МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ
ВОСТОЧНОУКРАИНСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени ВЛАДИМИРА ДАЛЯ
СЕВЕРОДОНЕЦКИЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
Кафедра высшей математики

НАГУЛИН Н.И.

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

Программа, методические указания
и контрольные задания

УТВЕРЖДЕНО
на заседании кафедры
высшей математики.
Протокол N 54 от 01.04.2004

Северодонецк 2004

Н.И. Нагулин. Теория вероятностей и математическая статистика. Программа, методические указания и контрольные задания.
-Северодонецк, -2004. – 75с.

Составлено на основании программы математических дисциплин для инженерно-технических специальностей высших учебных заведений.

Отв. за выпуск Н.И. Нагулин, доцент

Рецензент В.Г. Назаренко, доцент

С О Д Е Р Ж А Н И Е

ВВЕДЕНИЕ

Математическая подготовка студентов разных специальностей проводится по различным учебным планам. В частности, различным может быть количество учебных курсов по математике. Так, при подготовке специалистов по направлению «Электронные аппараты» изучается один базовый математический курс « Высшая математика». При подготовке специалистов по направлению «Компьютерная инженерия» предусматривается изучение пяти самостоятельных математических курсов: 1)«Линейная алгебра и аналитическая геометрия», 2) «Математический анализ», 3) «Дискретная математика», 4) «Теория вероятностей и математическая статистика», 5) «Численные методы».

Независимо от числа учебных курсов и их объема, в одном из них обязательно изучается раздел высшей математики, который называется «Теория вероятностей».

Математическая подготовка студентов всех специальностей предусматривает обязательное изучение элементов математической статистики. Студенты большинства специальностей нашего института изучают математическую статистику как отдельный раздел высшей математики, студенты направления «Компьютерная инженерия» изучают математическую статистику вместе с теорией вероятностей, а студенты специальностей «Экономика предприятия» и «Учет и аудит» изучают математическую статистику как отдельную учебную дисциплину. Почему невозможна подготовка специалиста без изучения математической статистики? Дело в том, что методы математической статистики широко используются в технических, технологических и экономических науках, главным образом, в связи с развитием массовых процессов в производстве и экономике, а также в связи с развитием экспериментальной техники и необходимостью анализа технологических процессов, контроля качества продукции, обработки результатов социологических исследований и т.д. Руководителю предприятия или его отдельного структурного подразделения необходимо принимать решения, зачастую не имея полной информации о том, как будут развиваться события в будущем. На помощь приходит математическая статистика, которую определяют как науку о принятии решений в условиях неопределенности.

Математическая статистика возникла и развивалась параллельно с теорией вероятностей. Большой вклад в развитие этой науки внесли Чебышев П.Л., Марков А.А., Ляпунов А.М., Гаусс К., Пирсон К., Стьюдент, Нейман Ю. и др.

В данном методическом пособии содержится программа, методические указания и контрольные задания по теории вероятностей и математической статистике.

ПРОГРАММА

1. Предмет теории вероятностей. Основные понятия. Испытания и события. Классическое определение вероятности. Основные формулы комбинаторики. Относительная частота. Геометрическая вероятность.
2. Операции над событиями. Вероятность суммы и произведения событий. Формула полной вероятности. Формулы Бейеса.
3. Независимые испытания. Формула Бернулли. Локальная и интегральная теоремы Лапласа.
4. Случайные величины. Дискретные и непрерывные случайные величины. Закон распределения, функции распределения и плотности распределения вероятностей. Математическое ожидание, дисперсия, среднее квадратическое отклонение. Примеры распределений: равномерное, нормальное, показательное.
5. Случайные процессы. Цепи Маркова.
6. Задачи математической статистики. Генеральная и выборочная совокупности. Репрезентативность выборки.
7. Способы отбора.
8. Статистическое распределение выборки.
9. Эмпирическая функция распределения.
10. Полигон и гистограмма.
11. Статистические оценки.
12. Оценка генеральной средней по выборочной средней.
13. Оценка генеральной дисперсии по исправленной выборочной дисперсии. Исправленное выборочное среднее квадратическое отклонение.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. М., «Высшая школа», 1977
2. Гмурман В. Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике.М., «Высшая школа», 1975
3. Румшиский Л.З. Элементы теории вероятностей , М., «Наука» , 1976
4. Мышкис А.Д. Лекции по высшей математике, М., «Наука», 1973
5. Гребеник В.Д., Рухляда В.С., Скрипко Е.Д. Программа, методические указания и контрольные задания по курсу «Теория вероятностей», ХИИКС, 1988

6. Нагулин Н.И. Теория вероятностей. Программа, методические указания и контрольные задания. Северодонецк, СТИ, 2000.
7. Нагулин Н.И. Элементы математической статистики. Программа, методические указания и контрольные задания. Северодонецк, СТИ, 2003.

ЧАСТЬ 1. ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

В практической деятельности часто приходится сталкиваться со случайными событиями, т.е. событиями, которые могут произойти, но могут и не произойти по причинам, не поддающимся непосредственному учету в данных условиях. Изучение количественных закономерностей, которым подчиняются массовые случайные события, и составляет предмет теории вероятностей.

Теория вероятностей применяется в различных областях науки и техники. Ее методы и результаты используются в теории надежности, теории автоматического управления, при планировании и организации производства, при анализе технологических процессов, контроле качества продукции и т.д. Вероятностные и основанные на них статистические методы широко проникли в технические, технологические и экономические науки, главным образом, в связи с развитием массовых процессов в производстве и экономике, а также в связи с развитием экспериментальной техники и необходимостью анализа результатов эксперимента.

1.1. Основные понятия. Непосредственный подсчет вероятностей.

Достоверным называется событие, которое в результате испытания обязательно должно произойти.

Случайным называется событие, которое в результате испытания может произойти или не произойти.

Невозможным называется событие, которое в результате испытания не может произойти.

Вероятностью события называется численная мера степени объективной возможности этого события. Вероятность события A обозначается P(A).

События называются *несовместными*, если появление одного из них исключает появление других событий в одном и том же испытании.

Несколько событий образуют *полную группу*, если в результате испытания появится хотя бы одно из них. События называются *равновозможными*, если есть основания считать, что ни одно из них не является более возможным, чем другие.

Каждый из возможных результатов испытания называется элементарным исходом.

Вероятность события А вычисляется по формуле:

$$P(A) = \frac{m}{n},$$

где n – общее число несовместных, равновозможных и образующих полную группу элементарных исходов испытания, m – число исходов благоприятствующих событию А.

Вероятность случайного события заключена между нулем и единицей:

$$0< P(A)<1.$$

Вероятность достоверного события равна единице, вероятность невозможного события равна нулю.

Часто для подсчета общего числа элементарных исходов испытания и числа исходов, благоприятствующих событию, используются формулы определения числа комбинаций из n различных элементов по m элементов: сочетаний $C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$, размещений $A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$, перестановок $P_m = m!$, где $n! = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot3\cdot2\cdot1$, при этом 0!=1.

Пример 1.

Бросают одновременно две игральные кости. Найти вероятности следующих событий: 1) А – сумма выпавших очков равна 8, 2) В – произведение выпавших очков равно 8, 3) С – сумма выпавших очков равна 8, а произведение 15.

Решение.

1) Общее число возможных элементарных исходов испытания равно $n = 6\cdot6=36$, т.к. каждая кость дает 6 исходов, а каждый из исходов бросания «первой» кости может сочетаться с каждым из исходов бросания «второй». Благоприятствующими нашему событию (сумма очков равна 8) исходами являются следующие : (2;6), (3;5), (4;4), (5;3), (6;2), т.е. m = 5. Искомая вероятность равна отношению числа исходов, благоприятствующих событию, к числу всех возможных элементарных исходов:

$$P(A) = \frac{5}{36} = 0{,}139$$

2) Общее число возможных элементарных исходов испытания осталось прежним n = 36, а число исходов, благоприятствующих событию В m = 2 : (2;4), (4;2). $P(B) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18} = 0{,}056.$

3) Общее число возможных элементарных исходов события осталось прежним n = 36. Благоприятствуют искомому событию только те исходы, в которых выполняются два условия: сумма очков равна 8, а произведение равно 15. Значит : $m = 2 : (3;5),(5;3)$.

$$P(C) = \frac{2}{26} = \frac{1}{18} = 0{,}056$$

<u>Пример 2.</u>

В ящике 100 деталей, из них 10 бракованных. Наудачу извлечены 4 детали. Найти вероятность того, что среди извлеченных деталей ровно 3 стандартных.

<u>Решение.</u>

Общее число возможных исходов испытания $n = C_{100}^4$ равно числу способов, которыми можно извлечь 4 детали из 100. Подсчитаем число исходов, благоприятствующих нашему событию. Три стандартные детали из имеющихся 90 можно извлечь C_{90}^3 способами , при этом одна оставшаяся бракованная деталь может быть извлечена из имеющихся 10 деталей C_{10}^1 способами. Следовательно, число благоприятствующих нашему событию исходов равно $m = C_{90}^3 \cdot C_{10}^1$. Искомая вероятность равна отношению числа исходов, благоприятствующих событию, к числу всех элементарных исходов, попарно несовместных, равновозможных и образующих полную группу. $P = \dfrac{C_{90}^3 \cdot C_{10}^1}{C_{100}^4} = 0{,}2996$.

<u>Пример 3.</u>

На десяти карточках написаны цифры: 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9. Три из них вынимаются наугад и укладываются на стол в порядке появления. Найти вероятность того, что: 1) в порядке появления цифр получится число 245, 2) из полученных цифр можно составить число 245.

<u>Решение.</u>

1) Число всех элементарных исходов испытания – это число возможных размещений из 10 элементов по три элемента (полученные комбинации элементов могут отличаться друг от друга или самими элементами , или их порядком).

Из общего числа исходов испытания только один является для нашего события благоприятствущим, т.е. m=1. Искомая вероятность

$$P(A_1) = \frac{1}{A_{10}^3} = \frac{1}{720} = 0{,}0014 .$$

2) в отличие от предыдущей задачи число возможных исходов испытания вычислим как число возможных сочетаний из 10 по 3, т.к. порядок появления элементов не играет роли, элементы можно поменять местами.

Искомая вероятность $P(A_2) = \frac{1}{C_{10}^3} = \frac{1}{120} = 0{,}0083$.

Пример 4.

Из пяти букв разрезной азбуки составлено слово «КНИГА». Ребенок, не умеющий читать, рассыпал эти буквы и затем собрал в произвольном порядке. Найти вероятность того, что у него снова получилось слово «КНИГА».

Решение.

Ребенок может собрать в произвольном порядке те пять букв, которые составляют слово «КНИГА». Полученные буквосочетания отличаются одно от другого не самими элементами, а только их порядком, поэтому число всех исходов испытания вычислим как число перестановок из пяти элементов: $n = P_5 = 5!$ Из всех возможных исходов только один благоприятствует появлению искомого события «снова получилось слово «КНИГА».

Искомая вероятность $P(A) = \frac{1}{P_5} = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = \frac{1}{120} = 0{,}0083$.

Пример 5.

Тот же вопрос, если было составлено слово «РАКЕТА».

Решение.

Общее число исходов испытания вычислим как число перестановок из 6 (в заданном слове 6 букв) элементов, т.е. $n = P_6 = 6!$ Из всех возможных исходов два благоприятствуют появлению слова РАКЕТА, т.к. в этом слове две одинаковые буквы А и перемена их местами слова не нарушит. $m = P_2 = 2!$

Искомая вероятность $P(B) = \frac{P_2}{P_6} = \frac{2}{720} = 0{,}0028$.

Относительной частотой события называют отношение числа испытаний, в которых событие появилось, к общему числу фактически произведенных испытаний. Относительная частота события А равна:

$$W(A) = \frac{m}{n},$$

где m – число появлений события, n – общее число испытаний.

Пример 6.

По цели произведено 20 выстрелов, причем зарегистрировано 17 попаданий. Найти относительную частоту попаданий в цель (событие А).

Решение.

В рассматриваемом примере n = 20, m = 17, поэтому

$$W(A) = \frac{m}{n} = \frac{17}{20} = 0{,}85 .$$

Статистической вероятностью события называется относительная частота этого события или число близкое к ней.

Геометрической вероятностью называют вероятность попадания точки в область (отрезок, часть плоскости и т.д.).

Пусть отрезок l составляет часть отрезка L. На отрезок L наудачу поставлена точка. Это означает выполнение следующих предложений: поставленная точка может оказаться в любой точке отрезка L, вероятность попадания точки на отрезок l пропорциональна длине этого отрезка и не зависит от его расположения относительно отрезка L. В этих предположениях вероятность попадания точки на отрезок L определяется равенством:

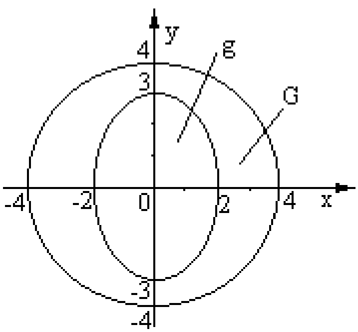
$$P = \frac{длина \quad l}{длина \quad L} .$$

Аналогично, в случае плоских областей:

$$P = \frac{площадь\ g}{площадь\ G} .$$

Пример 7.

Найти вероятность попадания случайной точки в эллипс $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$, если точка наудачу поставлена в круг $x^2 + y^2 = 16$.



Решение.

Находим площади круга и эллипса:

площадь круга

$$G = \pi R^2 = 16\pi;$$

площадь эллипса

$$g = \pi ab = \pi \cdot 2 \cdot 3 = 6\pi .$$

$$P = \frac{площадь\ g}{площадь\ G} = \frac{6\pi}{16\pi} = \frac{3}{8} = 0{,}375 .$$

1.2. Действия над событиями. Основные теоремы.

Суммой двух событий A и B называется событие A+B, состоящее в появлении хотя бы одного из них.

Суммой нескольких событий называется событие, состоящее в появлении хотя бы одного из этих событий.

Произведением двух событий A и B называется событие AB, состоящее в совместном появлении события A и события B.

Произведением нескольких событий называется событие, состоящее в совместном появлении всех этих событий.

<u>Теорема 1.</u> $P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)$.

Если события A и B несовместные, их произведение есть невозможное событие (не имеет смысла).

Формула принимает вид: $P(A + B) = P(A) + P(B)$.

<u>Теорема 2.</u> $P(A) + P(\overline{A}) = 1$, здесь $\overline{A}$ - событие, противоположное событию A.

<u>Теорема 3.</u>

$$P(AB) = P(A) \cdot P_A(B) = P(B) \cdot P_B(A),$$

где $P_A(B)$ - условная вероятность события B при условии, что событие A уже наступило (аналогичный смысл имеет условная вероятность $P_B(A)$).

Если события независимые, то $P(AB) = P(A) \cdot P(B)$.

<u>Пример 1.</u>

Вероятность попадания в цель при одном выстреле из первого орудия равна 0,7, второго – 0,8. Найти вероятность поражения цели при одном залпе из двух орудий.

<u>Решение.</u>

Обозначим события: A – первое орудие попало в цель при одном выстреле, B – попало в цель второе орудие при одном выстреле. События совместные и независимые, значит, событие C (поражение мишени при залпе) можно рассматривать как сумму двух совместных событий.

По теореме сложения получим:

$$P(C) = P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B) =$$
$$= 0{,}7 + 0{,}8 - 0{,}7 \cdot 0{,}8 = 0{,}94.$$

Рассмотрим второй способ решения.

Цель будет поражена, если произойдет одно из трех несовместных событий: $A\overline{B}$ - попало в цель первое орудие и не попало второе, $\overline{A}B$ - не попало в цель первое орудие и попало второе, AB – попали в цель оба орудия. В этом случае, применив теоремы о вероятности суммы и произведения событий, получим:

$$P(C) = P(A\bar{B} + \bar{A}B + AB) = P(A)\cdot P(\bar{B}) + P(\bar{A})\cdot P(B) + P(A)\cdot P(B) =$$
$$= 0{,}7\cdot\ (1-0{,}8) + (1-0{,}7)\cdot 0{,}8 + 0{,}7\cdot 0{,}8 = 0{,}94.$$

Самое простое решение задачи получим, если все три несовместные события $A\bar{B}, \bar{A}B, AB$ объединим в одно, сказав «цель будет поражена, если попадает в цель хотя бы одно орудие» (событие С).

Противоположное этому событие $\bar{C}$ - «в цель не попало ни одно из орудий». По теореме о вероятности противоположных событий:

$$P(C) = 1 - P(\bar{C}) = 1 - \ P(\bar{A}\bar{B}) = 1 - P(\bar{A})\cdot P(\bar{B}) = 1-(1-0{,}7)\cdot(1-0{,}8) =$$
$$= 1 - 0{,}3\cdot 0{,}2 = 0{,}94.$$

<u>Пример 2.</u>

Студент пришел на экзамен, зная 15 из 20 вопросов программы. Найти вероятность того, что он знает все три предложенные ему экзаменатором вопроса.

<u>Решение.</u>

Событие А (студент знает все 3 вопроса) представляет собой произведение трех зависимых событий: A_1 (знает первый вопрос), A_2 (знает второй вопрос), A_3 (знает третий вопрос). Вычислим вероятности этих событий:

$$P(A_1) = \frac{15}{20} = \frac{3}{4}.$$

При условии, что студент знает первый вопрос, вероятность того, что он знает второй вопрос:

$$P_{A_1}(A_2) = \frac{14}{19},$$

т.к. вопросы не повторяются, и, если студент знает первый вопрос, то из оставшихся 19 вопросов он знает 14.

Предполагая, что студент знает и первый и второй вопросы, вычислим условную вероятность события, состоящего в том, что он знает третий вопрос: $P_{A_1A_2}(A_3) = \frac{13}{18}$.

По теореме умножения:

$$P(A) = P(A_1)\cdot P_{A_1}(A_2)\cdot P_{A_1A_2}(A_3) = \frac{15}{20}\cdot\frac{14}{19}\cdot\frac{13}{18} = 0{,}399.$$

<u>Пример 3.</u>

Из пяти букв разрезной азбуки составлено слово «КНИГА». Ребенок, не умеющий читать, рассыпал эти буквы и затем собрал в произвольном порядке. Найти вероятность того, что у него снова получилось слово «КНИГА».

Решение.

