МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ, МОЛОДІ ТА СПОРТУ УКРАЇНИ
ДЕРЖАВНИЙ ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД
«ДОНЕЦЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ»
АВТОМОБІЛЬНО-ДОРОЖНІЙ ІНСТИТУТ

«ЗАТВЕРДЖУЮ»
Директор АДІ ДВНЗ «ДонНТУ»
М. М. Чальцев
29.08.2012 р.

Кафедра «Загальнонаукові дисципліни»

МЕТОДИЧНИЙ ПОСІБНИК ДО ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТЬ І ОРГАНІЗАЦІЇ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ СТУДЕНТІВ ІЗ ЗАГАЛЬНОГО КУРСУ ФІЗИКИ. РОЗДІЛИ «КОЛИВАННЯ ТА ХВИЛІ. ОПТИКА» ТА «ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ БУДОВИ АТОМІВ, МОЛЕКУЛ ТА АТОМНОГО ЯДРА» ГАЛУЗІ ЗНАНЬ 0701 «ТРАНСПОРТ І ТРАНСПОРТНА ІНФРАСТРУКТУРА» ДЛЯ СТУДЕНТІВ НАПРЯМУ ПІДГОТОВКИ 6.070106 «АВТОМОБІЛЬНИЙ ТРАНСПОРТ», ГАЛУЗЬ ЗНАНЬ 0601 «БУДІВНИЦТВО І АРХІТЕКТУРА», НАПРЯМ ПІДГОТОВКИ 6.060101 «БУДІВНИЦТВО», ГАЛУЗЬ ЗНАНЬ 0401 «ПРИРОДНИЧІ НАУКИ», НАПРЯМ ПІДГОТОВКИ 6.040106 «ЕКОЛОГІЯ, ОХОРОНА НАВКОЛИШНЬОГО СЕРЕДОВИЩА ТА ЗБАЛАНСОВАНЕ ПРИРОДОКОРИСТУВАННЯ»

15/47-2012-13

«РЕКОМЕНДОВАНО»
Навчально-методична комісія факультету
«Автомобільний транспорт»
Протокол № 9 від 15.05.2012 р.

«РЕКОМЕНДОВАНО»
Кафедра «Загальнонаукові дисципліни»
Протокол № 10
від 03. 05. 2012 р.

«РЕКОМЕНДОВАНО»
Навчально-методична комісія факультету
«Автомобільні дороги»
Протокол № 9 від 16.05.2012 р.

Горлівка – 2012

УДК 538 (07)

Методичний посібник до практичних занять організації самостійної роботи студентів із загального курсу фізики. Розділи «Коливання та хвилі. Оптика» та «Елементи теорії будови атомів, молекул та атомного ядра» галузі знань 0701 «Транспорт і транспортна інфраструктура» для студентів напряму підготовки 6.070106 «Автомобільний транспорт», галузь знань 0601 «Будівництво і архітектура», напрям підготовки 6.060101 «Будівництво», галузь знань 0401 «Природничі науки», напрям підготовки 6.040106 «Екологія, охорона навколишнього середовища та збалансоване природокористування», [Електронний ресурс] / укладач А. М. Галіахметов. – Електрон. дані. – Горлівка: ДВНЗ «ДонНТУ» АДІ, 2012. – 1 електрон. опт. диск (CD-R); 12 см. – Систем. вимоги: Pentium; 32 MB RAM; WINDOWS 98/2000/NT/XP; MS Word 2000. – Назва з титул. екрану.

Наведено основні формули, методичні вказівки до розв'язаня задач та приклади їх розв'язання, контрольні завдання щодо самопідготовки та самоконтролю; довідкові таблиці.

Укладач: Галіахметов А. М., к.ф.-м.н., доц.

Відповідальний за випуск: Галіахметов А. М., к.ф.-м.н., доц.

Рецензент: Карпинець А. П., к.х.н., доц.
каф. «Загальнонаукові дисципліни»

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА

Необхідною умовою розуміння фізичних законів є грамотне застосування їх під час розв'язання задач. Основна мета цього навчально-методичного посібника – надати допомогу студентам факультетів «Автомобільний транспорт» та «Автомобільні дороги» під час самостійного рішення задач загального курсу фізики.

Передбачається, що, працюючи з даним посібником, студент буде користуватися рекомендованою літературою загального курсу фізики. Тому, на початку кожного розділу розташований лише короткий перелік формул, пов'язаних з рішенням задач, які наведені у даному розділі.

Слідом за списком формул поміщені методичні вказівки до розв'язку задач на тему даного розділу. У методичних вказівках наводяться методи та приклади розв'язання конкретних задач. При цьому, акцент зроблено на фізичному боці питання, перевірці розмірності кінцевих формул, методах обчислення.

У посібнику розглянуті найбільш характерні й типові завдання по кожному розділу загального курсу фізики. Завдання підібрані так, що рішення вимагає не просто механічної підстановки початкових даних у готові рівняння, а передусім осмислення самого явища, розуміння фізичних законів. У кінці кожного розділу наводяться завдання для самостійного рішення. При повному опрацюванні попереднього матеріалу ці завдання не повинні викликати затруднення. Для контролю правильності рішення наводяться відповіді. Якщо рішення деяких з них викликають затруднення, необхідно повернутися до відповідних місць матеріалу, що були раніше опрацювані.

ЗАГАЛЬНІ МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

1. Умови завдань треба переписати повністю без скорочень. Для зауважень викладача на сторінках зошита залишати поля.

2. Рішення завдань слід супроводжувати короткими, але вичерпними поясненнями; у тих випадках, коли це можливо, надати креслення, що виконане за допомогою креслярського приладдя.

3. Розв'язувати завдання треба в загальному вигляді, тобто висловити шукану величину в буквених позначеннях величин, заданих в умові завдання. При такому способі розв’язування не проводять обчислення проміжних величин.

4. Після отримання розрахункової формули для перевірки правильності її слід підставити в праву частину формули замість символів величин позначення одиниць цих величин, провести з ними необхідні дії й упевнитися в тому, що отримана при цьому одиниця відповідає шуканій величині. Якщо такої відповідності немає, то це означає, що завдання виконано невірно.

5. Числові значення величин при підстановці їх у розрахункову формулу слід подавати тільки в одиницях СІ. Як виняток, допускається виражати в будь-яких, але однакових одиницях числові значення однорідних величин, що стоять у чисельнику та знаменнику дробу й мають однакові ступені.

6. Під час підстановки в розрахункову формулу, а також під час запису відповіді числові значення величин слід записувати як добуток десяткового дробу з однією значущою цифрою перед комою на відповідний ступінь десяти. Наприклад, замість 3520 треба записати $3{,}52\cdot10^{3}$, замість 0,00129 записати $1{,}29\cdot10^{-3}$ і т. д.

7. Обчислення за розрахунковою формулою треба проводити з дотриманням правил наближених обчислень [7]. Як правило, остаточну відповідь слід записувати з трьома значущими цифрами. Це відноситься й до випадку, коли результат отриманий із застосуванням калькулятора.

1 КОЛИВАННЯ ТА ХВИЛІ

1.1 Основні формули

Кінематичне рівняння гармонічних коливань матеріальної точки:

$$x = A\ cos\left(\omega t + \varphi\right), \qquad (1.1)$$

де x – зміщення;
A – амплітуда коливань;
ω – кутова або циклічна частота;
φ – початкова фаза.

Швидкість і прискорення матеріальної точки, що здійснює гармонійні коливання:

$$\upsilon = -A\omega\ sin\left(\omega t + \varphi\right); \qquad a = -A\omega^2 cos\left(\omega t + \varphi\right). \qquad (1.2)$$

Додавання гармонійних коливань одного напрямку й однакової частоти:

а) амплітуда результативного коливання:

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 cos\left(\varphi_2 - \varphi_1\right)}; \qquad (1.3)$$

б) початкова фаза результативного коливання:

$$\varphi = arctg\frac{A_1 sin\ \varphi_1 + A_2 sin\ \varphi_2}{A_1 cos\ \varphi_1 + A_2 cos\ \varphi_2}. \qquad (1.4)$$

Траєкторія точки, яка бере участь у двох взаємно перпендикулярних коливаннях:

$$x = A_1 cos\ \omega t; \qquad y = A_2 cos\left(\omega t + \varphi\right):$$

а) $y = \dfrac{A_2}{A_1}x,$ якщо різниця фаз $\varphi = 0$; (1.5)

б) $y = -\dfrac{A_2}{A_1}x,$ якщо різниця фаз $\varphi = \pm\pi$; (1.6)

в) $\dfrac{x^2}{A_1^2} + \dfrac{y^2}{A_2^2} = 1,$ якщо різниця фаз $\varphi = \pm\dfrac{\pi}{2}$. (1.7)

Періоди коливань маятників:

а) пружинного

$$T = 2\pi\sqrt{m / k}, \tag{1.8}$$

де m – маса;
k – коефіцієнт пружності;

б) математичного

$$T = 2\pi\sqrt{l / g}, \tag{1.9}$$

де l – довжина маятника;
g – прискорення вільного падіння;

в) фізичного

$$T = 2\pi\sqrt{I / mgr}, \tag{1.10}$$

де I – момент інерції маятника відносно осі качання;
r – відстань від осі маятника до його центру тяжіння.
Повна енергія тіла, що здійснює гармонійні коливання

$$E = m\omega^2 A^2 / 2. \tag{1.11}$$

Якщо сила опору F_{on} пропорційна першому ступеню швидкості: $F_{on} = -r\upsilon$, де r – коефіцієнт опору, то рівняння зміщення x у згасаючих коливаннях має вигляд:

$$x = A_0 e^{-\beta t} cos\left(\omega t + \varphi_0\right), \tag{1.12}$$

де A_0, φ_0 – початкова амплітуда й фаза;
β – коефіцієнт згасання;
ω – циклічна частота згасаючих коливань.
Закон зміни амплітуди згасаючих коливань

$$A\left(t\right) = A_0 e^{-\beta t}. \tag{1.13}$$

Частота ω й період T згасаючих коливань

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}, \qquad T = 2\pi / \omega, \tag{1.14}$$

де

$$\omega_0^2 = k / m, \qquad \beta = r / 2m. \tag{1.15}$$

Логарифмічний коефіцієнт згасання:

$$\lambda = ln\ \left(A_1 / A_2\right) = \beta T, \tag{1.16}$$

де A_1, A_2 – амплітуди двох послідовних коливань.

Енергія згасаючих коливань

$$E = E_0 e^{-2\beta t}, \tag{1.17}$$

де E_0 – початкова енергія.

Якщо коливання виникають під дією зовнішньої сили, що змушує $F = F_0\ cos\ \omega t$, де ω – циклічна частота сили, що змушує, то зміщення x незгасаючих вимушених коливань, що встановилися

$$x = A\ cos\ \left(\omega t - \varphi\right), \tag{1.18}$$

де амплітуда A й початкова фаза вимушених коливань φ визначається виразом

$$A = \frac{F_0}{m\sqrt{4\beta^2\omega^2 + \left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2}}, \qquad tg\varphi = \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}. \tag{1.19}$$

Резонансна циклічна частота

$$\omega_{рез} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}. \tag{1.20}$$

Для вільних коливань у контурі, що містить конденсатор місткістю C, катушку індуктивністю L і омічний опір R, з'єднаних послідовно, заряд на обкладках конденсатора змінюється з часом згідно із законом:

$$q = q_0 e^{-\beta t}\ cos\ \left(\omega t + \varphi_0\right), \tag{1.21}$$

де $q_0 e^{-\beta t}$ – амплітуда згасаючих коливань. Величини ω, ω_0 й β виражаються через параметри контура R, L, C формулами:

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}, \qquad \omega_0^2 = 1 / LC, \qquad \beta = R / 2L. \tag{1.22}$$

Період коливань контура Томсона $(R \to 0)$

$$T = 2\pi / \omega_0 = 2\pi\sqrt{LC} \tag{1.23}$$

Якщо в коливальному контурі, що складається з послідовно з'єднаних конденсатора місткістю C, катушки індуктивністю L і омічного опору R, діє періодична напруга $U = U_m\ cos\ \omega t$, то в такому ланцюзі встановлюються вимушені коливання заряду q тієї ж частоти

$$q = q_m\ cos\ (\omega t - \varphi), \tag{1.24}$$

при цьому величини q_m й φ виражаються формулами:

$$q_m = \frac{U_m}{\omega\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}, \tag{1.25}$$

$$tg\ \varphi = \frac{L\omega - 1/\omega C}{R}. \tag{1.26}$$

Резонансна циклічна частота для амплітуди заряду q_m і амплітуди напруги на конденсаторі $U_{C_m} = q_m / C$ визначається виразом (1.20).

Резонансна циклічна частота для амплітуди струму $I_m = q_m\omega$, амплітуди напруження на омічному опорі $U_{R_m} = q_m\omega R$ й амплітуди напруження на катущці $U_{L_m} = q_m\omega^2 L$ співпадає з частотою ω_0 вільних незгасаючих коливань

$$\omega_{рез} = \omega_0 = \sqrt{1/LC}. \tag{1.27}$$

Рівняння плоскої біжної хвилі:

$$\text{y} = \text{A}\ cos\ \omega\left(t - \frac{x}{\upsilon}\right), \tag{1.28}$$

де y – зміщення будь-якої з точок середовища з координатою x у момент t;

υ – швидкість поширення коливань у середовищі.

Зв'язок різниці фаз $\Delta\varphi$ коливань з відстанню Δx між точками середовища, відрахованих у напрямку поширення коливань:

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta x. \tag{1.29}$$

1.2 Методичні вказівки до розділу «Коливання та хвилі»

З (1.1) та (1.2) випливає, що максимальному зсуву при гармонійному коливанні відповідають нульова швидкість і максимальне прискорення, що спрямоване протилежно зміщенню (убік рівноваги). Навпаки, у положенні рівноваги (x = 0) швидкість максимальна, а прискорення дорівнює нулю.

Під час розгляду завдань на гармонійні коливання необхідно керуватися правилом: диференціальні рівняння коливань безпосередньо виходять з рівнянь руху тіла, що коливається.

У завданнях на складання коливань необхідно, у першу чергу, чітко визначити, який тип складання коливань має місце, а потім застосовувати загальні правила складання коливань.

Під час розв'язку задач на згасаючі коливання, необхідно мати на увазі, що період коливань

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}$$

можна приблизно записати як $T = 2\pi/\omega_0$ лише за умови виконання нерівності $\omega_0^2 \gg \beta^2$.

У завданнях на хвильові процеси амплітуда зміщення усіх часток на шляху хвилі однакова лише у разі плоских хвиль за відсутності поглинання енергії хвиль середовищем.

1.3 Приклади розв'язання задач

Приклад 1. Точка здійснює гармонійні коливання з частотою $\nu = 10$ Гц. У момент, прийнятий за початковий, точка мала максимальне зміщення: x_{max} = 1 мм. Написати рівняння коливань точки й накреслити їх графік.

Розв'язок. Рівняння коливань точки можна записати у вигляді:

$$x = A sin(\omega t + \varphi_1), \tag{1}$$

де A – амплітуда коливань;
ω – циклічна частота;
t – час;
φ_1 – початкова фаза.
За визначенням, амплітуда коливань:

$$A = x_{max}. \quad (2)$$

Циклічна частота ω пов'язана з частотою ν співвідношенням:

$$\omega = 2\pi\nu. \quad (3)$$

Для моменту часу $t = 0$ формула (1) набуде вигляду:

$$x_{max} = A\ sin\ \varphi_1,$$

звідки початкова фаза:

$$\varphi_1 = arcsin\left(x_{max}/A\right) = arcsin\ 1$$

або

$$\varphi_1 = \left(2k+1\right)\pi/2; \qquad (k = 0, 1, 2\ldots).$$

Зміна фази на 2π не змінює стану коливання точки, тому можна прийняти:

$$\varphi_1 = \pi/2. \quad (4)$$

З урахуванням рівностей (2) – (4) рівняння коливань набуде вигляду:

$$x = A\ \sin(2\pi\nu t + \varphi) \qquad \text{або} \qquad x = A\ cos\ 2\pi\nu t,$$

де $A = 1$ мм $= 10^{-3}$ м, $\nu = 10$ Гц, $\varphi = \pi/2$.
Графік відповідного гармонійного коливання наведено на рис. 1.1.

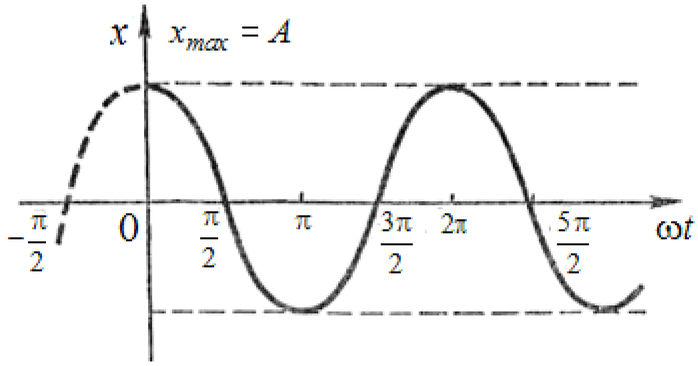

Рисунок 1.1 – Графік коливання $x = A\,cos\ \omega t$

Приклад 2. Частинка масою m = 0,01 кг здійснює гармонійні коливання з періодом $T = 2\,\text{с}$. Повна енергія частинки, що коливається E = 0,1 мДж. Визначити амплітуду A коливань і найбільше значення сили F_{max}, яка діє на частинку.

Розв'язок. Для визначення амплітуди коливань скористаємося виразом повної енергії частинки:

$$E = \frac{m\omega^2 A^2}{2},$$

де $\omega = 2\pi/T$. Звідси амплітуда:

$$A = \frac{T}{2\pi}\sqrt{\frac{2E}{m}}. \qquad (1)$$

Оскільки частинка робить гармонійні коливання, то сила, що діє на неї, є квазіпружною і, отже, може бути виражена співвідношенням:

$$F = -kx,$$

де k – коефіцієнт квазіпружної сили;

x – зміщення коливної точки.

Максимальна сила буде при максимальному зміщенні x_{max}, що дорівнює амплітуді:

$$F_{max} = kA. \qquad (2)$$

Коефіцієнт k виразимо через період коливань:

$$k = m\omega^2 = m \cdot 4\pi^2 / T^2. \qquad (3)$$

Підставивши вирази (1) та (3) в (2) і провівши спрощення, отримаємо:

$$F_{max} = 2\pi\sqrt{2mE}/T.$$

Зробимо обчислення:

$$A = \frac{2}{2 \cdot 3{,}14}\sqrt{\frac{2 \cdot 10^{-4}}{10^{-2}}}\ \text{м} = 0{,}045\ \text{м} = 45\ \text{мм};$$

$$F_{max} = \frac{2 \cdot 3{,}14}{2}\sqrt{2 \cdot 10^{-2} \cdot 10^{-4}}\ \text{Н} = 4{,}44 \cdot 10^{-3}\,\text{Н} = 4{,}44\ \text{мН}.$$

Приклад 3. Знайти рівняння траекторії точки $y(x)$, якщо вона рухається за законом: а) $x = A\ sin\ \omega t$, $y = A\ sin\ 2\omega t$; б) $x = A\ sin\ \omega t$, $y = A\ cos\ 2\omega t$.

