ВПРАВИ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ

1—40. Дослідити збіжність нескінченних рядів, загальні члени яких u_n подаються наведеними далі виразами:

1. $(-1)^n \sin\dfrac{\pi x}{\sqrt{n}}$. **2.** $(-1)^n \sin\dfrac{\pi x}{\sqrt{n^3}}$. **3.** $(-1)^n \dfrac{x^n}{\sqrt{n(n+1)}}$.

4. $n^k \cdot \mathrm{tg}^p\left(\dfrac{\pi x}{n^l}\right)$. **5.** $n^k \cdot \log^p\left(1+\dfrac{x}{n^l}\right)$. **6.** $n^k \cdot \left[\left(1+\dfrac{a}{n^l}\right)^m - 1\right]^p$.

7. $\left[\left(\dfrac{n^l+a}{n^l+b}\right)-1\right]^p$. **8.** $n^k \cdot \left(\dfrac{n^l+a}{n^m+b}\right)^p$. **9.** $n^k \cdot \left(a^n - 1\right)^p$.

10. $\sqrt[p]{n^p+1}-n$. **11.** $\left[\sqrt[3]{n^3+1}-\sqrt[4]{n^4+1}\right]\sqrt{n}$.

12. $\sqrt{n^2+an+b}-\sqrt{n^2+a_1n+b_1}$.

13. $\sqrt{n^2+an+b}-\sqrt[3]{n^3+a_1n+b_1}$.

14. $e^{\frac{1}{n}}-a-\dfrac{b}{n}$.

15. $\ln\dfrac{n+1}{n-1}-\dfrac{a}{n}$.

16. $a\sin\dfrac{\pi}{n}-b\ln\dfrac{n+1}{n}$.

17. $n\left[\mathrm{tg}\dfrac{\pi}{n}-\dfrac{\pi}{n}\right]$.

18. $\left(\mathrm{tg}\dfrac{\pi x}{n^k}-\sin\dfrac{\pi x}{n^k}\right)^p$.

19. $\ln\cos\left(\dfrac{\pi}{n^p}\right)$.

20. $a^{\frac{1}{n}}-a^{\sin\frac{1}{n}}$.

21. $\sin\dfrac{\pi}{n}-\sin\dfrac{\pi}{n+1}$.

22. $\left(ch\dfrac{1}{n}-1\right)^p$.

23. $\left(sh\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n}\right)^p$.

24. $\left[\mathrm{arctg}\dfrac{\pi}{n}-\mathrm{arctg}\dfrac{\pi}{n+1}\right]\sqrt{n}$.

25. $\left[\arcsin\dfrac{\pi}{n}-\mathrm{arctg}\dfrac{\pi}{n}\right]\cdot n$.

26. $\ln\left(\dfrac{ne^{\frac{1}{n}}}{1+\sqrt{n^2+1}}\right)$.

27. $\dfrac{1\cdot3\cdot5\cdots2n+1}{2\cdot4\cdot6\cdots2n+2}\;\dfrac{2n+1}{2n+3}$.

28. $\dfrac{1\cdot3\cdot5\cdots2n-1}{2\cdot4\cdot6\cdots2n}\cdot\dfrac{1}{n^p}$.

29. $\dfrac{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}{(1+a)(2+a)\cdots(n+a)}\cdot n^{p}.$

30. $\left[\dfrac{a(a+1)\cdots(a+n-1)}{b(b+1)\cdots(b+n-1)}\right]^{p},\quad b>a..$

31. $\dfrac{(a+1)(2a+1)\cdots(na+1)}{(b+1)(2b+1)\cdots(nb+1)}\cdot\left(\dfrac{b}{a}\right)^{n}\ (a>0,\ b>0).$

32. $\dfrac{(1\cdot 2\cdot 3\cdots n)^{2}}{1\cdot 2\cdot 3\cdots 2n}\cdot 2^{2n}\cdot\dfrac{1}{n^{p}}.$ **33.** $\left[\dfrac{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}{3\cdot 5\cdot 7\cdots(2n+1)}\right]^{p}.$