Выше эта задача уже решена. Приведем второй возможный вариант решения. Чтобы в порядке появления букв получилось слово «КНИГА», первой должна появиться буква К. Вероятность этого события $P(K) = \frac{1}{5}$ (из заданных пяти букв только одна буква К). Предполагая, что это событие произошло, найдем вероятность того, что второй появится буква «Н».

$$P_k(H) = \frac{1}{4}.$$

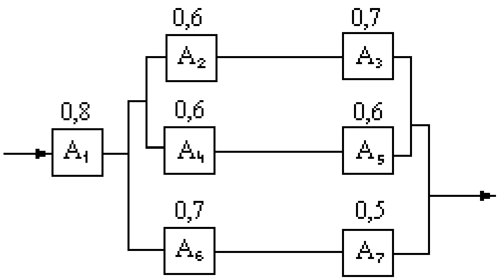
Предполагая, что произошли оба события, т.е. появились буквы К и Н, вычислим вероятность появления следующей буквы $P_{\text{кн}}(И) = \frac{1}{3}$.

Аналогично $P_{\text{кни}}(Г) = \frac{1}{2}$, $P_{\text{книг}}(A) = 1$. По теореме умножения вероятностей зависимых событий получим искомую вероятность:

$$P = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{120} = 0{,}0083.$$

Пример 4.

Найти вероятность безотказной работы прибора, схема которого показана на рисунке, если вероятности безотказной работы каждого блока прибора равна величинам, указанным на рисунке:



Решение.

Прибор будет работать, если будет работать A_1 и хотя бы одна из цепей A_2A_3, A_4A_5, A_6A_7.

Эти цепи работают, если работают все входящие в них блоки . Обозначим $B_1 = A_2A_3, B_2 = A_4A_5, B_3 = A_6A_7$.

Вероятность того, что не работает ни одна из цепей, равна $P(\overline{B}_1\overline{B}_2\overline{B}_3)$ Вероятность того, что работает хотя бы одна из цепей, равна $1 - P(\overline{B}_1\overline{B}_2\overline{B}_3)$.

Вероятность безотказной работы прибора равна

$$P = P(A_1) \cdot (1 - P(\overline{B}_1\overline{B}_2\overline{B}_3)) .$$

По данным задачи и по правилам действий над случайными событиями находим:

$$P(B_1) = P(A_2A_3) = P(A_2) \cdot P(A_3) = 0{,}6 \cdot 0{,}7 = 0{,}42,$$

$$P(B_2) = P(A_4 \cdot A_5) = P(A_4) \cdot P(A_5) = 0{,}6 \cdot 0{,}6 = 0{,}36.$$

$$P(B_3) = P(A_6A_7) = P(A_6) \cdot P(A_7) = 0{,}7 \cdot 0{,}5 = 0{,}35.$$

$$P(\overline{B}_1) = 1 - \ 0{,}42 = 0{,}58, \quad P(\overline{B}_2) = 1 - 0{,}36 = 0{,}64$$

$$P(\overline{B}_3) = 1 - 0{,}35 = 0{,}65.$$

$$P(\overline{B}_1\overline{B}_2\overline{B}_3) = P(\overline{B}_1) \cdot P(\overline{B}_2) \cdot P(\overline{B}_3) = 0{,}58 \cdot 0{,}64 \cdot 0{,}65 = 0{,}24,$$

$$P = 0{,}8 \cdot (1 - 0{,}24) = 0{,}8 \cdot 0{,}76 = 0{,}61.$$

1.3. Формула полной вероятности. Формула Бейеса.

Пусть $B_1, B_2, ..., B_n$ - несовместные события (гипотезы), образующие полную группу.

Если событие A может появиться только при появлении одного из этих событий, то вероятность события A вычисляется по формуле полной вероятности:

$$P(A) = P(B_1)P_{B_1}(A) + P(B_2)P_{B_2}(A) + ... + P(B_n)P_{B_n}(A) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i)P_{B_i}(A),$$

где $P(B_i)$ – вероятность события B_i, $P_{B_i}(A)$ – условная вероятность события A при условии, что наступило событие B_i.

Если до испытания вероятности гипотез были $P(B_1), P(B_2), ..., P(B_n)$, а в результате испытания появилось событие A, то с учетом того, что результат испытания известен, условные вероятности гипотез вычисляются по формулам Бейеса:

$$P_A(B_j)=\frac{P(B_j)\cdot P_{B_j}(A)}{\sum\limits_{i=1}^{n}P(B_i)\cdot P_{B_i}(A)}\quad,\quad (\,j=1,2\ldots n\,)$$

Формулы Бейеса позволяют переоценить вероятности гипотез после того, как становится известным результат испытания (событие A наступило).

Пример 1.

На склад поступает продукция трех фабрик, причем продукция первой фабрики составляет 20 %, второй 46 %, третьей 34 %. Известно также, что средний процент нестандартных деталей для первой фабрики равен 3%, второй – 2%, третьей – 1%.

1. Найти вероятность того, что наудачу взятая деталь будет нестандартной.
2. Найти вероятность того, что деталь изготовлена на первой фабрике, если она оказалась нестандартной.
3. Найти вероятность того, что деталь изготовлена на второй фабрике, если она оказалась стандартной.

Решение.

1. Наудачу взятая деталь может быть изготовлена или на первой фабрике (событие B_1), или на второй (событие B_2), или на третьей (событие B_3). События несовместны и составляют полную группу. Вероятности событий B_i даны в условии задачи: $P(B_1)=0{,}20$, $P(B_2)=0{,}46$, $P(B_3)=0{,}34$.

Известны и условные вероятности. Вероятность того, что наудачу взятая деталь будет нестандартной (событие A) при условии, что деталь изготовлена на первой фабрике (событие B_1): $P_{B_1}(A)=0{,}03$.

Аналогично $P_{B_2}(A)=0{,}02$, $P_{B_3}(A)=0{,}01$.

Событие A (наудачу взятая деталь будет нестандартной) может произойти только вместе с одним из несовместных событий B_i, поэтому полную вероятность события A определим по формуле полной вероятности:

$$P(A)=P(B_1)\cdot P_{B_1}(A)+P(B_2)\cdot P_{B_2}(A)+P(B_3)\cdot P_{B_3}(A)=$$
$$=0{,}2\cdot 0{,}03+0{,}46\cdot 0{,}02+0{,}34\cdot 0{,}01=0{,}0186\approx 0{,}02.$$

2. Известно, что событие A уже произошло, требуется найти послеопытную вероятность гипотезы B_1. По формуле Бейеса:

$$P_A(B_1) = \frac{P(B_1)\cdot P_{B_1}(A)}{P(B_1)P_{B_1}(A) + P(B_2)P_{B_2}(A) + P(B_3)P_{B_3}(A)} =$$

$$= \frac{0,2\cdot 0,03}{0,2\cdot 0,03 + 0,46\cdot 0,02 + 0,34\cdot 0,01} = 0,322.$$

3. По условию задачи деталь оказалась стандартной, т.е. в принятых нами обозначениях произошло событие $\overline{A}$. Требуется найти послеопытную вероятность события B_2.

По формуле Бейеса:

$$P_{\overline{A}}(B_2) = \frac{P(B_2)\cdot P_{B_2}(\overline{A})}{P(\overline{A})}$$

События A (наудачу взятая деталь нестандартна) и $\overline{A}$ (наудачу взятая деталь стандартна) противоположны, поэтому:

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A).$$

$$P(\overline{A}) = 1 - 0,0186 = 0,9814.$$

Аналогично вычисляем $P_{B_2}(\overline{A})$: $P_{B_2}(\overline{A}) = 1 - P_{B_2}(A) = 1 - 0,02 = 0,98.$

Вычисленные значения подставим в формулу:

$$P_{\overline{A}}(B_2) = \frac{0,46\cdot 0,98}{0,9814} = 0,459.$$

Пример 2.

Имеется 5 винтовок, из которых 3 с оптическим прицелом. Вероятность попадания в цель при одном выстреле из винтовки с оптическим прицелом – 0,9, без оптического прицела – 0,7. Произведенные 4 выстрела из наудачу взятой винтовки дали результат – три попадания, один промах. Определить вероятность того, что выстрелы производились из винтовки с оптическим прицелом.

Решение.

Событие B_1 - «выбрана винтовка с оптическим прицелом». Событие B_2 - «выбрана винтовка без оптического прицела».

Так как всего винтовок 5, а с оптическим прицелом 3, то по классическому определению вероятность $P(B_1) = \frac{3}{5} = 0,6$. Аналогично

находим $P(B_2)=\frac{2}{5}=0{,}4$. Гипотезы B_1, B_2 образуют полную группу. Событие A – «из произведенных 4-х выстрелов есть три попадания и один промах».
Используя формулу Бернулли (см.п.4) находим условные вероятности:

$$P_{B_1}(A)=P_4(3)=C_4^3 p^3 q^1 = 4\cdot(0{,}9)^3\cdot 0{,}1=0{,}29,$$
$$P_{B_2}(A)=P_4(3)=C_4^3 p^3 q^1 = 4\cdot(0{,}7)^3\cdot 0{,}3=0{,}41.$$

По формуле полной вероятности находим вероятность события A:

$$P(A)=P(B_1)P_{B_1}(A)+P(B_2)P_{B_2}(A)=0{,}6\cdot 0{,}29+0{,}4\cdot 0{,}41=0{,}34.$$

По формуле Бейеса:

$$P_A(B_1)=\frac{P(B_1)P_{B_1}(A)}{P(A)}=\frac{0{,}6\cdot 0{,}29}{0{,}34}=0{,}51.$$

Сравнивая $P(B_1)$ и $P_A(B_1)$, замечаем, что после того как стал известен результат испытания, вероятность первой гипотезы уменьшилась. На эту переоценку повлиял один промах (см.пример 2, п.5).

1.4. Повторение испытаний. Формула Бернулли.

Вероятность того, что в n независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность появления события равна p, событие наступит ровно k раз (безразлично в какой последовательности), равна:

$$P_n(k)=C_n^k\cdot p^k(1-p)^{n-k}.$$

Наивероятнейшее число k_0 наступлений события определяется из двойного неравенства:

$$p(n+1)-1\le k_0\le p(n+1).$$

<u>Локальная теорема Лапласа.</u> Вероятность того, что в n независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность появления события равна p, событие наступит ровно k раз (безразлично, в какой последовательности), приближенно равна (тем точнее, чем больше n)

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi(x)$$

Здесь: $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{\frac{-x^2}{2}}, x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}$.

Таблица значений функции $\varphi(x)$ для положительных x приведена в приложении 1; для отрицательных x пользуются этой же таблицей (функция $\varphi(x)$ четная, следовательно, $\varphi(-x) = \varphi(x)$).

<u>Интегральная теорема Лапласа.</u> Вероятность того, что в n независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность появления события равна p, событие наступит не менее k_1 раз и не более k_2 раз, приближенно равна:

$$P_n(k_1; k_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1) .$$

Здесь: $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{\frac{-x^2}{2}} dx$ - функция Лапласа,

$$x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}, \quad x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}.$$

Таблица значений функции Лапласа для положительных x $(0 \le x \le 5)$ приведена в приложении 2; для x>5 полагают Ф(x)=0,5. Для x<0 используют эту же таблицу, учитывая, что функция Лапласа нечетная $(\Phi(-x) = -\Phi(x))$.

<u>Пример 1.</u>

Производится 5 выстрелов. Вероятность попадания при каждом выстреле равна 0,7. Какова вероятность того, что будет: 1) точно три попадания? 2) не менее четырех попаданий? 3) не более трех попаданий?

<u>Решение.</u>

1) производится n=5 независимых испытаний с постоянной вероятностью появления события (попадания в цель) в каждом из них (p=0,7). Вероятность того, что будет точно k=3 попадания, вычислим по формуле Бернулли:

$$P_5(3) = C_5^3 \cdot 0{,}7^3 (1 - 0{,}7)^2 = 10 \cdot 0{,}7^3 \cdot 0{,}3^2 = 0{,}3087.$$

2) событие А («при 5 выстрелах будет не менее 4-х попаданий») можно рассматривать как сумму несовместных событий В («будет точно 4 попадания») и С («будет точно 5 попаданий»). Вероятности событий В и С определим по формуле Бернулли:

$$P(B) = P_5(4) = C_5^4 \cdot 0{,}7^4 \cdot 0{,}3^1 = 0{,}36015$$

$$P(C) = P_5(5) = 0{,}7^5 = 0{,}16807.$$

По теореме сложения:

$$P(A) = P(B + C) = P(B) + P(C) = 0{,}36015 + 0{,}16807 = 0{,}528$$

3) рассуждая аналогично, можно вычислить вероятность события «будет не более трех попаданий» как сумму вероятностей несовместных событий:

$$P_5(0) + P_5(1) + P_5(2) + P_5(3)\ ,$$

но задача решается гораздо легче, если обратить внимание на то, что события A («будет не менее 4-х попаданий») и $\overline{A}$ («будет не более трех попаданий») противоположны, тогда:

$$P(A) = 1 - P(A) = 1 - 0{,}528 = 0{,}472.$$

<u>Пример 2.</u>

Вероятность поражения мишени при одном выстреле равна 0,8. Найти вероятность того, что при 100 выстрелах:

1) мишень будет поражена ровно 75 раз,
2) мишень будет поражена не менее 75 раз.

<u>Решение.</u>

1) По условию задачи производится n=100 независимых испытаний с постоянной вероятностью (p=0,8) появления события (поражения мишени) в каждом из них. Вероятность события A («мишень будет поражена ровно 75 раз») определим по локальной теореме Лапласа.

Вычислим предварительно:

$$\sqrt{npq} = \sqrt{100 \cdot 0{,}8(1 - 0{,}8)} = 4,$$

$$x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}} = \frac{75 - 100 \cdot 0{,}8}{4} = -\frac{5}{4} = -1{,}25.$$

По таблице (приложение 1) определим значение

$$\varphi(x) = \varphi(-1{,}25) = \varphi(1{,}25) = 0{,}1826.$$

Окончательно по локальной теореме Лапласа:

$$P_n(k) \approx \frac{\varphi(x)}{\sqrt{npq}},$$

$$P_{100}(75) \approx \frac{0{,}1826}{4} = 0{,}0456.$$

2) Воспользуемся интегральной теоремой Лапласа при n=100, p=0,8, $k_1 = 75, k_2 = 100$.

$$P_n(k_1; k_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1),$$

где $\sqrt{npq} = 100 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2 = 4$,

$$x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{75 - 100 \cdot 0{,}8}{4} = -1{,}25, \quad x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{100 - 100 \cdot 0{,}8}{4} = \frac{20}{4} = 5.$$

По таблице значений функции Ф(x) (приложение 2) определим:

$$\Phi(x_1) = \Phi(-1{,}25) = -\Phi(1{,}25) = -0{,}3944,$$

$$\Phi(x_2) = \Phi(5) = 0{,}5.$$

Подставив найденные значения в формулу, получим:

$$P_{100}(75;100) = \Phi(5) - \Phi(-1{,}25) = \Phi(5) + \Phi(1{,}25) = 0{,}5 + 0{,}3944 = 0{,}8944.$$

Пример 3.

Вероятность того, что пассажир опоздает к отправлению поезда, равна 0,02. Найти наивероятнейшее число опоздавших из 855 пассажиров.

Решение.

Производится n=855 независимых испытаний с постоянной вероятностью (p=0,02) появления события A (опоздание к отправлению поезда) в каждом из них. Наивероятнейшее число наступлений события определим из двойного неравенства:

$$855 \cdot 0{,}02 + 0{,}02 - 1 \le k_0 \le 855 \cdot 0{,}02 + 0{,}02;$$

$$16{,}12 \le k_0 \le 17{,}12;$$

$$k_0 = 17.$$

Пример 4.

Сколько нужно взять деталей, чтобы наивероятнейшее число годных было равно 50, если вероятность того, что наудачу взятая деталь будет бракованной, равна 0,1?

Решение.

Воспользуемся формулой наивероятнейшего числа появлений события в n независимых испытаниях, подставив $k_0 = 50$, $p = 0{,}9$.

$$0{,}9n + 0{,}9 - 1 \le 50 \le 0{,}9n + 0{,}9.$$

Решив двустороннее неравенство, получим значение n:

$$0{,}9n + 0{,}9 - 1 \le 50, \qquad 50 \le 0{,}9n + 0{,}9,$$

$$0{,}9n \le 50{,}1, \qquad 0{,}9n \le 49{,}1,$$

$$n \le 55{,}5, \qquad n \ge 54{,}5,$$

Следовательно, n=55.

1.5. Случайные величины.

Случайной называют величину, которая в результате испытания примет одно и только одно возможное значение, наперед неизвестное и зависящее от случайных причин, которые заранее не могут быть учтены.

Дискретной (прерывной) называют случайную величину, которая принимает отдельные, изолированные возможные значения с определенными вероятностями.

Непрерывной называют случайную величину, возможные значения которой непрерывно заполняют какой-то интервал.

Законом распределения случайной величины называется всякое соотношение, устанавливающее связь между возможными значениями случайной величины и соответствующими им вероятностями.

Дискретную случайную величину можно задать в виде ряда распределения:

x_i	x_1	x_2	...	x_n
p_i	p_1	p_2	...	p_n

Непрерывная случайная величина задается или *функцией распределения вероятностей:*

$$F(x) = P(X < x)\ ,$$

или *плотностью распределения вероятностей*:

$$f(x) = F'(x)\ .$$

Функция распределения вероятностей выражается через плотность распределения формулой:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt.$$

Вероятность попадания случайной величины в заданный интервал:

$$P(\alpha \le X \le \beta) = F(\beta) - F(\alpha) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx.$$

Основными числовыми характеристиками случайных величин являются:

1) математическое ожидание M(X):

$$M(X)=\sum_{i=1}^{n} x_i p_i \text{ - для дискретной случайной величины,}$$

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx \text{ - для непрерывной случайной величины.}$$

2) дисперсия D(X):

$$D(X)=\sum_{i=1}^{n}(x_i - M(X))^2 P_i \text{ - для дискретной случайной величины,}$$

$$D(X)=\int_{-\infty}^{\infty}(x - M(X))^2 f(x) dx \text{ - для непрерывной случайной величины.}$$

3) среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$:

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)} .$$

Пример 1.

Вероятность поражения цели при каждом выстреле постоянна и равна 0,8. Рассматривается случайная величина X – число попаданий при пяти выстрелах. Определить закон распределения вероятностей случайной величины. Найти математическое ожидание и дисперсию.

Решение.