Розв'язок. Для знаходження рівняння траектгорії необхідно виключити час.

а) $y = A\ sin\ 2\omega t = 2A\ sin\ \omega t\ cos\ \omega \mathrm{t}$

Оскільки

$cos\ \omega \mathrm{t} = \sqrt{1 - sin^2 \omega t}$, а $sin\ \omega t = \dfrac{x}{A}$, маємо

$$y^2 = 4A^2\ sin^2 \omega t\left(1 - sin^2 \omega t\right) = 4x^2\left(1 - \frac{x^2}{A^2}\right);$$

б) $y = A\ cos\ 2\omega t = A\left(1 - 2sin^2 \omega t\right) = A\left(1 - \dfrac{2x^2}{A^2}\right).$

Приклад 4. Два математичні маятники, довжини яких відрізняються на 18 см, здійснюють в одному й тому ж місці за однаковий час один – $N_1 = 25$ коливань, інший – $N_2 = 30$ коливань. Знайти довжини маятників.

Розв'язок. Періоди коливань маятників

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{l_1}{g}}, \qquad T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{l_2}{g}}, \tag{1}$$

де l_1, l_2 – довжини першого й другого маятника, відповідно;

g – прискорення вільного падіння.

Період коливань визначається як

$$T = t / N, \tag{2}$$

де t – час коливань;

N – число повних коливань.

Для двох періодів T_1 й T_2 маємо

$$T_1 / T_2 = N_2 / N_1, \tag{3}$$

де N_1, N_2 – число повних коливань першого й другого маятника відповідно.

З (1) й (3) отримаємо

$$\sqrt{l_1 / l_2} = N_2 / N_1,$$

звідки

$$l_1 = \left(N_2 / N_1\right)^2 l_2. \tag{4}$$

Підставимо числові значення

$$l_1 = \left(30/25\right)^2 l_2. \tag{5}$$

Згідно умови задачі

$$l_1 - l_2 = 0{,}18. \tag{6}$$

З (5) й (6) маємо

$$\left[\left(30/25\right)^2 - 1\right] l_2 = 0{,}18,$$

звідки

$$l_2 = \frac{0{,}18}{\left(30/25\right)^2 - 1}\ \text{м} = 0{,}9\ \text{м}.$$

Тоді

$$l_1 = l_2 + 0{,}18 = 1{,}08\ \text{м}.$$

Приклад 5. Однорідний стрижень маси m й довжиною l здійснює малі коливання відносно точки підвісу O'. Знайти відстань між точкою підвісу O' і центром інерції стрижня (точка O), при якому період коливань стрижня буде найменшим (рис. 1.2). Чому він дорівнює?

Розв'язок.

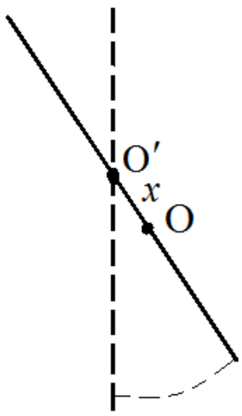

Рисунок 1.2. – Коливання стрижня відносно точки підвісу O'

Стрижень є фізичним маятником, період якого дорівнює

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgr}}, \qquad (1)$$

де I – момент інерції стрижня відносно точки підвісу;
m – маса стрижня;
r – відстань від точки підвісу до центру інерції стрижня.
Для знаходження I скористаємося теоремою Штейнера:

$$I = I_0 + mx^2, \qquad (2)$$

де I_0 – момент інерції стрижня відносно його центру інерції;
x – відстань, що шукаємо $(r = x)$.
Для I_0 справедливо

$$I_0 = \frac{1}{12}ml^2, \qquad (3)$$

де l – довжина стрижня.
Тоді підкорінне вираження у формулі (1) має вигляд

$$\frac{I}{mgr} = \frac{\frac{1}{12}ml^2 + mx^2}{mgx} = \frac{\frac{1}{12}l^2 + x^2}{gx}. \qquad (4)$$

Мінімальний період коливань $T_{мін}$ визначається з умови перетворення на нуль першої похідної від T по x: $T_x^{'} = 0$.

Маємо

$$\frac{2x}{gx} - \frac{\frac{1}{12}l^2 + x^2}{gx^2} = 0,$$

звідки

$$x = \frac{l}{2\sqrt{3}}. \qquad (5)$$

Тоді

$$T_{мін} = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{1}{12}ml^2 + \frac{ml^2}{12}}{mg\frac{l}{2\sqrt{3}}}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{\sqrt{3}g}} \qquad (6)$$

Приклад 6. Скільки повних коливань повинна зробити система, щоб її енергія зменшилася на 99 %, якщо рівняння коливань має вигляд: $\ddot{x} + 2\dot{x} + 626x = 0$.

Розв'язок. Число повних коливань визначається виразом:

$$N = t / T, \qquad (1)$$

де t – час коливань;

T – їх період.

Енергія згасаючих коливань E змінюєсья за законом:

$$E = E_0 e^{-2\beta t}, \qquad (2)$$

де E_0 – початкова енергія;

β – коефіцієнт згасання.

Представимо βt інакше

$$\beta t = \beta t\frac{t}{T} = \lambda N, \qquad (3)$$

де λ – логарифмічний декремент згасання.

Тоді (2) набуде вигляду

$$E = E_0 e^{-2\lambda N}. \qquad (4)$$

За умовою задачі $E = 10^{-2} E_0$, тому

$$10^{-2} = e^{-2\lambda N} \quad \text{або} \quad 10^2 = e^{2\lambda N},$$

звідки

$$2\ ln10 = 2\lambda N.$$

Отже

$$N = \lambda^{-1} ln10. \qquad (5)$$

За визначенням логарифмичного декременту згасання

$$\lambda = \beta T = \frac{2\pi\beta}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}, \tag{6}$$

де ω_0 – власна циклічна частота.

Порівняємо канонічне рівняння коливань з рівнянням коливань, які подані за умовою завдання

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0. \tag{7}$$

$$\ddot{x} + 2\dot{x} + 626x = 0. \tag{8}$$

З (7) – (8) відразу маємо, що

$$\beta = 1\ \text{с}^{-1}, \qquad \omega_0^2 = 626\ \frac{\text{рад}}{\text{с}}. \tag{9}$$

Тоді для λ маємо

$$\lambda = \frac{2\pi\cdot 1}{\sqrt{626-1}} = \frac{2\pi}{25}.$$

Для N отримаємо

$$N = (25/2\pi)\ ln10 \approx 9.$$

Приклад 7. Амплітуда згасаючих коливань математичного маятника за 1 хв зменшилася удвічі. У скільки разів вона зменшитися за 4 хв.?

Розв'язок. Скористаємося залежністю амплітуди A згасаючих коливань від часу t:

$$A = A_0 e^{-\beta t}, \tag{1}$$

де A_0 – початкова амплітуда;

β – коефіцієнт згасання.

З (1) знаходимо

$$\frac{A_0}{A} = e^{\beta t}. \tag{2}$$

Для двох часів t_1 й t_2 справедливо

$$\frac{A_0}{A_1} = e^{\beta t_1}, \qquad \frac{A_0}{A_2} = e^{\beta t_2}. \tag{3}$$

За умовою задачі $A_0 / A_1 = 2$, $A_0 / A_2 = n$, $t_2 = 4t_1$. Тоді (3) набуде вигляду

$$2 = e^{\beta t_1}, \qquad n = e^{4\beta t_1}. \tag{4}$$

З (4) слідує, що

$$n = (e^{\beta t_2}) = 2^4 = 32.$$

Приклад 8. Математичний маятник коливається в середовищі, для якого логарифмічний декремент згасання $\lambda_1 = 1,5$. Який буде логарифмічний декремент згасання λ_2, якщо опір середовища збільшити в 2 рази? У скільки разів слід збільшити опір середовища, щоб коливання стали неможливі?

Розв'язок. Скористаємося виразом для логарифмічного декремента згасання :

$$\lambda = \frac{2\pi\beta}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\left(\omega_0 / \beta\right)^2 - 1}},$$

звідки

$$\frac{\omega_0^2}{\beta^2} = \frac{4\pi^2}{\lambda^2} + 1. \tag{1}$$

При збільшенні опору середовища в 2 рази, логарифмічний декремент згасання теж збільшується в два рази: $\beta_2 = 2\beta_1$. Тому, відповідно до (1) маємо

$$\frac{\omega_0^2}{\beta_1^2} = \frac{4\pi^2}{\lambda_1^2} + 1, \qquad \frac{\omega_0^2}{4\beta_1^2} = \frac{4\pi^2}{\lambda_2^2} + 1. \tag{2}$$

З (2) слідує, що

$$\frac{\pi^2}{\lambda_1^2} + \frac{1}{4} = \frac{4\pi^2}{\lambda_2^2} + 1,$$

звідки

$$\frac{1}{\lambda_2^2} = \frac{1}{4\lambda_1^2} - \frac{3}{16\pi^2}. \tag{3}$$

З (3) отримаємо

$$\lambda_2^2 = \frac{4\lambda_1^2}{1-\left(3\lambda_1^2 / 4\pi^2\right)},$$

звідки

$$\lambda_2 = \frac{2\lambda_1}{\sqrt{1-\left(3\lambda_1^2 / 4\pi^2\right)}}. \qquad (4)$$

Зробимо обчислення

$$\lambda_2 = \frac{2\cdot 1,5}{\sqrt{1-\left(3\cdot 1,5^2 / 4\pi^2\right)}} \simeq 3,3.$$

Коливання неможливі при $\omega_0 = \beta$. За умовою задачі $\beta = n'\beta_1$. З (2) маємо

$$\left(n'\right)^2 = \left(\frac{2\pi}{\lambda_1}\right)^2 + 1,$$

звідки

$$n' = \sqrt{\left(\frac{2\pi}{\lambda_1}\right)^2 + 1}. \qquad (5)$$

Зробимо обчислення:

$$n' = \sqrt{\left(\frac{2\pi}{1,5}\right)^2 + 1} \simeq 4,3.$$

Приклад 9. Різниця потенціалів на обкладках конденсатора в коливальному контурі міняється згідно із законом $U = 60\ cos 10^4 \pi t$. Місткість конденсатора $2\cdot 10^{-8}$ Ф. Знайти період коливань контура, індуктивність контура й довжину хвилі, що відповідає цьому контуру.

Розв'язок. Скористаємося законом зміни напруги на обкладках конденсатора

$$U = U_0\ cos\ \omega_0 t, \qquad (1)$$

де U_0 – амплітуда напруги;

ω_0 – власна циклічна частота;

t – час.

З умови задачі відразу витікає, що

$$U_0 = 80 \text{ В}, \qquad \omega_0 = 10^4 \pi \text{ рад/с}.$$

Тоді період коливань контура T

$$T = 2\pi / \omega_0 \tag{2}$$

можна розрахувати

$$T = 2\pi / 10^4 \pi = 2 \cdot 10^{-4} \text{ с}.$$

Для визначення індуктивності L, скористаємося формулою Томсона

$$T = 2\pi\sqrt{LC}, \tag{3}$$

де C – ємність контура.

З (3) знаходимо

$$L = T^2 / 4\pi^2 C. \tag{4}$$

Зробимо обчислення:

$$L = \frac{\left(2 \cdot 10^{-4}\right)^2}{2 \cdot \pi^2 \cdot 2 \cdot 10^{-8}} = 0,05 \text{ Гн}.$$

Довжина хвилі, що відповідає контуру

$$\lambda = cT, \tag{5}$$

де c – швидкість світу у вакуумі $\left(c = 3 \cdot 10^8 \text{ м/с}\right)$

$$\lambda = 3 \cdot 10^8 \cdot 2 \cdot 10^{-4} \text{ м} = 6 \cdot 10^4 \text{ м}.$$

Приклад 10. Коливальний контур складається з індуктивності 10^{-2} Гн, ємності 0,405 мкФ і опору 2 Ом. Знайти, у скільки разів зменшиться різниця потенціалів на обкладаннях конденсатора за час одного періоду.

Розв'язок. Скористаємося законом зміни амплітуди напруження для згасаючих коливань

$$U = U_0 e^{-\beta t}, \tag{1}$$

де $U_0 = U(t=0)$;

β – коефіцієнт згасання;

t – час.

З (1) за час $t = T$ одного повного коливання маємо

$$U_0 / U = e^{\beta t}. \tag{2}$$

Період згасаючих коливань

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}, \tag{3}$$

де

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC}, \qquad \beta = \frac{R}{2L}, \tag{4}$$

де L – індуктивність контура;

C – ємність контура;

R – опір контура.

Розрахуємо ω_0^2 й β:

$$\omega_0^2 = \frac{1}{10^{-2} \cdot 0,405 \cdot 10^{-6}} = \frac{10^5}{0,405} \text{ рад}^2/\text{с}^2;$$

$$\beta = \frac{2}{2 \cdot 10^{-2}} = 10^2 \text{ с}^{-1},$$

звідси бачимо, що $\omega_0^2 \gg \beta^2$. Тому період коливань T можна знаходити за формулою

$$T = 2\pi / \omega_0. \tag{5}$$

Тоді

$$\beta T = 2\pi\beta / \omega_0, \tag{6}$$

отже

$$U_0 / U = e^{2\pi\beta/\omega_0}. \tag{7}$$

Зробимо обчислення:

$$U_0 / U = e^{2\pi \cdot 10^2 \cdot 10^{-4} \sqrt{0,405}} \approx 1,04.$$

Приклад 11. З якою швидкістю повинен їхати потяг, щоб пасажири відчували сильніше вертикальне розгойдування вагону? Довжина рейок між стиками 25 м, а період власних вертикальних коливань вагону 2 с.

Розв'язок. Сильне вертикальне розгойдування вагону спостерігається при резонансі, коли частота власних вертикальних коливань вагону буде дуже близька до частоти удару коліс вагону на стиках рейок. Враховуючи, що частота ν й період коливань T пов’язані співвідношенням $\nu = T^{-1}$, маємо для резонансу

$$T_0 = T, \tag{1}$$

де $T_0 = 2$ с, а T визначається з рівняння

$$T = l / \upsilon, \tag{2}$$

де l – довжина рейки;
υ – швидкість вагону.
З (1) й (2) маємо

$$\upsilon = l / T_0.$$

Зробимо обчислення

$$\upsilon = 25 / 2 = 12,5 \text{ м/с}.$$

Приклад 12. Тіло маси m висить на пружині, що прикріплена до стелі ліфта. Коефіцієнт жорсткості пружини дорівнює k. У момент $t = 0$ кабіна почала підніматися з прискоренням a. Нехтуючи масою пружини, знайти закон руху вантажу відносно кабіни ліфта, якщо $y(0) = 0,\ \dot{y}(0) = 0$ і $a = \alpha t$, де $\alpha = const$.

Розв'язок. До руху ліфта на тіло діють сила тяжіння (mg) і сила пружності пружини $(-k\Delta l)$, де k – коефіцієнт жорсткості пружини, Δl – її подовження. З умови рівноваги вантажу слідує

$$mg = k\Delta l. \tag{1}$$

Під час руху ліфта з прискоренням a діють сили: сила тяжіння, сила пружності $-k(\Delta l + y)$, де y – подовження пружини, сила інерції ma, де a – прискорення лифта. Рівняння другого закону Ньютона вздовж руху має вигляд

$$m\ddot{y} = -k\left(\Delta l + y\right) + mg + ma. \tag{2}$$

З урахуванням (1), з (2) отримаємо

$$m\ddot{y} = -ky + ma,$$

звідки

$$\ddot{y} + \omega_0^2 y = a, \tag{3}$$

де $\omega_0^2 = k / m.$

Розв'язок рівняння (3) має вигляд

$$y = y_{одн} + y_{неодн}, \tag{4}$$

де $y_{одн}$ – загальне рішення однорідного рівняння;

$y_{неодн}$ – особове рішення неоднорідного рівняння.

Легко бачити, що

$$y_{неодн} = \alpha t / \omega_0^2. \tag{5}$$

Для $y_{одн}$ маємо

$$y_{одн} = A\; cos\; \left(\omega_0 t + \varphi_0\right), \tag{6}$$

де A – амплітуда коливань;

φ_0 – початкова фаза;

t – час.

З (4) – (6) отримаємо

$$y = A\; cos\; \left(\omega_0 t + \varphi_0\right) + \alpha t / \omega_0^2. \tag{7}$$

Використаємо початкові умови:

$$y(0) = A\; cos\; \varphi_0 = 0, \tag{8}$$

$$\dot{y}(0) = -A\omega_0\; sin\; \varphi_0 + \alpha / \omega_0^2 = 0. \tag{9}$$

З (8) слідує, що $\varphi_0 = \pi / 2,$ а з (9) отримаємо $A = \alpha / \omega_0^3.$ Тоді $y(t)$ набуває вигляду

$$y=\frac{\alpha}{\omega_0^3}\ cos\ \left(\omega_0 t+\frac{\pi}{2}\right)+\frac{\alpha t}{\omega_0^2}=\frac{\alpha}{\omega_0^3}\left(\omega_0 t-sin\ \omega_0 t\right). \qquad (10)$$

Приклад 13. Плоска хвиля поширюється вздовж прямої зі швидкістю $\upsilon=20$ м/с. Дві точки, які знаходяться на цій прямій на відстанях $x_1=12$ м та $x_2=15$ м від джерела хвиль, коливаються з різницею фаз $\Delta\varphi=0,75\pi.$ Знайти довжину хвилі λ, написати рівняння хвилі й знайти зміщення зазначених точок у момент $t=1,2$ с, якщо амплітуда коливань $A=0,1$ м.

Розв'язок. Точки, що знаходяться одна від одної на відстані, що дорівнює довжині хвилі λ, коливаються з різницею фаз, яка дорівнює 2π; точки, що знаходяться одна від одної на будь-якій відстані Δx, коливаються з різницею фаз, яка дорівнює:

$$\Delta\varphi=\Delta x\cdot 2\pi/\lambda=(x_2-x_1)\cdot 2\pi/\lambda.$$

Вирішуючи цю нерівність щодо λ, отримуємо:

$$\lambda=2\pi(x_2-x_1)/\Delta\varphi. \qquad (1)$$

Підставивши числові значення величин, що входять у вираз (1), і виконавши арифметичні дії, отримаємо:

$$\lambda=\frac{2\pi(15-12)}{0,75\pi}\ \text{м}=8\ \text{м}.$$

Для того щоб написати рівняння плоскої хвилі, треба ще знайти циклічну частоту ω. Так як $\omega=2\pi/T$ ($T=\lambda/\upsilon$ – період коливань), то:

$$\omega=2\pi\upsilon/\lambda.$$

Зробимо обчислення:

$$\omega=\frac{2\pi\cdot 20}{8}\ \text{с}^{-1}=5\pi\ \text{с}^{-1}.$$

Знаючи амплітуду A коливань, циклічну частоту ω та швидкість υ поширення хвилі, можна написати рівняння плоскої хвилі для даного випадку:

$$y=A\,cos\ \omega(t-x/\upsilon),$$

де $A=0,1$ м; $\omega=5\pi\text{с}^{-1}$**;** $\upsilon=20$ м/с .