34. $\left[\dfrac{a(a+1)\cdots(a+n-1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}\right]^{p},\quad 0<a<1.$

35. $\dfrac{a(a+1)\cdots(a+n-1)}{1\cdot 2\cdots n}\cdot\dfrac{1}{n^{p}},\ a>0.$

36. $\left[\dfrac{1\cdot 2\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}\right]^{p}\cdot\dfrac{1}{n^{q}}.$ **37.** $\left[\dfrac{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}\right]^{p}\cdot\dfrac{1}{n^{q}}.$

38. $\dfrac{\left(a^{2}+\dfrac{1}{4}\right)\left(a^{2}+\dfrac{9}{4}\right)\cdots\left(a^{2}\dfrac{(2n-1)^{2}}{4}\right)}{(1\cdot 2\cdot 3\cdots n)^{2}}.$

39. $\dfrac{(2a+1)(2a+3)(2a+5)\cdots(2a+4n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n\cdot(2a+2)(2a+4)\cdots(2a+2n)\cdot 2^{2n}}\quad(a\geq 0).$

40. $\dfrac{(2n-2-a)(2n-4-a)\cdots(2-a)a(a+1)(a+3)\cdots(a+2n-1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots 2n}$

(випадки a додатного парного і від’ємного — виключаються).

41—55. Подані далі функції розкласти в ряд за цілими додатними степенями x і вказати застосований закон утворення коефіцієнтів і границь збіжності ряду:

41. $\dfrac{5-x}{12-x-x^{2}}.$ **42.** $\dfrac{2-x+x^{2}}{(1-x)^{3}}.$ **43.** $\dfrac{x}{\sin x}.$ **44.** $x\,\mathrm{ctg}\,x.$

45. $\dfrac{x^{2}}{chx-1}.$ **46.** $\dfrac{x}{\log(1+x)}.$ **47.** $\dfrac{x}{e^{x}-1}.$

48. $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\,\mathrm{arctg}\dfrac{x\sqrt{2}}{1-x^{2}}.$ **49.** $\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\log\dfrac{x^{2}+x\sqrt{2}+1}{x^{2}-x\sqrt{2}+1}.$

50. $\dfrac{1}{3}\log\dfrac{1+2x+x^{2}}{1-x+x^{2}}.$ **51.** $\dfrac{1}{3}\,\mathrm{arctg}\dfrac{x}{1-x^{2}}+\dfrac{2}{3}\,\mathrm{arctg}\,x.$

52. $\frac{1}{2\sqrt{3}}\log\frac{1+x\sqrt{3}+x^2}{1-x\sqrt{3}+x^2}$.

53. $\frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{5}}{x^2}$.

54. $\operatorname{arctg}(x+1)$.

55. $\log(1-x+x^2)$.

56—73. Визначити суми поданих далі рядів і вказати області збіжності рядів:

56. $\frac{1}{3}+\frac{x}{1\cdot 4}+\frac{x^2}{1\cdot 2\cdot 5}+\cdots+\frac{x^n}{n!\cdot(n+3)}+\cdots$

57. $x-\frac{x^3}{1\cdot 3}+\frac{x^5}{3\cdot 5}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n-1)(2n+1)}+\cdots$

58. $\frac{x^3}{1\cdot 3}-\frac{x^4}{2\cdot 4}+\frac{x^5}{3\cdot 5}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{(n-2)n}+\cdots$

59. $\frac{1}{3!}+\frac{2x^2}{5!}+\frac{3x^4}{7!}+\cdots+\frac{nx^{2n-2}}{(2n+1)!}+\cdots$

60. $\frac{1}{2}x^2+\frac{2}{3}x^3+\frac{3}{4}x^4+\cdots+\frac{n}{n+1}x^{n+1}+\cdots$

61. $\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^4+\frac{3}{5}x^5+\cdots+\frac{n}{n+2}x^{n+2}+\cdots$

62. $x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}+\cdots+(-1)^n\left(\frac{x^{3n+1}}{3n+1}-\frac{x^{3n+2}}{3n+2}\right)+\ldots$

