

Лекция 1

План

- 1 Введение
- 2 Высказывания и высказывательные формы.
- 3 Элементарные и составные предложения.
- 4 Логические операции
- 5 Отрицание
- 6 Конъюнкция
- 7 Дизъюнкция
- 8 Импликация
- 9 Эквивалентность
- 10 Формулы логики высказываний
- 11 Алфавит логики высказываний
- 12 Определение формулы логики высказываний
- 13 Процедура формализации высказываний

«Логика – наука о законах мышления и его формах» (С.И.Ожегов)

Термин происходит от греческого «логос», что, с одной стороны обозначает слово, а, с другой стороны то, что выражается в речи, то есть мышление.

Логика изучает лишь те аспекты мышления, которые фиксированы в языке в виде слов, предложений и их совокупностей.

Логику как науку создал в 4 в. до н.э. древнегреческий ученый Аристотель.

Вклад Аристотеля был столь значителен, что вплоть до 17 века не было особой необходимости в совершенствовании логики как науки.

В 17 веке немецкий ученый Лейбниц задумал создать логику как «искусство исчисления высказываний», где каждому понятию соответствовал бы некий символ, а рассуждения имели бы вид вычислений. Эти идеи тогда не были должным образом оценены современниками.

Только в 19 веке ирландский математик Дж. Буль частично воплотил идеи Лейбница. Он создал алгебру логики, в которой действуют законы схожие с законами алгебры, но буквами обозначают не числа, а высказывания. На языке булевой алгебры можно описывать простейшие рассуждения и «вычислять» их результаты.

Алгебра Буля – начало математической логики.

В начале 20 столетия была обнаружена возможность использования мат логики в технике, кибернетике.

Сегодня мат логика используется в биологии, медицине, лингвистике, педагогике, психологии и экономике.

Мат логика уточнила и по-новому осветила понятия и методы формальной логики и значительно расширила ее возможности и сферы применения.

Высказывания и высказывательные формы.

Высказывания – это предложение, которое либо истинно, либо ложно.

Пример

«Донец впадает в Каспий» - это ложное высказывание.

«Студент ЭК – это предсказатель» - это истинное высказывание.

Не все предложения есть высказывания.

Пример

«Математика интересный предмет» - одного мнения быть не может.

Пример

$x^2 = 4$ – это предложение требует уточнения. Нужно подставить конкретное значение x . Здесь x есть переменная. Она может быть задана на некотором множестве своих возможных значений, например $\{-1; 0; 1; 2\}$.

Каждому значению переменной из множества ее допустимых значений соответствует И или Л высказывания $x^2 = 4$.

Высказывательная форма – это предложение, которое содержит хотя бы одну переменную и становится высказыванием при подстановке вместо всех переменных их значений.

Переменные в ВФ могут присутствовать и неявно.

«Он брюнет», «Число делится на 7». Здесь «Он» и «Число» - это переменные.

Иначе можно сказать

« x брюнет», « x делится на 7», то есть легко ввести переменную явно.

Из ВФ можно получить В не только путем подстановки значений переменных, но и путем использования специальных слов – связок: «всякий», «существует», «некоторые», «по меньшей мере один».

Пример

«Всякое число x делится на 7» - это ЛВ.

«Существует число x делящееся на 7» - это ЛВ.

Элементарные и составные предложения.

Предложения, образованные из других предложений с помощью логических связок, называют составными.

Элементарное предложение то, которое не является составным.

Логические связки – это

НЕ, И, ИЛИ, ЕСЛИ-ТО, ТОГДА И ТОЛЬКО ТОГДА, КОГДА и другие.

Наиболее употребительные в математике - НЕ, И, ИЛИ, ЕСЛИ-ТО, ТОГДА И ТОЛЬКО ТОГДА, КОГДА.

Остальные логические связки могут быть сведены к указанным с помощью союза НЕ.

Логические операции

Отрицание

Пусть А высказывание. Введем символ \neg для обозначения союза НЕ.

Таблица истинности

Пояснения ...

А А∧Б

1 0

0 1

Конъюнкция

Пусть А и Б высказывания. Введем символ \wedge для обозначения союза И.

Таблица истинности

Пояснения ...

А Б А∧Б

1 1 1

1 0 0

1 1 0

0 0 0

Дизъюнкция

Пусть А и Б высказывания. Введем символ \vee для обозначения союза ИЛИ.

Таблица истинности

Пояснения ...

А Б А∨Б

1 1 1

1 0 1

1 1 1

0 0 0

Импликация

Пусть А и В высказывания. Введем символ \rightarrow для обозначения связки ЕСЛИ, ТО.

Таблица истинности

Пояснения ...

А В $A \rightarrow B$

1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Эквивалентность

Пусть А и В высказывания.

Введем символ \leftrightarrow для обозначения связки ТОГДА И ТОЛЬКО ТОГДА

Таблица истинности

Пояснения ...

А В $A \leftrightarrow B$

1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Формулы логики высказываний

Логика высказываний – первый раздел математической логики.

Здесь из «атомов» - элементарных высказываний – путем использования логических операций и скобок строятся «молекулы» - составные высказывания.

Алфавит логики высказываний

1) И и Л или 1 и 0 – символы логических констант

2) x, y, z, ... – высказывательные переменные, то есть переменные, вместо которых можно подставить элементарные высказывания.

3) \neg , \wedge , \vee , \rightarrow , \leftrightarrow - символы логических операций

4) (и) – скобки

Определение формулы логики высказываний

1. Всякая высказывательная переменная есть формула

2. И и Л есть формулы

3. Если Φ формула, то

$\neg\Phi$ - формула

$\Phi_1 \wedge \Phi_2$ - формула

$\Phi_1 \vee \Phi_2$ - формула

$\Phi_1 \rightarrow \Phi_2$ - формула

$\Phi_1 \leftrightarrow \Phi_2$ - формула

4. Других формул нет

Процедура формализации высказываний

1. Если высказывание простое, то ему ставится в соответствие элементарная формула

2. Если высказывание составное, то для составления формулы надо:

а) выделить простые высказывания и логические связки

б) заменить простые высказывания буквами, а логические связки – логическими операциями

в) расставить скобки.

Пример АЛ_1 «(x, y) ∈ G»

Условие

Построить формулу логики высказываний, принимающую значение истина, когда точка (x, y) принадлежит заданной области G

Решение

Пример АЛ_2 «Текст в ФАЛ»

Построить формулу логики высказываний для следующей высказывательной формы: «две плоскости параллельны тогда и только тогда, когда они не имеют общих точек или совпадают»

Решение

Пусть высказывание x – это «две плоскости параллельны»

Пусть высказывание y – это «плоскости не имеют общих точек»

Пусть высказывание z – это «плоскости совпадают»

Тогда

$$x \leftrightarrow (y \vee z)$$

Пример АЛ_3 «ФАЛ в Текст»

Условие

Для формулы алгебры логики $(y \rightarrow \bar{x}) \vee z \wedge y \leftrightarrow \bar{z}$ построить высказывательную форму со значением «Истина»

Решение

Пусть x - это «сухой асфальт»

Пусть y- это «идет дождь»

Пусть z- это «ясно»

Тогда

«Одинаково, что не ясно или если идет дождь, то не сухой асфальт или идет дождь и ясно»