Щоб знайти зміщення y вказаних точок, достатньо в рівняння (2) підставити значення t та x :

$$y_1 = 0{,}1\ cos\ 5\pi(1{,}2 - 12/20)\text{ м} = 0{,}1\ cos\ 3\pi\text{ м} = -0{,}1\text{ м};$$

$$y_2 = 0{,}1\ cos\ 5\pi(1{,}2 - 15/20)\text{ м} = 0{,}1\ cos\ 2{,}25\pi\text{ м} =$$
$$= 0{,}1\ cos\ 2{,}25\pi\text{ м} = 0{,}071\text{ м} = 7{,}1\text{ см}.$$

1.4 Завдання для самостійного рішення

1. Точка здійснює гармонійні коливання. У деякий момент часу зміщення точки $x = 5$ см, швидкість її $\upsilon = 20$ см/с і прискорення $a = -80$ см/с^2 . Знайти циклічну частоту й період коливань, фазу коливань у даний момент часу і амплітуду коливань. $\left[4\text{ с}^{-1};\ 1{,}57\text{ с};\ \pi/4;\ 7{,}07\text{ см}\right]$.

2. Точка здійснює гармонійні коливання, рівняння якої має вигляд $x = A\ sin\ \omega t$, де $A = 5$ см, $\omega = 2\text{ с}^{-1}$. Знайти момент часу (найближчий до початку відліку), в якому потенціальна енергія точки $\Pi = 10^{-4}$ Дж, а повертаюча сила $F = +5 \cdot 10^{-3}$ Н. Визначити також фазу коливань у цей момент часу. $[2{,}04\text{ с};\ 4{,}07\text{ рад}]$.

3. Два гармонійні коливання, що спрямовані по одній прямій, такі, що мають однакові амплітуди й періоди, складаються в одно коливання тієї ж амплітуди. Знайти різницю фаз коливань, що складаються. $\left[120^0\text{ або }240^0\right]$.

4. Точка здійснює одночасно два гармонійні коливання, що відбуваються по взаємно перпендикулярних напрямах, які виражені рівняннями $x = A_1 \cos\ \omega_1 t$ і $y = A_2 \cos\ \omega_2(t + \tau)$, де $A_1 = 4$ см, $\omega_1 = \pi\text{ с}^{-1}$, $A_2 = 8$ см, $\omega_2 = \pi\text{ с}^{-1}$, $\tau = 1$ с. Знайти рівняння траєкторії й накреслити його з дотриманням масштабу. $[2x + y = 0]$.

5. Два маятники одночасно починають здійснювати коливання. За $N_1 = 15$ коливань першого маятника другий маятник зробив тільки $N_2 = 10$ коливань. Визначити відношення довжин цих маятників. $[l_1 / l_2 = 4/9]$.

6. Як зміниться період вертикальних коливань вантажу, що висить на двох однакових пружинах, якщо від послідовного з'єднання пружин перейти до паралельного їх з'єднання. [Період зменшиться в 2 рази].

7. Визначити період простих гармонійних коливань диска радіусом $R = 40$ см біля горизонтальної осі, яка проходить через ту, що утворює диск. $[1{,}55\ \text{с}]$.

8. Визначити період T коливань математичного маятника, якщо його модуль максимального переміщення Δr=18 см і максимальна швидкість υ_{max}=16 см/с. $[7{,}07\ \text{с}]$.

9. Матеріальна точка здійснює прості гармонійні коливання так, що в початковий момент часу зміщення $x_0 = 4$ см, а швидкість $\upsilon_0 = 10$ см/с. Визначити амплітуду A й початкову фазу φ_0 коливань, якщо їх період $T = 2$ с. $\left[0{,}05\ \text{м},\ 51{,}7^0\right]$.

10. Гиря масою 0,5 кг, підвішена до пружини жорсткістю $k = 32$ Н/м, здійснює згасаючі коливання. Визначити їх період, якщо за 88 повних коливань амплітуда зменшилася в 2 рази. $[0{,}78\ \text{с}]$.

11. Енергія загасаючих коливань маятника за час 2 хв. зменшилася в 100 разів. Визначити коефіцієнт опору, якщо маса маятника $m = 0{,}1$ кг. $\left[3{,}8 \cdot 10^{-3}\ \text{кг/с}\right]$.

12. Амплітуда згасаючих коливань маятника за 1 хв зменшилася удвічі. У скільки разів вона зменшиться за 3 хв.? [в 8 раз].

13. Математичний маятник здійснює згасаючі коливання з логарифмічним декрементом загасання 0,2. У скільки разів зменшиться повне прискорення маятника в його крайньому положенні за одно коливання. [в 1,22 рази].

14. Коливальний контур радіоприймача складається з катушки з індуктивністю $L = 1$ мГн і змінного конденсатора, місткість якого може мінятися в межах від 9,7 до 92 пФ. В якому діапазоні довжин хвиль може приймати радіостанції цей приймач? $[186 \div 570\ \text{м}]$.

15. Параметри коливального контура мають значення: $C = 1$ нФ, $L = 6$ мкГн, $R = 0{,}5$ Ом. Яку потужність треба підводити до контуру, щоб підтримувати в ньому незгасаючі коливання з амплітудою напруги на конденсаторі $U_m = 10$ В? $[4{,}2\ \text{мВт}]$.

16. Катушка, індуктивність якої $L = 3 \cdot 10^{-5}$ Гн, приєднана до плоского конденсатора з площею пластин $S = 100\ \text{см}^2$ і відстанню між ними $d = 0{,}1$ мм. Чому дорівнює діелектрична проникність середовища, що заповнює простір між пластинами, якщо контур резонує на довжину хвилі 750 м? $[\varepsilon = 6]$.

17. Коливальний контур має місткість 1,1 нФ та індуктивність $5 \cdot 10^{-3}$ Гн. Логарифмічний декремент згасання дорівнює 0,005. За який проміжок часу загубиться внаслідок згасання 99 % енергії контуру?

$\left[6{,}8\cdot 10^{-3}\ \text{с}\right]$.

18. Коливання з частотою $\nu = 5$ Гц поширюються в просторі зі швидкістю $\upsilon = 3$ м/с. Знайти різницю фаз двох точок, віддалених одна від одної на 20 см. $\left[0{,}07\ \text{рад}\right]$.

19. Поперечна хвиля поширюється уздовж пружного шнура зі швидкістю $\upsilon = 15$ м/с. Період коливань точок шнура $T = 1{,}2$ с. Визначити різницю фаз коливань двох точок $\Delta\varphi$, що лежать на промені й віддалених від джерела хвиль на відстанях $x_1 = 20$ м і $x_2 = 30$ м. $\left[200^0\right]$.

2 ОПТИКА

2.1 Основні формули

Швидкість світу в середовищі:

$$\upsilon = c / n, \tag{2.1}$$

де c – швидкість світу у вакуумі;
n – показник заломлення середовища.
Оптична довжина шляху світлової хвилі:

$$L = nl, \tag{2.2}$$

де l – геометрична довжина шляху світлової хвилі в середовищі з показником заломлення n.
Оптична різниця ходу двох світлових хвиль:

$$\Delta = L_1 - L_2. \tag{2.3}$$

Залежність різниці фаз від оптичної різниці ходу світлових хвиль:

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta, \tag{2.4}$$

де λ – довжина світлової хвилі.
Умова максимального посилення світла під час інтерференції:

$$\Delta = \pm\, k\lambda \ (k = 0,\ 1,\ 2,...). \tag{2.5}$$

Умова максимального послаблення світла:

$$\Delta = \pm\ (2k+1)\frac{\lambda}{2}. \tag{2.6}$$

Оптична різниця ходу світлових хвиль, що виникає при відображенні монохроматичного світла від тонкої плівки:

$$\Delta = 2d\sqrt{n^2 - sin^2 i_1}\ \pm\ \frac{\lambda}{2}, \tag{2.7}$$

або

$$\Delta = 2dn\ cos\ i_2\ \pm\ \frac{\lambda}{2}, \tag{2.8}$$

де d – товщина плівки;

n – показник заломлення плівки;

i_1 – кут падіння;

i_2 – кут заломлення світла в плівці.

Радіус світлих кілець Ньютона у відбитому світлі:

$$r_k = \sqrt{(2k-1)R\lambda / 2}\,; \qquad (k = 1,\ 2,\ 3,...), \qquad (2.9)$$

де k – номер кільця;

R – радіус кривизни.

Радіус темних кілець Ньютона у відбитому світлі:

$$r_k = \sqrt{kR\lambda}. \qquad (2.10)$$

Кут φ відхилення променів, який відповідає максимуму (світла смуга) при дифракції на одній щілині, визначається з умови:

$$a\ sin\ \varphi = (2k+1)\lambda / 2\,; \qquad (k = 0,\ 1,\ 2,...), \qquad (2.11)$$

де a – ширина щілини;

k – порядковий номер максимуму.

Кут φ відхилення променів, який відповідає максимуму (світла смуга) при дифракції світла на дифракційній гратці, визначається з умови:

$$d\ sin\ \varphi = \pm k\lambda\,; \qquad (k = 0,\ 1,\ 2,...), \qquad (2.12)$$

де d – період дифракційної гратки.

Роздільна здатність дифракційної гратки:

$$R = \lambda / \Delta\lambda = kN, \qquad (2.13)$$

де $\Delta\lambda$ – найменша різниця довжин хвиль двох сусідніх спектральних ліній (λ и $\lambda + \Delta\lambda$), при якій ці лінії можуть бути видні окремо в спектрі, отриманий за допомогою даної гратки;

N – повне число щілин гратки.

Формула Вульфа–Бреггов:

$$2d\ sin\ \theta = k\lambda, \qquad (2.14)$$

де θ – кут ковзання (кут між напрямком паралельного пучка рентгенівського випромінювання, що падає на кристал, і атомною площиною у кристалі);

d – відстань між атомними площинами кристала.

Закон Брюстера:

$$tg\varepsilon_B = n_{21}, \qquad (2.15)$$

де ε_B – кут падіння, при якому промінь, який відбився від діелектрика повністю поляризований;

n_{21} – відносний показник заломлення другого середовища відносно першого.

Закон Малюса:

$$I = I_0 cos^2\alpha, \qquad (2.16)$$

де I_0 – інтенсивність плоскополяризованого світла, яке падає на аналізатор;

I – інтенсивність цього світла після аналізатора;

α – кут між напрямком коливань електричного вектора світла, яке падає на аналізатор, і площиною пропускання аналізатора (якщо коливання електричного вектора світла, що падає, збігаються з цією площиною, то аналізатор пропускає дане світло без ослаблення).

Кут повороту площини поляризації монохроматичного світла під час проходження через оптично активну речовину:

а) у твердих тілах:

$$\varphi = \alpha d, \qquad (2.17)$$

де α – постійна обертання;

d – довжина шляху, пройденого світлом в оптично активній речовині;

б) у розчинах:

$$\varphi = [\alpha]\rho d, \qquad (2.18)$$

де $[\alpha]$ – питоме обертання;

ρ – масова концентрація оптично активної речовини в розчині.

Взаємозв'язок маси й енергії релятивістської частки:

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{E_0}{\sqrt{1-\beta^2}}, \qquad (2.19)$$

де $E_0 = mc^2$ – енергія спокою частинки;

β – швидкість частинки, яка виражена в частках швидкості світла ($\beta = \upsilon / c$);

c – швидкість світла у вакуумі;

m – маса частинки.

Повна енергія вільної частинки:

$$E = E_0 + T, \qquad (2.20)$$

де T – кінетична енергія релятивістської частинки.

Кінетична енергія релятивістської частинки:

$$T = E_0\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\right). \qquad (2.21)$$

Імпульс релятивістської частинки:

$$p = \frac{m\,\upsilon}{\sqrt{1-(\upsilon/c)^2}} \quad \text{або} \quad p = mc\frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}. \qquad (2.22)$$

Зв'язок між повною енергією та імпульсом релятивістської частинки:

$$E^2 = E_0^2 + (pc)^2. \qquad (2.23)$$

Закон Стефана–Больцмана:

$$R_e = \sigma T^4, \qquad (2.24)$$

де R_e – енергетична світність (випроміненість) абсолютно чорного тіла;

σ – постійна Стефана–Больцмана;

T – термодинамічна температура Кельвіна.

Закон зсуву Віна:

$$\lambda_m = b/T, \qquad (2.25)$$

де λ_m – довжина хвилі, на яку припадає максимум енергії випромінювання;

b – постійна Віна.

Енергія фотона:

$$\varepsilon = h\nu \quad \text{або} \quad \varepsilon = \hbar\omega, \qquad (2.26)$$

де h – постійна Планка;

$\hbar$ – постійна Планка, поділена на 2π;

ν – частота фотона;

ω – циклічна частота.

Імпульс фотона:

$$p = h / \lambda, \tag{2.27}$$

де λ – довжина хвилі фотона.

Формула Ейнштейна для фотоефекту:

$$h\nu = A + T_{max} = A + m\upsilon_{max}^2 / 2, \tag{2.28}$$

де $h\nu$ – енергія фотона, що падає на поверхню металу;

A – робота виходу електрона;

T_{max} – максимальна кінетична енергія фотоелектронів.

Червона межа фотоефекту:

$$\nu_0 = A / h \qquad \text{або} \qquad \lambda_0 = hc / A, \tag{2.29}$$

де ν_0 – мінімальна частота світла, при якій ще можливий фотоефект;

λ_0 – максимальна довжина хвилі світла, при якій ще можливий фотоефект;

h – постійна Планка;

c – швидкість світу у вакуумі.

Формула Комптона:

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \frac{h}{mc}\left(1 - cos\ \theta\right) \tag{2.30}$$

або

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = 2\frac{h}{mc} sin^2 \frac{\theta}{2}, \tag{2.31}$$

де λ – довжина хвилі фотона, що зустрівся з вільним або слабко пов'язаним електроном;

λ' – довжина хвилі фотона, розсіяного на кут θ після зіткнення з електроном;

m – маса електрона.

Комптонівська довжина хвилі:

$$\Lambda = h / (mc); \qquad \left(\Lambda = 2,436\ \text{пм}\right). \tag{2.32}$$

Тиск світла при нормальному падінні на поверхню:

$$p = E_e(1+\rho) / c = \omega(1+\rho), \tag{2.33}$$

де E_e – енергетична освітленість;
ω – об'ємна щільність енергії випромінювання;
ρ – коефіцієнт відбиття.

2.2 Методичні вказівки до розділу «Оптика»

Інтерференція світла виникає при накладенні когерентних світлових хвиль. У звичайних оптичних системах (за винятком лазерних систем) когерентність досягається тим, що світловий пучок, що випускається точковим джерелом, розділяється на два; останні зводяться в одну точку простору, в якій і спостерігається інтерференція. Такий поділ часто призводить до того, що замість одного джерела з'являються два уявних, когерентність яких і треба встановити.

Задачі на інтерференцію світла діляться в основному на дві групи: задачі, пов'язані з інтерференцією хвиль від двох когерентних джерел і задачі на інтерференцію в тонких плівках (пластинках). До завдань першої групи належать випадки інтерференції, отримані за допомогою дзеркал Френеля, дзеркала Ллойда, біпризми Френеля, а також у досвіді Юнга. У цьому випадку використовують формули (2.5)–(2.6). Другу групу складають завдання на інтерференцію як в плоскопаралельних, так і в клиноподібних тонких пластинках, а також завдання на кільця Ньютона. Робочими формулами в цьому випадку є формули (2.5)–(2.10).

Вирішити дифракційну задачу – означає знайти відносний розподіл освітленості на екрані залежно від розмірів і форми неоднорідностей, що викликають дифракцію. Для цих цілей залучається принцип Гюйгенса–Френеля. Точне рішення задачі на дифракцію є досить складним. Тому для розрахунку дифракційної картини для симетричних випадків залучають наближений метод зон Френеля.

Завдання на поляризацію світла, в основному, пов'язані із законами Брюстера й Малюса. У формулі (2.15), що виражає закон Брюстера, необхідно звернути увагу на зміст величин ε_B і n_{21}. Застосовуючи формулу (2.16) для закону Малюса, необхідно пам'ятати, що I_0 є інтенсивністю плоскополяризованого світла, яке падає на поляризатор, а не інтенсивністю природного світла.

Для теплового випромінювання ключовим визначенням є енергетична світність R_e тіла, яка вимірюється потоком випромінювання $\varPhi_e$, що випускаються одиницею площі поверхні, яка світиться:

$$R_e = \frac{\varPhi_e}{S} = \frac{1}{S}\frac{dW_e}{dt},$$

де dW_e – енергія, яка випромінюється поверхнею S за час dt.

Формули (2.24) та (2.25) справедливі для абсолютно чорного тіла. Для сірого тіла замість (2.24) справедливо застосувати вираз:

$$R_e^/ = a_T R_e,$$

де a_T – коефіцієнт чорноти, що показує, яку частину становить енергетична світність $R_e^/$ даного тіла від енергетичної світності R_e абсолютного чорного тіла, взятого при тій же температурі.

У завданнях на зовнішній фотоефект необхідний аналіз при виборі вираження для максимальної кінетичної енергії $T_{\max}$ електрона. Якщо енергія фотона $h\nu \ll mc^2$, де $mc^2 = 0{,}511$ МеВ – енергія спокою електрона, то:

$$T_{max} = \frac{m\upsilon_{max}^2}{2}.$$

Якщо $h\nu \geq mc^2$, тоді:

$$T_{max} = mc^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\right),$$

де $\beta = \upsilon_{max}/c$.

В останньому випадку можна знехтувати роботою виходу A.

2.3 Приклади розв'язання задач

Приклад 1. Від двох когерентних джерел S_1 та S_2 $(\lambda = 0{,}8\text{ мкм})$ промені потрапляють на екран. На екрані спостерігається інтерференційна картина. Коли на шляху одного із променів перпендикулярно йому помістили мильну плівку ($n = 1{,}33$), інтерференційна картина змінилася на протилежну. При якій найменшій товщині d_{min} плівки це можливо?

Розв'язок. Зміна інтерференційної картини на протилежну означає, що на тих ділянках екрану, де спостерігалися інтерференційні максимуми, стали спостерігатися інтерференційні мінімуми. Такий зсув інтерференційної картини можливий при зміні оптичної різниці ходу пучків світлових хвиль на непарне число половин довжин хвиль, тобто:

$$\Delta_2 - \Delta_1 = (2k+1)\lambda/2, \quad (1)$$

де Δ_1 – оптична різниця ходу пучків світлових хвиль до внесення плівки;

Δ_2 – оптична різниця ходу тих же пучків після внесення плівки; $k = 0, \ \pm 1, \ \pm 2, \ldots$.

