КРИВОЛІНІЙНІ ІНТЕГРАЛИ

2.4.1. ПОНЯТТЯ КРИВОЛІНІЙНОГО ІНТЕГРАЛА 1-го РОДУ

Нехай на площині xy задано гладку криву l, у точках якої визначено неперервну функцію $f(x, y)$. Криву l довільно розіб'ємо на частини l_i завдовжки Δl_i, $i = 1, 2, \ldots, n$. У частині l_i виберемо довільну точку (x_i, y_i) і утворимо інтегральну суму.

$$\delta_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta l_i. \tag{1}$$

Нехай $\Delta = \max\limits_{1\le i\le n} \Delta l_i$.

Означення. Якщо існує границя

$$\lim_{\Delta\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta l_i,$$

яка не залежить ні від способу розбиття дуги l на частини l_i, ні від вибору точок $(x_i, y_i) \in l_i$, то ця границя називається **криволінійним інтегралом 1-го роду за дугою *l* від функції *f*(*x*, *y*)** і позначається $\int\limits_l f(x, y)dl$.

Отже, за означенням:

$$\boxed{\int\limits_l f(x, y)dl = \lim_{\Delta\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta l_i.} \tag{2}$$

2.4.2. ОБЧИСЛЕННЯ КРИВОЛІНІЙНИХ ІНТЕГРАЛІВ 1-го РОДУ

Нехай криву l задано на площині рівнянням $y = g(x)$, $x \in [a, b]$, а $f(x, y)$ — неперервна в точках цієї кривої функція. Точки $(x, y) \in l$ мають вигляд $(x, g(x))$, $x \in [a, b]$. Тоді функція $f(x, y)$ у точках кривої l подається так: $f(x, y) = f\,(x, g(x))$, а довжина i-ої частини l_i наближено дорівнює $\Delta l_i = \sqrt{1+g'^2(x_i)}\Delta x_i$ $i = 1, 2, \ldots, n$. Отже, інтегральна сума (1) набирає вигляду:

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i,\ g(x_i))\sqrt{1+g'^2(x_i)}\Delta x_i. \tag{3}$$

Звідси границя виразу (3) при $\Delta \to 0$ являє собою інтеграл

$$\boxed{\int_l f(x,\ y)dl = \int_a^b f(x,\ g(x))\sqrt{1+g'^2(x)}dx.} \tag{4}$$

Якщо крива l задана параметрично: $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$, то

$$\boxed{\int_l f(x, y)dl = \int_\alpha^\beta f(x(t),\ y(t))\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}dt.} \tag{5}$$

Обчислити інтеграл $\int_l x dl$, де l — дуга параболи $y = \dfrac{x^2}{\sqrt{2}}$, що сполучає точки (0, 0) і (2, $\sqrt{2}$).

● Оскільки $x \in [0, 2]$ і $y' = \sqrt{2}x$, то згідно з (5) маємо:

$$\int_l x dl = \int_0^2 x\sqrt{1+2x^2}dx = \frac{1}{4}\int_0^2 (1+2x^2)^{1/2} d(1+2x^2) = \frac{1}{6}\sqrt{(1+2x^2)^3}\Big|_0^2 = \boxed{\frac{13}{6}}.$$

2.4.3. ПОНЯТТЯ КРИВОЛІНІЙНОГО ІНТЕГРАЛА 2-го РОДУ

Нехай функції $P = P(x, y, z)$, $Q = Q(x, y, z)$, $R = R(x, y, z)$ неперервні в точках гладкої кривої

$$l = \{x = x(t), y = y(t), z = z(t)\}, t \in [\alpha, \beta].$$

Точка $A = (x(\alpha), y(\alpha), z(\alpha))$ називається **початковою точкою кривої** l, а точка $B = (x(\beta), y(\beta), z(\beta))$ — **кінцевою точкою** цієї кривої.

Припустимо, що рух по кривій l відбувається від початкової точки A до кінцевої точки B.