63. $$\frac{x^3}{3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{x^5}{3\cdot 5}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{x^7}{5\cdot 7}+\cdots+$$
$$+\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot(2n-3)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot(2n-2)}\cdot\frac{x^{2n+1}}{(2n-1)(2n+1)}+\cdots$$

64. $\frac{1\cdot 2}{3!}x^3-\frac{3\cdot 4}{5!}x^5+\frac{5\cdot 6}{7!}x^7-\cdots+(-1)^{n+1}\frac{(2n-1)2n}{(2n+1)!}x^{2n+1}+\ldots$

65. $x+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{7}x^7+\cdots+(-1)^n\left[\frac{x^{4n+1}}{4n+1}+\frac{x^{4n+3}}{4n+3}\right]+\ldots$

66. $x-\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{5}x^5+\frac{1}{7}x^7+\cdots+(-1)^n\left[\frac{x^{4n+1}}{4n+1}-\frac{x^{4n+3}}{4n+3}\right]+\cdots$

67. $\frac{x^4}{1\cdot 4}+\frac{x^6}{3\cdot 6}+\frac{x^8}{5\cdot 8}+\cdots+\frac{x^{2n}}{(2n-3)2n}+\cdots$

68. $x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{4}x^4+\cdots+\left(\frac{x^{4n+1}}{4n+1}-\frac{x^{4n+2}}{4n+2}+\frac{x^{4n+4}}{4n+4}\right)+\cdots$

69. $\frac{x^3}{3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{x^4}{4}+\frac{1\cdot 2}{2\cdot 4}\cdot\frac{x^5}{5}+\cdots+\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-7)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n-6)}\cdot\frac{x^n}{n}+\cdots$

70. $a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots$ за умови:

$$\alpha a_{n+2}+\beta a_{n+1}+\gamma a_n=0 \text{ для } n\ge 0.$$

71. $1+x+2x^2+3x^3+5x^4+8x^5+\ldots+a_nx^n+\cdots$ при

$$a_{n+2}=a_{n+1}+a_n \quad (n\ge 0).$$

72. $a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots$ за умови:

$$(n+2)\alpha a_{n+2}+(n+1)\beta a_{n+1}+n\gamma a_n=0 \text{ для значень } n\ge 1.$$

73. $1+2x-x^2+\frac{1}{2}x^4-\frac{2}{5}x^5+\cdots+a_nx^n+\cdots$ при

$$(n+2)a_{n+2}+(n+1)a_{n+1}+na_n=0 \text{ для значень при } n\ge 0.$$

74—90. Знайти суми таких числових рядів:

74. $1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots+(-1)^n\left[\frac{1}{3n+1}-\frac{1}{3n+2}\right]+\cdots$

75. $1-\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\cdots+(-1)^n\left[\frac{1}{4n+1}-\frac{1}{4n+3}\right]+\cdots$

76. $1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+(-1)^n\left[\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}\right]+\cdots$

77. $1-\frac{1}{5}+\frac{1}{9}-\frac{1}{13}+\cdots+(-1)^n\cdot\frac{1}{4n+1}+\cdots$

78. $1+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots+(-1)^n\left[\frac{1}{4n+1}+\frac{1}{4n+3}\right]+\cdots$

79. $1-\frac{1}{7}+\frac{1}{13}-\frac{1}{19}+\cdots+(-1)^n\cdot\frac{1}{6n+1}+\cdots$

80. $1+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}-\frac{1}{11}+\cdots+(-1)^n\left[\frac{1}{6n+1}+\frac{1}{6n+5}\right]+\cdots$

81. $\frac{3}{2\cdot 4}-\frac{5}{4\cdot 6}+\frac{7}{6\cdot 8}-\cdots+(-1)^{n+1}\frac{2n+1}{2n(2n+2)}+\cdots$

82. $\frac{1}{1\cdot 3}-\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}-\cdots(-1)^n\cdot\frac{1}{(2n+1)(2n+3)}+\cdots$