Найменшій товщині d_{min} плівки відповідає $k = 0$. При цьому формула (1) набуде вигляду:

$$\Delta_2 - \Delta_1 = \lambda / 2. \qquad (2)$$

Виразимо оптичні різниці ходу Δ_2 і Δ_1. З рис. 2.1 випливає:

$$\Delta_1 = l_1 - l_2;$$

$$\Delta_2 = \left[(l_1 - d_{min}) + nd_{min}\right] - l_2 = (l_1 - l_2) + d_{min}(n-1).$$

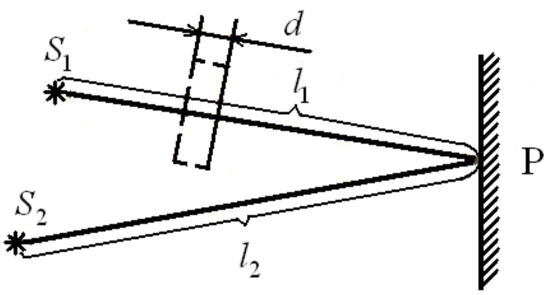

Рисунок 2.1 – Хід променів від двох когерентних джерел

Підставимо вирази Δ_1 та Δ_2 у формулу (2):

$$(l_1 - l_2) + d_{min}(n-1) - (l_1 - l_2) = \lambda / 2$$

або

$$d_{min}(n-1) = \lambda / 2.$$

Звідки:

$$d_{min} = \lambda / \left[2\left(n-1\right)\right].$$

Зробимо обчислення:

$$d_{min} = \frac{0,8}{2(1,33-1)} \text{ мкм} = 1,21 \text{ мкм}.$$

Приклад 2. На скляний клин з малим кутом нормально до його грані падає паралельний пучок променів монохроматичного світла з довжиною хвилі $\lambda = 0,6$ мкм. Число m виникаючих при цьому інтерференційних смуг, що припадають на відрізок довжини клина l, дорівнює 10. Визначити кут α клина.

Розв'язок. Паралельний пучок світла, падаючи нормально до межі клину, відбивається як від верхньої, так і від нижньої межі. Ці відбиті пучки світла когерентні. Тому на поверхні клина будуть спостерігатися інтерференційні смуги. Так як кут клина малий, то відбиті пучки 1 і 2 світла (рис. 2.2) будуть практично паралельні.

Темні смуги видно на тих ділянках клину, для яких різниця ходу променів кратна непарному числу половин довжин хвиль:

$$\Delta = (2k+1)\lambda/2; \qquad (k = 0,\ \pm 1,\ \pm 2, \ldots). \tag{1}$$

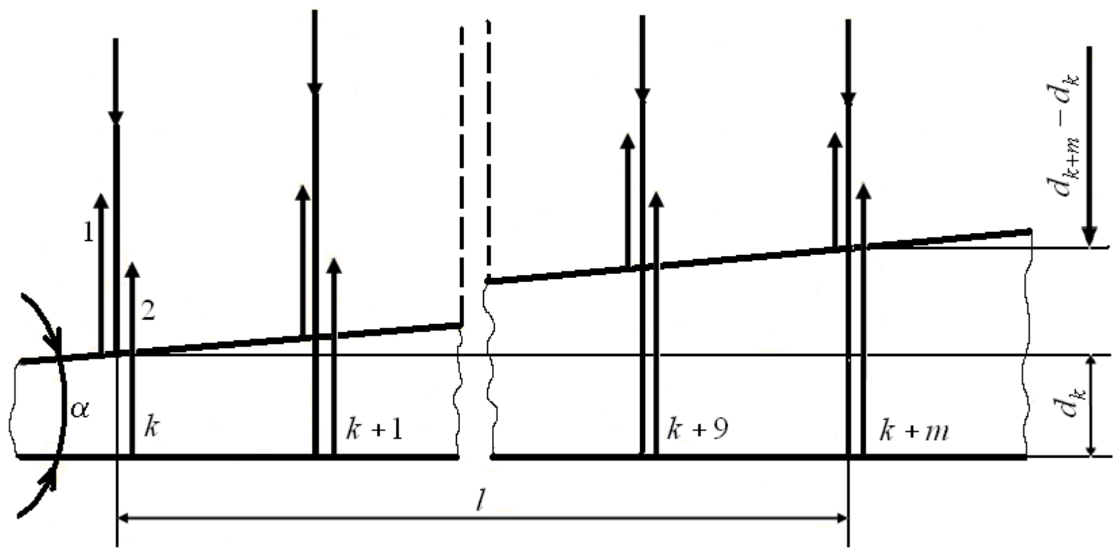

Рисунок 2.2 – Хід променів при відображенні світлових хвиль від поверхні клину

Різниця ходу Δ двох хвиль складається з різниці оптичних довжин шляхів цих хвиль ($2dn\ cos\ \varepsilon_2'$) і половини довжини хвилі ($\lambda / 2$). Величина $\lambda / 2$ представляє собою додаткову різницю ходу, що виникає при відображенні світлової хвилі 1 від оптично більш густого середовища. Підставляючи у формулу (1) різницю ходу Δ світлових хвиль, отримуємо:

$$2d_k n\ cos\ \varepsilon_2' + \lambda / 2 = (2k+1)\lambda / 2, \tag{2}$$

де n − показник заломлення скла ($n = 1,5$);

d_k − товщина клину в тому місці, де спостерігається темна смуга, що відповідає номеру k;

ε_2' – кут заломлення.

Згідно з умовою, кут падіння дорівнює нулю, отже, і кут заломлення ε_2' дорівнює нулю, а $\cos\varepsilon_2' = 1$. Розкривши дужки в правій частині рівності (2), після спрощення отримаємо:

$$2d_k n = k\lambda. \qquad (3)$$

Нехай довільній темній смузі k-ого номера відповідає товщина d_k клина, а темній смузі $k+m$-го номера – товщина d_{k+m} клина. Тоді (рис. 2.2), враховуючи, що m смуг укладається на відстані l, знайдемо:

$$sin\ \alpha = (d_{k+m} - d_k)/l. \qquad (4)$$

Візьмемо з (3) d_k і d_{k+m} та підставимо їх у формулу (4). Потім, враховуючи, що $\sin\alpha = \alpha$ (для невеликих кутів α), отримаємо:

$$\alpha = \frac{(k+m)\lambda - k\lambda}{2nl} = \frac{m\lambda}{2nl}.$$

Підставляючи значення фізичних величин, знайдемо:

$$\alpha = \frac{10 \cdot 0{,}6 \cdot 10^{-4}}{2 \cdot 1{,}5 \cdot 1}\ \text{рад} = 2 \cdot 10^{-4}\ \text{рад}.$$

Виразимо α у секундах. Для цього можна скористатися співвідношенням між радіаном і секундою: $1\,рад = 206265'' \approx 2{,}06 \cdot 10^{5''}$. Тоді:

$$\alpha = 2 \cdot 10^{-4} \cdot 2{,}06 \cdot 10^{5''} = 41{,}2''.$$

Приклад 3. На дифракційну гратку в напрямку нормалі до її поверхні падає монохроматичне світло. Період гратки $d = 2$ мкм. Визначити найбільший порядок дифракційного максимуму, який дає ця гратка у випадку червоного ($\lambda_1 = 0{,}7$ мкм) та у випадку фіолетового ($\lambda_2 = 0{,}41$ мкм) світла.

Розв'язок. З формули, що визначає положення головних максимумів дифракційної гратки, знайдемо порядок m дифракційного максимуму:

$$m = (d\ sin\ \varphi)/\lambda, \qquad (1)$$

де d – період гратки;

φ – кут дифракції;

λ – довжина хвилі монохроматичного світла. Так як $\sin\varphi$ не може бути більше 1, то число m не може бути більше d/λ, тобто:

$$m \le d / \lambda. \qquad (2)$$

Підставивши у формулу (2) значення величин, отримаємо:

$$m \le 2 / 0,7 = 2,86 \quad \text{(для червоних променів);}$$

$$m \le 2 / 0,41 = 4,88 \quad \text{(для фіолетових променів).}$$

Якщо врахувати, що порядок максимумів є цілим числом, то для червоного світу $m_{max} = 2$ і для фіолетового $m_{max} = 4$.

Приклад 4. Пучок природного світла падає на поліровану поверхню скляної пластини, яка занурена в рідину. Відбитий від пластини пучок світла утворює кут $\varphi = 97°$ з падаючим пучком (рис. 2.3). Визначити показник заломлення n_1 рідини, якщо відбите світло максимально поляризоване.

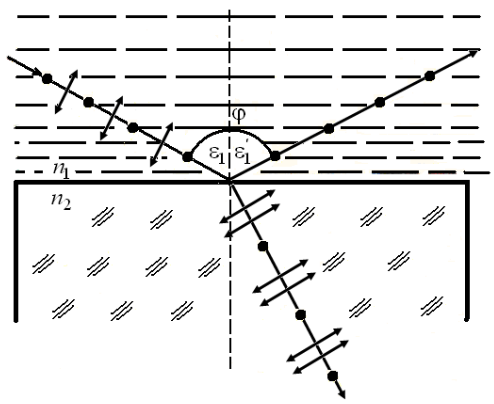

Рисунок 2.3 – Відбивання та заломлення світла на межі рідина – діелектрик

Розв'язок. Відповідно до закону Брюстера, пучок світла, відбитий від діелектрика, максимально поляризований у тому випадку, якщо тангенс кута падіння чисельно дорівнює відносним показником заломлення $tg\varepsilon = n_{21}$, де n_{21} – показник заломлення другого середовища (скла) щодо першої (рідини).

Відносний показник заломлення дорівнює відношенню абсолютних показників заломлення. Отже:

$$tg\varepsilon = n_2 / n_1.$$

Так як кут падіння дорівнює куту відбиття, то $\varepsilon = \varphi / 2$ і, отже, $tg(\varphi / 2) = n_2 / n_1$, звідки:

$$n_1 = \frac{n_2}{tg(\varphi / 2)}.$$

Зробимо обчислення:

$$n_1 = \frac{1,5}{tg(97°/2)} = \frac{1,5}{1,13} = 1,33.$$

Приклад 5. Два ніколя N_1 і N_2 розташовані так, що кут між їх площинами пропускання становить $\alpha = 60°$. Визначити, у скільки разів зменшиться інтенсивність I_0 природного світла: 1) при проходженні через один ніколь N_1; 2) при проходженні через обидва ніколі. Коефіцієнт поглинання світла в ніколі $k = 0,05$. Втрати на відбиття світла не враховувати.

Розв'язок 1. Природне світло, падаючи на грань призми Ніколя (рис. 2.4), розщеплюється внаслідок подвійного променезаломлення на два пучки: звичайний і незвичайний. Обидва пучки однакові за інтенсивністю й повністю поляризовані. Площина коливань незвичайного пучка лежить у площині креслення (площина головного перерізу). Площина коливань звичайного пучка перпендикулярна площині креслення. Звичайний пучок світла (o) внаслідок повного відображення від кордону AB відкидається на зачернену поверхню призми й поглинається нею. Незвичайний пучок (e) проходить через призму, зменшуючи свою інтенсивність внаслідок поглинання. Таким чином, інтенсивність світла, що пройшло через першу призму:

$$I_1 = {}^1/_2 I_0 (1-k).$$

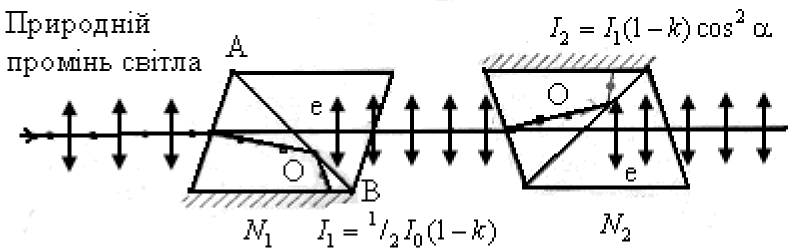

Рисунок 2.4 – Хід пучка світла через два ніколі

Відносне зменшення інтенсивності світла отримаємо, розділивши інтенсивність I_0 природного світла, що падає на перший ніколь, на інтенсивність I_1 поляризованого світла:

$$\frac{I_0}{I_i} = \frac{2I_0}{I_0(1-k)} = \frac{2}{1-k}. \qquad (1)$$

Зробимо обчислення:

$$\frac{I_0}{I_i} = \frac{2}{1 - 0,05} = 2,1.$$

Таким чином, інтенсивність зменшується в 2,1 рази.

2. Плоскополяризований пучок світла інтенсивності I_1 падає на другий ніколь і також розщеплюється на два пучки різної інтенсивності: звичайний і незвичайний. Звичайний пучок повністю поглинається призмою, тому інтенсивність його нас не цікавить. Інтенсивність I_2 незвичайного пучка, що вийшов з призми N_2, визначається законом Малюса (без урахування поглинання світла в другому ніколі):

$$I_2 = I_1 cos^2 \alpha,$$

де α – кут між площиною коливань у поляризованому пучку й площиною пропускання ніколя N_2.

Враховуючи втрати інтенсивності на поглинання у другому ніколі, отримаємо:

$$I_2 = I_1 (1 - k) cos^2 \alpha.$$

Зменшення інтенсивності, що ми шукаємо при проходженні світла через обидва ніколі знайдемо, розділивши інтенсивність I_0 природного світла на інтенсивність I_2 світла, що пройшло систему з двох ніколей:

$$\frac{I_0}{I_2} = \frac{I_0}{I_1 (1 - k) cos^2 \alpha}.$$

Замінюючи відношення I_0 / I_1 його виразом за формулою (1), отримуємо:

$$\frac{I_0}{I_2} = \frac{2}{(1 - k)^2 cos^2 \alpha}.$$

Зробимо обчислення:

$$\frac{I_0}{I_2} = \frac{2}{(1 - 0,05)^2 cos^2 60°} = 8,86.$$

Таким чином, після проходження світла через два николя інтенсивність його зменшиться у 8,86 рази.

Приклад 6. Плоскополяризований монохроматичний пучок світла падає на поляроїд і повністю їм гаситься. Коли на шляху пучка помістили кварцову пластину, інтенсивність I пучка світла після поляроїда стала дорівнювати половині інтенсивності пучка, що падає на поляроїд. Визначити мінімальну товщину кварцової пластини. Поглинанням і відбиттям світла поляроїдів знехтувати, постійну обертання α кварцу прийняти рівною $48{,}9$ град/мм.

Розв'язок. Повне гасіння світла поляроїдів означає, що площина пропускання поляроїда (штрихова лінія на рис. 2.5) перпендикулярна площині коливань $(\mathrm{I}-\mathrm{I})$ плоскополяризованого світла, падаючого на нього. Введення кварцової пластини призводить до повороту площини коливань світла на кут:

$$\varphi = \alpha l, \tag{1}$$

де l – товщина пластини.

Знаючи, у скільки разів зменшиться інтенсивність світла при проходженні його через поляроїд, визначимо кут β, який встановиться між площиною пропускання поляроїда й новим напрямком $(\mathrm{II}-\mathrm{II})$ площини коливань падаючого на поляроїд плоскополяризованого світла. Для цього скористаємося законом Малюса:

$$I = I_0 cos^2\beta.$$

Помітивши, що $\beta = \pi/2 - \varphi$, можна написати:

$$I = I_0 cos^2(\pi/2 - \varphi), \quad \text{або} \qquad I = I_0 sin^2\varphi. \tag{2}$$

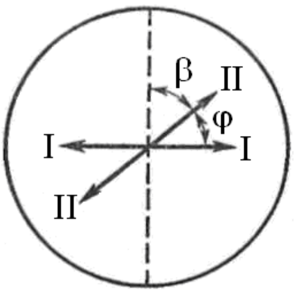

Рисунок 2.5 – Визначення кута повороту β

З рівності (2) з урахуванням (1) отримаємо $\alpha l = arcsin\sqrt{I / I_0}$, звідки шукана товщина пластини:

$$l = (1/\alpha) arcsin\sqrt{I / I_0}.$$

Зробимо обчислення у позасистемних одиницях:

$$l = \frac{1}{48,9} arcsin\sqrt{1/2} \text{ мм} = \frac{0,785}{48,9} \text{ мм} = 16 \text{ мкм}.$$

Приклад 7. Визначити релятивістський імпульс електрона, що володіє кінетичною енергією $T = 5$ МеВ.

Розв'язок. Релятивістська енергія E електрона пов'язана з його імпульсом p та масою m відношенням:

$$E = c\sqrt{p^2 + m^2c^2}, \qquad (1)$$

де c – швидкість світу у вакуумі.

Возводячи рівність (1) у квадрат, отримаємо:

$$E^2 = c^2p^2 + E_0^2, \qquad (2)$$

де $E_0 = mc^2$ – енергія спокою електрона.

З (2) знаходимо релятивістський імпульс:

$$p = (^1/_c)\sqrt{E^2 - E_0^2} = (^1/_c)\sqrt{(E - E_0)(E + E_0)}. \qquad (3)$$

Різниця між повною енергією та енергією спокою є кінетична енергія T частинки: $E - E_0 = T$. Легко переконатися, що $E + E_0 = T + 2E_0$, тому зв'язок, який шукаємо, між імпульсом і кінетичною енергією релятивістської частинки виразиться формулою:

$$p = \frac{1}{c}\sqrt{T(T + 2E_0)}.$$

Обчислення зручно провести в два етапи: спочатку знайти числове значення радикала під позасистемними одиницями, а потім перейти до обчислення в одиницях СІ. Таким чином:

$$p = \frac{\sqrt{T(T + 2E_0)}}{\text{c}} = \frac{\sqrt{5(5 + 2 \cdot 0,51)}}{\text{c}} \text{ МеВ} = \frac{5,5}{\text{c}} \text{ МеВ} =$$

$$= \frac{5,5 \cdot 1,6 \cdot 10^{-13}}{3 \cdot 10^8} \text{ Дж} = 2,93 \cdot 10^{-21} \text{ кг} \cdot \text{м/с}.$$

Приклад 8. Довжина хвилі, на яку припадає максимум енергії в спектрі випромінювання чорного тіла, $\lambda_0 = 0,58$ мкм. Визначити енергетичну світність (випроміненість) R_e поверхні тіла.

Розв'язок. Енергетична світність R_e абсолютно чорного тіла відповідно до закону Стефана–Больцмана пропорційна четвертому ступеню термодинамічної температури й виражається формулою:

$$R_e = \sigma T^4, \qquad (1)$$

де σ - постійна Стефана–Больцмана;

T – термодинамічна температура.

Температуру T можна обчислити за допомогою закону зсуву Віна:

$$\lambda_0 = b / T, \qquad (2)$$

де b – постійна закону зсуву Віна.

