівнює 0,25. Чому в цьому випадку дорівнює ймовірність того, що компанія отримає відповідь хоча б з одного регіону?

29.3 В ящику знаходяться 15 тенісних м’ячів, серед яких 9 – нові. Для першої гри навмання беруть три м’ячі, які після гри повертають до ящика. Знайти ймовірність того, що три м’ячі взяті навмання для другої гри, виявляться новими.

29.4 Радіотелеграфна станція передає цифровий текст. В силу наявності перешкод, кожна цифра незалежно від інших може бути прийнята з ймовірністю помилки 0,02. Знайти ймовірність того, що у прийнятому тексті з 2100 цифр рівно 17 помилок.

29.5 Випадкова величина X задана законом розподілу:

X	*12*	*13*	*14*	*15*	*16*
P	*0,1*	*0,1*	*0,3*	*0,2*	*?*

Знайти:

а) математичне сподівання;

б) дисперсію;

в) середнє квадратичне відхилення;

г) інтегральну функцію розподілу.

Побудувати графік інтегральної функції розподілу.

29.6 На шляху автомобіля 4 світлофори, кожен з яких з ймовірністю 0,5 дозволяє рух. Скласти закон розподілу кількості світлофорів, пройдених автомобілем до першої зупинки. Знайти числові характеристики.

29.7 Випадкова величина X задана функцією щільності розподілу:

$$f(x)=ce^{-x^2}, \quad -\infty < x < \infty .$$

Знайти:

а) коефіцієнт C;

б) функцію розподілу $F(x)$;

в) математичне сподівання $M(X)$;

г) дисперсію $D(X)$;

д) середнє квадратичне відхилення $\sigma(X)$;

е) ймовірність потрапляння значень випадкової величини X до інтервалу $(0;1)$.

29.8 Випадкова величина X підпорядкована нормальному закону з a = 10. Яке повинне бути середнє квадратичне відхилення σ цієї випадкової величини, щоб з ймовірністю 0,8 відхилення від математичного очікування по модулю не перевищувало 0,2?

Варіант 30

30.1 В урні 10 куль: 6 білих та 4 чорних. Вийняли дві кулі. Яка ймовірність того, що вони білі?

30.2 При виготовленні деталі заготівка повинна пройти чотири операції. Припускаючи, що поява браку на окремих операціях незалежна подія, знайти ймовірність виготовлення стандартної деталі, якщо ймовірність браку при першій операції дорівнює – 0,02; при другій – 0,01; при третій – 0,02, а при четвертій – 0,03.

30.3 З трамвайного парку у випадковому порядку послідовно виїхали 3 трамваї маршруту №1 та 4 трамваї маршруту №2. Знайти ймовірність того, що другим за чергою виїде на лінію маршрут №1.

30.4 В деякому місті 32% населення – учні та студенти. У вагоні їде 40 осіб. Знайти ймовірність того, що серед них 10 учнів або студентів.

30.5 Випадкова величина X задана законом розподілу:

X	*-4*	*-3*	*-2*	*-1*	*1*
P	*?*	*0,1*	*0,2*	*0,1*	*0,3*

Знайти:

а) математичне сподівання;

б) дисперсію;

в) середнє квадратичне відхилення;

г) інтегральну функцію розподілу.

Побудувати графік інтегральної функції розподілу.

30.6 У лотереї з 1000 білетів розігруються три речі, вартість яких 210, 60 та 30 грн. Скласти закон розподілу виграшу власника одного білета. Знайти числові характеристики.

30.7 Випадкова величина X задана функцією щільності розподілу:

$$f(x) = \frac{c}{e^x + e^{-x}}, \quad -\infty < x < \infty.$$

Знайти:

а) коефіцієнт C;

б) функцію розподілу $F(x)$;

в) математичне сподівання $M(X)$;

г) дисперсію $D(X)$;

д) середнє квадратичне відхилення $\sigma(X)$;

е) ймовірність потрапляння значень випадкової величини X до інтервалу $(0;1)$.

30.8 Випадкова величина Х має нормальний розподіл з математичним сподіванням $a = 0$ та дисперсією, рівною 1. Яка з двох подій більш ймовірна: $|X| \le 0{,}7$ та $|X| \ge 0{,}7$?