83. $\frac{1}{1\cdot 2}-\frac{1}{4\cdot 5}+\frac{1}{7\cdot 8}-\cdots+(-1)^n\cdot\frac{1}{(3n+1)(3n+2)}+\cdots$

84. $\frac{1}{1\cdot 3}-\frac{1}{5\cdot 7}+\frac{1}{9\cdot 11}-\cdots+(-1)^n\cdot\frac{1}{(4n+1)(4n+3)}+\cdots$

85. $\frac{1}{2\cdot 3}-\frac{1}{4\cdot 5}+\frac{1}{6\cdot 7}-\cdots+(-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{2n(2n+1)}+\cdots$

86. $\frac{1}{1\cdot 5}+\frac{1}{9\cdot 13}+\frac{1}{17\cdot 21}+\cdots+\frac{1}{(8n+1)(8n+5)}+\cdots$

87. $\frac{1}{1\cdot 3}-\frac{3}{5\cdot 7}+\frac{5}{9\cdot 11}-\cdots+(-1)^{n}\cdot\frac{2n+1}{(4n+1)(4n+3)}+\cdots$

88. $\frac{1}{3\cdot 5}-\frac{1}{7\cdot 9}+\frac{1}{11\cdot 13}-\frac{1}{15\cdot 17}+\cdots+(-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{(4n-1)(4n+1)}+\cdots$

89. $\frac{1}{1\cdot 7}+\frac{1}{13\cdot 19}+\frac{1}{25\cdot 31}+\cdots+\frac{1}{(12n+1)(12n+7)}+\cdots$

90. $\frac{1}{5\cdot 7}-\frac{1}{11\cdot 13}+\frac{1}{17\cdot 19}-\cdots+(-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{(6n-1)(6n+1)}+\cdots$

91. Довести, що сума ряду

$$\frac{C_0}{1\cdot 2\cdot 3\cdots k}+\frac{C_1}{(a+1)(a+2)\cdots(a+k)}+$$
$$+\frac{C_2}{(2a+1)(2a+2)\cdots(2a+k)}+\cdots+\frac{C_n}{(na+1)(na+2)\cdots(na+k)}+\cdots$$

виражається інтегралом

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdots(k-1)}\int_0^1(1-t)^{k-1}f(t^a)dt,$$

якщо

$$C_0+C_1x+C_2x^2+\cdots+C_nx^n+\cdots=f(x)\ \text{ при }\ |x|<1.$$

92—118. На підставі результату 91 знайти суми таких рядів:

92. $\sum\limits_0^\infty\frac{1}{(2n+1)(2n+2)}.$

93. $\sum\limits_0^\infty\frac{1}{(3n+1)(3n+2)}.$

94. $\sum\limits_0^\infty\frac{1}{(4n+1)(4n+2)}.$

95. $\sum\limits_1^\infty\frac{(-1)^{n-1}}{n(n+1)}.$

96. $\sum\limits_0^\infty\frac{(-1)^{n}}{(2n+1)(2n+2)}.$

97. $\sum\limits_0^\infty\frac{(-1)^{n}}{(3n+1)(3n+2)}.$

98. $\sum\limits_0^\infty\frac{(-1)^{n}}{(4n+1)(4n+2)}.$

99. $\sum\limits_1^\infty\frac{1}{n(n+1)(n+2)}.$

100. $\sum\limits_0^\infty\frac{1}{(2n+1)(2n+2)(2n+3)}.$

101. $\sum\limits_0^\infty\frac{1}{(3n+1)(3n+2)(3n+3)}.$

102. $\sum_{0}^{\infty}\frac{1}{(4n+1)(4n+2)(4n+3)}$. **103.** $\sum_{0}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n(n+1)(n+2)}$.

104. $\sum_{0}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{(2n+1)(2n+2)(2n+3)}$. **105.** $\sum_{0}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{(3n+1)(3n+2)(3n+3)}$.

106. $\sum_{0}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{(4n+1)(4n+2)(4n+3)}$.

107. $\sum_{0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)(2n+2)(2n+3)(2n+4)}$.

108. $\sum_{0}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{(2n+1)(2n+2)(2n+3)(2n+4)}$.