Означення. Крива, для якої вибрано початкову і кінцеву точки і вказано напрям руху, називається **орієнтованою**: l^+ означає, що крива l орієнтована і рух відбувається від точки A до точки B, а l^- — рух відбувається від точки B до точки A (рис. 2.43).

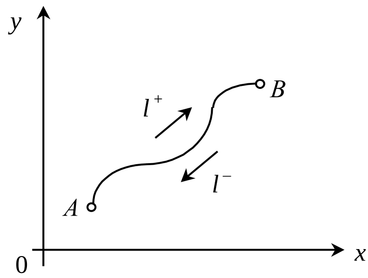

Рис. 2.43

Розіб'ємо криву l на частини l_i точками

$$M_0 = A, M_1, M_2, \ldots, M_n = B.$$

У кожній частині l_i виберемо довільно точку $N_i = (x_i, y_i, z_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Нехай $\mathbf{p_i}$ — одиничний вектор дотичної до кривої l у точці N_i, що задає напрям руху вздовж кривої l, а Δl_i — довжина частини l_i. Утворимо інтегральну суму для вектор-функції $\mathbf{s}(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$:

$$\delta_n = \sum_{i=1}^{n} (\mathbf{a}(x_i, y_i, z_i), \mathbf{p_i}) \Delta l_i. \tag{6}$$

Позначимо $\Delta = \max \Delta l_i$.

Означення. Якщо при $\Delta \to 0$ існує границя інтегральних сум (6), яка не залежить ні від способу розбиття кривої l на частини l_i, ні від вибору точок $N_i \in l_i$, її називають **криволінійним інтегралом 2-го роду** від вектор-функції $\mathbf{a} = (P, Q, R)$ за кривою l і позначають: $\int\limits_l (\mathbf{a}, \mathbf{p^0}) dl$.

Таким чином, за означенням:

$$\boxed{\int\limits_l (\mathbf{a}, \mathbf{p}) dl = \lim_{\Delta \to 0} \sum_{i=1}^{n} (\mathbf{a}(x_i, y_i, z_i), \mathbf{p}_i^0) \Delta l_i.} \tag{7}$$

Нехай гладка крива l задана параметрично: $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, $t \in [\alpha; \beta]$. У цьому разі маємо:

$$dl = |\,\mathbf{p}|\,dt = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}\,dt,$$

де $\mathbf{p} = (x'(t),\ y'(t),\ z'(t))$ — вектор, дотичний до кривої l.

Вираз $(\mathbf{a},\mathbf{p}^0)$ можна записати у вигляді:

$$(\mathbf{a},\mathbf{p}^0)dl = \left(a, \frac{\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|}\right)|\mathbf{p}|dt = (\mathbf{a},\ \mathbf{p})dt =$$
$$= px'(t)dt + Qy'(t)dt + Rz'(t)dt = Pdx + Qdy + Rdz. \tag{8}$$

Згідно з рівністю (8), інтеграл у лівій частині співвідношення (7) можна записати так:

$$\int_l (\mathbf{a},\ \mathbf{p^0})dl = \int_l Pdx + Qdy + Rdz \tag{9}$$

або

$$\int_l (\mathbf{a},\ \mathbf{p^0})dl = \int_l Pdx + Qdy + Rdz = \lim_{\Delta\to 0}\sum_{i=1}^{n}(\mathbf{a}(x_i, y_i, z_i),\ \mathbf{p_i^0})\Delta l_i. \tag{10}$$

У точках параметрично заданої кривої l вектор-функція **a** набирає вигляду $\mathbf{a} = (P(x(t),\ y(t),\ z(t)),\ Q(x(t),\ y(t),\ z(t)),\ R(x(t),\ y(t),\ z(t))$. Звідси з рівності (5) маємо **формулу для обчислення криволінійного інтеграла 2-го роду в разі параметричного задання кривої**:

$$\boxed{\begin{aligned}\int_l P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dz + R(x,y,z)dz = \int_\alpha^\beta (P(x(t),y(t),z(t))x'(t) + \\ + Q(x(t),y(t),z(t))y'(t) + R(x(t),y(t),z(t))z'(t))\,dt.\end{aligned}} \tag{11}$$