Використовуючи формули (2) і (1), отримуємо:

$$R_e = \sigma(b / \lambda_0)^4. \qquad (3)$$

Зробимо обчислення:

$$R_e = 5,67 \cdot 10^{-8} \left(\frac{2,90 \cdot 10^{-3}}{5,8 \cdot 10^{-7}} \right)^4 \text{ Вт/м}^2 = 3,54 \cdot 10^7 \text{ Вт/м}^2 = 35,4 \text{ МВт/м}^2.$$

Приклад 9. Визначити максимальну швидкість υ_{max} фотоелектронів, що вириваються з поверхні срібла: 1) ультрафіолетовим випромінюванням з довжиною хвилі $\lambda_1 = 0,155$ мкм; 2) γ випромінюванням з довжиною хвилі $\lambda_2 = 1$ пм.

Розв'язок. Максимальну швидкість фотоелектронів можна визначити з рівняння Ейнштейна для фотоефекту:

$$\varepsilon = A + T_{max}, \qquad (1)$$

де ε – енергія фотонів, що падають на поверхню металу;

A – робота виходу;

T_{max} – максимальна кінетична енергія фотоелектронів.

Енергія фотона обчислюється також за формулою:

$$\varepsilon = hc / \lambda, \qquad (2)$$

де h – постійна Планка;

c – швидкість світу у вакуумі;

λ – довжина хвилі.

Кінетична енергія електрона може бути виражена або за класичною формулою:

$$T = m\upsilon^2 / 2, \qquad (3)$$

або за релятивістської формулою:

$$T = E_0(1/\sqrt{1-\beta^2} - 1), \qquad (4)$$

у залежності від того, яка швидкість повідомляється фотоелектрону. Швидкість фотоелектрона залежить від енергії фотона, що викликає фотоефект: якщо енергія ε фотона менша ніж енергія спокою E_0 електрона, то може бути застосована формула (3), якщо ж ε порівняна за розміром з E_0, то обчислення за формулою (3) призводить до помилки, тому потрібно користуватися формулою (4).

1. Обчислимо енергію фотона ультрафіолетового випромінювання за формулою (2):

$$\varepsilon_1 = \frac{6,63 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^{8}}{1,55 \cdot 10^{-7}} \text{ Дж} = 1,28 \cdot 10^{-18} \text{ Дж}$$

або

$$\varepsilon_1 = \frac{1,28 \cdot 10^{-18}}{1,6 \cdot 10^{-19}} \text{ еВ} = 8 \text{ еВ}.$$

Отримана енергія фотона (8 еВ) набагато менша за енергію спокою електрона $(0,51 \text{ МеВ})$. Отже, для даного випадку кінетична енергія фотоелектрона у формулі (1) може бути виражена за класичною формулою (3):

$$\varepsilon_1 = A + m\upsilon_{max}^2 / 2,$$

звідки

$$\upsilon_{max} = \sqrt{2(\varepsilon_1 - A)/m}. \qquad (5)$$

Перевіримо, чи дає отримана формула одиницю швидкості. Для цього в праву частину формули (5) замість символів величин підставимо позначення одиниць:

$$\left(\frac{[\varepsilon_1 - A]}{[m]}\right)^{1/2} = \left(\frac{1\text{Дж}}{1\text{кг}}\right)^{1/2} = \left(\frac{1\text{кг} \cdot \text{м}^2/\text{с}^2}{1\text{кг}}\right)^{1/2} = 1 \text{ м/с}.$$

Знайдена одиниця є одиницею швидкості. Підставивши значення величин у формулу (5), знайдемо:

$$\upsilon_{max} = \sqrt{\frac{2(1,28 \cdot 10^{-18} - 0,75 \cdot 10^{-18})}{9,11 \cdot 10^{-31}}} \text{ м/с} = 1,08 \cdot 10^6 \text{ м/с}.$$

2. Обчислимо енергію фотона γ – випромінювання:

$$\varepsilon_2 = \frac{hc}{\lambda} = \frac{6,63 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{10^{-12}} \text{ Дж} = 1,99 \cdot 10^{-13} \text{ Дж}$$

або під позасистемними одиницями

$$\varepsilon_2 = \frac{1,99 \cdot 10^{-13}}{1,6 \cdot 10^{-19}} \text{ еВ} = 1,24 \cdot 10^6 \text{ еВ} = 1,24 \text{ МеВ}.$$

Робота виходу електрона ($A = 4,7$ еВ) нехтовно мала в порівнянні з енергією фотона ($\varepsilon_2 = 1,24$ МеВ), тому можна прийняти, що максимальна кінетична енергія електрона дорівнює енергії фотона: $T_{max} = \varepsilon_2 = 1,24$ МеВ. Оскільки в даному випадку кінетична енергія електрона більше його енергії спокою, то для обчислення швидкості електрона треба взяти релятивістську формулу кінетичної енергії (4). З цієї формули знайдемо:

$$\beta = \sqrt{(2E_0 + T)T} \, / \, (E_0 + T).$$

Помітивши, що $\upsilon = c\beta$ і $T_{max} = \varepsilon_2$, отримаємо:

$$\upsilon_{max} = c\sqrt{(2E_0 + \varepsilon_2)\varepsilon_2} \, / \, (E_0 + \varepsilon_2).$$

Зробимо обчислення :

$$\upsilon_{max} = 3 \cdot 10^8 \frac{\sqrt{\left(2 \cdot 0,51 + 1,24\right) \cdot 1,24}}{0,51 + 1,24} \text{ м/с} = 2,85 \cdot 10^8 \text{ м/с}.$$

Приклад 10. У результаті ефекту Комптона фотон при зіткненні з електроном був розсіяний на кут $\theta = 90°$. Енергія розсіяного фотона. $\varepsilon_2 = 0,4$ МеВ. Визначити енергію фотона ε_1 до розсіювання.

Розв'язок. Для визначення енергії первинного фотона скористаємося формулою Комптона:

$$\Delta\lambda = 2\frac{h}{mc} sin^2 \frac{\vartheta}{2}, \qquad (1)$$

де $\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1$ – зміна довжини хвилі фотона в результаті розсіювання на вільному електроні;

h – постійна Планка;

m – маса електрона;

c – швидкість світу у вакуумі;

ϑ – кут розсіювання фотона.

Перетворимо формулу (1): 1) замінимо в ній $\Delta\lambda$ на $\lambda_2 - \lambda_1$; 2) виразимо довжини хвиль λ_1 і λ_2 через енергії ε_1 та ε_2 відповідних фотонів, скориставшись формулою $\varepsilon = hc/\lambda$; 3) помножимо чисельник і знаменник правої частини формули на c, тоді:

$$\frac{hc}{\varepsilon_2} - \frac{hc}{\varepsilon_1} = \frac{hc}{mc^2} 2sin^2\frac{\vartheta}{2}.$$

Скоротимо на hc і виразимо з цієї формули шукану енергію:

$$\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon_2 m_0 c^2}{mc^2 - \varepsilon_2 2sin^2(\vartheta/2)} = \frac{\varepsilon_2 E_0}{E_0 - 2\varepsilon_2 sin^2(\vartheta/2)}, \qquad (2)$$

де $E_0 = mc^2$ – енергія спокою електрона.

Обчислення за формулою (2) зручніше вести під позасистемними одиницями. Так як для електрона $E_0 = 0{,}511$ МеВ, то:

$$\varepsilon_1 = \frac{0{,}4 \cdot 0{,}511}{0{,}511 - 2 \cdot 0{,}4 sin^2(90^\circ/2)} \text{ МеВ} = 1{,}85 \text{ МеВ}.$$

Приклад 11. Пучок монохроматичного світла з довжиною хвилі $\lambda = 663$ нм падає нормально на дзеркальну плоску поверхню. Потік випромінювання $\Phi_e = 0{,}6$ Вт. Визначити: 1) силу тиску F, що випробовувана цією поверхнею; 2) кількість фотонів, які щомиті падають на поверхню.

Розв'язок. 1. Сила світлового тиску на поверхню дорівнює добутку світлового тиску p на площу S поверхні:

$$F = pS. \qquad (1)$$

Світловий тиск може бути знайдений за формулою:

$$p = E_e(\rho + 1)/c, \qquad (2)$$

де E_e – енергетична освітленість;

c – швидкість світу у вакуумі;

ρ – коефіцієнт відбиття.

Підставляючи праву частину виразу (2) у формулу (1), отримаємо:

$$F = E_e S(\rho + 1)/c. \qquad (3)$$

Оскільки $E_e S$ представляє собою потік випромінювання Φ_e, то:

$$F = \Phi_e(\rho + 1)/c. \qquad (4)$$

Зробимо обчислення, враховуючи, що для дзеркальної поверхні $\rho = 1$:

$$F = \frac{0,6}{3 \cdot 10^8}(1+1) \text{ Н} = 4 \text{ кН}.$$

2. Множення енергії ε одного фотона на число фотонів n_1, які щомиті падають на поверхню, дорівнює потужності випромінювання, тобто потоку випромінювання: $\Phi_e = \varepsilon n_1$, а оскільки енергія фотона $\varepsilon = hc/\lambda$, то:

$$\Phi_e = hcn_1 / \lambda,$$

звідки

$$n_1 = \Phi_e \lambda / (hc). \qquad (5)$$

Зробимо обчислення:

$$n_1 = \frac{0,6 \cdot 6,63 \cdot 10^{-7}}{6,63 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8} \text{ с}^{-1} = 2 \cdot 10^{18} \text{ с}^{-1}.$$

2.4 Завдання для самостійного рішення

1. На шляху пучка світла поставлена скляна пластина завтовшки $d = 1$ мм так, що кут падіння променя $i_1 = 30^0$. На скільки зміниться довжина шляху світлового пучка? $[550 \text{ мкм}]$.

2. На мильну плівку з показником заломлення $n = 1,33$ падає по нормалі монохроматичне світло з довжиною хвилі $\lambda = 0,6$ мкм. Відбите світло в результаті інтерференції має найбільшу яскравість. Яка найменша можлива товщина d_{min} плівки? $[0,113 \text{ мкм}]$.

3. Радіус другого темного кільця Ньютона у відбитому світлі $r_2 = 0,4$ мм. Визначити радіус R кривизни плоськоопуклої лінзи, узятої для дослідження, якщо вона освітлюється монохроматичним світлом з довжиною хвилі $\lambda = 0,64$ мкм. $[125 \text{ мм}]$.

4. На пластину з щілиною, ширина якої $a = 0,05$ мм, падає нормально монохроматичне світло з довжиною хвилі $\lambda = 0,7$ мкм. Визначити кут φ відхилення променів, що відповідає першому дифракційному максимуму. $\left[1^0 12'\right]$.

5. Дифракційна рещітка, освітлена монохроматичним світлом, що нормально падає, відхиляє спектр третього порядку на кут $\varphi_1 = 30^0$. На який кут φ_2 вона відхиляє спектр четвертого порядку? $\left[41^0 50'\right]$.

6. Кут заломлення променя в рідині $i_2 = 35^0$. Визначити показник заломлення n рідини, якщо відомо, що відбитий пучок світла максимально поляризований. $[1{,}48]$.

7. На скільки відсотків зменшується інтенсивність світла після проходження через призму Ніколя, втрати світла складають 10 %. [На 55 %].

8. При якій швидкості υ релятивістська маса частки в $k = 3$ рази більше маси спокою цієї частки? $\left[2{,}83 \cdot 10^8 \text{ м/с}\right]$.

9. Визначити швидкість υ електрона, що має кінетичну енергію $T = 1{,}53$ МеВ. $\left[2{,}91 \cdot 10^8 \text{ м/с}\right]$.

10. Електрон рухається зі швидкістю $\upsilon = 0{,}6$ с, де c – швидкість світла у вакуумі. Визначити релятивістський імпульс p електрона. $\left[2{,}0 \cdot 10^{-22} \text{ м/с}\right]$.

11. Обчислити енергію, що випромінюється за час $t = 1$ хв з площі $S = 1 \text{ см}^2$ абсолютно чорного тіла, температура якого $T = 1000$ К. [340 Дж].

12. Довжина хвилі, на яку доводиться максимум енергії випромінювання абсолютно чорного тіла $\lambda_m = 0{,}6$ мкм. Визначити температуру T тіла. [4,82 кК].

13. Визначити максимальну спектральну щільність $\left(r_{\lambda,T}\right)_{max}$ енергетичної світності (випроміненості), розраховану на 1 нм у спектрі випромінювання абсолютно чорного тіла. Температура тіла $T = 1$ К. $\left[13 \text{ Вт/}\left(\text{м}^2 \cdot \text{нм}\right)\right]$.

14. Визначити енергію ε, масу m та імпульс p фотона з довжиною хвилі $\lambda = 1{,}24$ нм. $\left[1{,}60 \cdot 10^{-16} \text{ Дж; } 1{,}78 \cdot 10^{-33} \text{ кг; } 5{,}35 \cdot 10^{-25} \text{ кг м/с}\right]$.

15. На пластину падає монохроматичне світло ($\lambda = 0{,}42$ мкм). Фотострум припиняється при затримуючій різниці потенціалів $U = 0{,}95$ В. Визначити роботу A виходу електронів з поверхні пластини. [2 еВ].

16. На цинкову пластину падає пучок ультрафіолетового випромінювання ($\lambda = 0{,}2$ мкм). Визначити максимальну кінетичну енергію T_{max} і максимальну швидкість υ_{max} фотоелектронів. $\left[2{,}2 \text{ еВ; } 8{,}8 \cdot 10^2 \text{ м/с}\right]$.

17. Визначити максимальну швидкість υ_{max} фотоелектрона, вирваного з поверхні металу $\gamma-$квантом з енергією $\varepsilon = 1,53$ МеВ. $\left[2,91\cdot 10^8 \text{ м/с}\right]$.

18. Визначити кут ϑ розсіяння фотона, що випробував зіткнення з вільним електроном, якщо зміна довжини хвилі при розсіянні $\Delta\lambda = 3,63$ пм. $\left[120^0\right]$.

19. Фотон з енергією ε_1, що дорівнює енергії спокою електрона (m_0c^2), розсіявся на вільному електроні на кут $\vartheta = 120^0$. Визначити енергію ε_2 розсіяного фотона та кінетичну енергію T електрона віддачі (в одиницях m_0c^2). $\left[0,4\, m_0c^2;\ 0,6\, m_0c^2\right]$.

20. Потік енергії, що випромінюється електричною лампою, $\Phi_e = 600$ Вт. На відстані $r = 1$ м від лампи променям, що перпендикулярно падають, розташовано кругле плоске люстерко діаметром $d = 2$ см. Визначити силу F світлового тиску на люстерко. Лампу розглядати як точковий ізотопний випромінювач. $[0,1 \text{ Нн}]$.

21. Паралельний пучок монохроматичного світла з довжиною хвилі $\lambda = 0,663$ мкм падає на зачорнену поверхню та чинить на неї тиск $p = 0,3$ мкПа. Визначити концентрацію n фотонів у світловому пучку. $\left[10^{12} \text{ м}^{-3}\right]$.

3 ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ БУДОВИ АТОМІВ, МОЛЕКУЛ ТА АТОМНОГО ЯДРА

3.1 Основні формули

Борівська теорія воднеподібного атома. Момент імпульсу електрона (другий постулат Бора):

$$L_n = \hbar n \qquad \text{або} \qquad m\upsilon_n r_n = \hbar n, \tag{3.1}$$

де m – маса електрона;
υ_n – швидкість електрона на n-й орбіті;
r_n – радіус n-ї стаціонарної орбіти;
$\hbar$ – постійна Планка;
n – головне квантове число ($n = 1,\ 2,\ 3,...$).

Радіус n-ї стаціонарної орбіти:

$$r_n = a_0 n^2, \tag{3.2}$$

де a_0 – перший борівський радіус.

Енергія електрона в атомі водню:

$$E_n = E_i / n^2, \tag{3.3}$$

де E_i – енергія іонізації атома водню.

Енергія, яка випромінюється або поглинається атомом водню:

$$\varepsilon = \hbar\omega = E_{n2} - E_{n1} \tag{3.4}$$

або

$$\varepsilon = E_i (1/n_1^2 - 1/n_2^2), \tag{3.5}$$

де n_1 і n_2 – квантові числа, що відповідають енергетичним рівням, між якими відбувається перехід електрона в атомі.

Спектроскопічне хвильове число:

$$\tilde{\nu} = 1/\lambda = R(1/n_1^2 - 1/n_2^2), \tag{3.6}$$

де λ – довжина хвилі випромінювання або поглинання атомом;
R – постійна Рідберга.

Хвильові властивості частинок. Довжина хвилі де Бройля:

$$\lambda = 2\pi\hbar / p = h/p, \quad (3.7)$$

де p – імпульс частинки;
h – постійна Планка.
Імпульс частинки та його зв'язок з кінетичною енергією T:
а) нерелятивістська частинка:

$$p = m\upsilon; \qquad p = \sqrt{2mT}; \quad (3.8)$$

б) релятивістська:

$$p = \frac{m\upsilon}{\sqrt{1-(\upsilon/c)^2}}; \qquad p = \frac{1}{c}\sqrt{(2E_0 + T)T}, \quad (3.9)$$

де m – маса частинки;
υ – швидкість частинки;
c – швидкість світла у вакуумі;
E_0 – енергія спокою частинки $(E_0 = mc^2)$.
Співвідношення невизначеностей:
а) для координати та імпульсу:

$$\Delta p_x \Delta x \geq \hbar, \quad (3.10)$$

де Δp_x – невизначеність проекції імпульсу на вісь Х;
Δx – невизначеність координати;
б) для енергії й часу:

$$\Delta E \Delta t \geq \hbar, \quad (3.11)$$

де ΔE – невизначеність енергії;
Δt – час життя квантової системи в даному енергетичному стані.
Одномірне рівняння Шредінгера для стаціонарних станів:

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}(E - U)\psi(x) = 0, \quad (3.12)$$

де $\psi(x)$ – хвильова функція, що описує стан частки;
m – маса частинки;
E – повна енергія;
$U = U(x)$ – потенційна енергія частки.
Щільність імовірності:

$$\frac{d\omega(x)}{dx} = |\psi(x)|^2, \tag{3.13}$$

де $d\omega\,(x)$ – імовірність того, що частка може бути виявлена поблизу точки з координатою x на ділянці dx.

Імовірність виявлення частки в інтервалі від x_1 до x_2:

$$\omega = \int_{x_1}^{x_2} |\psi(x)|^2\, dx. \tag{3.14}$$

Рішення рівняння Шредінгера для одновимірної, нескінченно глибокої, прямокутної потенційної скриньки:

а) власна нормована хвильова функція:

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{\pi n}{l} x; \tag{3.15}$$

б) власне значення енергії:

$$E_n = \frac{\pi^2 \hbar^2 n^2}{2ml^2}, \tag{3.16}$$

де n – квантове число ($n = 1,\ 2,\ 3,...$);

l – ширина скриньки.

В області $0 \le x \le l$ $U = \infty$ та $\psi(x) = 0$.