109. $\sum_{1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\cdot\frac{1}{(2n+1)(2n+2)}$.

110. $\sum_{1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\cdot\frac{1}{(2n+1)(2n+2)(2n+3)}$.

111. $\sum_{0}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{2n+1}\cdot\frac{1}{(4n+3)(4n+4)(4n+5)}$.

112*. $\sum_{0}^{\infty}(-1)^{n}\cdot\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}\cdot\frac{1}{(2n+1)(2n+2)}$.

113*. $\sum_{0}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}\cdot\frac{1}{(2n+1)(2n+2)}$.

114*. $\sum_{0}^{\infty}(-1)^{n}\cdot\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}\cdot\frac{1}{(2n+1)(2n+2)(2n+3)}$.

115*. $\sum_{0}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}\cdot\frac{1}{(2n+1)(2n+2)(2n+3)}$.

116. $\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{m(2n+1)(2n+2)(2n+3)}$.

117. $\sum_{0}^{\infty}(-1)^{n}\cdot\frac{1}{(n+3)(n+4)(n+5)}\cdot\frac{1}{2^{n}}$.

118. $\sum_{0}^{\infty}(-1)^{n}\cdot\frac{1}{(2n+2)(2n+3)(2n+4)}\cdot\frac{1}{3^{n}}$.

Вказівка. У задачах, позначених *, коефіцієнти $\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}$ при $n=0$ умовно вважаються рівними 1.

119. Довести, що сума ряду

$$C_0+\frac{1}{2}C_2+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}C_3+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}C_4+\cdots$$

представлена визначеним інтегралом $\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin^2\varphi)d\varphi$, якщо

$$C_0+C_1x+C_2x^2+C_3x^3+\cdots=f(x) \text{ при } 0<x<1.$$

120. Довести, що сума ряду

$$C_1+\frac{2}{3}C_3+\frac{2\cdot 4}{3\cdot 5}C_5+\frac{2\cdot 4\cdot 6}{3\cdot 5\cdot 7}C_7+\cdots$$

дорівнює визначеному інтегралу $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin\varphi)d\varphi$, якщо

$$C_1x+C_3x^3+C_5x^5+\cdots=f(x) \text{ при } 0<x<1.$$

121—134. На підставі результатів 119—120 знайти суми таких рядів.

121. $\sum\limits_1^\infty \frac{(-1)^{n-1}}{n}\cdot\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}$.

122. $\sum\limits_0^\infty \frac{(-1)}{2n+1}\cdot\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}$.

123*. $\sum\limits_0^\infty (-1)^n\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}$.

124*. $\sum\limits_0^\infty (-1)^n\cdot\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}\cdot\frac{1}{2^n}$.

125*. $\sum\limits_0^\infty (-1)^n\cdot\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}{3\cdot 5\cdot 7\cdots(2n+1)}$.

126*. $\sum\limits_0^\infty (-1)^n\cdot\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}{3\cdot 5\cdot 7\cdots(2n+1)}\cdot\frac{1}{2^n}$.

127*. $\sum\limits_0^\infty \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}{3\cdot 5\cdot 7\cdots(2n+1)}$.

128*. $\sum\limits_1^\infty (-1)^n\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}{3\cdot 5\cdot 7\cdots(2n+1)}\cdot\frac{1}{3^n}$.

129. $\sum\limits_1^\infty \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}\cdot\frac{1}{2n}$.

130*. $\sum\limits_0^\infty \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}{3\cdot 5\cdot 7\cdots(2n+1)}\cdot\frac{1}{2^n}$.

131*. $\sum\limits_0^\infty (-1)^n\cdot\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}\cdot\frac{1}{a^n}\quad(a\ge 1)$.