Додаток А

Таблиця значень функції $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3652	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3552
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	0,2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2107	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1872	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1547	1604	1582	1561	1539	1518
1.4	1497	1476	1456	1435	1435	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1238	1200	1182	1163	1145	1127
1.6	1109	1092	1074	1057	1057	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	1925	0909	0893	0893	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0748	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0620	0596	0584	0573	0562	0551

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2,0	0,054	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2.4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	00129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3,0	0,0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

Додаток Б

Таблиця значень функції $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{x^2}{2}} dz$

x	Ф(x)	x	Ф(x)	x	Ф(x)	x	Ф(x)	x	Ф(x)
0,00	0,0000	0,32	0,1255	0,64	0,2389	0,96	0,3315	1,28	0,3997
0,01	0,0040	0,33	0,1293	0,65	0,2422	0,97	0,3340	1,29	0,4015
0,02	0,0080	0,34	0,1331	0,66	0,2454	0,98	0,3365	1,30	0,4032
0,03	0,0120	0,35	0,1368	0,67	0,2486	0,99	0,3389	1,31	0,4049
0,04	0,0160	0,36	0,1406	0,68	0,2517	1,00	0,3413	1,32	0,4066
0,05	0,0199	0,37	0,1443	0,69	0,2549	1,01	0,3438	1,33	0,4082
0,06	0,0239	0,38	0,1480	0,70	0,2580	1,02	0,3461	1,34	0,4099
0,07	0,0279	0,39	0,1517	0,71	0,2611	1,03	0,3485	1,35	0,4115
0,08	0,0319	0,40	0,1554	0,72	0,2642	1,04	0,3508	1,36	0,4131
0,09	0,0359	0,41	0,1591	0,73	0,2673	1,05	0,3531	1,37	0,4147
0,10	0,0398	0,42	0,1628	0,71	0,2703	1,06	0,3554	1,38	0,4162
0,11	0,0438	0,43	0,1664	0,75	0,2734	1,07	0,3577	1,39	0,4177
0,12	0,0478	0,44	0,1700	0,76	0,2764	1,08	0,3599	1,40	0,4192
0,13	0,0517	0,45	0,1736	0,77	0,2794	1,09	0,3621	1,41	0,4207
0,14	0,0557	0,46	0,1772	0,78	0,2823	1,10	0,3643	1,42	0,4222
0,15	0,0596	0,47	0,1808	0,79	0,2852	1,11	0,3665	1,43	0,4236
0,16	0,0636	0,48	0,1844	0,80	0,2881	1,12	0,3686	1,44	0,4251
0,17	0,0675	0,49	0,1879	0,81	0,2910	1,13	0,3708	1,45	0,4265
0,18	0,0714	0,50	0,1915	0,82	0,2939	1,14	0,3729	1,46	0,4279
0,19	0,0753	0,51	0,1950	0,83	0,2967	1,15	0,3749	1,47	0,4292
0,20	0,0793	0,52	0,1985	0,84	0,2995	1,16	0,3770	1,48	0,4306
0,21	0,0832	0,53	0,2019	0,85	0,3023	1,17	0,3790	1,49	0,4319
0,22	0,0871	0,54	0,2054	0,86	0,3051	1,18	0,3810	1,50	0,4332
0,23	0,0910	0,55	0,2088	0,87	0,3078	1,19	0,3830	1,51	0,4345
0,24	0,0948	0,56	0,2123	0,88	0,3106	1,20	0,3849	1,52	0,4357
0,25	0,0987	0,57	0,2157	0,89	0,3133	1,21	0,3869	1,53	0,4370
0,26	0,1026	0,58	0,2190	0,90	0,3159	1,22	0,3883	1,54	0,4382
0,27	0,1064	0,59	0,2224	0,91	0,3186	1,23	0,3907	1,55	0,4394
0,28	0,1103	0,60	0,2257	0,92	0,3212	1,24	0,3925	1,56	0,4406
0,29	0,0041	0,61	0,2291	0,93	0,3238	1,25	0,3944	1,57	0,4418
0,30	0,1179	0,62	0,2324	0,94	0,3264	1,26	0,3962	1,58	0,4429
0,31	0,1217	0,63	0,2357	0,95	0,3289	1,27	0,3980	1,59	0,4441