Дискретная случайная величина (ДСВ) X может принимать шесть возможных значений:

$$x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 2, x_4 = 3, x_5 = 4, x_6 = 5.$$

Вероятности p_i находим по формуле Бернулли:

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}, \quad p = 0{,}8, \quad q = 1 - p = 0{,}2, \quad n = 5.$$

$$p_1 = P(X=0) = C_5^0 \cdot 0{,}8^0 \cdot 0{,}2^5 = 0{,}0003,$$

$$p_2 = P(X=1) = C_5^1 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2^4 = 0{,}0064,$$

$$p_3 = P(X=2) = C_5^2 \cdot 0{,}8^2 \cdot 0{,}2^3 = 0{,}0512,$$

$$p_4 = P(X=3) = C_5^3 \cdot 0{,}8^3 \cdot 0{,}2^2 = 0{,}2048,$$

$$p_5 = P(X=4) = C_5^4 \cdot 0{,}8^4 \cdot 0{,}2 = 0{,}4096,$$

$$p_6 = P(X=5) = C_5^5 \cdot 0{,}8^5 \cdot 0{,}2^0 = 0{,}3277.$$

Следует помнить, что $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1.$

Закон распределения вероятностей принимает вид:

x_i	1	2	3	4	5	6

p_i	0,0003	0,0064	0,0512	0,2048	0,4096	0,3277

Находим математическое ожидание дискретной случайной величины:

$$M(X)=\sum_{i=1}^{6} x_i p_i = 0\cdot\ 0{,}0003+1\cdot\ 0{,}0064+2\cdot\ 0{,}0512+3\cdot 0{,}2048+4\cdot\ 0{,}4096+$$
$$+5\cdot\ 0{,}3277=\ 0{,}0000+\ 0{,}0064+\ 0{,}1024+\ 0{,}6144+\ 1{,}6384+\ 1{,}6385=\ 4{,}0001.$$

Дисперсия случайной величины X равна:

$$D(X)=\sum_{i=1}^{6}(x_i-M(X))^2 p_i=(0-4{,}0001)^2\cdot 0{,}0003+(1-4{,}0001)^2\cdot 0{,}0064+$$
$$+(2-\ 4{,}0001)^2\cdot\ 0{,}0512+\ (3-4{,}0001)^2\cdot\ 0{,}2048+\ (4-4{,}0001)^2\cdot\ 0{,}4096+$$
$$+(5-\ 4{,}0001)^2\cdot 0{,}3277=0{,}0048+0{,}0576+0{,}2048+0{,}2048+0{,}0000+$$
$$+0{,}3276=0{,}7996.$$

Пример 2.

Вероятность попадания при каждом выстреле из винтовки с оптическим прицелом равна 0,9, без оптического прицела – 0,7. Производится 4 выстрела. Рассматриваются случайные величины X и Y – число попаданий при стрельбе из винтовки с оптическим прицелом и без оптического прицела. Сравнить законы распределений случайных величин.

Решение.

Обе случайные величины могут принимать одинаковые возможные значения от 0 до 4. Используя формулу Бернулли $P_n(k)=C_n^k p^k q^{n-k}$ находим вероятности возможных значений (в первом случае при p=0,9 и $q=0{,}1$, во втором случае при p=0,7 и $q=0{,}3$). Получаем законы распределения вероятностей:

x_i	0	1	2	3	4
p_i	0,0001	0,0036	0,0486	0,2916	0,6561

y_i	0	1	2	3	4
p_i	0,0081	0,0756	0,2646	0,4116	0,2401

Четыре вероятности из второй таблицы больше, чем соответствующие вероятности из первой таблицы, т.е. из винтовки без оптического прицела более вероятно не сделать ни одного попадания, одно попадание, два попадания и три попадания из четырех, чем из винтовки с оптическим прицелом. И только вероятность попасть 4 раза из 4-х для винтовки с оптическим прицелом выше (причем почти в три раза), чем для винтовки без оптического прицела. Наибольшие значения вероятности имеют в первом случае при $x_4 = 3, x_5 = 4,$ во втором случае при $y_3 = 2, y_4 = 3.$ Это легко объяснить, так как M(X)=3,6, M(Y)=2,8.

Пример 3.

Непрерывная случайная величина (НСВ) X задана функцией распределения вероятностей:

$$F(x) = \begin{cases} 0 \quad , & \text{если } x \le 0 \\ a(1-\cos x), & \text{если } 0 < x \le \pi \\ 1 \quad , & \text{если } \quad x > \pi \end{cases}$$

Определить значение постоянной a. Найти плотность распределения вероятностей f(x). Построить графики плотности и функции распределения. Вычислить вероятность попадания НСВ X в интервал от $\frac{\pi}{4}$ до $\frac{\pi}{2}$. Определить математическое ожидание, дисперсию, среднеквадратическое отклонение случайной величины X.

Решение.

1. Плотность распределения вероятностей НСВ есть первая производная от функции распределения, поэтому:

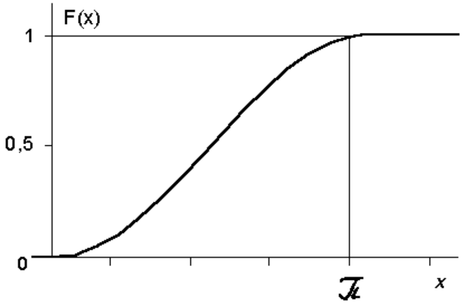
$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } \quad x \le 0 \\ a \sin x, & \text{если } \quad 0 < x \le \pi \\ 0, & \text{если } \quad x > \pi \end{cases}$$

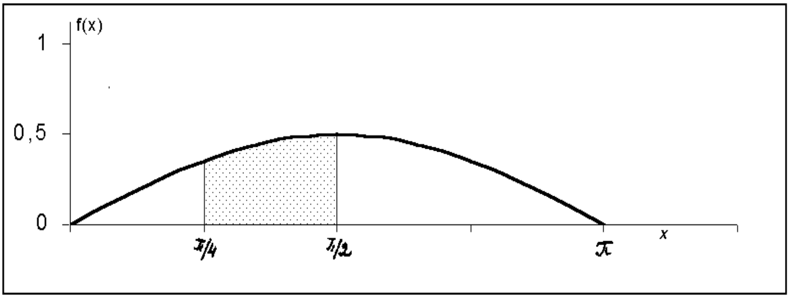
2. Постоянную a определяем из свойства плотности распределения вероятностей: $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1;$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{0} f(x)dx + \int\limits_{0}^{\pi} f(x)dx + \int\limits_{\pi}^{\infty} f(x)dx = = \int\limits_{0}^{\pi} a \sin x dx = -a \cos x\Big|_0^{\pi} = 2a = 1$$

$$\Rightarrow a = \frac{1}{2}.$$

3. Строим графики функций F(x) и f(x), определяя значения этих функций в некоторых характерных точках (например, при $x = \frac{\pi}{4}$; $x = \frac{\pi}{2}$ $x = \frac{3}{4}\pi$).





4. Находим вероятность попадания НСВ X в заданный интервал:

$$P(\frac{\pi}{4} < X < \frac{\pi}{2}) = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}\sin x dx = = -\frac{1}{2}\cos x\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{2}(\cos\frac{\pi}{2} - \cos\frac{\pi}{4}) = 0{,}3536.$$

На графике плотности распределения вероятность попадания НСВ X в интервал $(\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2})$ выражается площадью криволинейной трапеции (заштрихована).

5. Находим математическое ожидание:

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_{0}^{\pi} x\cdot\frac{1}{2}\sin x dx = -\frac{1}{2}\int_{0}^{\pi} xd(\cos x) =$$

$$= -\frac{1}{2}x\cos x\Big|_0^{\pi} + \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\cos x dx = -\frac{1}{2}\pi\cos\pi + \frac{1}{2}0\cos 0 + \frac{1}{2}\sin x\Big|_0^{\pi} =$$

$$= \frac{\pi}{2} + 0 + \frac{1}{2}\sin\pi - \frac{1}{2}\sin 0 = \frac{\pi}{2}.$$

6. Дисперсию можно найти как математическое ожидание квадрата отклонения, т.е.

$$D(X) = M(X - M(X))^2 = \int_{-\infty}^{\infty}(x - M(X))^2 f(x)dx.$$

Нахождение дисперсии можно упростить, воспользовавшись теоремой, которая утверждает, что дисперсия равна разности между математическим ожиданием квадрата случайной величины X и квадратом ее математического ожидания:

$$D(X) = M(X^2) - M^2(X)$$

Тогда $D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx - M^2(X).$

Найдем интеграл, применяя дважды формулу интегрирования по частям:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx = \int_0^{\pi} x^2 \frac{1}{2}\sin x dx = -\frac{1}{2}\int_0^{\pi} x^2 d(\cos x) = -\frac{1}{2}x^2\cos x\Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} x\cos x dx =$$

$$= -\frac{1}{2}\pi^2\cos\pi + \frac{1}{2}\cdot 0^2\cos 0 + \int_0^{\pi} x d(\sin x) = \frac{\pi^2}{2} + x\sin x\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\sin x dx =$$

$$= \frac{\pi^2}{2} + \pi\sin\pi - 0\sin 0 + \cos x\Big|_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{2} + \cos\pi - \cos 0 = \frac{\pi^2}{2} - 2;$$

$$D(X) = \frac{\pi^2}{2} - 2 - \frac{\pi^2}{4} = \frac{\pi^2}{4} - 2 \approx 0{,}467.$$

1.6. Законы равномерного, нормального и показательного распределений.

При решении практических задач приходится сталкиваться с различными законами распределения вероятностей случайных величин. Наиболее распространенные из них имеют конкретные названия, например, законы равномерного, нормального и показательного распределений.

1) Распределение вероятностей называют *равномерным,* если на конечном интервале, которому принадлежат все возможные значения

случайной величины, плотность распределения сохраняет постоянное значение: f(x)=const.

Оказывается, что если все возможные значения равномерно распределенной случайной величины X принадлежат отрезку $[a,b]$, то $f(x)=\dfrac{1}{b-a}$ на этом отрезке и f(x)=0 вне этого отрезка;

$$M(X)=\frac{b+a}{2};\quad D(X)=\frac{(b-a)^2}{12},\quad \sigma(X)=\frac{b-a}{2\sqrt{3}}.$$

Вероятность попадания НСВ X в интервал (α,β), который принадлежит отрезку $[a,b]$, равна отношению длины интервала (α,β) к длине отрезка $[a,b]$: $P(\alpha<X<\beta)=\dfrac{\beta-\alpha}{b-a}$.

2) *Нормальным* называют распределение вероятностей НСВ X, которое описывается функцией плотности:

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

Нормальное распределение определяется двумя параметрами a и σ. Эти параметры имеют определенный вероятностный смысл:

$$M(x)=a;\quad \sigma(x)=\sigma.$$

Вероятность попадания в заданный интервал (α,β) нормальной случайной величины X находится с помощью табулированной функции Лапласа (см. приложение 2):

$$P(\alpha<X<\beta)=\Phi(\frac{\beta-a}{\sigma})-\Phi(\frac{\alpha-a}{\sigma})$$

3) *Показательным* (экспоненциальным) называют распределение вероятностей НСВ X, которое описывается функцией плотности:

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ \lambda e^{-\lambda x}, & x\ge 0.\end{cases}$$

Показательное распределение определяется одним параметром λ $(\lambda>0)$.

$$M(X)=\frac{1}{\lambda};\ D(X)=\frac{1}{\lambda^2};\ \sigma(X)=\frac{1}{\lambda}.$$

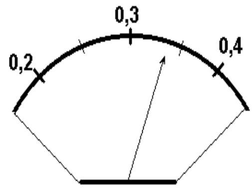
$$P(\alpha<X<\beta)=e^{-\lambda\alpha}-e^{-\lambda\beta}.$$

Пример 1.

Цена деления шкалы амперметра равна 0,1 А. Показания округляют до ближайшего деления. Найти вероятность того, что при отсчете будет сделана ошибка, превышающая 0,02 А.

Решение.

Ошибку округления отсчета можно рассматривать как случайную величину X, которая распределена равномерно в интервале между двумя соседними делениями. Плотность распределения вероятности : $f(x)=\frac{1}{b-a}$, где b-a – длина интервала, в котором заключены возможные значения X, вне этого интервала f(x)=0. В данной задаче b-a=0,1, поэтому f(x)=10. Ошибка отсчета превысит 0,02 А, если НСВ X принадлежит интервалу (0,02;0,08). Следовательно, искомая вероятность равна:



$$P(0{,}02<X<0{,}08)=\int_{0{,}02}^{0{,}08}10dx=0{,}6.$$

Пример 2.

Случайные ошибки измерения X подчинены нормальному закону со средним квадратическим отклонением а=0 мм. Найти вероятность того, что из трех независимых измерений ошибка хотя бы одного не превзойдет по абсолютной величине 0,4 мм.

Решение.

Обозначим через А – событие, состоящее в том, что в одном измерении ошибка не превзойдет по абсолютной величине 0,4 мм.

$$P=P(A)=P(|X|<0{,}4)=P(-0{,}4<X<0{,}4)=\Phi\left(\frac{0{,}4-0}{2}\right)-\Phi\left(\frac{-0{,}4-0}{2}\right)=$$

$$=2\Phi(0{,}2)=2\cdot 0{,}0793=0{,}1586.$$

Производятся независимые испытания, поэтому можно применить формулу Бернулли. Вероятность интересующего нас события можно найти как сумму вероятностей $P_3(1)+P_3(2)+P_3(3)$. Но проще ввести противоположное событие «ошибка во всех измерениях превзойдет по абсолютной величине 0,4 мм» и тогда искомая вероятность равна:

$$1-P_3(0)=1-C_3^0\cdot P^0(1-P)^3=1-(1-P)^3=1-0{,}8414^3=0{,}4043.$$

<u>Пример 3.</u>

Длительность времени безотказной работы элемента имеет показательное распределение : $F(t)=1-e^{-0{,}01t}$ $(t\geq 0)$. Найти вероятность того, что элемент проработает безотказно в течение 50 часов.

<u>Решение.</u>

НСВ Т – время безотказной работы элемента. F(t)=P(T<t). Нам нужно найти вероятность противоположного события:

$$P(T\geq t)=1-P(T<t)=1-F(t)=1-1+e^{-0{,}01t}=e^{-0{,}01t}.$$

В нашем примере t=50 часов, поэтому $P(T\geq 50)=e^{-0{,}01\cdot 50}=\frac{1}{\sqrt{e}}=0{,}607.$

1.7. Цепи Маркова.

Цепью Маркова называют последовательность испытаний, в каждом из которых система (электронная, механическая и т.д.) принимает только одно из n состояний полной группы, причем условная вероятность $P_{ij}(s)$ того, что в S – ом испытании система будет находиться в состоянии j , при условии, что после (S-1) – го испытания она находилась в состоянии i, не зависит от результатов остальных, ранее произведенных испытаний.

Цепью Маркова с дискретным временем называют цепь, изменение состояний которой происходит в определенные моменты времени $t_1, t_2, \ldots$. В этом случае случайный процесс, протекающий в системе, называется процессом с дискретным временем.

Однородной называют цепь Маркова, если условная вероятность $P_{ij}(S)$ не зависит от номера испытания, т.е. от S. Поэтому вместо $P_{ij}(S)$ пишут просто P_{ij}.

Для описания поведения марковского случайного процесса, протекающего в системе с дискретными состояниями $X_1, X_2, ... X_n$ используется вектор распределения вероятностей состояний в момент t:

$$P(t) = (P_1(t), P_2(t), ..., P_n(t)),$$

где $P_i(t)$ - вероятность того, что система в момент времени t находится в состоянии X_i. Естественно, что : $\sum_{i=1}^{n} P_i(t) = 1$.

Для получения вектора распределения вероятностей состояний P(t) необходимо задать вектор начального распределения вероятностей состояний: $P(0) = (P_1(0), P_2(0), ..., P_n(0))$ и матрицу переходных вероятностей за один шаг:

$$M_1 = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} \dots & P_{1n} \\ P_{21} & P_{22} \dots & P_{2n} \\ P_{n1} & P_{n2} \dots & P_{nn} \end{pmatrix}$$

Справедливо следующее соотношение, называемое равенством Маркова в матричной форме:

$$M_k = M_1^{\ k},$$

где $M_к$ - матрица переходных вероятностей за k шагов.

Вектор распределения вероятностей состояний для k –го шага получим, используя соотношение:

$$P(k) = P(0) \cdot M_1^k$$

Пример 1.

Марковский процесс с дискретными состояниями и дискретным временем задан матрицей перехода и начальным вектором распределения вероятностей состояний P(0):

$$M_1 = \begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}6 \\ 0{,}3 & 0{,}7 \end{pmatrix}, \quad P(0) = (0{,}1,\ 0{,}9)\,.$$

Найти вектор распределения вероятностей на втором шаге.

Решение.

$$M_2 = M_1^2 = M_1\ M_2 \quad = \quad \begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}6 \\ 0{,}3 & 0{,}7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}6 \\ 0{,}3 & 0{,}7 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0{,}4 \cdot 0{,}4 + 0{,}6 \cdot 0{,}3 & 0{,}4 \cdot 0{,}6 + 0{,}6 \cdot 0{,}7 \\ 0{,}3 \cdot 0{,}4 + 0{,}7 \cdot 0{,}3 & 0{,}3 \cdot 0{,}6 + 0{,}7 \cdot 0{,}7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}34 & 0{,}66 \\ 0{,}33 & 0{,}67 \end{pmatrix}$$

$$M(2) = M(0) \cdot M_1^2 = (0{,}1,\ 0{,}9) \cdot \begin{pmatrix} 0{,}34 & 0{,}66 \\ 0{,}33 & 0{,}67 \end{pmatrix} = (0{,}331,\ 0{,}669)\ .$$

Итак, система, которая в начальный момент времени занимала второе состояние с вероятностью 0,9, после первого шага занимает это же состояние с вероятностью 0,669.

ПРАВИЛА ВЫПОЛНЕНИЯ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ

Контрольные задания по теории вероятностей пронумерованы от № 1 до № 275, что позволяет получить 25 индивидуальных вариантов по 11 задач, охватывающих основные разделы курса.

Номер первой задачи контрольной работы или выбирается по порядковому номеру Ф.И.О. студента в академическом журнале группы, или назначается преподавателем. Номера последующих задач получаются последовательным увеличением предыдущего номера на число 25. Так, например, студент, имеющий порядковый номер 17, должен выполнить задания № 17,42,67,92,117,142,167,192,217,242, 267.

При выполнении контрольной работы надо строго придерживаться указанных ниже правил.