Якщо криву l задано в площині xy параметрично: $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in [\alpha,\ \beta]$ і $\mathbf{a} = (P(x,\ y),\ Q(x,\ y))$ — вектор-функція, визначена в точках цієї кривої, то дістаємо формулу:

$$\boxed{\int_l P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_\alpha^\beta (P(x(t),y(t))x'(t) + Q(x(t),\ y(t))y'(t))dt.} \tag{12}$$

Нехай плоска крива l задана явно рівнянням $y = f(x)$, $x \in [a,\ b]$, де $f(x)$ — гладка функція. Цю криву можна задати параметрично:

$$x = x,\ y = f(x),\ x \in [a,\ b].$$

Тоді з рівностей (11) і (12) дістанемо $\mathbf{p} = (1,\ f'(x))$. Далі маємо:

$$\int\limits_l P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int\limits_a^b (P(x_1 f(x)) + Q(x) f(x)) f(x))dx.$$

Одиничний вектор дотичної $\mathbf{p}^0 = (\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma)$, де $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ — напрямні косинуси вектора $\mathbf{p}$, дотичного до кривої l, тому з рівностей (12) дістаємо:

$$\boxed{\int\limits_l (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)dl = \int\limits_l Pdx + Qdy + Rdz.} \tag{13}$$

Формула (13) встановлює **зв'язок між криволінійними інтегралами 1-го і 2-го родів**.

Якщо l — плоска крива, формула (13) набирає вигляду:

$$\boxed{\int\limits_l (P\cos\alpha + Q\sin\alpha)dl = \int\limits_l Pdx + Qdy,} \tag{14}$$

оскільки в цьому разі $\mathbf{p}^0 = (\cos\alpha,\ \sin\alpha)$ $\left(\beta = \dfrac{\pi}{2} - \alpha\right)$.

Обчислити інтеграл

$$\int\limits_l 2x^2 dx - (y^2 - x^2)dy, \tag{15}$$

де l — частина параболи $y = x^2$ з початковою точкою (0, 0) і кінцевою точкою (2, 4).

● За формулою (14) для інтеграла (15) з урахуванням того, що $x \in [0, 2]$ дістаємо:

$$\int\limits_l 2x^2 dx - (y^2 - x^2)dy = \int\limits_0^2 (2x^2 - 2x^5 - 2x^3)dx = -8.$$

2.4.4. ФОРМУЛА ГРІНА

Формула Гріна пов'язує криволінійний інтеграл другого роду за замкненою кривою з подвійним інтегралом за областю, обмеженою цією кривою.

Нехай на площині xy задано замкнену область D з межею γ.

Означення. Межа γ області D орієнтована **додатно (від'ємно)**, якщо під час руху по γ область D бачимо розміщеною ліворуч (праворуч) (рис. 2.44). Область D орієнтована додатно (від'ємно), якщо її межа орієнтована додатно (від'ємно) (рис. 2.45).

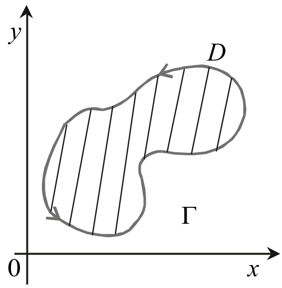

Рис. 2.44

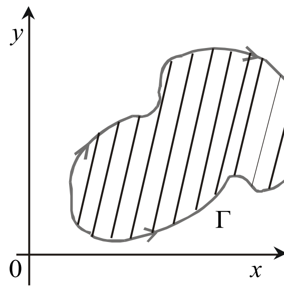

Рис. 2.45

Означення. Область D називається **областю 1-го типу**, якщо вона обмежена знизу кривою γ_1: $y = y_1(x)$, згори — кривою γ_2: $y = y_2(x)$ і, можливо, відрізками прямих $x = a$ і $x = b$, причому будь-яка пряма, паралельна осі y, перетинає межі γ_1 і γ_2 не більш ніж у двох точках (рис. 2.46).