x	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)
1,60	0,4452	1,80	0,4641	2,00	0,4772	2,38	0,4913	2,78	0,4973
1,61	0,4463	1,81	0,4649	2,01	0,4783	2,40	0,4918	2,80	0,4974
1,62	0,4474	1,82	0,4656	2,02	0,4793	2,42	0,4922	2,82	0,4976
1,63	0,4484	1,83	0,4664	2,04	0,4793	2,44	0,4927	2,84	0,4977
1,64	0,4495	1,84	0,4671	2,06	0,4803	2,46	0,4931	2,86	0,4979
1,65	0,4505	1,85	0,4678	2,08	0,4812	2,48	0,4931	2,88	0,4980
1,66	0,4515	1,86	0,4686	2,10	0,4821	2,50	0,4938	2,90	0,4981
1,67	0,4525	1,87	0,4693	2,12	0,4830	2,52	0,4941	2,92	0,4982
1,68	0,4535	1,88	0,4699	2,14	0,4838	2,54	0,4945	2,94	0,4984
1,69	0,4545	1,89	0,4706	2,16	0,4846	2,56	0,4948	2,95	0,4985
1,70	0,4554	1,90	0,4713	2,18	0,4854	2,58	0,4951	2,98	0,4986
1,71	0,4564	1,91	0,4719	2,20	0,4861	2,60	0,4953	3,00	0,4987
1,72	0,4573	1,92	0,4726	2,22	0,4868	2,62	0,4956	3,20	0,4993
1,73	0,4582	1,93	0,4732	2,24	0,4875	2,64	0,4959	3,40	0,4997
1,74	0,4591	1,94	0,4738	2,26	0,4881	2,66	0,4961	3,60	0,4998
1,75	0,4599	1,95	0,4744	2,28	0,4887	2,68	0,4963	3,80	0,4999
1,76	0,4608	1,96	0,4750	2,30	0,4893	2,70	0,4965	4,00	≈ 0,5
1,77	0,4516	1,97	0,4756	2,32	0,4898	2,72	0,4967		
1,78	0,4626	1,98	0,4761	2,34	0,4904	2,74	0,4969		
1,79	0,4633	1,99	0,4767	2,36	0,4909	2,76	0,4971		

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Агапов Г.И. Задачник по теории вероятностей / Г.И. Агапов. – М.: Высшая школа, 1986. – 86 с.
2. Валєєв К.Г. Збірник задач з теорії ймовірностей та математичної статистики: навч. посібник / К.Г. Валєєв, І.А. Джалладова. – К.: КНЕУ, 2006. – 352 с.
3. Вентцель Е.С. Прикладные задачи по теории вероятностей / Е.С.Вентцель, Л.А. Овчаров. – М.: Радио и связь, 1983. – 416 с.
4. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика / В.Е. Гмурман. – М.: Высшая школа, 1977. – 488 с.
5. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике / В.Е. Гмурман. – М.: Высшая школа, 1979. – 400 с.
6. Жлуктенко В.І. Теорія ймовірностей і математична статистика: навч. - метод. посібник / В.І. Жлуктенко, С.І. Наконечний. – КНЕУ, 2000. – 304 с.
7. Микулик Н.А. Решение технических задач по теории вероятностей и математической статистике / Н.А. Микулик, Г.Н. Рейзина. – Мн.: Высш. школа, 1991. – 164 с.
8. Рабик В.М. Основи теорії ймовірностей: навчальний посібник / В.М.Рабик. – Львів: Магнолія плюс, 2004. –176 с.

НАВЧАЛЬНЕ ВИДАННЯ

Луценко Любов Іванівна
Максимова Тетяна Сергіївна

МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ
до організації самостійної роботи
з дисципліни «Вища математика» (теорія ймовірностей)
для студентів спеціальностей 6.060101 «Автомобільні дороги та аеродроми»,
6.040106 «Екологія і охорона навколишнього середовища та збалансоване природокористування»

Підписано до друку 13.10.2010 р. Формат 70x90/16. Гарнітура Times New Roman
Друк - різографія. Тираж 60 прим. Умов. друк. арк. 6.25. Зам. № 206.

Державний вищий навчальний заклад
«Донецький національний технічний університет»
Автомобільно-дорожній інститут
84646, м. Горлівка, вул. Кірова, 51

Редакційно-видавничий відділ

Свідоцтво про внесення до Державного реєстру видавців, виготовників і розповсюджувачів видавничої продукції ДК № 2982 від 21.09.2007р.