1. Контрольную работу следует выполнять в отдельной тетради.
2. Заголовок располагается на обложке тетради и должен содержать фамилию и инициалы студента, шифр, дату отсылки, почтовый адрес. Решения задач располагать в порядке увеличения номеров, выписывая полностью их условия.
3. Решения задач излагать подробно и аккуратно.
4. Контрольные работы, выполненные не по своему варианту, не зачитываются.

ЗАДАЧИ ДЛЯ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ
ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

1. Студент знает 15 вопросов из 25 вопросов программы. Найти вероятность того, что студент : 1) знает все три предложенные ему вопроса, 2) знает один вопрос из трех предложенных ему.

2. Король проводит рыцарский турнир, в котором среди 8 рыцарей участвуют 2 близнеца. Два участника поединка выбираются по жребию. Какова вероятность того, что в поединке встретятся близнецы?

3. На электростанции 15 сменных инженеров, из них 3 женщины. В смену занято 3 человека. Найти вероятность того, что в случайно выбранную смену мужчин окажется не менее 2.

4. Для производственной практики на 30 студентов предоставлено 15 мест в Северодонецке, 8 – в Лисичанске, 7 – в Рубежном. Какова вероятность того, что два определенных студента попадут на практику в один город ?

5. 12 рабочих получили путевки в 4 дома отдыха: 3 в первый, 3 – во второй, 2 – в третий и 4 – в четвертый. Чему равна вероятность того, что данные трое рабочих поедут в один дом отдыха?

6. На 30 одинаковых жетонах написаны 30 двухзначных чисел от 11 до 40. Жетоны помещены в пакет и тщательно перемешаны. Какова вероятность вынуть наугад жетон с номером, кратным 3 или 2?

7. Брошены две игральные кости. Чему равна вероятность того, что хотя бы на одной из них выпадет 5 очков?

8. В денежно-вещевой лотерее на 1000 билетов приходится 24 денежных и 10 вещевых выигрышей. Покупаются 2 билета. Какова вероятность выигрыша: 1) хотя бы на один билет, 2) по первому билету денег, а по второму – вещей?

9. Бросаются 2 игральные кости. Какова вероятность того, что сумма очков на них окажется не меньше 8?

10. В коробке содержится 7 стандартных и 2 нестандартных детали. Извлекаются наугад по одной 2 детали. Определить вероятность того, что 1) обе детали будут стандартными, 2) первая стандартная, вторая нестандартная.

11. Две команды по 20 спортсменов производят жеребьевку для присвоения номеров участникам соревнования. Два брата входят в состав различных команд. Найти вероятность того, что братья будут участвовать в соревнованиях под одним и тем же номером 18.

12. В магазин поступила партия обуви одного фасона и размера, но разного цвета. Партия состоит из 40 пар черного цвета, 26 – коричневого, 22 – красного и 12 пар синего цвета. Какова вероятность того, что наудачу взятая коробка окажется с обувью красного или синего цвета?

13. В группе 25 студентов. Из них по математике отлично успевают 5 человек, хорошо – 12, удовлетворительно – 6 и слабо – 2. Преподаватель, не знакомый с группой, вызывает по списку одного из студентов. Определить вероятность того, что вызван будет отличник или хорошо успевающий студент.

14. Многолетними наблюдениями установлено, что в данном районе в сентябре 10 дней бывают дождливыми. Совхоз должен в течение первых трех дней сентября выполнить определенную работу. Определить вероятность того, что ни один из этих дней не будет дождливым.

15. Рабочий у конвейера при сборке механизма устанавливает в него 2 одинаковые детали. Берет он их случайным образом из имеющихся у него 10 штук. Среди деталей находятся 2 детали уменьшенного размера. Механизм не будет работать, если обе установленные детали будут уменьшенного размера. Определить вероятность того, что механизм будет работать.

16. Среди 50 электролампочек три нестандартные. Найти вероятность того, что две взятые одновременно электролампочки окажутся нестандартными.

17. В ящике среди 100 одинаковых по внешнему виду деталей 80 стандартных. Взяты две детали. Вычислить вероятности возможных при этом исходов.

18. Из партии, в которой 31 деталь без дефектов и 6 с дефектами, берут наудачу 3 детали. Чему равна вероятность того, что все 3 детали без дефектов?

19. Бросают две игральные кости. Определить вероятность того, что:
а) сумма числа очков не превосходит 13, б) произведение числа очков не превосходит 13, в) произведение числа очков делится на 13.

20. Имеются изделия четырех сортов, причем число изделий 1–го сорта равно 6, 2-го сорта – 3, 3-го сорта – 4, 4 – го сорта – 2. Для контроля наудачу берутся 9 изделий. Определить вероятность того, что среди них 3 первосортных, 3 второсортных, 2 третьего сорта и 1 четвертого сорта.

21. Среди 8 лотерейных билетов 4 выигрышных. Наудачу взяли 3 билета. Определить вероятность того, что среди них 2 выигрышных.

22. В партии из 9 деталей 5 стандартных. Найти вероятность того, что среди шести взятых наудачу деталей 4 стандартных.

23. В ящике 17 деталей, среди которых 10 окрашенных. Сборщик наудачу извлекает 4 детали. Найти вероятность того, что извлеченные детали окажутся окрашенными.

24. В группе 11 студентов, среди которых 8 отличников. По списку наудачу отобраны 6 студентов. Найти вероятность того, что: а) среди отобранных студентов 5 отличников, б) все отобранные студенты отличники.

25. В коробке 6 одинаковых изделий, причем 4 из них окрашены. Наудачу извлечены 3 изделия. Найти вероятность того, что среди них:а) одно окрашенное изделие, б) все изделия окрашены, в) хотя бы одно окрашенное изделие.

26-50. В сигнализатор поступают сигналы от двух устройств, причем поступление каждого из сигналов равновозможно в любой момент промежутка времени длительностью T секунд. Моменты поступления сигналов независимы один от другого. Первый сигнал сохраняется в «памяти» t_1 секунд, второй - t_2 секунд. Сигнализатор срабатывает, если сигналы «накладываются» друг на друга. Найти вероятность того, что сигнализатор сработает за время T, если каждое из устройств пошлет по одному сигналу.

N задачи	T	t_1	t_2	N задачи	T	t_1	t_2
26	100	10	10	39	30	20	10
27	200	10	20	40	130	30	10
28	100	20	10	41	100	40	10
29	200	20	20	42	100	90	10
30	100	20	15	43	200	80	20
31	200	30	15	44	100	80	10
32	30	5	10	45	200	90	20
33	230	30	20	46	100	90	15
34	30	10	15	47	200	10	15
35	130	30	15	48	30	15	10
36	30	10	5	49	130	30	20
37	130	30	50	50	30	15	15
38	100	30	50				

51. Из аэровокзала отправились 2 автобуса-экспресса к трапам самолетов. Вероятность своевременного прибытия каждого автобуса в аэропорт равна 0,95. Найти вероятность того, что: 1) оба автобуса прибудут вовремя, 2) оба автобуса опоздают, 3) только один автобус прибудет вовремя.

52. Из трех орудий произведен залп по цели. Вероятность попадания в цель при одном выстреле из первого орудия равна 0,8, для второго и третьего орудий эти вероятности соответственно равны 0,6 и 0,9. Найти вероятность того, что : а) только один снаряд попадет в цель, б) два снаряда попадут в цель.

53. Вероятность хотя бы одного попадания в цель при двух выстрелах равна 0,99. Найти вероятность попадания при одном выстреле.
54. Вероятность попадания при одном выстреле 0,2. Стрельба прекращается при первом попадании. Найти вероятность того, что будет произведено ровно шесть выстрелов.
55. Вероятность попадания в цель при стрельбе из двух орудий равна 0,96. Найти вероятность попадания в цель первого орудия при одном выстреле, если для второго эта вероятность равна 0,7.
56. Вероятность того, что стрелок, произведя выстрел, выбьет 10 очков, равна 0,4, 9 очков – 0,3, 8 или меньше очков – 0,3. Найти вероятность того, что стрелок при одном выстреле выбьет не менее 9 очков.
57. В мастерской 2 мотора работают независимо друг от друга. Вероятность того, что в течение часа первый мотор не потребует внимание мастера, равна 0,9, для второго – 0,85. Найти вероятность того, что в течение часа ни один из моторов не потребует внимания мастера.
58. Три стрелка стреляют в цель независимо друг от друга. Вероятность попадания в цель для первого стрелка равна 0,6, для второго – 0,7, для третьего – 0,75. Найти вероятность по крайней мере одного попадания в цель, если каждый стрелок сделает по одному выстрелу.
59.Прибор состоит из трех узлов, каждый из которых, независимо от других, может в течение суток выйти из строя. Неисправность хотя бы одного узла выводит прибор из строя. Вероятность безотказной работы в течение суток первого узла равна 0,9, второго – 0,95, третьего – 0,85. Найти вероятность того, что в течение суток прибор будет работать безотказно.
60. При изготовлении детали заготовка должна пройти 4 операции. Предполагая появления брака на отдельных операциях событиями независимыми, найти вероятность изготовления стандартной детали, если вероятность брака на первой операции равна 0,02, на второй – 0,01, на третьей – 0,02, на четвертой – 0,03.
61. Произведен залп и двух орудий по цели. Вероятность попадания из первого орудия равна 0,85, из второго – 0,91. Найти вероятность поражения цели.
62. Рабочий обслуживает 3 станка. Вероятность того, что в течение часа станок не потребует внимания рабочего, равна для первого станка 0,9, для второго – 0,8, для третьего – 0,85. Найти вероятность того,что: 1) в течение часа ни один из станков не потребует внимания рабочего, 2) все станки потребуют внимание рабочего.
63. Три стрелка произвели залп по цели. Вероятность поражения цели первым стрелком равна 0,7, для второго и третьего стрелков эти

вероятности соответственно равны 0,8 и 0,9. Найти вероятность того, что: а) только один из стрелков поразит цель, б) хотя бы один поразит цель.

64. Два стрелка произвели по одному выстрелу по цели. Вероятность поражения цели при выстреле первым стрелком равна 0,9, вторым 0,8. Определить вероятность того,что: 1) оба стрелка поразят цель, 2) только один поразит цель.

65. Станок-автомат штампует детали. Вероятность того, что за смену не будет выпущено ни одной нестандартной детали, равна 0,9. Определить вероятность того, что: 1) за две смены не будет выпущено ни одной нестандартной детали, 2) за три смены не будет выпущено ни одной нестандартной детали.

66. Три студента сдают экзамен. Вероятность сдать экзамен для 1-го равна 0,95, для 2-го – 0,9, для 3-го – 0,85. Определить вероятность того, что :
а) два студента сдадут экзамен, б) все три студента сдадут экзамен.

67. Три студента сдают экзамен. Вероятность того, что 1-й студент сдаст экзамен на «5», равна 0,8, для 2-го она равна 0,65, для 3-го – 0,7. Определить вероятность того, что: 1) хотя бы один студент сдаст экзамен на «5», 2) два студента сдадут экзамен на «5».

68. Десять охотников стреляют поочередно в одну и ту же мишень, производя по одному выстрелу. После первого попадания мишень разрушается и стрельба прекращается. Вероятность попадания в мишень для первых пяти охотников равна 0,4, а для других пяти – 0,7, какова вероятность того, что в мишень попадет: а) 5-й охотник, б) 7-й охотник ?

69. Пусть вероятность того, что покупателю необходима обувь 41-го размера, равна 0,2. Найти вероятность того, что пять первых покупателей потребуют обувь 41-го размера.

70. В урне смешаны шары, среди которых 30 % белых, а остальные красные. Определить вероятность того, что вынутые наудачу два шара будут одного цвета.

71. Два стрелка производят в цель по одному выстрелу. Пусть вероятность попадания для первого стрелка равна 0,7, для второго – 0,8. Найти вероятность того, что попадут в цель : а) оба, б) только один, в) ни один.

72. Вероятность попадания в цель при сбрасывании бомбы равна 0,7, а вероятность того, что бомба не взорвется, равна 0,08. Найти вероятность разрушения объекта, если будет сброшена одна бомба.

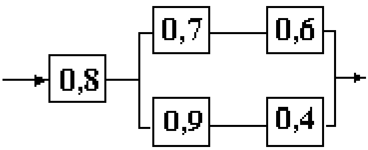
73. Вероятность поражения цели при четырех выстрелах равна 0,9919. Найти вероятность поражения цели при одном выстреле.

74. Вероятность того, что первый из 4-х обслуживаемых станков в течение часа не потребует внимания рабочего, равна 0,7, второго – 0,4, третьего – 0,3. Вероятность того, что хотя бы один станок потребует внимания рабочего, равна 0,9822. Определить вероятность того, что в течение часа четвертый станок не потребует внимания рабочего.

75. На полке в произвольном порядке расположены учебники, среди которых 70 % по математике, а остальные по физике. Определить вероятность того, что взятые наудачу две книги будут по одной дисциплине.

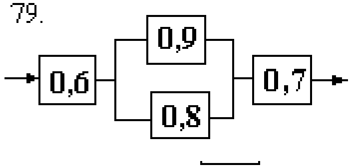
76-100. Найти вероятность безотказной работы прибора, схема которого показана на рисунке, если вероятности безотказной работы каждого блока равны величинам, указанным на рисунке:

76.

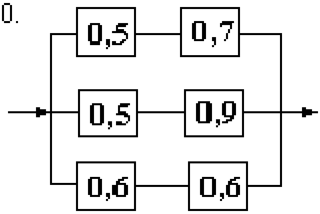


77.

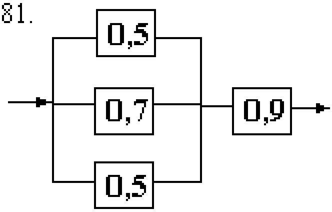
79.



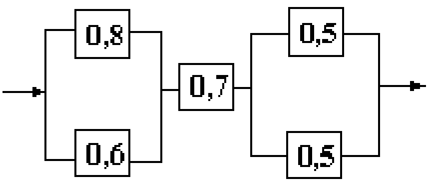
80.



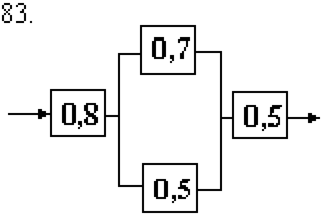
81.



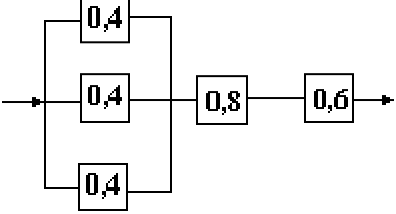
82.



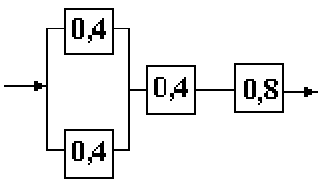
83.



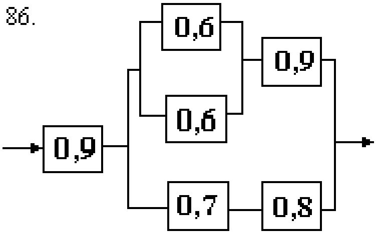
84.



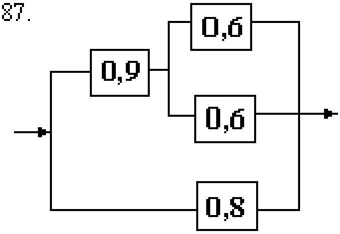
85.



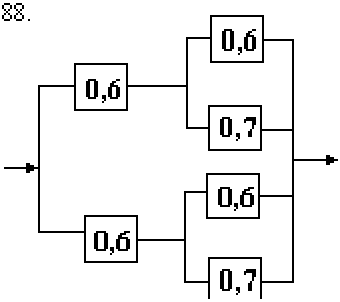
86.



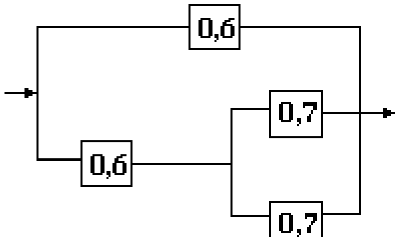
87.



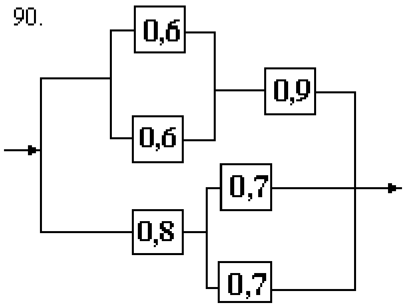
88.



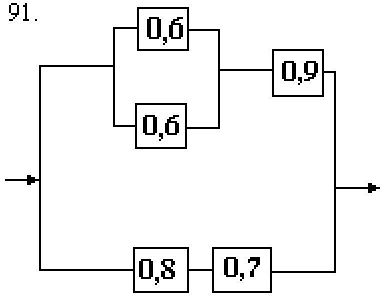
89.



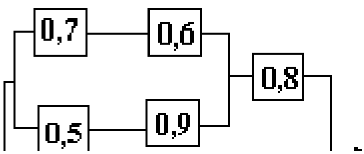
90.



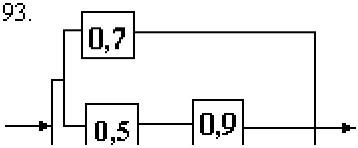
91.



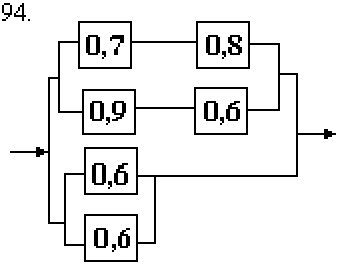
92.



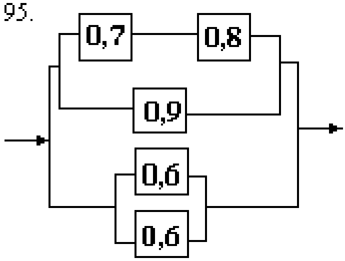
93.



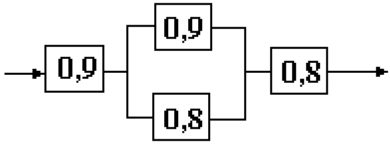
94.



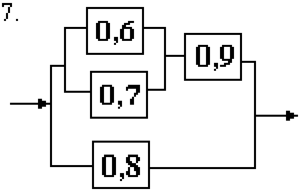
95.



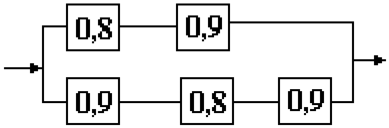
96.



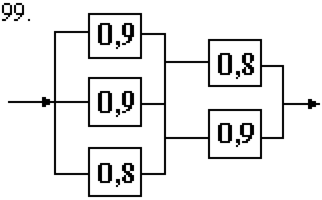
97.