Означення. Область D називається **областю 2-го типу**, якщо вона обмежена ліворуч кривою γ_1: $x = x_1(y)$, праворуч — кривою γ_2: $x = x_2(y)$ і, можливо, відрізками прямих $y = c$ і $y = d$, причому будь-яка пряма, паралельна осі x, перетинає межі γ_1 і γ_2 не більш ніж у двох точках (рис. 2.47).

Теорема. 2.24. **Нехай функції $P(x, y)$ і $Q(x, y)$ неперервні і мають неперервні частинні похідні $\frac{\partial P}{\partial y}$ і $\frac{\partial Q}{\partial x}$ у замкненій однозв'язній області D, обмеженій кусково-гладкою кривою j. Тоді**

$$\boxed{\oint_{\gamma} P dx + Q dy = \iint_{D} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy,} \qquad (16)$$

де криволінійний інтеграл обчислюється за межею γ області D, орієнтованою додатно. Вираз **(16)** називається **формулою Гріна.**

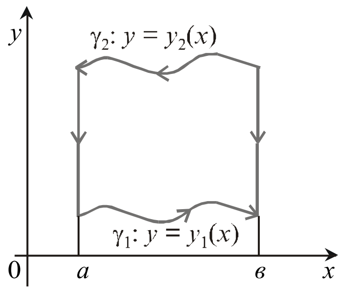

Рис. 2.46

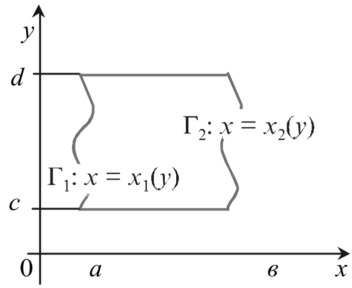

Рис. 2.47

Обчислити інтеграл

$$I = \oint_l -x^2 y dx + xy^2 dy,$$

де l — коло $x^2 + y^2 = R^2$, яке обходимо, рухаючись проти годинникової стрілки.

• Маємо $P = -x^2 y$, $Q = xy^2$. Область D, обмежена колом, є круг $x^2 + y^2 \le R^2$. Оскільки $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = x^2 + y^2$, і то за формулою Гріна

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \rho^3 d\rho = \frac{\pi R^4}{2}.$$

2.4.5. ОБЧИСЛЕННЯ ПЛОЩІ ЗА ДОПОМОГОЮ ФОРМУЛИ ГРІНА

Узявши у формулі (16) $P = -y$, $Q = x$, дістанемо

$$\oint_\gamma -y dx + x dy = \iint_D 2 dx dy = 2\iint_D dx dy = 2S,$$

де S — площа області D. Звідси маємо:

$$\boxed{S = \frac{1}{2}\oint_\gamma x dy - y dx.} \qquad (17)$$

Обчислити площу області D, обмеженої параболами $y^2 = x$, $x^2 = y$ (рис. 2.48).

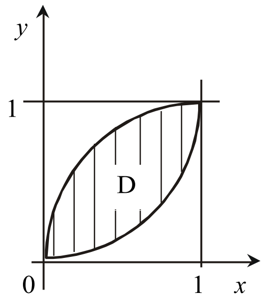

Рис. 2.48

Скориставшись (17), обчислимо інтеграл $\int\limits_{\gamma} -ydx + xdy$ за кривою Γ_1 і $y = x^2$, $0 \le x \le 1$:

$$\int\limits_{\Gamma_1} -ydx + xdy = \int\limits_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}.$$

Цей самий інтеграл за кривою Γ_2: $x^2 = y$, $y \in [1; 0]$

$$\int\limits_{\Gamma_2} -ydx + xdy = -\int\limits_1^0 y^2 dy = \frac{1}{3}.$$

Тоді при $\Gamma = \Gamma_1 \bigcup \Gamma_2$

$$S = \frac{1}{2}\int\limits_{\Gamma} -ydx + xdy = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}.$$