Атомне ядро. Радіоактивність. Масове число ядра (число нуклонів у ядрі):

$$A = Z + N, \tag{3.17}$$

де Z – число заряду (число протонів);

N – число нейтронів.

Закон радіоактивного розпаду:

$$dN = -\lambda N dt \quad \text{або} \quad N = N_0 e^{-\lambda t}, \tag{3.18}$$

де dN – число ядер, що розпадаються за інтервал часу dt;

N – число ядер, які не розпалися на момент часу t;

N_0 – число ядер у початковий момент ($t = 0$);

λ – постійна радіоактивного розпаду.

Число ядер, що розпалися за час t:

$$\Delta N = N_0 - N = N_0(1 - e^{-\lambda t}). \tag{3.19}$$

У разі, якщо інтервал часу Δt, за який визначається число ядер, що розпалися, багато менше періоду напіврозпаду $T_{1/2}$, то число ядер, які розпалися, можна визначити за формулою:

$$\Delta N = \lambda N \Delta t. \tag{3.20}$$

Залежність періоду напіврозпаду від постійної радіоактивного розпаду:

$$T_{1/2} = (ln\ 2)/\lambda = 0{,}693/\lambda. \tag{3.21}$$

Середній час τ життя радіоактивного ядра, тобто інтервал часу, за який число ядер, що не розпалися, зменшується в e разів:

$$\tau = 1/\lambda. \tag{3.22}$$

Число N атомів, що містяться в радіоактивному ізотопі:

$$N = mN_A/M, \tag{3.23}$$

де m – маса ізотопу;

M – молярна маса;

N_A – постійна Авогадро.

Активність A радіоактивного ізотопу:

$$A = -\,dN/dt = \lambda N \qquad \text{або} \qquad A = \lambda N_0 e^{-\lambda t} = A_0 e^{-\lambda t}, \tag{3.24}$$

де dN – число ядер, що розпадаються за інтервал часу dt;

A_0 –активність ізотопу в початковий момент часу.

Питома активність ізотопу:

$$a = A/m. \tag{3.25}$$

Дефект маси ядра:

$$\Delta m = Zm_p + (A - Z)m_n - m_я, \tag{3.26}$$

де Z – число заряду (число протонів у ядрі);

A – масове число (число нуклонів у ядрі);

$(A - Z)$ – число нейтронів у ядрі;

m_p – маса протона;

m_n – маса нейтрона;

$m_я$ – маса ядра.

Енергія зв'язку ядра:

$$E_{зв} = \Delta mc^2, \tag{3.27}$$

де Δm – дефект маси ядра;

c – швидкість світла у вакуумі.

Під позасистемними одиницями енергія зв'язку ядра дорівнює $E_{зв} = 931\Delta m$, де дефект маси Δm – в а.о.м.; 931 – коефіцієнт пропорційності (1 а.о.м.~931 МеВ).

Теплоємність кристала. Середня енергія квантового одновимірного осцилятора:

$$\langle\varepsilon\rangle = \varepsilon_0 + \frac{\hbar\omega}{e^{\hbar\omega/(kT)} - 1}, \tag{3.28}$$

де ε_0 – нульова енергія ($\varepsilon_0 = {}^1/_2\hbar\omega$);

$\hbar$ – постійна Планка;

ω – кругова частота коливань осцилятора;

k – постійна Больцмана;

T – термодинамічна температура.

Молярна внутрішня енергія системи, що складається з невзаємодіючих квантових осциляторів:

$$U_m = U_{0m} + 3R\Theta_E / (e^{\Theta_E/T} - 1), \tag{3.29}$$

де R – молярна газова постійна;

$\Theta_E = \hbar\omega / k$ – характеристична температура Ейнштейна;

$U_{0m} = {}^2/_3 R\Theta_E$ – молярна нульова енергія (по Ейнштейну).

Молярна теплоємність кристалічного твердого тіла в області низьких температур (граничний закон Дебая):

$$C_m = \frac{12\pi^4}{5} R\left(\frac{T}{\Theta_D}\right)^3 = 234R\left(\frac{T}{\Theta_D}\right)^3 \qquad (\mathrm{T} \ll \Theta_\mathrm{D}). \tag{3.30}$$

Теплота, необхідна для нагрівання тіла:

$$Q = \frac{m}{M}\int_{T_1}^{T_2} C_m dT, \tag{3.31}$$

де m – маса тіла;

M – молярна маса;

T_1 та T_2 – початкова та кінцева температури тіла.

Елементи квантової статистики. Розподіл вільних електронів у металі по енергіях при 0 К:

$$dn(\varepsilon) = \frac{1}{2\pi^2}\left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{3/2} \varepsilon^{1/2} d\varepsilon, \qquad (3.32)$$

де $dn(\varepsilon)$ – концентрація електронів, енергія яких укладена в межах від ε до $\varepsilon + d\varepsilon$;

m – маса електрона.

Це вираз справедливий при $\varepsilon < \varepsilon_F$ (де ε_F – енергія або рівень Фермі).

Енергія Фермі в металі при $T = 0$ К:

$$\varepsilon_F = \frac{\hbar^2}{2m}(3\pi^2 n)^{2/3}, \qquad (3.33)$$

де n – концентрація електронів у металі.

Напівпровідники. Питома провідність власних напівпровідників:

$$\gamma = \gamma_0 exp(-\Delta E / 2kT), \qquad (3.34)$$

де ΔE – ширина забороненої зони;

γ_0 – константа.

Сила струму в $p-n-$переході:

$$I = I_0\left[exp(eU / kT) - 1\right], \qquad (3.35)$$

де I_0 – граничне значення сили зворотного струму;

U – зовнішня напруга, прикладена до $p-n-$переходу.

Контактні й термоелектричні явища. Внутрішня контактна різниця потенціалів:

$$U_{12} = \frac{\varepsilon_{F_1} - \varepsilon_{F_2}}{e}, \qquad (3.36)$$

де ε_{F_1} і ε_{F_2} – енергія Фермі відповідно для першого й другого металів;

e – заряд електрона.

3.2 Методичні вказівки до розділу «Елементи теорії будови атомів, молекул та атомного ядра»

У завданнях на боровську теорію водневоподібних атомів крім постулатів Бора, доцільно використовувати й рівняння руху електрона в атомі.

Завдання на застосування формули де Бройля вимагають попереднього аналізу рішення: для нерелятивістської частинки потрібно користуватися формулою (3.8) для імпульсу, а для релятивістської – формулою (3.9). Зауважимо, що у всіх випадках руху електрона в атомі релятивістськими ефектами можна знехтувати.

Застосовуючи співвідношення невизначеностей (3.10), необхідно мати на увазі наступне:

а) якщо дано лінійні розміри області l, в якій знаходиться частинка, то вважають $\Delta x \simeq l$; якщо відомий модуль імпульсу p, але невідомий його напрямок, то вважають $\Delta p \simeq p$;

б) величина, яку шукаємо, не може бути менше найменшої невизначеності в її вимірі, тобто в якості мінімального значення шуканої величини розглядають мінімальну невизначеність цієї величини: $l_{min} \simeq (\Delta x)_{min}$, $p_{min} = (\Delta p)_{min}$.

При вирішенні завдань на явище радіоактивності необхідно розуміти, що число ядер, які не розпалися до моменту часу t, визначається формулою (3.18), а число ядер, що розпалися за цей час – формулою (3.19).

Рішення задач на ядерні реакції ґрунтується на застосування законів збереження: 1) електричного заряду; 2) сумарного числа нуклонів; 3) енергії; 4) імпульсу. У цьому випадку необхідно мати на увазі, що під енергією розуміється повна релятивістська енергія. Для однієї частки ця енергія дорівнює сумі енергій спокою E_0 частинки та її кінетичної енергії T.

3.3 Приклади розв'язання задач

Приклад 1. Електрон у атомі водню перейшов з четвертого енергетичного рівня на другий. Визначити енергію фотона, що спущений.

Розв'язок. Для визначення енергії фотона скористаємося серіальною формулою для воднеподібних іонів:

$$1/\lambda = RZ^2(1/n_1^2 - 1/n_2^2), \tag{1}$$

де λ – довжина хвилі фотона;

R – постійна Рідберга;

Z – заряд ядра у відносних одиницях (при $Z = 1$ формула переходить у серіальну формулу для водню);

n_1 – номер орбіти, на яку перейшов електрон;

n_2 – номер орбіти, з якої перейшов електрон (n_1 і n_2 – головні квантові числа).

Енергію фотона ε можна виразити формулою:

$$\varepsilon = hc / \lambda .$$

Тому, помноживши обидві частини рівності (1) на *hc*, отримаємо вираз для енергії фотона:

$$\varepsilon = RhcZ^2 (1/n_1^2 - 1/n_2^2).$$

Оскільки *Rhc* є енергія іонізації E_i атома водню, то:

$$\varepsilon = E_i Z^2 (1/n_1^2 - 1/n_2^2).$$

Обчислення виконаємо в позасистемних одиницях: $E_i = 13{,}6$ еВ (див. табл. А.1 додатка); $Z = 1$; $n_1 = 2$; $n_2 = 4$:

$$\varepsilon = 13{,}6 \cdot 1^2 \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{4^2} \right) \text{ еВ} = 13{,}6 \cdot 3/16 \text{ еВ} = 2{,}55 \text{ еВ}.$$

Приклад 2. Електрон, початковою швидкістю якого можна знехтувати, пройшов прискорюючу різницю потенціалів U. Знайти довжину хвилі де Бройля електрона для двох випадків: 1) $U_1 = 51$ В; 2) $U_2 = 510$ кВ.

Розв'язок. Довжина хвилі де Бройля для частинки залежить від її імпульсу *p* і визначається за формулою:

$$\lambda = h / p, \qquad (1)$$

де h – постійна Планка.

Імпульс частинки можна визначити, якщо відома її кінетична енергія *T.* Зв'язок імпульсу з кінетичною енергією різний для нерелятивістського випадку (коли кінетична енергія частинки на багато менша її енергії спокою) та для релятивістського випадку (коли кінетична енергія порівняна з енергією спокою частки).

У нерелятивістському випадку:

$$p = \sqrt{2mT}, \qquad (2)$$

де m – маса частинки.

У релятивістському випадку:

$$p = \sqrt{(2E_0 + T)T} \,/\, c, \qquad (3)$$

де $E_0 = mc^2$ – енергія спокою частинки.

Формулу (1) з урахуванням співвідношень (2) та (3) запишемо:

– у нерелятивістському випадку:

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2mT}}; \qquad (4)$$

– у релятивістському випадку:

$$\lambda = \frac{hc}{\sqrt{(2E_0 + T)T} \,/\, c}. \qquad (5)$$

Порівняємо кінетичні енергії електрона, що пройшов задані в умові завдання різниці потенціалів $U_1 = 51$ В і; $U_2 = 510$ кВ, з енергією спокою електрона й залежно від цього вирішимо, яку з формул (4) або (5) слід застосувати для обчислення довжини хвилі де Бройля.

Як відомо, кінетична енергія електрона, що пройшла, прискорює різницю потенціалів U:

$$T = eU.$$

У першому випадку $T_1 = eU = 51\ \text{еВ} = 0{,}51 \cdot 10^{-4}\ \text{МеВ}$, що набагато менша енергії спокою електрона $E_0 = mc^2 = 0{,}51\ \text{МеВ}$. Отже, у цьому випадку можна застосувати формулу (4). Для спрощення розрахунків зауважимо, що $T_1 = 10^{-4} mc^2$. Підставивши цей вираз у формулу (4), перепишемо її у вигляді:

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2m \cdot 10^{-4} \cdot mc^2}} = \frac{10^2}{\sqrt{2}} \frac{h}{mc}.$$

Враховуючи, що h / mc є комптонівська довжина хвилі Λ, отримаємо:

$$\lambda_1 = 10^2 \Lambda / \sqrt{2}.$$

Оскільки $\Lambda = 2{,}43$ пм (див. табл. А.1 додатка), то:

$$\lambda_1 = 10^2 \cdot 2,43 / \sqrt{2} \text{ пм} = 171 \text{ пм}.$$

У другому випадку кінетична енергія $T_2 = eU_2 = 510$ кеВ $= 0,51$ МеВ, тобто дорівнює енергії спокою електрона. У цьому випадку необхідно застосувати релятивістську формулу (5). Враховуючи, що $T_2 = 0,51 \text{ МеВ} = mc^2$, за формулою (5) знаходимо:

$$\lambda_2 \frac{h}{\sqrt{(2mc^2 + mc^2)mc^2} \; / \; c} = \frac{h}{\sqrt{3}mc}$$

або

$$\lambda_2 = \Lambda / \sqrt{3}.$$

Підставимо значення Λ і зробимо обчислення:

$$\lambda_2 = 2,43 / \sqrt{3} \text{ пм} = 1,40 \text{ пм}.$$

Приклад 3. Кінетична енергія електрона в атомі водню складає величину порядку $T = 10$ еВ. Використовуючи співвідношення невизначеностей, оцінити мінімальні лінійні розміри атома.

Розв'язок. Співвідношення невизначеностей для координати та імпульсу має вигляд:

$$\Delta x \Delta p_x \geq \hbar, \tag{1}$$

де Δx – невизначеність координати частинки (у даному випадку електрона);

Δp_x – невизначеність імпульсу частинки (електрона);

$\hbar$ – постійна Планка.

Зі співвідношення невизначеностей випливає, що чим точніше визначається положення частинки в просторі, тим більш невизначеним стає імпульс, а отже, і енергія частинки. Нехай атом має лінійні розміри l, тоді електрон атома буде знаходитися десь у межах області з невизначеністю:

$$\Delta x = l / 2.$$

Співвідношення невизначеностей (1) можна записати в цьому випадку у вигляді:

$$(l / 2)\Delta p_x \geq \hbar,$$

звідки

$$l \geq 2\hbar / \Delta p_x. \tag{2}$$

Фізично розумна невизначеність імпульсу Δp_x в усякому разі не повинна перевищувати значення самого імпульсу p_x, тобто $\Delta p_x \le p_x$. Імпульс p_x пов'язаний з кінетичною енергією T співвідношенням $p_x = \sqrt{2mT}$. Змінимо Δp_x значенням $\sqrt{2mT}$ (така заміна не збільшить l).

Переходячи від нерівності до рівності, отримаємо:

$$l_{min} = 2\hbar / \sqrt{2mT}. \qquad (3)$$

Перевіримо, чи дає отримана формула одиницю довжини. Для цього в праву частину формули (3) замість символів величин підставимо позначення їх одиниць:

$$\frac{[h]}{([m][T])^{1/2}} = \frac{1\ \text{Дж}\cdot\text{с}}{(1\ \text{кг}\cdot 1\ \text{Дж})^{1/2}} = \left(\frac{1\ \text{Дж}}{1\ \text{кг}}\right)^{1/2} \cdot 1\ \text{с} =$$

$$= \left(\frac{1\ \text{кг}\times\text{м}^2/\text{с}^2}{1\ \text{кг}}\right)^{1/2} \cdot 1\ \text{с} = 1\ \text{м}.$$

Знайдена одиниця є одиницею довжини.

Зробимо обчислення:

$$l_{min} = \frac{2\cdot 1{,}05\cdot 10^{-34}}{2\cdot 9{,}1\cdot 10^{-31}\cdot 1{,}6\cdot 10^{-19}\cdot 10}\ \text{м} = 1{,}24\cdot 10^{-10}\ \text{м} = 124\ \text{нм}.$$

Приклад 4. Хвильова функція $\psi(x) = \sqrt{2/l}\sin\frac{\pi}{l}x$ описує основний стан частинки в нескінченно глибокому прямокутному ящику шириною l. Обчислити ймовірність знаходження частинки в малому інтервалі $\Delta l = 0{,}01l$ у двох випадках: 1) поблизу стінки $(0 \le x \le \Delta l)$; $2)$ у середній частині ящика $\left(\frac{l}{2} - \frac{\Delta l}{2} \le x \le \frac{l}{2} + \frac{\Delta l}{2}\right)$ (рис. 3.1).

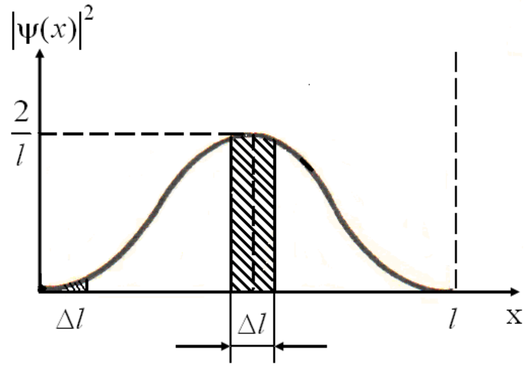

Рисунок 3.1 – Графік щільності імовірності для частинки

Розв'язок. Імовірність того, що частка буде виявлена в інтервалі dx (від x до $x+dx$) , пропорційна цьому інтервалу й квадрату модуля хвильової функції, яка описує даний стан, дорівнює:

$$d\omega = \left|\psi(x)\right|^2 dx.$$

У першому випадку шукана ймовірність знайдеться інтегруванням у межах від 0 до 0,01l:

$$\omega = \frac{2}{l}\int\limits_0^{0,01l} sin^2 \frac{\pi}{l} x dx.$$

Знак модуля опущений, так як ψ – функція в даному разі не є комплексною.

Так як x змінюється в інтервалі $0 \le x \le 0,01l$ і, отже, $\pi x / l << 1$ справедливо наближена рівність:

$$sin^2 \frac{\pi}{l} x \approx \left(\frac{\pi}{l} x\right)^2.$$

З урахуванням цього виразу (1) набуде вигляду:

$$\omega = \frac{2}{l}\int\limits_0^{0,01l} \left(\frac{\pi}{l} x\right)^2 dx = \frac{2\pi^2}{l^3}\int\limits_0^{0,01l} x^2 dx.$$

Після інтегрування отримаємо:

$$\omega = \frac{2}{3}\pi^2 \cdot 10^{-6} = 6,6 \cdot 10^{-6}.$$

У другому випадку можна обійтися без інтегрування, так як квадрат модуля хвильової функції поблизу її максимуму в заданому малому інтервалі ($\Delta l = 0,01l$) практично не змінюється. Імовірність, яку шукаємо у другому випадку визначається виразом:

$$\omega = \left|\psi(l/2)\right|^2 \Delta l$$

або

$$\omega = \frac{2}{l}\left(sin\ \frac{\pi}{2}\frac{l}{2}\right)^2 \Delta l = \frac{2}{l} \cdot 0,01l = 0,02.$$

Приклад 5. Обчислити дефект маси й енергію зв'язку ядра ${}_{3}^{7}\mathrm{Li}$.

Розв'язок. Маса ядра завжди менша ніж сума мас вільних (що знаходяться поза ядром) протонів і нейтронів, з яких ядро утворилося. Дефект маси ядра Δm і є різницею між сумою мас вільних нуклонів (протонів і нейтронів) і масою ядра, тобто:

$$\Delta m = Z_{m_p} + (A - Z)m_n - m_я, \qquad (1)$$

де Z – атомний номер (число протонів у ядрі);

A – масове число (число нуклонів, що складають ядро);

m_p, m_n, $m_я$ – відповідно маси протона, нейтрона та ядра.