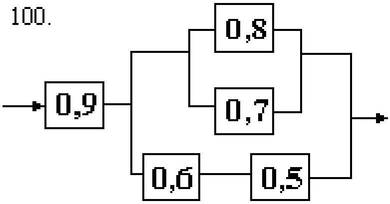
98.



99.



100.



101. Из 18 стрелков 5 попадают в мишень с вероятностью 0,8, 7 – с вероятностью 0,5, 6 - с вероятностью 0,6. Наудачу выбранный стрелок произвел выстрел, но в мишень не попал. К какой из групп вероятнее всего принадлежал этот стрелок ?

102. В трех коробках находятся карандаши разной твердости, обозначенные номерами 1 и 2. В одной коробке 6 карандашей № 1 и 4 карандаша № 2, во второй коробке соответственно 7 и 3, в третьей - 6 и 5. Коробки внешне одинаковы. Из одной коробки взят один карандаш, оказавшийся по твердости № 2. Какова вероятность того, что взятый карандаш находился: 1) в первой коробке, 2) во второй, 3) в третьей ?

103. В группе 10 стрелков. Для 5 из них вероятность попадания в цель 0,8, для трех других – 0,5 и для остальных – 0,25. Выстрел, произведенный кем-то из этих стрелков, дал попадание. Какова вероятность того, что этот выстрел был сделан стрелком а)первой группы? б) второй? в)третьей?

104. Электролампы изготовляют 3 завода. 1-й завод производит 45 % всего количества электроламп, 2-й – 40 %, 3-й – 15%. Продукция первого завода содержит 70 % стандартных ламп, второго – 80%, третьего – 81%. В магазин поступает продукция всех трех заводов. Какова вероятность того, что : 1) купленная лампа окажется стандартной, 2) лампа изготовлена: а) первым заводом, б) вторым, в) третьим, если она оказалась стандартной?

105. На фабрике машины A,B,C производят соответственно 25, 35, 40 % всех изделий. В их продукции брак составляет соответственно 5,4 и 2 %. Какова вероятность того, что: а) случайно выбранное изделие, произведенное на фабрике, дефектно? б)выбранное изделие произведено машиной A, если оно оказалось дефектным.

106. Деталь подверглась обработке одним из трех инструментов, в результате была признана негодной. Определить вероятность того, что деталь была признана негодной в результате обработки первым, вторым или третьим инструментом, если вероятности неисправности для них соответственно равны 0,2, 0,4, 0,6.

107. Одну и ту же операцию выполняют рабочие 3, 4 и 5 разрядов. При этом рабочие, имеющие 5 разряд, допускают всего 2 % брака, 4 – 3 %, 3 – 5 %. При проверке деталь оказалась бракованной. Какова вероятность того, что ее изготовил рабочий 3, 4 или 5 разрядов, если из 10 человек, выполняющих данную операцию, двое имеют 5 разряд, 5 – 4-го и остальные имеют 3 разряд?

108. С первого станка на сборку поступает 40 %, со второго 30 %, с третьего 20 %, с четвертого 10 % всех деталей. Среди деталей первого станка 0,1 % бракованных, второго – 0,2 %, третьего – 0,25 %, четвертого – 0,5 %. На сборку поступила бракованная деталь. Какова вероятность того, что она поступила от второго станка?

109. Имеется 10 одинаковых урн, из которых в 9 находится по 2 черных и 2 белых шара, а в одной 5 белых и один черный шар. Из урны, взятой наудачу, извлечен белый шар. Какова вероятность того, что шар извлечен из урны, содержащей 5 белых шаров?

110. Вероятности попадания при каждом выстреле для 3 стрелков равны соответственно 4/5, 3/4, 2/3. При одновременном выстреле всех трех стрелков имелось 2 попадания. Определить вероятность того, что промахнулся 3-й стрелок.

111. Третья часть одной из трех партий деталей является второсортной, остальные детали во всех партиях первого сорта. Деталь, взятая из одной партии, оказалась первосортной. Определить вероятность того, что деталь взята из партии, имеющей второсортные детали.

112. В команде спортсменов 4 лыжника, 6 бегунов и 10 велосипедистов. Вероятность выполнить норму мастера спорта для лыжника равна 0,2, бегуна – 0,15, велосипедиста – 0,1. Вызванный наудачу спортсмен не выполнил норму. Определить вероятность того, что был вызван бегун.

113. Телеграфное сообщение состоит из сигналов «точка» и «тире». Статистические свойства помех таковы, что искажается в среднем 2/5 сообщений «точка» и 1/3 сообщений «тире». Известно, что среди передаваемых сигналов «точка» и «тире» встречаются в отношении 5:3. Определить вероятность того, что принят правильный сигнал.
114. В тире имеется пять пронумерованных винтовок, вероятности попадания из которых равны соответственно 0,5, 0,6 0,7, 0,8, 0,9. Произведенный выстрел из наугад выбранной винтовки дал промах. Определить вероятность того, что выстрел произведен из третьей винтовки.
115. Среди поступающих на сборку деталей с первого станка 0,1 % бракованных, со второго – 0,2 %, с третьего – 0,25 %, с четвертого 0,5 %. Производительности их относятся как 4:3:2:1 соответственно. Поступившая на сборку деталь стандартна. Найти вероятность того, что она изготовлена на первом станке.
116. Имеется 5 винтовок, из которых 3 с оптическим прицелом. Вероятность попадания в цель при одном выстреле из винтовки с оптическим прицелом – 0,9, без оптического прицела - 0,7. Произведен выстрел из наудачу взятой винтовки. Определить вероятность того, что выстрел произведен из винтовки с оптическим прицелом, если зафиксировано попадание в цель.
117. Вероятность попадания в цель 1-го орудия 0,7, второго – 0,85, третьего – 0,8. Из наудачу выбранного орудия произведен выстрел по цели. Что вероятнее: выбрано первое, второе или третье орудие, если цель не поражена?
118. В приборе имеется 14 деталей двух типов. 6 деталей первого типа и 8 деталей второго. Вероятность выхода из строя за время Т для детали 1 типа равна 0,002, а для детали 2 типа 0,004. Найти вероятность выхода прибора из строя в результате выхода из строя хотя бы одной детали. Какова вероятность того, что вышла из строя деталь 1 типа, если стало известно, что прибор вышел из строя?
119. На первом заводе на каждые 100 изделий производится в среднем 90, на втором – 95, на третьем – 85 изделий первого сорта. В магазине продукция каждого завода составляет соответственно 50, 30, 20 %. Какова вероятность того, что изделие изготовлено на первом заводе, если в результате покупки стало известно, что оно первого сорта?
120. На двух автоматах изготавливаются одинаковые детали. Вероятность изготовления детали высшего качества на 1 станке 0,92, на 2 – 0,8. На 1 станке изготавливается деталей в 3 раза больше, чем на 2 станке. Какова

вероятность того, что наудачу взятая деталь произведена на втором станке, если она оказалась высшего сорта?

121. В группе из 20 человек 12 парней и 8 девушек. Из парней к семинару подготовились 5 человек, а из девушек 6. Кого-то вызвали отвечать, ответа не последовало. Какова вероятность того, что: а) была вызвана девушка? б) вызван парень?

122. В правом кармане имеется три монеты по 25 коп. и 4 монеты по 5 коп., а в левом 6 монет по 25 коп. Из правого кармана в левый наудачу перекладываются пять монет. Определить вероятность извлечения из левого кармана после перекладывания монеты в 25 коп., если монета берется наудачу.

123. Среди группы в 24 чел., сдавших экзамены в институт, было 3 отличника из школы. Они знали ответы на все вопросы. 12 чел. окончили школу без «3». Они знали ответы на 90 % вопросов. 6 абитуриентов окончили техникумы и могли ответить на 80 % вопросов, а те 3, которые учились в ПТУ, могли дать ответ всего лишь на 60 % вопросов. Абитуриент ответил на все предложенные ему вопросы. Какова вероятность того, что: а) он был отличник из школы? б) он был выпускник техникума?

124. Из цифр 1, 2, 3, 4, 5 выбирается наудачу одна, а из оставшихся – другая. Найти вероятность того, что будет выбрана нечетная цифра: а) первый раз, б) второй раз, в) оба раза.

125. По команде выстрел может быть произведен из любого из 3 орудий. Вероятность попадания в цель для 1 орудия равна 0,8, для второго – 0,85, для третьего – 0,9. После выстрела снаряд попал в цель. Какова вероятность того, что стреляло первое орудие?

126. Всхожесть семян ржи составляет 90 %. Чему равна вероятность того, что: 1) из 7 посеянных семян взойдет 5? 2) взойдет не менее 4?

127. Найти наивероятнейшее число наступлений ясных дней в течение первой декады сентября, если по данным многолетних наблюдений известно, что в сентябре в среднем бывает 11 ненастных дней.
Найти:1) вероятность наивероятнейшего числа ясных дней, 2) вероятность того, что ясных дней будет не менее 6.

128. Вероятность рождения мальчика равна 0,515. Какова вероятность того, что среди 10 новорожденных: 1) будет 4 девочки? 2) будет не менее 7 мальчиков?

129. В магазин вошли 12 покупателей. Найти вероятность того, что: 1) 4 из них совершат покупки, 2) не более 3 совершат покупки, если вероятность совершить покупку для любого из них равна 0,2.

130. В мастерской имеется 12 моторов. Вероятность того, что в данный момент мотор работает с полной нагрузкой, равна 0,8. Найти вероятность того, что в данный момент: 1) не менее 10 моторов работают с полной нагрузкой, 2) три мотора работают с полной нагрузкой.
131. Вероятность попадания в цель снаряда равна 0,3. Произведено 5 выстрелов. Какова вероятность того, что: 1) будет 3 попадания? 2) будет не менее 2 попаданий?
132. Вероятность попадания снаряда в цель при одном выстреле 0,3. Произведено 8 выстрелов. Найти вероятность хотя бы одного попадания в цель.
133. В цехе работает 8 станков, вероятность остановки в течение часа любого из них равна 0,8. Найти вероятность того, что в течение часа: 1) остановится 2 станка, 2) будут работать без остановки не менее 6 станков.
134. Вероятность выиграть по одному билету лотереи равна 1/7. Какова вероятность, имея 6 билетов, выиграть: 1) по 2-м билетам? 2) не менее чем по трем билетам?
135. Принимая вероятность изготовления нестандартной детали, равной 0,05, найти вероятность того, что из пяти наудачу взятых деталей будет: 1) 4 стандартных, 2) не более 4-х стандартных.
136. На автобазе имеется 12 автомашин. Вероятность выхода на линию каждой из них равна 0,8. Найти вероятность нормальной работы автобазы в ближайший день, если для этого необходимо иметь на линии не менее 8 автомашин.
137. Ожидается прибытие трех кораблей с бананами. Статистика показывает, что в 1% случаев груз бананов портится в дороге. Найти вероятность того, что придут с испорченным грузом: 1)3 корабля, 2) ни одного корабля.
138. Всхожесть семян составляет 70%. Определить вероятность того, что из 8 посеянных семян взойдет не менее трех. Чему равно наивероятнейшее число взошедших семян?
139. Вероятность того, что покупателю необходима обувь 40 размера, равна 0,3. Найти вероятность того, что из 5 первых покупателей обувь этого размера будет необходима: 1) одному, 2) по крайней мере, одному покупателю.
140. Вероятность того, что наудачу взятая деталь нестандартна, равна 0,1. Найти вероятность того, что среди наудачу взятых 5 деталей не менее 4 стандартных.
141. В хлопке 70% длинных волокон. Какова вероятность того, что среди 10 взятых наудачу волокон не более 8 длинных?

142. Вероятность того, что телевизор потребует ремонта в течение гарантийного срока, равна 0,2. Найти вероятность того, что из 6 телевизоров в течение гарантийного срока: 1) не более 1 потребует ремонта, 2) хотя бы 1 не потребует ремонта.

143. Вероятность выиграть по билету лотереи равна 0,7. Найти вероятность выигрыша не менее чем по двум билетам из 6.

144. Найти вероятность разрушения объекта, если для этого необходимо не менее 3 попаданий, а сделано 15 выстрелов. Вероятность попадания при каждом выстреле равна 0,4.

145. Вероятность изготовления стандартной детали равна 0,9. Какова вероятность того, что среди 10 деталей не более 2 нестандартны?

146. Вероятность попадания в цель $p=0,3$. Сбрасывается одиночно 6 бомб. Найти вероятность того, что в цель попадет не менее 4 бомб.

147. Подводная лодка атакует корабль, выпуская по нему последовательно 4 торпеды. Вероятность попадания каждой торпеды равна 0,4. Найти вероятность того, что корабль будет пущен ко дну, если для этого необходимо не менее 2-х попаданий.

148. В партии 10 деталей. Считая вероятность отклонения контролируемого размера от номинала равной 0,5, определить вероятность того, что в данной партии не менее 5 деталей имеют отклонения от номинала.

149. Вероятность появления некоторого события в каждом из 18 независимых опытов равна 0,2. Определить вероятность появления этого события по крайней мере 3 раза.

150. Рабочий обслуживает 6 станков. Вероятность того, что станок в течение часа потребует внимания рабочего, равна 0,3. Какова вероятность того, что в течение часа не менее 5 станков потребуют внимания рабочего?

151. Доля изделий высшего сорта на данном предприятии составляет 31%. Найти наивероятнейшее число изделий высшего сорта в случайно отобранной партии из 75 изделий, вероятность этого числа и вероятность того, что изделий высшего сорта будет более 30.

152. Игральная кость брошена 100 раз. Найти вероятность того, что: 1) 5 очков выпадут 50 раз, 2) 6 очков выпадут не более 50 раз.

153. Вероятность изготовления нестандартной детали $p=0,05$. Сколько деталей должно быть в партии, чтобы наивероятнейшее число нестандартных деталей в ней было равно 63? Найти вероятность того, что в этой партии: 1) 63 нестандартные детали, 2) не менее 73, но не более 100 нестандартных деталей.

154. Было посеяно 28 семян ячменя с вероятностью всхожести каждого 0,8. Найти: 1) наивероятнейшее число взошедших семян, 2) вероятность того, что взойдет точно 20 семян, 3) взойдет не менее 20 и не более 25 семян?

155. На станке изготовили 90 деталей. Чему равна вероятность изготовления на этом станке детали 1-го сорта, если наивероятнейшее число таких деталей в данной партии равно 82? Найти вероятность того, что в данной партии число деталей 1-го сорта составляет: 1) точно 80, 2) не менее 80.

156. Монета подброшена 40 раз. Найти: 1) вероятность того, что «герб» выпадет в 25 случаях, 2) вероятность того, что число выпадения герба не более 26 раз, 3) наивероятнейшее число выпадений герба.

157. Из партии, в которой доля первосортных деталей равна 0,8, отобрано 60 деталей. Определить: 1) вероятность того, что деталей 1-го сорта среди отобранных точно 49, 2) вероятность того, что первосортных деталей среди отобранных не менее 40, но не более 48, 3) наивероятнейшее число первосортных деталей в отобранной партии.

158. Стрелок сделал 30 выстрелов с вероятностью попадания при отдельном выстреле 0,3. Найти: 1) наивероятнейшее число попаданий, 2) вероятность того, что будет 8 попаданий, 3) вероятность того, что будет не менее 10 попаданий.

159. При установившемся технологическом процессе фабрика выпускает в среднем 70% продукции 1-го сорта. Чему равна вероятность того, что в партии из 1000 деталей число первосортных: 1) точно 680? 2) от 680 до 700 ? Найти наивероятнейшее число первосортных деталей в этой партии.

160. Вероятность того, что отдельное изделие будет стандартным равна 0,62. Найти вероятность того, что: 1) в партии из 800 изделий будет 520 стандартных, 2) в той же партии число стандартных изделий заключено между 500 и 700, 3) найти наивероятнейшее число нестандартных изделий в этой партии.

161. Найти вероятность того, что число мальчиков среди 1000 новорожденных: 1) равно 480, 2) больше 480, но меньше 540. Найти наивероятнейшее число мальчиков среди 1000 новорожденных (вероятность рождения мальчика принять равной 0,515).

162. Было посажено 400 деревьев. Вероятность того, что дерево приживется, равна 0,8. Найти вероятность, что приживется: 1) 330 деревьев, 2) не менее 330, но не более 350 деревьев, 3) найти наивероятнейшее число прижившихся деревьев.

163. Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0,4. Найти наивероятнейшее число промахов из 320 выстрелов. Найти вероятность того, что при 320 выстрелах будет: 1) 120 попаданий, 2) не менее 120 попаданий.

164. Всхожесть семян оценивается вероятностью 0,75. Найти вероятность того, что из 500 посеянных семян не взойдет: 1) точно 130, 2) не более 130. Найти наивероятнейшее число взошедших семян.

165. Вероятность изготовления нестандартной детали равна 0,1. Найти наивероятнейшее число стандартных среди 150 деталей. Найти вероятность того, что среди 200 деталей: 1) будет 30 нестандартных, 2) будет не более 30 нестандартных деталей.

166. При штамповке металлических клемм получается 90% годных. Найти наивероятнейшее число годных среди отобранных 900. Найти вероятность того, что среди отобранных окажется: 1) 105 бракованных, 2) не менее 105 и не более 110 бракованных.

167. Вероятность того, что покупателю необходима обувь 41 размера, равна 0,2. Найти наивероятнейшее число покупателей обуви 41 размера из 750. Какова вероятность того, что из 750 покупателей потребуют обувь 41 размера: 1) 140 покупателей? 2) не более 140 покупателей?

168. Вероятность наступления события в каждом испытании равна 0,8. Найти наивероятнейшее число наступлений события при 100 испытаниях. Найти вероятность того, что при 100 испытаниях событие произойдет: 1) 75 раз 2) не менее 75 и не более 85 раз.

169. Вероятность того, что пассажир опоздает к отправлению поезда, равна 0,02. Найти наивероятнейшее число опоздавших из 85 пассажиров. Найти вероятность того, что опоздавших пассажиров: 1) будет ровно 5, 2) не превысит 5.

170. Вероятность того, что денежный приемник автомата при опускании монеты срабатывает неправильно, равна 0,03. Найти наивероятнейшее число случаев правильной работы автомата, если будет опущено 150 монет, найти вероятность того, что число случаев правильной работы: 1) равно 140, 2) не менее 140.