132*. $\sum\limits_{0}^{\infty}\dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}\cdot\dfrac{1}{a^n}\quad (a>1).$

133*. $\sum\limits_{0}^{\infty}(-1)^n\cdot\dfrac{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}{3\cdot 5\cdot 7\cdots(2n+1)}\cdot\dfrac{1}{a^n}\quad (a\geq 1).$

134*. $\sum\limits_{0}^{\infty}\dfrac{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}{3\cdot 5\cdot 7\cdots(2n+1)}\cdot\dfrac{1}{a^n}\quad (a>1).$

Вказівка. У задачах, позначених *, коефіцієнти $\dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}$ і $\dfrac{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}{3\cdot 5\cdot 7\cdots(2n+1)}$ при $n = 0$ умовно вважаються рівними 1.

135. Довести, що сума ряду $\dfrac{C_0}{1^2}+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{C_2}{3^2}+\cdots+\dfrac{C_{n-1}}{n^2}+\cdots$ дорівнює — $\int\limits_0^1 f(x)\log x\,dx$, якщо $C_0+C_1x+\ldots+C_nx^n+\ldots=f(x)$ при $|x|<1$.

136—139. На підставі результату 135 знайти суми таких рядів:

136*. $\sum\limits_{0}^{\infty}\dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}\cdot\dfrac{1}{(2n+1)^2}.$

137*. $\sum\limits_{0}^{\infty}\dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}\cdot\dfrac{1}{(n+1)^2}.$

138*. $\sum\limits_{0}^{\infty}(-1)^n\cdot\dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}\cdot\dfrac{1}{(n+1)^2}.$

139*. $\sum\limits_{0}^{\infty}\dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}\cdot\dfrac{1}{(2n+3)^2}.$

140—168. Розкладемо в тригонометричні ряди (ряди Фур'є) такі функції:

140. $f(x) = -1$ при $-\pi < x < 0$, $f(x) = +1$ при $0 < x < \pi$.

141. $f(x) = 0$ при $-\pi < x < 0$, $f(x) = +1$ при $0 < x < \pi$.

142. $f(x) = x$ при $0 < x < \pi$.

143. $f(x) = 0$ при $-\pi < x < +\pi$.

144. $f(x) = |x|$ при $-\pi < x < +\pi$.

145. $f(x) = 0$ при $-\pi < x < 0$, $f(x) = x$ при $0 < x < \pi$.

146. $f(x) = x$ при $0 < x < \pi$, $f(x) = \pi$ при $\pi < x < 2\pi$.

147. $f(x) = x$ при $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$, $f(x) = \pi - x$ при $\dfrac{\pi}{2} < x < \pi$.

148. $f(x) = bx$ при $-\pi < x < 0$, $f(x) = ax$ при $0 < x < \pi$.

149. $f(x) = x^2$ при $-\pi < x < +\pi$. **150.** $f(x) = x^2$ при $0 < x < 2\pi$.

151. $f(x) = x^2$ при $0 < x < \pi$.

152. $f(x) = -x^2$ при $-\pi < x < 0$, $f(x) = x^2$ при $0 < x < \pi$.

153. $f(x) = 0$ при $-\pi < x < 0$, $f(x) = x^2$ при $0 < x < \pi$.

154. $f(x) = \pi^2 - x^2$ при $-\pi < x < \pi$.

155. $f(x) = x(\pi^2 - x^2)$ при $-\pi < x < \pi$.

156. $f(x) = (\pi^2 - x^2)^2$ при $-\pi < x < +\pi$.

157. $f(x) = \sin x$ при $0 < x < \pi$.

158. $f(x) = \sin x$ при $-\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}$.

159. $f(x) = \cos x$ при $-\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}$.

160. $f(x) = \cos x$ при $0 < x < \pi$. **161.** $f(x) = x \sin x$ при $-\pi < x < \pi$.

162. $f(x) = x \cos x$ при $-\pi < x < \pi$. **163.** $f(x) = \log\sin\dfrac{x}{2}$ $0 < x < 2\pi$.

164. $f(x) = \sin \mu x$ при $-\pi < x < \pi$ (μ не ціле).

165. $f(x) = \cos \mu x$ при $-\pi < x < \pi$ (μ не ціле).

166. $f(x) = shx$ при $-\pi < x < \pi$.

167. $f(x) = chx$ при $-\pi < x < \pi$.

168. $f(x) = e^x$ при $-\pi < x < \pi$.