У довідкових таблицях завжди надаються маси нейтральних атомів, але не ядер, тому формулу (1) доцільно перетворити так, щоб у неї входила маса $m_я$ нейтрального атома. Можна вважати, що маса нейтрального атома дорівнює сумі мас ядра й електронів, що складають електронну оболонку атома: $m_a = m_я + Zm_e$, звідки:

$$m_я = m_a - Zm_e. \qquad (2)$$

Виразивши в рівності (1) масу ядра за формулою (2), отримуємо:

$$\Delta m = Zm_p + (A - Z)m_n - m_a + Zm_e$$

або

$$\Delta m = Z(m_p + m_e) + (A - Z)m_n - m_a.$$

Помічаючи, що:

$$m_p + m_e = m_H,$$

де m_H – маса атома водню, остаточно знаходимо:

$$\Delta m = Zm_H + (A - Z)m_n - m_a. \qquad (3)$$

Підставивши у вираз (3) числові значення мас (див. табл. А.6 і А.13 додатка), отримаємо:

$$\Delta m = \left[3 \cdot 1{,}00783 + (7 - 3) \cdot 1{,}00867 - 7 \cdot 0{,}1601\right] \text{а.о.м.} = 0{,}04216 \text{ а.о.м.}$$

Відповідно до закону пропорційності маси й енергії:

$$E = c^2 \Delta m, \qquad (4)$$

де c – швидкість світла у вакуумі.

Коефіцієнт пропорційності c^2 може бути виражений двояко:

$$c^2 = 9 \cdot 10^{16} \quad \text{або} \quad c^2 = \Delta E / \Delta m = 9 \cdot 10^{16} \text{ Дж/кг}.$$

Якщо обчислити енергію зв'язку, користуючись позасистемними одиницями, то $c^2 = 931$ МеВ/а.о.м. З урахуванням цього формула (4) набуде вигляду:

$$E = 931 \Delta m \text{ (МеВ)}. \qquad (5)$$

Підставивши знайдене значення дефекту маси ядра у формулу (5), отримаємо:

$$E = 931 \cdot 0{,}04216 \text{ МеВ} = 39{,}2 \text{ МеВ}.$$

Примітка. Термін «дефект маси» часто застосовують в іншому сенсі: дефектом маси Δ називають різницю між масою нейтрального атома даного ізотопу та його масовим числом $A: \Delta = m_a - A$. Ця величина особливого фізичного сенсу не має, але її використання дозволяє в ряді випадків значно спростити обчислення. У цьому посібнику всюди мається на увазі дефект маси Δm, що визначається за формулою (1).

Приклад 6. При зіткненні α-частинки з ядром бору ${}^{10}_{5}\mathrm{B}$ сталася ядерна реакція, у результаті якої утворилося два нових ядра. Одним з цих ядер було ядро атома водню ${}^{1}_{1}\mathrm{H}$. Визначити порядковий номер і масове число другого ядра, дати символічний запис ядерної реакції й визначити її енергетичний ефект.

Розв'язок. Означимо невідоме ядро символом ${}^{\mathrm{A}}_{\mathrm{Z}}\mathrm{X}$. Так як α-частка являє собою ядро гелію ${}^{4}_{2}\mathrm{He}$, запис реакції має вигляд:

$${}^{4}_{2}\mathrm{He} + {}^{10}_{5}\mathrm{B} \longrightarrow {}^{1}_{1}\mathrm{H} + {}^{\mathrm{A}}_{\mathrm{Z}}\mathrm{X}.$$

Застосувавши закон збереження числа нуклонів, отримаємо рівняння $4 + 10 = 1 + \mathrm{A}$, звідки A=13. Застосувавши закон збереження заряду, отримаємо рівняння $2 + 5 = 1 + \mathrm{Z}$, звідки $\mathrm{Z} = 6$. Отже, невідоме ядро є ядром атома ізотопу вуглецю ${}^{13}_{6}\mathrm{C}$.

Тепер можемо записати реакцію в остаточному вигляді:

$${}^{4}_{2}\mathrm{He} + {}^{10}_{5}\mathrm{B} \longrightarrow {}^{1}_{1}\mathrm{H} + {}^{13}_{6}\mathrm{C}.$$

Енергетичний ефект Q ядерної реакції визначається за формулою:

$$Q = 931\left[(m_{He} + m_B) - (m_H + m_C)\right].$$

Тут, у перших круглих дужках вказані маси вихідних ядер, у других дужках – маси ядер – продуктів реакції. При числових підрахунках за цією формулою маси ядер замінюють масами нейтральних атомів. Можливість такої заміни випливає з таких міркувань.

Число електронів у електронній оболонці нейтрального атома дорівнює його зарядовому числу Z. Сума зарядових чисел вихідних ядер дорівнює сумі зарядових чисел ядер – продуктів реакції. Отже, електронні оболонки ядер гелію й бору містять разом стільки ж електронів, скільки їх містять електронні оболонки ядер вуглецю й водню.

Очевидно, що при вирахуванні суми мас нейтральних атомів вуглецю та водню з суми мас атомів гелію й бору, маси електронів випадуть і ми отримаємо той же результат, як якщо б брали маси ядер. Підставивши маси атомів (див. табл. А.6 додатка) у розрахункову формулу, отримаємо:

$$Q = 931(4,00260 + 10,01294) - (1,00783 + 13,00335)\ \text{МеВ} = 4,06\ \text{МеВ}.$$

Приклад 7. Визначити початкову активність A_0 радіоактивного препарату магнію ^{27}Mg масою $m = 0,2$ мкг, а також його активність A через час $t = 6$ год. Період напіврозпаду $T_{1/2}$ магнію вважати відомим.

Розв'язок. Активність A ізотопу характеризує швидкість радіоактивного розпаду й визначається відношенням числа dN ядер, що розпалися за інтервал часу dt, до цього інтервалу:

$$A = -dN / dt. \quad (1)$$

Знак «–» показує, що число N радіоактивних ядер із часом зменшується. Для того, щоб знайти dN / dt, скористаємося законом радіоактивного розпаду:

$$N = N_0 e^{-\lambda t}, \quad (2)$$

де N – число радіоактивних ядер, що містяться в ізотопі, у момент часу t;

N_0 – число радіоактивних ядер у момент часу, що прийнятий за початковий ($t = 0$);

λ – постійна радіоактивного розпаду.

Продиференціюємо вираз (2) за часом:

$$dN / dt = -\lambda N_0 e^{-\lambda t}. \quad (3)$$

Виключивши з формул (1) та (3) dN/dt, знаходимо активність препарату в момент часу *t*:

$$A = \lambda N_0 e^{-\lambda t}. \qquad (4)$$

Початкову активність A_0 препарату отримаємо при $t = 0$:

$$A_0 = \lambda N_0. \qquad (5)$$

Постійна радіоактивного розпаду λ пов'язана з періодом напіврозпаду $T_{1/2}$ співвідношенням:

$$\lambda = (ln\ 2)/T_{1/2}. \qquad (6)$$

Число N_0 радіоактивних ядер, що містяться в ізотопі, дорівнює добутку постійної Авогадро N_A на кількість речовини ν даного ізотопу:

$$N_0 = \nu N_A = \frac{m}{M} N_A, \qquad (7)$$

де m – маса ізотопу;
M – молярна маса.
З урахуванням виразів (6) і (7) формули (5) і (4) приймають вигляд:

$$A_0 = \frac{m}{M}\frac{ln\ 2}{T_{1/2}} N_A; \qquad (8)$$

$$A = \frac{m}{M}\frac{ln\ 2}{T_{1/2}} N_A e^{-\frac{ln 2}{T_{1/2}}}. \qquad (9)$$

Зробимо обчислення, враховуючи, що $T_{1/2} = 10$ хв $= 600$ с (див. табл. А.12 додатка); $ln\ 2 = 0,693$; $t = 6$ год $= 6 \cdot 3,6 \cdot 10^3$ с $= 2,16 \cdot 10^4$ с:

$$A_0 = \frac{0,2 \cdot 10^{-9}}{27 \cdot 10^{-3}}\frac{0,693}{600} 6,02 \cdot 10^{23}\ \text{Бк} = 5,13 \cdot 10^{12}\ Бк = 5,13\ \text{ТБк};$$

$$A = \frac{0,2 \cdot 10^{-9}}{27 \cdot 10^{-3}}\frac{0,693}{600} 6,02 \cdot 10^{23} e^{-\frac{0,693}{600} \cdot 2,16 \cdot 10^4}\ \text{Бк} = 81,3\ \text{Бк}.$$

Приклад 8. Використовуючи квантову теорію теплоємності Ейнштейна, обчислити питому теплоємність *c* при постійному об'ємі алюмінію при температурі $T = 200$ К. Характеристичну температуру Θ_E Ейнштейна прийняти для алюмінію рівною 300 К.

Розв'язок. Питома теплоємність c речовини може бути виражена через молярну теплоємність C_m співвідношенням:

$$c = C_m / M, \tag{1}$$

де M – молярна маса.

Молярна теплоємність при постійному об'ємі з теорії Ейнштейна виражається формулою:

$$C_m = 3R\left(\frac{\Theta_E}{T}\right)^2 \frac{e^{\Theta_E/T}}{(e^{\Theta_E/T}-1)^2}. \tag{2}$$

Підставивши в (1) вираз теплоємності C_m за формулою (2), отримаємо:

$$c = \frac{3R}{M}\left(\frac{\Theta_E}{T}\right)^2 \frac{e^{\Theta_E/T}}{(e^{\Theta_E/T}-1)^2}. \tag{3}$$

Зробимо обчислення:

$$c = \frac{3\cdot 8{,}31}{27\cdot 10^{-3}}\left(\frac{300}{200}\right)^2 \frac{e^{300/200}}{(e^{300/200}-1)^2}\ \text{Дж/(кг}\cdot\text{К)} = 770\ \text{Дж/(кг}\cdot\text{К)}.$$

Приклад 9. Визначити теплоту ΔQ, що необхідна для нагрівання кристала NaCl масою $m = 20$ г від температури $T_1 = 2$ К до температури $T_2 = 4\ K$. Характеристичну температуру Дебая Θ_D для NaCl прийняти рівною 320 К та умову $T \ll \Theta_D$ вважати виконаною.

Розв'язок. Теплота ΔQ, що підводиться для нагрівання тіла від температури T_1 до T_2, може бути обчислена за формулою:

$$\Delta Q = \int_{T_1}^{T_2} C_T dT, \tag{1}$$

де C_T – теплоємність тіла.

Теплоємність тіла пов'язана з молярною теплоємністю співвідношенням:

$$C_T = mC_m / M, \tag{2}$$

де m – маса тіла;

M – молярна маса.

Підставивши вираз C_T у формулу (1), отримаємо:

$$\Delta Q = \frac{m}{M} \int_{T_1}^{T_2} C_m dT. \qquad (3)$$

У загальному випадку теплоємність C_m є складна функція температури, тому виносити її за знак інтегралу не можна. Однак, якщо виконана умова $T \ll \Theta_D$, то знаходження ΔQ полегшується тим, що можна скористатися граничним законом Дебая, згідно з яким теплоємність пропорційна кубу термодинамічної температури:

$$C_m = \frac{12\pi^4}{5} R \left(\frac{T}{\Theta_D} \right)^3. \qquad (4)$$

Підставляючи молярну теплоємність (4) у формулу (3), отримаємо:

$$\Delta Q = \frac{12\pi^4}{5} \frac{m}{M} \frac{R}{\Theta_D^3} \int_{T_1}^{T_2} T^3 dT.$$

Зробимо інтегрування:

$$\Delta Q = \frac{12\pi^4}{5} \frac{m}{M} \frac{R}{\Theta_D^3} \left(\frac{T_2^4}{4} - \frac{T_1^4}{4} \right).$$

Переписавши отриману формулу у вигляді:

$$\Delta Q = \frac{3\pi^4}{5} \frac{m}{M} \frac{R}{\Theta_D^3} (T_2^4 - T_1^4),$$

зробимо обчислення:

$$\Delta Q = \frac{3 \cdot (3{,}14)^4}{5} \frac{2 \cdot 10^{-2}}{58{,}5 \cdot 10^{-3}} \frac{8{,}31}{(320)^2} (4^4 - 2^4) \text{ Дж} =$$
$$= 1{,}22 \cdot 10^{-3} \text{ Дж} = 1{,}22 \text{ мДж}.$$

Приклад 10. Обчислити максимальну енергію ε_F (енергію Фермі), яку можуть мати вільні електрони в металі (мідь) при температурі $T = 0$ К. Прийняти, що на кожен атом міді припадає по одному валентному електрону.

Розв'язок. Максимальна енергія ε_F, яку можуть мати електрони в металі при $T = 0$ К, пов'язана з концентрацією вільних електронів співвідношенням:

$$\varepsilon_F = \hbar^2 (3\pi^2 n)^{2/3} / (2m), \qquad (1)$$

де $\hbar$ – постійна Планка;

m – маса електрона.

Концентрація вільних електронів за умовою задачі дорівнює концентрації атомів, яка може бути знайдена за формулою:

$$n = \rho N_A / M, \qquad (2)$$

де ρ – щільність міді;

N_A – постійна Авогадро;

M – молярна маса.

Підставляючи вираз n у формулу (1), отримаємо:

$$\varepsilon_F = \frac{\hbar^2}{2m}\left(3\pi^2 \rho \frac{N_A}{M}\right)^{2/3}.$$

Зробимо обчислення:

$$\varepsilon_F = \frac{(1{,}05\cdot 10^{-34})^2}{2\cdot 9{,}1\cdot 10^{-31}}\left[3\cdot(3{,}14)^2\cdot 8{,}9\cdot 10^3\cdot\frac{6{,}02\cdot 10^{23}}{64\cdot 10^{-3}}\right]^{2/3} \text{Дж} =$$

$$= 1{,}18\cdot 10^{-18} \text{ Дж} = 7{,}4 \text{ еВ}.$$

Приклад 11. Кремнієвий зразок нагрівають від температури $t_1 = 0^0$ С до температури $t_2 = 10^0$ С. У скільки разів зростає його питома провідність?

Розв'язок. Питома провідність γ власних напівпровідників пов'язана з температурою T співвідношенням:

$$\gamma = \gamma_0 e^{-\Delta E/(2kT)},$$

де γ_0 – константа;

ΔE – ширина забороненої зони.

Отже:

$$\frac{\gamma_2}{\gamma_1} = \frac{e^{-\Delta E/(2kT_2)}}{e^{-\Delta E/(2kT_1)}} = exp\left[\frac{\Delta E}{2k}\left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}\right)\right].$$

Вважаючи для кремнію $\Delta E = 1{,}1$ еВ, зробимо обчислення:

$$\frac{\gamma_2}{\gamma_1} = exp\frac{1,76 \cdot 10^{-19}}{2(1,38 \cdot 10^{-23})}\left(\frac{1}{273} - \frac{1}{283}\right) = 2,28.$$

3.4 Завдання для самостійного рішення

1. Визначити енергію ε фотона, що випускається під час переходу електрона в атомі водню з третього енергетичного рівня на основний. $[12,1 \text{ еВ}]$.

2. Обчислити перший потенціал збудження φ_1 атома водню. $[10,2 \text{ В}]$.

3. Обчислити довжину хвилі де Бройля λ для електрона, що пройшов прискорюючу різницю потенціалів $U = 22,5 \text{ В}$. $[0,258 \text{ нм}]$.

4. Обчислити довжину хвилі де Бройля λ для протона, який рухається зі швидкістю $\upsilon = 0,6\ c$ (c − швидкість світла у вакуумі). $[1,76 \text{ фм}]$.

5. Оцінити за допомогою співвідношення невизначеностей мінімальну кінетичну енергію T_{min} електрона, що рухається усередині сферичної області діаметром $d = 0,1$ нм. $[15 \text{ еВ}]$.

6. Визначити відносну невизначеність $\Delta p / p$ імпульсу частки, що рухається, якщо припустити, що невизначеність її координати дорівнює довжині хвилі де Бройля. $[0,16]$.

7. Електрон знаходиться в прямокутному потенційному ящику з непроникними стінками. Ширина ящика $l = 0,2 \text{ нм}$, енергія електрона в ящику $E = 37,8 \text{ еВ}$. Визначити номер n енергетичного рівня та модуль хвилевого вектора $\vec{k}$. $\left[2;\ 3,14 \cdot 10^{10}\ \text{м}^{-1}\right]$.

8. Частка в потенційному ящику знаходиться в основному стані. Яка вірогідність виявлення частки: у середній третині ящика, у крайній третині ящика? $[0,609;\ 0,195]$.

9. Обчислити енергію зв'язку $E_{зв}$ ядра дейтерію ${}_1^2\text{H}$ і тритію ${}_1^3\text{H}$. $[2,22 \text{ МеВ}; 8,47 \text{ МеВ}]$.

10. Обчислити енергетичний ефект реакції ${}_4^9\text{Be} + {}_2^4\text{He} \rightarrow {}_6^{12}\text{C} + {}_0^1n.$ $[5,71 \text{ МеВ}]$.

11. Обчислити енергетичний ефект для реакції ${}_3^6\text{Li} + {}_1^1\text{H} \rightarrow {}_2^3\text{He} + {}_2^4\text{He}.$ $[4,03 \text{ МеВ}]$.

12. Визначити число N атомів радіоактивного препарату йоду ${}_{53}^{131}\text{I}$ масою $m = 0,5 \text{ мкг}$, що розпалися впродовж часу: 1) $t_1 = 1$ хв; 2) $t_2 = 7$ діб.

$\left[1{,}38\cdot10^{11};\ 1{,}04\cdot10^{15}\right]$.

13. Визначити активність A радіоактивного препарату ${}^{98}_{38}\mathrm{Sr}$ масою $m = 0{,}1$ мкг. $\left[543\ \text{кБк}\right]$.

14. Визначити частоту ν коливань атомів срібла за теорією теплоємності Ейнштейна, якщо характеристична температура срібла $\Theta_E = 165$ К. $\left[3{,}44\cdot10^{-12}\ \text{Гц}\right]$.

15. Визначити середню енергію $\langle\varepsilon\rangle$ лінійного, одновимірного квантового осцилятора при температурі $T = \Theta_E = 200$ К. $\left[1{,}61\cdot10^{-21}\ \text{Дж}\right]$.

16. Визначити теплоту Q, необхідну для нагрівання кристала міді масою $m = 100$ г від $T_1 = 10$ К до $T_2 = 20$ К. Характеристична температура Дебая для міді $\Theta_D = 320$ К. Вважати умову $T_2 \ll \Theta_D$ виконаною. $\left[3{,}48\ \text{Дж}\right]$.