171. Вероятность попадания в цель при каждом выстреле равна 0,8. Найти наивероятнейшее число попаданий и вероятность такого исхода стрельбы, если будет сделано 90 выстрелов. Определить вероятность того, что при тех же условиях число попаданий будет не менее 80.

172. На факультете обучается 620 студентов. Вероятность того, что студент не сдаст сессию, равна 0,04. Найти наивероятнейшее число студентов, не сдавших сессию, найти вероятность того, что сессию сдадут успешно: 1) 590 студентов, 2) не менее 600 студентов.

173. Если в среднем левши составляют 1%, какова вероятность того, что среди 200 человек: 1) будет точно 4 левшей? 2) не более чем 4 левшей? Найти наивероятнейшее число левшей среди 200 человек.

174. В среднем на каждые 100 выращенных арбузов приходится 1 весом более 10 кг. Найти вероятность того, что среди 400 арбузов: 1) будет 3 арбуза весом более 10 кг, 2) не менее трех таких арбузов. Найти наивероятнейшее число арбузов с весом более 10 кг среди 200 штук.

175. Вероятность выпуска сверла повышенной хрупкости (брак) равна 0,02. Сверла укладываются в коробки по 100 штук. Найти наивероятнейшее число бракованных сверл в коробке. Найти вероятность того, что: 1) в коробке не окажется бракованных сверл, 2) число бракованных сверл окажется не более 3.

176. В цехе работают семь мужчин и три женщины. По табельным номерам наудачу отобраны три человека. Рассматривается СВ Х – число мужчин среди выбранных. Определить закон распределения вероятностей, математическое ожидание и дисперсию дискретной случайной величины.

177. Рабочий обслуживает три станка. Вероятность того, что в течение часа внимания рабочего потребует 1-й станок, равна 0,8, 2-й – 0,6, 3-й – 0,5. Рассматривается СВ Х – число станков, потребовавших внимания рабочего в течение часа. Определить закон распределения вероятностей, математическое ожидание и дисперсию дискретной случайной величины.

178. Три студента сдают экзамен. Вероятность сдать экзамен для 1-го студента равна 0,95, для 2-го – 0,9, для 3-го – 0,85. Рассматривается СВ Х – число студентов, сдавших экзамен. Определить закон распределения вероятностей, математическое ожидание и дисперсию дискретной случайной величины.

179. Из 5 карточек с буквами З,А,К,О,Н выбирают одну за одной буквы до 1-й гласной. Рассматривается случайная величина Х – число вынутых карточек. Определить закон распределения вероятностей, математическое ожидание и дисперсию дискретной случайной величины.

180. На пяти одинаковых шарах написаны числа 1,2,3,4,5. Извлекают 3 шара. Рассматривается СВ Х – число шаров с нечетными номерами. Определить закон распределения вероятностей, математическое ожидание и дисперсию дискретной случайной величины.

181. Из карточек с буквами Н,А,Г,У,Л,И,Н выбирают одну за другой карточки без возврата, пока не появится карточка с буквой Н. Рассматривается случайная величина Х – число выбранных карточек. Определить закон распределения вероятностей, математическое ожидание и дисперсию дискретной случайной величины.

182. Имеется 5 билетов в театр по 1 грн., 3 билета по 3 грн. 2 билета по 5 грн. Выбираются наудачу 2 билета. Рассматривается СВ Х – стоимость двух билетов. Определить закон распределения вероятностей, математическое ожидание и дисперсию дискретной случайной величины.
183. При распределении на работу оканчивающих институт выявилось, что каждый четвертый студент женат. В пункт А послано 3 человека. Рассматривается СВ Х – число женатых из посланных в пункт А. Определить закон распределения вероятностей, математическое ожидание и дисперсию дискретной случайной величины.
184. Вероятность хотя бы одного попадания в мишень в результате 2-х выстрелов равна 0,96. Рассматривается СВ Х – число попаданий в результате 3-х выстрелов. Определить закон распределения вероятностей, математическое ожидание и дисперсию дискретной случайной величины.
185. Баскетболист забрасывает штрафной с вероятностью 0,8 и получает право на выполнение 3-х штрафных бросков. Рассматривается случайная величина Х – число заброшенных штрафных. Определить закон распределения вероятностей, математическое ожидание и дисперсию дискретной случайной величины.
186. Из аэровокзала отправились 3 автобуса. Вероятность своевременного прибытия в конечный пункт назначения соответственно равны 0,7; 0,8; 0,9. Рассматривается случайная величина Х – число автобусов, прибывших вовремя. Определить закон распределения вероятностей, математическое ожидание и дисперсию дискретной случайной величины.
187. В урне находится 4 белых и 10 черных шаров. Из урны последовательно вынимают шары до тех пор, пока не будет вынут черный шар. Рассматривается случайная величина Х – число вынутых шаров. Определить закон распределения вероятностей, математическое ожидание и дисперсию дискретной случайной величины.
188. Вероятность попадания при одном выстреле из первого орудия равна 0,6, из второго – 0,7. Рассматривается СВ Х – число попаданий в результате 2-х выстрелов из первого и 1-го выстрела из второго орудия. Определить закон распределения вероятностей, математическое ожидание и дисперсию дискретной случайной величины.
189. Игральная кость брошена 2 раза. Рассматривается СВ Х – сумма очков при двух бросаниях. Определить закон распределения вероятностей, математическое ожидание и дисперсию дискретной случайной величины.
190. Три спортсмена участвуют в отборочных соревнованиях. Вероятности зачисления в сборную команду первого, второго и третьего спортсмена соответственно равны 0,8, 0,7, 0,6. Рассматривается СВ Х – число спортсменов, попавших в сборную. Определить закон распределения

вероятностей, математическое ожидание и дисперсию дискретной случайной величины.

191. Завод в среднем выпускает 40% изделий отличного качества. Выбираются наугад 4 изделия. Рассматривается СВ X – число изделий отличного качества среди выбранных. Определить закон распределения вероятностей, математическое ожидание и дисперсию дискретной случайной величины.

192. Три охотника одновременно производят по одному выстрелу по мишени. Известны вероятности попадания первого, второго, и третьего охотников соответственно: $p_1 = 0{,}2, p_2 = 0{,}4\, p_3 = 0{,}6$. Рассматривается СВ X – число попаданий. Определить закон распределения вероятностей, математическое ожидание и дисперсию дискретной случайной величины.

193. Из 16-ти лотерейных билетов выигрышных 4. Одновременно приобретается 3 билета. Рассматривается СВ X – число проигрышных билетов среди приобретенных. Определить закон распределения вероятностей, математическое ожидание и дисперсию дискретной случайной величины.

194. Из 20-ти изделий 15 – 1-го сорта, 5 – 2-го сорта. Выбираются наудачу 4 изделия. Рассматривается СВ X - число первосортных изделий в выборке. Определить закон распределения вероятностей, математическое ожидание и дисперсию дискретной случайной величины.

195. Подводная лодка атакует корабль, выпуская по нему 4 торпеды. Вероятность попадания каждой торпеды равна 0,4. Рассматривается СВ X – число попаданий. Определить закон распределения вероятностей, математическое ожидание и дисперсию дискретной случайной величины.

196. Игра состоит в набрасывании колец на колышек. Игрок получает 5 колец и бросает до первого набрасывания, вероятность которого для каждого броска постоянна и равна 0,3. Рассматривается СВ X – число неизрасходованных колец. Определить закон распределения вероятностей, математическое ожидание и дисперсию дискретной случайной величины.

197. Пусть вероятность изготовления нестандартного изделия при некотором технологическом процессе равна 0,06. Контролер берет из партии изделие и сразу проверяет его качество. Если оно оказывается нестандартным, дальнейшие испытания прекращаются, и партия задерживается. Если же изделие оказалось стандартным, контролер берет следующее и т. д., но всего проверяет не более 5 изделий. Рассматривается СВ X – число проверяемых изделий. Определить закон распределения вероятностей, математическое ожидание и дисперсию дискретной случайной величины.

198. Вероятность того, что в библиотеке необходимая студенту книга свободна, равна 0,3. Рассматривается С.В. Х – число библиотек, которые посетил студент для получения необходимой книги, если в городе четыре библиотеки. Определить закон распределения вероятностей, математическое ожидание и дисперсию дискретной случайной величины.

199. Обрыв связи произошел на одном из пяти звеньев телефонного кабеля. Монтер последовательно проверяет звенья для обнаружения обрыва. Рассматривается С.В. Х – число обследованных звеньев, при условии, что вероятность обрыва связи одинакова для всех звеньев. Определить закон распределения вероятностей, математическое ожидание и дисперсию дискретной случайной величины.

200. Имеется пять различных ключей, из которых только один подходит к замку. Рассматривается СВ Х – число опробований при открывании замка, если опробованный ключ в последующих попытках открыть замок не участвует. Определить закон распределения вероятностей, математическое ожидание и дисперсию дискретной случайной величины.

201-210. Непрерывная случайная величина Х, возможные значения которой принадлежат интервалу [а,в], задана плотностью распределения f(x). Аналитическое выражение плотности распределения для $a < x \leq b$ дано в таблице, для остальных значений x f(x)=0. Определить значение постоянной А. Найти функцию распределения F(x). Построить графики функций f(x) и F(x). Определить математическое ожидание M(x), дисперсию Д(x), среднеквадратическое отклонение $\sigma(x)$. Найти вероятность попадания случайной величины Х в интервал (α, β).

N задачи	f(x)	a	b	α	β
201	Ax	0	1	0	0,5
202	$\frac{A}{\sqrt{1-x^2}}$	-1	1	0	1
203	Asin2x	$\frac{3}{4}\pi$	π	$\frac{5}{6}\pi$	π
204	Acosx	0	$\frac{\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{6}$
205	Asinx	$-\frac{\pi}{2}$	0	$-\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{4}$
206	$\frac{A(x-4)}{\sqrt{1-(x-4)^2}}$	3	4	3,5	4

207	Ax^2	0	1	0	0,5
208	$\frac{A}{x}$	1	e	1	1,5
209	$\frac{Ax}{\sqrt{1-x^2}}$	0	1	0,5	1
210	$A(x^2-x+1)$	0	1	-1	0,5

211-225. Непрерывная случайная величина X, возможные значения которой принадлежат отрезку $[a,b]$, задана функцией распределения F(x). Аналитическое выражение функции распределения для $a < x \le b$ дано в таблице, для $x \le a$ F(x)=0, для x>b F(x)=1. Найти плотность распределения f(x). Определить значение постоянной A. Построить графики функций F(x) и f(x). Определить математическое ожидание M(X), дисперсию D (X), среднеквадратическое отклонение $\sigma(X)$. Найти вероятность попадания случайной величины X в интервал (α,β).

N задачи	F(x)	a	b	α	β
211	Ax^3	0	2	0	1
212	$Ax^2-\frac{1}{3}$	2	4	1	3
213	A(x+2)	-2	2	0	1
214	A(1-cosx)	0	$\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{4}$
215	$A(\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+x)$	0	1	-1	0,5
216	$A(1-\sqrt{1-x^2})$	0	1	0,5	1
217	Ax (x-1)	1	2	0,5	1,5
218	A ln x	1	e	1	1,5
219	$A(3x^2+2x)$	0	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{6}$
220	Ax (x-4)	4	5	4	4,5
221	$A\sqrt{1-(x-4)^2}$	3	4	3,5	4
222	Acos x	$-\frac{\pi}{2}$	0	$-\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{4}$

223	Asin x	0	$\frac{\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{6}$
224	Acos 2x	$\frac{3}{4}\pi$	π	$\frac{5}{6}\pi$	π
225	$A(1+\frac{2}{\pi}\arcsin x)$	-1	1	0	1

226-250. Найти вероятность попадания непрерывной случайной величины X в интервал $[\alpha, \beta]$, если она распределена: а) равномерно в интервале [a,b], б) по нормальному закону и имеет математическое ожидание a и среднее квадратическое отклонение b, в) по показательному закону и имеет математическое ожидание b.

N задачи	α	β	a	b
226	1	10	8	15
227	2	8	3	12
228	3	7	5	10
229	4	12	6	15
230	5	9	7	11
231	6	10	8	12
232	7	12	9	14
233	8	15	12	16
234	9	14	10	15
235	10	16	11	20
236	8	10	1	15
237	3	8	2	12
238	5	7	3	10
239	6	12	4	15
240	7	9	5	11
241	8	10	6	12
242	9	12	7	14
243	12	15	8	16
244	10	14	9	15
245	11	16	10	20
246	9	23	11	23
247	1	2	1	4
248	6	9	11	20
249	5	6	4	15
250	7	12	5	9

251-275. Марковский процесс с дискретными состояниями и дискретным временем задан матрицей переходных вероятностей:

$$M_1=\begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} \\ P_{31} & P_{32} & P_{33} \end{pmatrix}$$

и начальным вектором распределения вероятностей состояний:

$$P(0) = (P_1(0); P_2(0); P_3(0)).$$

Найти вектор распределения вероятностей на третьем шаге.

251. $$M_1=\begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}1 & 0{,}6 \\ 0{,}5 & 0{,}2 & 0{,}3 \\ 0{,}7 & 0{,}1 & 0{,}2 \end{pmatrix}; \quad P(0) = (1{,}0{,}0)$$

252. $$M_1=\begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}3 & 0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}5 \\ 0{,}4 & 0{,}2 & 0{,}4 \end{pmatrix}; \quad P(0) = (0{,}1{,}0)$$

253. $$M_1=\begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}5 & 0{,}3 \\ 0{,}5 & 0{,}2 & 0{,}3 \\ 0{,}7 & 0{,}1 & 0{,}2 \end{pmatrix}; \quad P(0) = (0{,}0{,}1)$$

254. $$M_1=\begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}3 & 0{,}1 \\ 0{,}8 & 0{,}1 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}5 & 0{,}3 \end{pmatrix}; \quad P(0) = (0{,}5;0{,}5;0)$$

255. $$M_1=\begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}4 & 0{,}3 \\ 0{,}7 & 0{,}2 & 0{,}1 \\ 0{,}4 & 0{,}5 & 0{,}1 \end{pmatrix}; \quad P(0) = (0{,}5;0;0{,}5)$$

256. $$M_1=\begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}6 \\ 0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}5 \\ 0{,}4 & 0{,}3 & 0{,}3 \end{pmatrix}; \quad P(0) = (0;0{,}5;0{,}5)$$

257. $M_1= \begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}3 & 0{,}3 \\ 0{,}5 & 0{,}2 & 0{,}3 \\ 0{,}6 & 0{,}3 & 0{,}1 \end{pmatrix}$; $P(0) = (0{,}3;0{,}7;0)$

258. $M_1= \begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}1 & 0{,}6 \\ 0{,}2 & 0{,}4 & 0{,}4 \\ 0{,}1 & 0{,}6 & 0{,}3 \end{pmatrix}$; $P(0) = (0{,}3;0;0{,}7)$

259. $M_1= \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}4 & 0{,}4 \\ 0{,}3 & 0{,}5 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}7 & 0{,}2 \end{pmatrix}$; $P(0) = (0;3;0{,}7)$

260. $M_1= \begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}5 & 0{,}1 \\ 0{,}3 & 0{,}4 & 03 \\ 0{,}2 & 0{,}6 & 0{,}2 \end{pmatrix}$; $P(0) = (0{,}7;0;0{,}3)$

261. $M_1= \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}2 & 0{,}3 \\ 0{,}3 & 0{,}1 & 0{,}6 \\ 0{,}7 & 0{,}1 & 0{,}2 \end{pmatrix}$; $P(0) = (0{,}4;0;0{,}6)$

262. $M_1= \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}5 \\ 04 & 0{,}3 & 0{,}3 \\ 0{,}4 & 0{,}2 & 0{,}4 \end{pmatrix}$; $P(0) = (0{,}4;0{,}6;0)$

263. $M_1= \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}2 & 0{,}3 \\ 0{,}1 & 0{,}6 & 0{,}3 \\ 0{,}7 & 0{,}1 & 0{,}2 \end{pmatrix}$; $P(0) = (0{,}6;0{,}4;0)$

264. $M_1= \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}1 & 0{,}1 \\ 0{,}6 & 0{,}3 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}5 & 0{,}3 \end{pmatrix}$; $P(0) = (0{,}6;0{,}4;0)$

265. $$M_1= \begin{pmatrix} 0,7 & 0,2 & 0,1 \\ 0,3 & 0,4 & ,0,3 \\ 0,4 & 0,5 & 0,1 \end{pmatrix}; \quad P(0) = (0,6;0;0,4)$$

266. $$M_1= \begin{pmatrix} 0,3 & 0,2 & 0,5 \\ 0,2 & 0,2 & 0,6 \\ 0,4 & 0,3 & 0,3 \end{pmatrix}; \quad P(0) = (0;0,6;0,4)$$

267. $$M_1= \begin{pmatrix} 0,5 & 0,2 & 0,3 \\ 0,4 & 0,3 & 0,3 \\ 0,6 & 0,3 & 0,1 \end{pmatrix}; \quad P(0) = (0,1;0,9;0)$$

268. $$M_1= \begin{pmatrix} 0,2 & 0,4 & 0,4 \\ 0,3 & 0,1 & 0,6 \\ 0,1 & 0,6 & 0,3 \end{pmatrix}; \quad P(0) = (0;0,1;0,9)$$

269. $$M_1= \begin{pmatrix} 0,2 & 0,4 & 0,4 \\ 0,3 & 0,5 & 0,2 \\ 0,1 & 0,7 & 0,2 \end{pmatrix}; \quad P(0) = (0;0,1;0,9)$$

270. $$M_1= \begin{pmatrix} 0,3 & 0,4 & 0,3 \\ 0,4 & 0,5 & 0,1 \\ 0,2 & 0,6 & 0,2 \end{pmatrix}; \quad P(0) = (0,9;0,1;0)$$

271. $$M_1= \begin{pmatrix} 0,7 & 0,1 & 0,2 \\ 0,5 & 0,2 & 0,3 \\ 0,3 & 0,1 & 0,6 \end{pmatrix}; \quad P(0) = (0,9;0;0,1)$$

272. $$M_1 = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,2 & 0,4 \\ 0,2 & 0,3 & 0,5 \\ 0,4 & 0,3 & 0,3 \end{pmatrix}; \quad P(0) = (0;0,9;0,1)$$

273. $$M_1 = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,1 & 0,2 \\ 0,5 & 0,2 & 0,3 \\ 0,1 & 0,6 & 0,3 \end{pmatrix}; \quad P(0) = (0,2;0,8;0)$$

274. $$M_1 = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,5 & 0,3 \\ 0,8 & 0,1 & 0,1 \\ 0,6 & 0,3 & 0,1 \end{pmatrix}; \quad P(0) = (0;0,2;0,8)$$

275. $$M_1 = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,5 & 0,1 \\ 0,7 & 0,2 & 0,1 \\ 0,3 & 0,4 & 0,3 \end{pmatrix}; \quad P(0) = (0;0,2;0,8)$$

ЧАСТЬ 2. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

2.1 Задачи математической статистики. Генеральная и выборочная совокупности. Репрезентативность выборки.