169—187. Задачі на обчислення скінченних різниць.

169. Беручи $S_k = 1^k + 2^k + 3^k + \cdots + (n-1)^k$, обчислити S_k при $k = 3$, 4, … 9.

170. Беручи $T_k = 1^k - 2^k + 3^k - 4^k + \cdots + (2n-1)^k$, обчислити T_k при $k = 2, 3, \ldots 9$.

Обчислити суми.

171. $1\cdot 3 - 2\cdot 4 + 3\cdot 5 - 4\cdot 6 + \cdots + (2n-3)(2n-1)$.

172. $1\cdot 3 + 2\cdot 4 + 3\cdot 5 + 4\cdot 6 + \cdots + (2n-2)2n$.

173. $1\cdot 2\cdot 3\cdots k + 2\cdot 3\cdot 4\cdots (k+1) + \cdots$
$+ (n-k+1)(n-k+1)(n-k+2)\cdots n$.

174. $\dfrac{1}{1\cdot 3} - \dfrac{1}{2\cdot 4} + \dfrac{1}{3\cdot 5} - \dfrac{1}{4\cdot 6} + \cdots + \dfrac{(-1)^{n-1}}{n(n+2)} + \cdots$

175. $\dfrac{1}{1\cdot 4} + \dfrac{1}{2\cdot 5} + \dfrac{1}{3\cdot 6} + \dfrac{1}{4\cdot 7} + \cdots + \dfrac{1}{n(n+3)} + \cdots$

176. $\dfrac{8}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \dfrac{11}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} + \dfrac{14}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6} + \cdots + \dfrac{3n+5}{n(n+1)(n+2)(n+3)} + \cdots$

177. $\frac{10}{3\cdot5\cdot7\cdot9}+\frac{36}{5\cdot7\cdot9\cdot11}+\cdots+\frac{2n^2-3n+1}{n(n+2)(n+4)(n+6)}+\cdots$
(n — непарне).

178. $\frac{1}{1\cdot5\cdot9}+\frac{1}{2\cdot6\cdot10}+\frac{1}{3\cdot7\cdot11}+\cdots+\frac{1}{n(n+4)(n+8)}+\cdots$

179. $\frac{1^2}{2\cdot3\cdot4\cdot5}+\frac{2^2}{3\cdot4\cdot5\cdot6}+\cdots+\frac{n^2}{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}+\cdots$

180. $\frac{1^2}{2\cdot4\cdot6\cdot8}-\frac{2^2}{3\cdot5\cdot7\cdot9}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}\cdot n^2}{(n+1)(n+3)(n+5)(n+7)}+\cdots$

181. $\frac{3}{1\cdot4\cdot7}+\frac{5}{2\cdot5\cdot8}+\frac{7}{3\cdot6\cdot9}+\cdots+\frac{2n+1}{n(n+3)(n+6)}+\cdots$

182. $\frac{2}{1\cdot3\cdot5}-\frac{5}{2\cdot4\cdot6}+\frac{8}{3\cdot5\cdot7}-\cdots+(-1)^{n-1}\cdot\frac{3n-1}{n(n+2)(n+4)}+\cdots$

Обчислити за допомогою формули Ейлера—Маклорена такі суми і вказати степінь точності:

183. $1+\frac{1}{3^5}+\frac{1}{5^5}+\frac{1}{7^5}+\cdots$ з точністю до $\frac{1}{10^5}$.

184. $\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\cdots+\frac{1}{99}$ з точністю до $\frac{1}{10^6}$.

185. $\frac{1}{100}+\frac{1}{103}+\frac{1}{106}+\cdots+\frac{1}{397}$ з точністю до $\frac{1}{10^8}$.

186. $\frac{1}{\sqrt{100}}+\frac{1}{\sqrt{101}}+\frac{1}{\sqrt{102}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{9999}}$ з точністю до $\frac{1}{10^9}$.

187. $\frac{1}{500\ln500}+\frac{1}{501\ln501}+\cdots+\frac{1}{999\ln999}$ з точністю до $\frac{1}{10^5}$.
(ln — знак натурального логарифма).