17. Виразити середню квадратичну швидкість $\langle\upsilon_{кв}\rangle$ через максимальну швидкість υ_{max} електронів у металі при температурі 0 К. $\left[\sqrt{3/5}\upsilon_{max}\right]$.

18. Метал знаходиться при температурі 0 К. Визначити відносне число електронів, енергії яких відрізняються від енергії Ферми не більше ніж на 2 %. $\left[0{,}03\right]$.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ЛІТЕРАТУРНИХ ДЖЕРЕЛ

Основна:

1. Воробьев А. А. Физика: Методические указания и контрольные задания для студентов-заочников инженерно-технических специальностей вузов (включая сельскохозяйственные вузы) / А. А. Воробьев, В. П. Иванов, В. Г. Кондакова, А. Г. Чертов – М.: Высш. шк., 1987. – 208 с.
2. Волькенштейн В. С. Сборник задач по общему курсу физики/ В. С. Волькенштейн. – М.: Наука, 1979. – 462 с.
3. Детлаф А. А. Курс физики. / А. А. Детлаф, Б. М. Яворский, Л. Б. Милковская. – М.: Высшая школа, 1979. – Т.3 . – 512 с.
4. Зисман Г. А. Курс общей физики / Г. А. Зисман, О. М. Тодес. – М.: Наука, 1974. – Т. 3. – 486 с.
5. Савельев И. В. Курс общей физики / И. В. Савельев. – М.: Наука, 1977–1979.– Т 3. –537 с.
6. Трофимова Т. И. Курс физики / Т. И. Трофимова. – М.: Высшая школа, 1985. – 560 с.
7. Чертов А. Г. Задачник по физике / А. Г. Чертов, А. А. Воробьев. – М.: Высшая школа, 1981. – 491 с.
8. Фирганг Е. В. Руководство к решению задач по курсу общей физике / Е. В. Фирганг. – М.: Высшая школа, 1977. – 352 с.
9. Новодворская Е. М. Методика проведения упражнений по физике во втузе / Е. М. Новодворская, Э. М. Дмитриев. – 3-е изд., перераб. и доп.– М.: Высшая школа, 1981. – 368 с.
10. Иродов И. Е. Сборник задач по общей физике / И. Е. Иродов, И. В. Савельев, О.И. Замша. – М.: Наука, 1975. – 819 с.

Додаткова:

11. Сена Л. А. Единицы физических величин и их размерности / Л. А Сена. – М. Наука, 1977. – 304 с.
12. Сивухин Д. В. Общий курс физики / Д. В. Сивухин. – М.: Наука, 2005, Т. 4. – 792 с.
13. Сивухин Д. В. Общий курс физики / Д. В. Сивухин. – М.: Наука, 2002, Т. 4. – 782 с.

13\. Чертов А. Г. Единицы физических величин / А. Г. Чертов – М.: Высшая школа, 1977. – 287 с..

ДОДАТОК А

Таблиця А.1 – Основні фізичні постійні (округлені значення)

Фізична стала	Позначення	Значення
Нормальне прискорення вільного падіння	g	$9{,}81$ м/с^2
Гравітаційна стала	G	$6{,}67\cdot10^{-11}$ м$^3/($кг$\cdot$с$^2)$
Постійна Авогадро	N_A	$6{,}02\cdot10^{23}$ моль$^{-1}$
Постійна Больцмана	k	$1{,}38\cdot10^{-23}$ Дж/К
Елементарний заряд	e	$1{,}60\cdot10^{-19}$ Кл
Швидкість світла у вакуумі	c	$3{,}00\cdot10^{8}$ м/с
Постійна Стефана-Больцмана	σ	$5{,}67\cdot10^{-8}$ Вт/(м$^2\cdot$К^4)
Постійна закону зміщення Віна	b	$2{,}90\cdot10^{-3}$ м$\cdot$К
Постійна Планка	h $\hbar$	$6{,}63\cdot10^{-34}$ Дж$\cdot$с $1{,}05\cdot10^{-34}$ Дж$\cdot$с
Стала Рідберга	R	$1{,}10\cdot10^{7}$ м$^{-1}$
Радіус Бора	a	$0{,}529\cdot10^{-10}$ м
Комптонівська довжина хвилі електрона	Λ	$2{,}43\cdot10^{-12}$ м
Магнетон Бора	μ_B	$0{,}927\cdot10^{-23}$ А$\cdot$м^2
Енергія іонізації атома водню	E_i	$2{,}18\cdot10^{-18}$ Дж ($13{,}6$ еВ)
Атомна одиниця маси	а.о.м.	$1{,}660\cdot10^{-27}$ кг
Електрична постійна	ε_0	$8{,}85\cdot10^{-12}$ Ф/м
Магнітна константа	μ_0	$4\pi\cdot10^{-7}$ Гн/м

Таблиця А.2 – Щільність твердих тіл

Тверде тіло	Щільність, кг/м^3	Тверде тіло	Щільність, кг/м^3
Алюміній	$2{,}70\cdot10^3$	Мідь	$8{,}9\cdot310^3$
Барій	$3{,}50\cdot10^3$	Нікель	$8{,}90\cdot10^3$
Ванадій	$6{,}02\cdot10^3$	Свинець	$11{,}3\cdot10^3$
Вісмут	$9{,}8\cdot010^3$	Срібло	$10{,}5\cdot 10^3$
Залізо	$7{,}88\ 10^3$	Цезій	$1{,}90\cdot10^3$
Літій	$0{,}53\cdot10^3$	Цинк	$7{,}15\cdot10^3$

Таблиця А.3 – Діелектрична проникність

Речовина	Проникливість	Речовина	Проникливість
Вода	81	Парафін	2,0
Масло трансформаторне	2,2	Скло	7,0

Таблиця А.4 – Питомий опір металів

Метал	Питомий опір, $Ом \cdot м$	Метал	Питомий опір, $Ом \cdot м$
Залізо	$9{,}8 \cdot 10^{-8}$	Ніхром	$1{,}1 \cdot 10^{-6}$
Мідь	$1{,}7 \cdot 10^{-8}$	Срібло	$1{,}6 \cdot 10^{-8}$

Таблиця А.5 – Відносні атомні маси (округлені значення) A_r і порядкові номери Z деяких елементів

Елемент	Символ	A_r	Z	Елемент	Символ	A_r	Z
Азот	N	14	7	Марганець	Mn	55	25
Алюміній	Al	27	13	Мідь	Cu	64	29
Аргон	Ar	40	18	Молібден	Mo	96	42
Барій	Ba	137	56	Натрій	Na	23	11
Ванадій	V	60	23	Неон	Ne	20	10
Водень	H	1	1	Нікель	N_i	59	28
Вольфрам	W	184	74	Олово	Sn	119	50
Гелій	He	4	2	Платина	Pt	195	78
Залізо	Fe	56	26	Ртуть	Hg	201	80
Золото	Au	197	79	Сіра	S	32	16
Калій	K	39	19	Срібло	Ag	108	47
Кальцій	Ca	40	20	Вуглець	C	12	6
Кисень	O	16	8	Уран	U	238	92
Магній	Mg	24	12	Хлор	Cl	35	17

Таблиця А.6 – Маси атомів легких ізотопів

Ізотоп	Символ	Маса,а.о.м.	Ізотоп	Символ	Маса,а.о.м
1	2	3	4	5	6
Нейтрон	${}^{1}_{0}n$	1,00867	Берилій	${}^{7}_{4}Be$ ${}^{9}_{4}Be$	7,01693 9,01219
Водень	${}^{1}_{1}H$ ${}^{2}_{1}H$ ${}^{3}_{1}H$	1,00783 2,01410 3,01605	Бор	${}^{10}_{5}B$ ${}^{11}_{5}B$	10,01294 11,00930

Продовження таблиці А.6

1	2	3	4	5	6
Гелій	$^{3}_{2}He$ $^{4}_{2}He$	3,01605 4,00260	Вуглець	$^{14}_{6}C$ $^{13}_{6}C$	12,00000 13,00335
Літій	$^{6}_{3}Li$ $^{7}_{3}Li$	6,01513 7,01601	Азот	$^{14}_{7}N$	14,00307
Кисень	$^{16}_{8}O$ $^{17}_{8}O$	15,99491 16,99913			

Таблиця А.7 – Щільність рідин

Рідина	Щільність, кг/м^3	Рідина	Щільність, кг/м^3
Вода (при 4°С)	$1,00 \cdot 10^3$	Сірковуглець	$1,26\ 10^3$
Гліцерин	$1,26 \cdot 10^3$	Спирт	$0,80 \cdot 10^3$
Ртуть	$13,6 \cdot 10^3$		

Таблиця А.8 – Щільність газів (за нормальних умов)

Газ	Щільність, кг/м^3	Газ	Щільність, кг/м^3
Водень	0,09	Гелій	0,18
Повітря	1,29	Кисень	1,43

Таблиця А.9 – Робота виходу електронів

Метал	A, Дж	A, еВ
Калій	$3,5 \cdot 10^{-19}$	2,2
Літій	$3,7 \cdot 10^{-19}$	2,3
Платина	$10 \cdot 10^{-19}$	6,3
Рубідій	$3,4 \cdot 10^{-19}$	2,1
Срібло	$7,5 \cdot 10^{-19}$	4,7
Цезій	$3,2 \cdot 10^{-19}$	2,0
Цинк	$6,4 \cdot 10^{-19}$	4,0

Таблиця А.10 – Рухливість іонів у газах, $м^2/(В \cdot с)$

Газ	Позитивні іони	Негативні іони
Азот	$1,27 \cdot 10^{-4}$	$1,81 \cdot 10^{-4}$
Водень	$5,4 \cdot 10^{-4}$	$7,4 \cdot 10^{-4}$
Повітря	$1,4 \cdot 10^{-4}$	$1,9 \cdot 10^{-4}$

Таблиця А.11 – Показник заломлення

Речовина	Показник	Речовина	Показник
Алмаз	2,42	Гліцерин	1,47
Вода	1,33	Скло	1,50

Таблиця А.12 – Періоди напіврозпаду радіоактивних ізотопів

Ізотоп	Символ	Період напіврозпаду
Актиній	${}^{225}_{89}Ac$	10 діб
Йод	${}^{131}_{53}I$	8 діб
Кобальт	${}^{60}_{27}Co$	5,3 років
Магній	${}^{27}_{12}Mg$	10 хв
Радій	${}^{226}_{86}Ra$	1620 років
Радон	${}^{222}_{86}Rn$	3,8 доби
Стронцій	${}^{90}_{38}Sr$	27 років
Фосфор	${}^{32}_{15}P$	14,3 доби
Церій	${}^{144}_{58}Ce$	285 діб

Таблиця А.13 – Маса й енергія спокою деяких часток

Частка	m		E_0	
	кг	а.о.м	Дж	МеВ
Електрон	$9,11 \cdot 10^{-31}$	0,00055	$8,16 \cdot 10^{-14}$	0,511
Протон	$1,672 \cdot 10^{-27}$	1,00728	$1,50 \cdot 10^{-10}$	938
Нейтрон	$1,675 \cdot 10^{-27}$	1,00867	$1,51 \cdot 10^{-10}$	939
Дейтрон	$3,35 \cdot 10^{-27}$	2,01335	$3,00 \cdot 10^{-10}$	1876
α-частка	$6,64 \cdot 10^{-27}$	4,00149	$5,96 \cdot 10^{-10}$	3733
π-мезон	$2,41 \cdot 10^{-28}$	0,14498	$2,16 \cdot 10^{-11}$	135

Таблиця А.14 – Енергія іонізації

Речовина	E_i, Дж	E_i, еВ
Водень	$2{,}18\cdot 10^{-18}$	13,6
Гелій	$3{,}94\cdot 10^{-18}$	24,6
Літій	$1{,}21\cdot 10^{-17}$	75,6
Ртуть	$1{,}66\cdot 10^{-18}$	10,4

Таблиця А.15 – Одиниці СІ, що мають спеціальні найменування

Величина		Одиниця		
Найменування	Розмір-ність	Наймену-вання	Позначення	Вираз через ос-новні й додатко-ві одиниці
1	2	3	4	5
Основні одиниці				
Довжина	L	метр	м	
Маса	M	кілограм	кг	
Час	T	секунда	с	
Сила елек. току	I	ампер	А	
Термодина-мічна темпера-тура	Θ	кельвін	К	
Сила світу	J	кандела	кд	
Додаткові одиниці				
Плоский кут	–	радіан	рад	
Тілесний кут	–	стерадіан	ср	
Довільні одиниці				
Частота	T^{-1}	герц	Гц	$\mathrm{с}^{-1}$
Сила, вага	LMT^{-2}	ньютон	Н	$\mathrm{м}\cdot\mathrm{кг}\cdot\mathrm{с}^{-2}$
Енергія, робо-та, кількість тепла	$\mathrm{L^2MI^{-2}}$	джоуль	Дж	$\mathrm{м}^2\cdot\mathrm{кг}\cdot\mathrm{с}^{-2}$
Потужність, потік енергії	$\mathrm{L^2MT^{-3}}$	ват	Вт	$\mathrm{м}^2\cdot\mathrm{кг}\cdot\mathrm{с}^{-3}$
Кількість елек-трики (елек. заряд)	TI	кулон	Кл	$\mathrm{с}\cdot\mathrm{А}$

Продовження таблиці А.15

1	2	3	4	5
Електрична ємкість	$L^{-2}M^{-1}T^4I^2$	фарад	Ф	$м^{-2} \cdot кг^{-1} \cdot с^4 \cdot$
Електричний опір	$L^2MT^{-3}I^{-2}$	Ом	Ом	$м^2 \cdot кг \cdot с^{-3} \cdot А$
Електрична провідність	$L^{-2}M^{-1}T^3I^2$	сименс	См	$м^{-2} \cdot кг^{-1} \cdot с^3 \cdot$
Електрична напруга, електричний потенціал, різниця електричних потенціалів, ЕРС	$L^2MT^{-3}I^{-1}$	вольт	В	$м^2 \cdot кг \cdot с^{-3} \cdot А$
Магнітний потік	$L^2MT^{-2}I^{-1}$	вебер	Вб	$м^2 \cdot кг \cdot с^{-2} \cdot А$
Магнітна індукція	$MT^{-2}I^{-1}$	тесла	Тл	$кг \cdot с^{-2} \cdot А^{-1}$
Індуктивність, взаємна індуктив.	$L^2MT^{-2}I^{-2}$	генри	Гн	$м^2 \cdot кг \cdot с^{-2} \cdot А$
Світовий потік	J	люмен	лм	$кд \cdot ср$
Освітленість	$L^{-2}J$	люкс	лк	$м^{-2} \cdot кд \cdot ср$
Активність ізотопу, (активність у радіоактивному джерелі)	T^{-1}	беккерель	Бк	$с^{-1}$
Поглинена доза випромінювання	L^2I^{-2}	грей	Гр	$м^2 \cdot с^{-2}$

Примітки:

1. Окрім температури Кельвіна (позначення T) допускається застосовувати також температуру Цельсія ($t°$), визначається виразом $t° = T - T_0$, де $T_0 = 273{,}15$ К. Температура Кельвіна виражається в кельвінах, темпера-

тура Цельсія – в градусах Цельсія (міжнародне й російське °C). За розміром градус Цельсія дорівнює Кельвіну.

2. Інтервал чи різницю температур Кельвіна виражають у кельвінах. Інтервал чи різницю температур Цельсія допускається висловлювати як в кельвінах, так і в градусах Цельсія.

Таблиця А.16 – Грецький алфавіт

Позначення літер		Назви літер	Позначення літер		Назви літер
1	2	3	4	5	6
A	α	альфа	*N*	ν	ню
1	2	3	4	5	6
B	β	бета	Ξ	ξ	ксі
Г	γ	гама	*O*	ο	омікрон
Δ	δ	дельта	Π	π	Пи
E	ε	епсілон	*P*	ρ	ро
Z	ς	дзета	Σ	σ	сигма
H	η	ета	*T*	τ	тау
Θ	ϑ	тета	Υ	υ	іпсилон
J	ι	йота	*Φ*	φ	фі
К	x	каппа	*X*	χ	хі
Λ	λ	лямбда	Ψ	ψ	псі
M	μ	ми	Ω	ω	омега

Таблиця А.17 – Множники й приставки для утворення десяткових кратних і часткових одиниць та їх найменування

Приставка		Множник	Приставка		Множник
Найменування	Позначення		Найменування	Позначення	
1	2	3	4	5	6
екса	Е	10^{18}	деци	д	10^{-1}
пета	П	10^{15}	санті	с	10^{-2}
тера	Т	10^{12}	міллі	м	10^{-3}
гіга	Г	10^{9}	мікро	мк	10^{-6}
мега	М	10^{6}	нано	н	10^{-9}
кіло	к	10^{3}	піко	п	10^{-12}
гекто	г	10^{2}	фемто	ф	10^{-15}
дека	да	10^{1}	атто	а	10^{-18}

ЕЛЕКТРОННЕ НАВЧАЛЬНО-МЕТОДИЧНЕ ВИДАННЯ

Галіахметов Алмаз Мансурович

МЕТОДИЧНИЙ ПОСІБНИК ДО ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТЬ І ОРГАНІЗАЦІЇ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ СТУДЕНТІВ ІЗ ЗАГАЛЬНОГО КУРСУ ФІЗИКИ. РОЗДІЛИ «КОЛИВАННЯ ТА ХВИЛІ. ОПТИКА» ТА «ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ БУДОВИ АТОМІВ, МОЛЕКУЛ ТА АТОМНОГО ЯДРА» ГАЛУЗІ ЗНАНЬ 0701 «ТРАНСПОРТ І ТРАНСПОРТНА ІНФРАСТРУКТУРА» ДЛЯ СТУДЕНТІВ НАПРЯМУ ПІДГОТОВКИ 6.070106 «АВТОМОБІЛЬНИЙ ТРАНСПОРТ», ГАЛУЗЬ ЗНАНЬ 0601 «БУДІВНИЦТВО І АРХІТЕКТУРА», НАПРЯМ ПІДГОТОВКИ 6.060101 «БУДІВНИЦТВО», ГАЛУЗЬ ЗНАНЬ 0401 «ПРИРОДНИЧІ НАУКИ», НАПРЯМ ПІДГОТОВКИ 6.040106 «ЕКОЛОГІЯ, ОХОРОНА НАВКОЛИШНЬОГО СЕРЕДОВИЩА ТА ЗБАЛАНСОВАНЕ ПРИРОДОКОРИСТУВАННЯ»

Підписано до випуску 29.08. 2012 р. Гарнітура Times New Roman.
Умов. друк. арк. 4,94 . Зам. № 248.

Державний вищий навчальний заклад
«Донецький національний технічний університет»
Автомобільно-дорожній інститут
84646, м. Горлівка, вул. Кірова, 51
E-mail:druknt@rambler.ru

Редакційно-видавничий відділ

Свідоцтво про внесення до Державного реєстру видавців, виготовників і розповсюджувачів видавничої продукції ДК № 2982 від 21.09.2007 р.