Напомним, что предметом теории вероятностей является установление и изучение вероятностных закономерностей, которым подчинены массовые однородные случайные события, независимо от их конкретной природы. Естественно, возникает вопрос: как устанавливаются эти закономерности? Установление закономерностей, которым подчинены массовые случайные явления, основано на изучении статистических данных – результатов наблюдений над явлениями окружающего нас мира или специально поставленных экспериментов.

Первая задача математической статистики – указать способы сбора и группировки статистических данных. Вторая и главная задача – разработать методы анализа статистических данных в зависимости от целей исследования, к которым относятся: оценка неизвестной вероятности события; оценка неизвестной функции распределения; оценка параметров распределения, вид которого известен; оценка зависимости случайной величины от других случайных величин; проверка статистических гипотез и т. д.

Пусть требуется изучить совокупность однородных объектов относительно некоторого качественного или количественного признака, характеризующего эти объекты. Например, для партии деталей качественным признаком может служить стандартность детали, а количественным - контролируемый размер детали.

Обследование каждого объекта (сплошное обследование), как правило, невозможно по двум причинам: 1) если совокупность содержит очень большое число объектов, то сплошное обследование практически невозможно; 2) если обследование связано с уничтожением объектов или требует больших материальных затрат, то сплошное обследование практически нецелесообразно. Поэтому обычно случайно отбирают из всей генеральной совокупности ограниченное число объектов и подвергают их изучению. Совокупность случайно отобранных объектов называют *выборочной совокупностью* или просто *выборкой.*

Объемом совокупности (выборочной или генеральной) называют число объектов этой совокупности.

Выборка называется *репрезентативной* (представительной), если она правильно представляет пропорции генеральной совокупности. Выборка будет репрезентативной, если ее осуществить случайно, а для этого нужно реализовать такой способ отбора, при котором каждый объект генеральной совокупности имеет одинаковую вероятность попасть в выборку.

2.2. Способы отбора.

Различают следующие пять основных способов отбора: а) простой случайный бесповторный; б) простой случайный повторный; в) типический; г) механический; д) серийный.

Простым случайным называют такой отбор, при котором объекты извлекают по одному из всей генеральной совокупности. Повторной называют выборку, при которой отобранный объект перед отбором следующего возвращается в генеральную совокупность. В противном случае выборка называется бесповторной.

Типическим называют отбор, при котором объекты отбираются не из всей генеральной совокупности, а из каждой ее «типической» части.

Механическим называют отбор, при котором генеральную совокупность «механически» делят на столько групп, сколько объектов должны войти в выборку, а из каждой группы отбирают один объект.

Серийным называют отбор, при котором объекты отбирают из генеральной совокупности не по одному, а «сериями», которые подвергают сплошному обследованию.

На практике часто применяется комбинированный отбор, при котором сочетаются перечисленные выше способы.

2.3. Статистическое распределение выборки.

Пусть для изучения количественного (дискретного или непрерывного) признака X из генеральной совокупности извлечена выборка, причем значения признака x_1 наблюдалось n_1 раз, x_2 – n_2 раз,…, x_k – n_k раз и $\Sigma n_i =$ n – объем выборки. Наблюдаемые значения x_i называются вариантами. Последовательность вариант, записанных в возрастающем порядке, называется вариационным рядом. Числа n_1, n_2,…, n_k называются частотами. Отношения частот к объему выборки называются *относительными частотами*: $w_i = \frac{n_i}{n}$.

Статистическим распределением выборки называют перечень вариант и соответствующих им частот или относительных частот. Обычно закон распределения после обработки статистических данных задают в виде таблицы:

x_i	x_1	x_2	x_3	. . .	x_k
n_i	n_1	n_2	n_3	. . .	n_k

или

x_i	x_1	x_2	x_3	. . .	x_k
w_i	w_1	w_2	w_3	. . .	w_k

Для непрерывно распределенного признака X статистическое распределение задается в виде последовательности интервалов, в которые попадают варианты, и соответствующих им частот(в качестве частоты в этом случае принимают сумму частот вариант, попавших в соответствующий интервал).

В силу устойчивости относительной частоты w_i она служит для оценки вероятности события « $X = x_i$ ».

■**Пример 1.**

При выборочной проверке посещаемости студентами занятий в различных группах и в разные дни осеннего семестра оказалось, что присутствовало на занятии следующее число студентов: 25, 23, 18, 23, 25, 25, 18, 20, 23, 23, 23, 21, 25, 25, 22, 20, 21, 21, 23, 23, 22, 25, 23, 23, 22, 20, 20, 21, 21, 22, 25, 25, 25, 23, 18.

Сгруппируем статистические данные и составим статистическое распределение выборки дискретного количественного признака X - числа студентов, присутствующих на занятии

x_i	18	20	21	22	23	25
n_i	3	4	5	4	10	9

Σn_i =3+4+5+4+10+9=35 – объем выборки.

Для того, чтобы получить объем N генеральной совокупности, нужно умножить число студенческих групп на число занятий в течение семестра.

Составим распределение относительных частот. Для этого найдем относительные частоты, разделив частоты на объем выборки:

$$w_1 = \frac{n_1}{n} = \frac{3}{35} = 0{,}09\,; \quad w_2 = \frac{n_2}{n} = \frac{4}{35} = 0{,}11\,; \quad w_3 = \frac{n_3}{n} = \frac{5}{35} = 0{,}14\,;$$

$$w_4 = \frac{n_4}{n} = \frac{4}{35} = 0{,}11\,; \quad w_5 = \frac{n_5}{n} = \frac{10}{35} = 0{,}29\,; \quad w_6 = \frac{n_6}{n} = \frac{9}{35} = 0{,}26\,.$$

x_i	18	20	21	22	23	25
w_i	0,09	0,11	0,14	0,11	0,29	0,26

Контроль: Σw_i=0,09+0,11+0,14+0,11+0,29+0,26=1.

Замечание: результат может отличаться от единицы за счет погрешностей округления.

Если считать, что была обеспечена репрезентативность выборки, и учесть свойство устойчивости относительной частоты, то можно утверждать, что вероятность того, что на занятии будут присутствовать 23 студента, приблизительно равна 0,29. Из таблицы видно также, что наивероятнейшее число студентов, присутствующих на занятии, равно 23.(Чему приблизительно равна вероятность того, что на занятии присутствует 25 студентов?)

■■**Пример 2.**

При решении контрольной работы по математической статистике все 25 студентов группы полностью справились со всеми заданиями. Первый студент сдал работу на 56-й минуте занятия. В течение последующих 4-х минут сдали работы еще два студента. С 60-ой по 65-ую минуты сдали работы 4 студента. Затем фиксировались отрезки времени по 5 минут и результаты оказались следующими: 65-70 мин. – 3 студента; 70-75 мин. – 7 студентов; 75-80 мин. – 5 студентов; 80-85 мин. – 2 студента; 85-90 мин. – 1 студент.

Статистическое распределение выборки объема n=25 непрерывного количественного признака X – времени, затрачиваемого студентами на выполнение контрольной работы, имеет вид:

№ п/п	Частичный интервал	n_i	$w_i = \frac{n_i}{n}$	Плотность частоты $\frac{n_i}{h}$
1	55 - 60	3	0,12	0,6
2	60 - 65	4	0,16	0,8
3	65 - 70	3	0,12	0,6
4	70 – 75	7	0,28	1,4
5	75 – 80	5	0,20	1,0
6	80 – 85	2	0,08	0,4
7	85 - 90	1	0,04	0,2
	h = 5	$\Sigma n_i = n = 25$	$\Sigma w_i = 1$	

Вопрос: Чему приблизительно равна вероятность того, что время выполнения контрольной работы попадает в интервал (70 мин; 75 мин)?

Ответ: Если обеспечена репрезентативность выборки, в частности, студенческая группа выбрана случайно, случайным было формирование группы на 1-м курсе, то по данным выборки можно утверждать, что

$$P\ (\ 70< X< 75\ ) \approx 0{,}28.$$

2.4. Эмпирическая функция распределения.

Пусть известно статистическое распределение выборки количественного признака X. Введем обозначения: n_x – число наблюдений, при которых наблюдалось значение признака меньшее x ; n –общее число наблюдений (объем выборки). Относительная частота события « X< x » равна $\frac{n_x}{n}$. Если x изменяется, то, в общем случае, изменяется и относительная частота, т.е. $\frac{n_x}{n}=F^*(x)$.Так как эта функция находится эмпирическим (опытным) путем, то ее называют *эмпирической функцией распределения*.

Эмпирическая функция распределения $F^*(x)$ выборки используется для приближенного представления теоретической функции F(x) распределения вероятностей в генеральной совокупности. Функция $F^*(x)$ обладает всеми свойствами функции F(x):

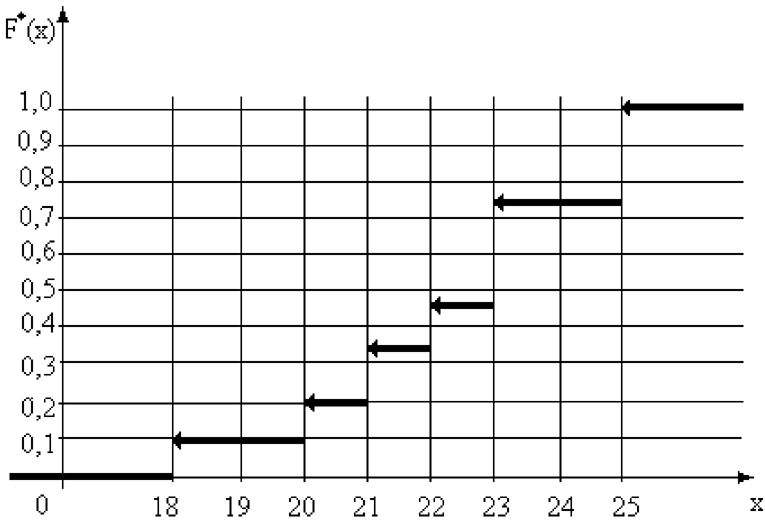
1) Значения эмпирической функции принадлежат отрезку [0;1].
2) $F^*(x)$ – неубывающая функция.
3) Если x_1 – наименьшая варианта, то $F^*(x)=0$ при $x \le x_1$;
   если x_k – наибольшая варианта, то $F^*(x)=1$ при $x > x_k$.

Построим эмпирическую функцию распределения выборки для статистического распределения, которое дано в примере 1.

Пусть, например, x =13. Не было зафиксировано ни одного случая, когда бы на занятии присутствовало студентов меньше, чем 13. Таким образом, $n_X=n_{13}=0$. А значит $F^*(13) = \frac{n_{13}}{35} = \frac{0}{35} =$ 0. Тот же результат получим, если выберем любое действительное число, не превосходящее 18. Если же x =19, то $n_{19}=3$, так как трижды на занятии присутствовало студентов меньше, чем 19, а именно 18 студентов. Значит, $F^*(19) = \frac{n_{19}}{35} = \frac{3}{35} =$ 0,09. Такое же значение для эмпирической функции распределения получим для всех $18< x \le 20$. Подсчитывая n_X для различных x, получим

$$F^*(x) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad x \le 18, \\ 0{,}09 & \text{если} \quad 18 < x \le 20, \\ 0{,}20, & \text{если} \quad 20 < x \le 21, \\ 0{,}34, & \text{если} \quad 21 < x \le 22, \\ 0{,}45, & \text{если} \quad 22 < x \le 23, \\ 0{,}74, & \text{если} \quad 23 < x \le 25, \\ 1{,}00, & \text{если} \quad x > 25 \end{cases}$$

Строим график функции $F^*(x)$:



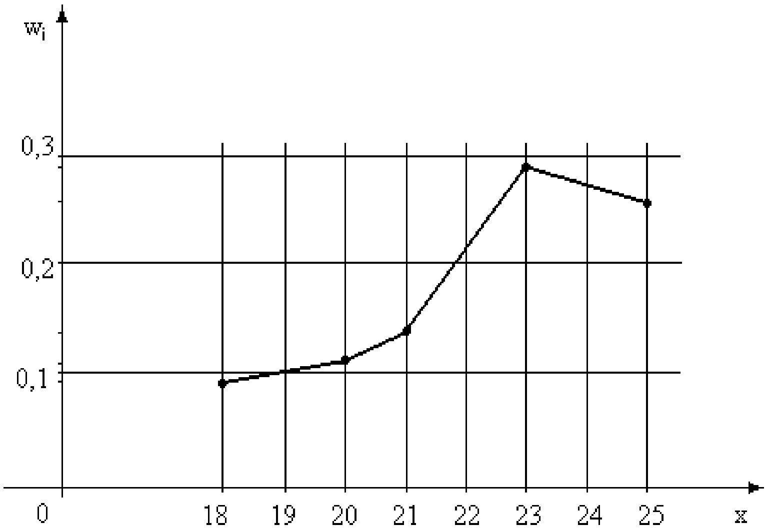
2.5. Полигон и гистограмма.

Для наглядности статистическое распределение дискретного количественного признака X иллюстрируется полигоном распределения, а непрерывного – гистограммой.

Полигоном частот называют ломаную, отрезки которой соединяют точки (x_i, n_i); варианты x_i откладывают на оси абсцисс, а частоты n_i – на оси ординат.

Полигоном относительных частот называют ломаную, отрезки которой соединяют точки (x_i, w_i); варианты x_i откладывают на оси абсцисс, а относительные частоты w_i – на оси ординат.

Построим полигон относительных частот статистического распределения выборки, данного в примере 1.

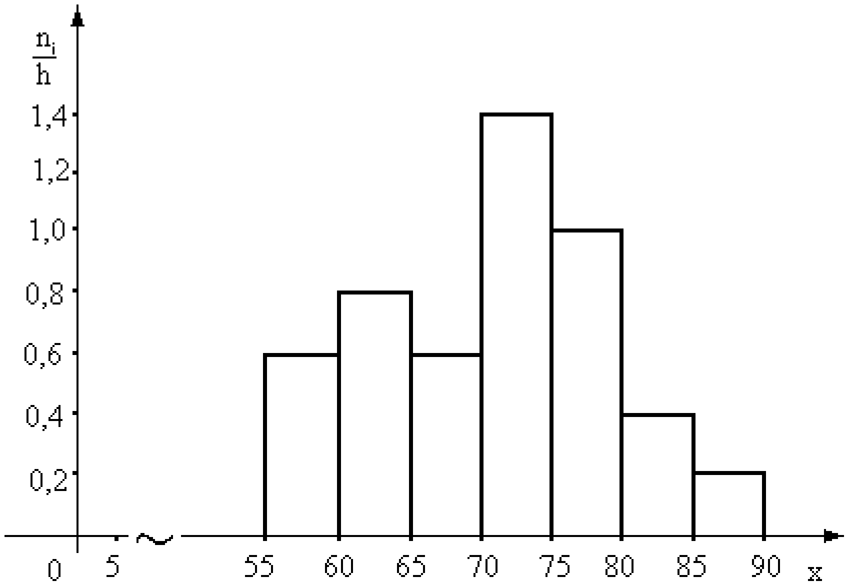


Если X непрерывный количественный признак, то интервал, в котором заключены все варианты, разбивают на частичные интервалы длиной h и подсчитывают число вариант, попавших в каждый интервал.(см.пример 2).

Гистограммой частот называют ступенчатую фигуру, состоящую из прямоугольников, основаниями которых служат частичные интервалы длиной h, а высоты равны отношению $\frac{n_i}{h}$ (плотность частоты).Основания прямоугольников располагаются на оси абсцисс.

Площадь i-го частичного прямоугольника равна $h\cdot\frac{n_i}{h} = n_i$. Следовательно, площадь гистограммы частот равна сумме всех частот, т.е. объему выборки.

Построим гистограмму частот распределения выборки, рассмотренной в примере 2.



Гистограммой относительных частот называют ступенчатую фигуру, состоящую из прямоугольников, основаниями которых служат частичные интервалы длиной h, а высоты равны отношению $\frac{w_i}{h}$ (плотность относительной частоты).

Площадь гистограммы относительных частот равна

$$\sum h \cdot \frac{w_i}{h} = \sum w_i = 1.$$

2.6. Статистические оценки.

При изучении количественного признака X генеральной совокупности, в частности, нужно найти числовые характеристики случайной величины X, т. е. найти математическое ожидание M(X), дисперсию D(X), среднее квадратическое отклонение σ(X) и т. д. При невозможности сплошного обследования из генеральной совокупности извлекают выборку и по ней оценивают (приближенно находят) интересующие величины. Обозначим через θ - величину, которую нужно оценить, а через θ^* - статистическую оценку этой величины. Для различных выборок даже одного и того же объема n будут получаться различные оценки $\theta_1^*, \theta_2^*, \ldots, \theta_k^*$. Поэтому статистическую оценку можно рассматривать как случайную величину.

Для того, чтобы статистические оценки давали «хорошие» приближения оцениваемых величин, они должны быть несмещенными, эффективными и состоятельными.

1) Статистическая оценка θ^* называется несмещенной, если ее математическое ожидание равно оцениваемой величине,т. е. $M(\theta^*) = \theta$.
2) Статистическая оценка θ^* называется эффективной, если при заданном объеме выборки n она имеет наименьшую возможную дисперсию.
3) Состоятельной называют статистическую оценку, которая при $n \to \infty$ стремится по вероятности к оцениваемому параметру:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left| \theta - \theta^* \right| < \varepsilon \right) = 1 .$$

2.7. Оценка генеральной средней по выборочной средней.

Пусть изучается генеральная совокупность относительно дискретного количественного признака X.

Генеральной средней $\bar{x}_г$ называют среднее арифметическое значений признака генеральной совокупности.

Если в генеральной совокупности значения признака $x_1, x_2, \ldots, x_k$ имеют соответственно частоты $N_1, N_2, \ldots, N_k$ ($N_1+N_2+ \ldots+N_k = N$ – объем генеральной совокупности), то

$$\bar{x}_г = \frac{x_1N_1 + x_2N_2 + \ldots + x_kN_k}{N} = \frac{\sum x_iN_i}{N}$$

Так как $\frac{N_i}{N}$ равно вероятности извлечения из генеральной совокупности объекта со значением признака x_i ; то

$$\bar{x}_г = x_1\frac{N_1}{N} + x_2\frac{N_2}{N} + \ldots + x_k\frac{N_k}{N} = M(X).$$

Обобщая полученный результат на генеральную совокупность с непрерывным распределением признака X, и в этом случае определим генеральную среднюю как математическое ожидание признака: $\bar{x}_г = M(X)$.

Напомним, что найти математическое ожидание мы не можем. Можно лишь говорить о статистической оценке математического ожидания после того, как из генеральной совокупности будет извлечена выборка объема n, имеющая статистическое распределение:

x_i	x_1	x_2	x_3	...	x_k
n_i	n_1	n_2	n_3	...	n_k

Выборочной средней $\overline{x}_в$ называют среднее арифметическое вариант:

$$\overline{x}_в = \frac{x_1 n_1 + x_2 n_2 + ... + x_k n_k}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_i n_i .$$

Выборочная средняя $\overline{x}_в$ является несмещенной и состоятельной оценкой генеральной средней. Следовательно, M(X) = $\overline{x}_г \approx \overline{x}_в$, т.е. в качестве оценки математического ожидания случайной величины в генеральной совокупности принимают выборочную среднюю.

<u>Замечание.</u> Если первоначальные варианты x_i большие числа, то для упрощения расчета целесообразно перейти к условным вариантам

$$u_i = x_i - C, \text{ где } C=\text{const}.$$

Тогда $\overline{x}_в = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i(u_i + C) = \frac{1}{n}\sum n_i u_i + \frac{C}{n}\sum n_i = C + \frac{1}{n}\sum n_i u_i$.

■ Найдем выборочную среднюю в примере 1.

$$\overline{x}_в = \frac{1}{35}(3\cdot 18 + 4\cdot 20 + 5\cdot 21 + 4\cdot 22 + 10\cdot 23 + 9\cdot 25) =$$

$$= \frac{1}{35}(\,54 + 80 + 105 + 88 + 230 + 225\,) = \frac{782}{35} = 22{,}34$$

Округляя полученный результат до целых, получаем, что M(X) ≈ 22. Таким образом, можно утверждать, что в среднем 22 студента из группы присутствуют на занятии.

Учитывая, что случайные величины X – число студентов, присутствующих на занятии, и Y- число студентов, успешно сдающих экзаменационную сессию, коррелированные (зависимые) величины, можно дать предварительную оценку успеваемости студентов определенного факультета.

■ ■ Найдем выборочную среднюю в примере 2.

Статистическое распределение выборки непрерывного количественного признака преобразуем к статистическому распределению равноотстоящих вариант, в качестве которых выбираем середины интервалов:

x_i	57,5	62,5	67,5	72,5	77,5	82,5	87,5
n_i	3	4	3	7	5	2	1

Перейдем к условным вариантам: $u_i = x_i - 72{,}5$

u_i	-15	-10	-5	0	5	10	5
n_i	3	4	3	7	5	2	1

$$\overline{x}_в = 72{,}5 + \frac{1}{25}(-15\cdot 3 - 10\cdot 4 - 5\cdot 3 + 0\cdot 7 + 5\cdot 5 + 10\cdot 2 + 5\cdot 1) =$$

$$= 72{,}5 + \frac{1}{25}(-45 - 40 - 15 + 0 + 25 + 20 + 5) = 72{,}5 - \frac{50}{25} = 72{,}5 - 2 = 70{,}5$$

Получили, что $M(X) \approx 70{,}5$ мин., то есть в среднем время, затрачиваемое студентами на выполнение контрольной работы приблизительно равно 70,5 минут.

2.8. Оценка генеральной средней по исправленной выборочной дисперсии.

Генеральной дисперсией $D_г$ называют среднее арифметическое квадратов отклонений значений признака генеральной совокупности от их среднего значения $\overline{x}_г$:

$$D_г = \frac{1}{N}\sum N_i (x_i - \overline{x}_г)^2$$

Выборочной дисперсией $D_в$ называют среднее арифметическое квадратов отклонений вариант от их среднего значения $\overline{x}_в$:

$$D_в = \frac{1}{n}\sum n_i (x_i - \overline{x}_в)^2 .$$

Вычисление дисперсий можно упростить, используя теорему:

Дисперсия равна среднему квадратов значений признака минус квадрат общей средней:

$$D = \overline{x^2} - (\overline{x})^2 .$$

Если выборочную дисперсию умножить на число $\frac{n}{n-1}$, то получим исправленную выборочную дисперсию

$$S^2 = \frac{n}{n-1} D_в = \frac{1}{n-1} \sum n_i (x_i - \overline{x}_в)^2 .$$

Исправленная выборочная дисперсия является несмещенной статистической оценкой генеральной дисперсии или дисперсии количественного признака X в генеральной совокупности, ее и принимают в качестве статистической оценки D(X), т.е.

$$D(X) = D_г \approx S^2.$$

Статистической оценкой для среднего квадратического отклонения служит исправленное квадратического отклонение S:

$$\sigma(X) \approx S = \sqrt{S^2} .$$

<u>Замечание 1</u>. Сравнивая формулы для $D_в$ и S^2, замечаем, что они отличаются только множителем, стоящим перед суммой. Очевидно, что при достаточно больших значениях n объема выборки выборочная и исправленная дисперсии различаются мало. Поэтому дисперсию исправляют, если n< 30.

<u>Замечание 2</u>. Если первоначальные варианты x_i большие числа, то целесообразно вычесть из всех вариант одно и то же число C, равное выборочной средней или близкое к ней, т.е. перейти к условным вариантам $u_i = x_i - C$. Тогда

$$D_в(X) = D_в(u) = \overline{u^2} - (\overline{u})^2 = \frac{1}{n} \sum n_i u_i{}^2 - \left(\frac{1}{n} \sum n_i u_i \right)^2 .$$

■ Найдем дисперсию и среднее квадратическое отклонение в примере 1.

$$D_в = \frac{1}{35}(3 \cdot 18^2 + 4 \cdot 20^2 + 5 \cdot 21^2 + 4 \cdot 22^2 + 10 \cdot 23^2 + 9 \cdot 25^2) - (22,34)^2 =$$

$$= \frac{1}{35}(972 + 1600 + 2205 + 1936 + 5290 + 5625) - 499,08 = 503,66 - 499,08 =$$

$$= 4,58.$$

« Исправляем » дисперсию: $S^2 = \frac{n}{n-1} D_в = \frac{35}{34} \cdot 4,58 = 4,71$.

Сравнивая $D_в$ и S^2 замечаем, что «исправление» можно было не проводить, так как дисперсия увеличилась всего на 2,8%.

Исправленное среднее квадратическое отклонение равно:

$$S = \sqrt{S^2} = \sqrt{4{,}71} = 2{,}17 .$$

■ ■ Найдем дисперсию и среднее квадратическое отклонение в примере 2.

Перейдем к условным вариантам $u_i = x_i - 72{,}5$.

$$D_в = \frac{1}{25}\left(3\cdot(-15)^2 + 4\cdot(-10)^2 + 3\cdot(-5)^2 + 7\cdot 0^2 + 5\cdot 5^2 + 2\cdot 10^2 + 1\cdot 5^2\right) - 2^2 =$$

$$= \frac{1}{25}(675 + 400 + 75 + 0 + 625 + 200 + 25) - 2^2 = \frac{2000}{25} - 2^2 = 80 - 4 = 76 .$$

Находим исправленную выборочную дисперсию:

$$S^2 = \frac{n}{n-1} D_в = \frac{25}{24}\cdot 76 = 79{,}17 .$$

Исправленное среднее квадратическое отклонение равно:

$$S = \sqrt{S^2} = 9{,}00 .$$

ЗАДАЧИ ДЛЯ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКЕ

Задано статистическое распределение выборки.

1) Найти распределение относительных частот.
2) Построить полигон относительных частот.
3) Найти эмпирическую функцию распределения и построить ее график.
4) Найти несмещенные статистические оценки математического ожидания, дисперсии и среднего квадратического отклонения в генеральной совокупности.

1)

x_i	2	5	7	8	11
n_i	1	3	6	4	6

2)

x_i	2	5	7	12	15
n_i	1	3	6	3	7

3)

x_i	4	7	8	12	13

4)

x_i	1	4	6	8	11

n_i	5	2	3	10	5

n_i	10	15	25	30	20

5)

x_i	2	5	7	8	10
n_i	1	3	2	4	5

6)

x_i	4	7	8	10	11
n_i	5	2	3	3	7

7)

x_i	1	4	5	7	8
n_i	20	10	14	6	10

8)

x_i	2	3	5	6	15
n_i	10	15	5	20	10

9)

x_i	15	20	25	30	40
n_i	10	15	30	20	25

10)

x_i	2	4	5	7	10
n_i	3	4	2	2	9

11)

x_i	1	4	6	7	9
n_i	1	3	2	4	5

12)

x_i	3	6	7	9	10
n_i	5	2	3	3	7

13)

x_i	2	5	6	8	9
n_i	20	10	14	6	10

14)

x_i	2	3	5	6	15
n_i	10	15	20	10	5

15)

x_i	15	20	25	30	40
n_i	10	15	30	25	20

16)

x_i	2	4	5	7	10
n_i	3	4	9	2	2

17)

x_i	1	4	6	7	10
n_i	1	3	6	4	6

18)

x_i	4	7	9	14	17
n_i	1	3	6	3	7

19)

x_i	4	7	8	12	13	16
n_i	5	2	3	10	5	5

20)

x_i	2	5	7	8	12
n_i	10	15	25	30	20

21)

x_i	1	3	4	6	7
n_i	20	10	14	6	10

22)

x_i	1	2	4	5	14
n_i	10	15	5	20	10

23)

x_i	5	10	15	20	30
n_i	10	15	30	20	25

24)

x_i	2	4	5	7	10	12
n_i	3	4	2	2	9	5

25)

x_i	3	6	8	9	12
n_i	1	3	6	4	6

26)

x_i	2	5	7	12	15
n_i	1	3	6	7	3

27)

x_i	3	6	7	11	12
n_i	5	2	3	10	5

28)

x_i	3	6	8	10	13
n_i	10	15	25	30	20

29)

x_i	1	4	6	8	11
n_i	2	3	5	6	4

30)

x_i	5	8	9	11	12
n_i	5	2	3	3	7

31)

x_i	10	15	20	25	35
n_i	10	15	30	20	25

32)

x_i	2	5	7	8	11
n_i	1	3	6	6	4

33)

x_i	2	4	5	7	9	10
n_i	3	4	2	2	10	9

34)

x_i	2	5	7	12	15	18
n_i	1	3	6	7	3	1

35)

x_i	4	7	8	12	13
n_i	2	5	10	5	3

36)

x_i	1	4	6	8	11	14

n_i	10	15	25	30	20	10

37)

x_i	2	4	6	8	11
n_i	5	10	20	25	15

38)

x_i	3	6	8	9	11
n_i	1	3	2	4	5

39)

x_i	4	5	7	8	10	11
n_i	5	5	2	3	3	7

40)

x_i	1	4	5	7	8
n_i	15	5	9	1	5

41)

x_i	2	4	5	7	12	15
n_i	1	3	5	7	6	3

42)

x_i	2	5	7	8	11	17
n_i	1	3	6	4	6	10

43)

x_i	2	4	5	7	10
n_i	1	4	10	4	1

44)

x_i	3	4	5	6	8
n_i	10	15	30	20	25

45)

x_i	3	4	6	7	16
n_i	10	15	5	20	10

46)

x_i	1	4	5	7	8
n_i	10	5	7	3	5

47)

x_i	4	7	8	10	11	14
n_i	5	2	3	3	7	5

48)

x_i	2	4	5	7	8	10
n_i	1	5	2	3	4	5

49)

50)

x_i	2	10	20	22	30
n_i	1	2	4	5	4

x_i	1	2	4	5	8
n_i	5	12	19	4	4

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Таблица значений функции $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}}$

X	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3970	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3652	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	0,2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1.8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0,0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3,0	0,0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Таблица значений функции $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-t^2/2} dt$

x	Φ(x)	x	Φ(x)	X	Φ(x)	x	Φ(x)
0,00	0,0000	0,32	0,1255	0,64	0,2389	0,96	0,3315
0,01	0,0040	0,33	0,1293	0,65	0,2422	0,97	0,3340
0,02	0,0080	0,34	0,1331	0,66	0,2454	0,98	0,3365
0,03	0,0120	0,35	0,1368	0,67	0,2486	0,99	0,3389
0,04	0,0160	0,36	0,1406	0,68	0,2517	1,00	0,3413
0,05	0,0199	0,37	0,1443	0,69	0,2549	1,01	0,3438
0,06	0,0239	0,38	0,1480	0,70	0,2580	1,02	0,3461
0,07	0,0279	0,39	0,1517	0,71	0,2611	1,03	0,3485
0,08	0,0319	0,40	0,1554	0,72	0,2642	1,04	0,3508
0,09	0,0359	0,41	0,1591	0,73	0,2673	1,05	0,3531
0,10	0,0398	0,42	0,1628	0,74	0,2703	1,06	0,3554
0,11	0,0438	0,43	0,1664	0,75	0,2734	1,07	0,3577
0,12	0,0478	0,44	0,1700	0,76	0,2764	1,08	0,3599
0,13	0,0517	0,45	0,1736	0,77	0,2794	1,09	0,3621
0,14	0,0557	0,46	0,1772	0,78	0,2823	1,10	0,3643
0,15	0,0596	0,47	0,1808	0,79	0,2852	1,11	0,3665
0,16	0,0636	0,48	0,1844	0,80	0,2881	1,12	0,3686
0,17	0,0675	0,49	0,1879	0,81	0,2910	1,13	0,3708
0,18	0,0714	0,50	0,1915	0,82	0,2939	1,14	0,3729
0,19	0,0753	0,51	0,1950	0,83	0,2967	1,15	0,3749
0,20	0,0793	0,52	0,1985	0,84	0,2995	1,16	0,3770
0,21	0,0832	0,53	0,2019	0,85	0,3023	1,17	0,3790
0,22	0,0871	0,54	0,2054	0,86	0,3051	1,18	0,3810
0,23	0,0910	0,55	0,2088	0,87	0,3078	1,19	0,3830
0,24	0,0948	0,56	0,2123	0,88	0,3106	1,20	0,3849
0,25	0,0987	0,57	0,2157	0,89	0,3133	1,21	0,3869
0,26	0,1026	0,58	0,2190	0,90	0,3159	1,22	0,3883
0,27	0,1064	0,59	0,2224	0,91	0,3186	1,23	0,3907
0,28	0,1103	0,60	0,2257	0,92	0,3212	1,24	0,3925
0,29	0,1141	0,61	0,2291	0,93	0,3238	1,25	0,3944
0,30	0,1179	0,62	0,2324	0,94	0,3264		
0,31	0,1217	0,63	0,2357	0,95	0,3289		
1,26	0,3962	1,59	0,4441	1,92	0,4726	2,50	0,4938
1,27	0,3980	1,60	0,4452	1,93	0,4732	2,52	0,4941
1,28	0,3997	1,61	0,4463	1,94	0,4738	2,54	0,4945
1,29	0,4015	1,62	0,4474	1,95	0,4744	2,56	0,4948
1,30	0,4032	1,63	0,4484	1,96	0,4750	2,58	0,4951
1,31	0,4049	1,64	0,4495	1,97	0,4756	2,60	0,4953
1,32	0,4066	1,65	0,4505	1,98	0,4761	2,62	0,4956
1,33	0,4082	1,66	0,4515	1,99	0,4767	2,64	0,4959
1,34	0,4099	1,67	0,4525	2,00	0,4772	2,66	0,4961
1,35	0,4115	1,68	0,4535	2,02	0,4783	2,68	0,4963
1,36	0,4131	1,69	0,4545	2,04	0,4793	2,70	0,4965

1,38	0,4162	1,71	0,4564	2,08	0,4812	2,74	0,4969
1,39	0,4177	1,72	0,4573	2,10	0,4821	2,76	0,4971
1,40	0,4192	1,73	0,4582	2,12	0,4830	2,78	0,4973
1,41	0,4207	1,74	0,4591	2,14	0,4838	2,80	0,4974
1,42	0,4222	1,75	0,4599	2,16	0,4846	2,82	0,4976
1,43	0,4236	1,76	0,4608	2,18	0,4854	2,84	0,4977
1,44	0,4251	1,77	0,4616	2,20	0,4861	2,86	0,4979
1,45	0,4265	1,78	0,4625	2,22	0,4868	2,88	0,4980
1,46	0,4279	1,79	0,4633	2,24	0,4875	2,90	0,4981
1,47	0,4292	1,80	0,4641	2,26	0,4881	2,92	0,4982
1,48	0,4306	1,81	0,4649	2,28	0,4887	2,94	0,4984
1,49	0,4319	1,82	0,4656	2,30	0,4893	2,96	0,4985
1,50	0,4332	1,83	0,4664	2,32	0,4898	2,98	0,4986
1,51	0,4345	1,84	0,4671	2,34	0,4904	3,00	0,49865
1,52	0,4357	1,85	0,4678	2,36	0,4909	3,20	0,49931
1,53	0,4370	1,86	0,4686	2,38	0,4913	3,40	0,49966
1,54	0,4382	1,87	0,4693	2,40	0,4918	3,60	0,499841
1,55	0,4394	1,88	0,4699	2,42	0,4922	3,80	0,499928
1,56	0,4406	1,89	0,4706	2,44	0,4927	4,00	0,499968
1,57	0,4418	1,90	0,4713	2,46	0,4931	4,50	0,499997
1,58	0,4429	1,91	0,4719	2,48	0,4934	5,00	0,499997

Учебное издание

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
И
МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

Программа, методические указания
и контрольные задания

Автор:
Николай Иванович Нагулин

Редактор	Н.И. Нагулин
Техн. Редактор	Л.А. Лыгина
Оригинал – макет	Л.А. Лыгина

Подписано в печать _______
Формат $60 \times 84\ {}^{1}\!/_{16}$. Бумага типограф. Гарнитура *Times*.
Печать офсетная. Усл. печ. л.3. Уч.-изд.л._____.
Тираж ____ экз. Изд. №_______. Заказ №______. Цена договорная.

Издательство Северодонецкого технологического института
ВНУ им. Владимира Даля

Адрес издательства: 93400, г.Северодонецк, Луганской обл.,
пр. Советский, 59-а, главный корпус
Телефон: 8(06452) 4-03-42
E-mail: sti@sti.lg.ua