УДК 517.5

О функциях с заданными интегральными средними

Н.П. Волчкова

1. Введение.

Пусть $\mathbb{R}^n$ – вещественное евклидово пространство размерности $n \geqslant 2$ с евклидовой нормой $|\cdot|$, $M(n)$ – группа евклидовых движений $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{F} = \{\mu_i\}_{i=1}^k$ – конечное семейство распределений с компактным носителем в $\mathbb{R}^n$. При фиксированном $g \in M(n)$ рассмотрим распределение $g\mu_i$, действующее на $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ по правилу

$$\langle g\mu_i, f\rangle = \langle \mu_i, f \circ g^{-1}\rangle, \quad f \in C^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Преобразование Помпейю $\mathcal{P}_\mathcal{F}$ (глобальное) отображает $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ в декартово произведение k экземпляров $C^\infty(M(n))$ и определяется равенством

$$\mathcal{P}_\mathcal{F}(f)(g) = (\langle g\mu_1, f\rangle, \ldots, \langle g\mu_k, f\rangle), \quad g \in M(n). \tag{1}$$

Аналогично, для открытого множества $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ локальное преобразование Помпейю отображает по формуле (1) $C^\infty(\mathcal{U})$ в декартово произведение $C^\infty(\Lambda(\mathcal{U}, \mu_1)) \times \ldots \times C^\infty(\Lambda(\mathcal{U}, \mu_k))$, где $\Lambda(\mathcal{U}, \mu_i) = \{g \in M(n) : supp\, g\mu_i \subset \mathcal{U}\}$.

Для заданных $\mathcal{F}$ и $\mathcal{U}$ возникает проблема.

Проблема [1] 1. Выяснить, является ли $\mathcal{P}_\mathcal{F}$ инъективным и если не является, то описать его ядро.

2. Если $\mathcal{P}_\mathcal{F}$ инъективно, то найти обратное отображение.

Для некоторых $\mathcal{F}$ и $\mathcal{U}$ инъективность преобразования Помпейю и близкие вопросы изучались во многих работах (см. [1 – 3]). Особый интерес представляет случай, когда $\mathcal{U} = B_R = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < R\}$, а $\mathcal{F} = \{\chi_E\}$ – индикатор компактного множества $E \subset B_R$ положительной меры. Для этого семейства $\mathcal{F}$ и широкого класса множеств E преобразование $\mathcal{P}_\mathcal{F}$ инъективно по отношению к $\mathcal{U}$, если R больше диаметра $d(E)$ наименьшего замкнутого шара, содержащего E (см. [4, 5]). В [6] получен подобный результат для произвольного множества E с глобальным свойством Помпейю. Указанная оценка является точной на классе (см. также [3], где для многих E найдено минимальное значение R, при котором $\mathcal{P}_{\chi_E}$ инъективно). Для класса множеств E, рассматриваемого в [4] и $R > (3/2)d(E)$ в работе [5] приведена также схема обращения преобразования $\mathcal{P}_{\chi_E}$. Кроме того, для квадрата в [5] найдена конструкция обращения преобразования Помпейю и при $R > d(E)$. В связи с этим при решении п.2 указанной проблемы большой интерес представляет усиление оценки $R > (3/2)d(E)$ для других E. В данной работе получено обращение преобразования $\mathcal{P}_{\chi_E}$ в случае, когда E является равнобедренной трапецией и $R > d(E)$.

2. Основные обозначения и формулировка основного результата.

Пусть, как обычно, $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ – пространство финитных бесконечно дифференцируемых функций на $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ – пространство распределений на $\mathbb{R}^n$, $\mu_1 * \mu_2$ – свертка двух распределений, одно из которых имеет компактный носитель. Радиализацией распределения $\mu \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ называется радиальное распределение $\mathcal{R}\mu$, действующее на функцию $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ по формуле

$$\langle \mathcal{R}\mu, \varphi \rangle = \left\langle \mu(x), \int\limits_{SO(n)} \varphi(kx)dk \right\rangle,$$

где $SO(n)$ – группа вращений пространства $\mathbb{R}^n$, dk – нормированная мера Хаара на группе $SO(n)$ [5]. Радиальность $\mathcal{R}\mu$ означает, что для любого $k \in SO(n)$

$$\langle \mathcal{R}\mu(x), \varphi(kx) \rangle = \langle \mathcal{R}\mu(x), \varphi(x) \rangle, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n).$$

Будем рассматривать $M(n)$ как группу матриц порядка $(n+1)\times(n+1)$ вида $\begin{Vmatrix} k & x \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}$, $k \in SO(n)$, $x \in \mathbb{R}^n$, и отождествлять $\mathbb{R}^n$ с аффинным подпространством $\{x_{n+1} = 1\}$ в $\mathbb{R}^{n+1}$.

Пусть T – равнобедренная трапеция с вершинами в точках $z_1 = e^{i\alpha}$, $z_2 = -e^{-i\alpha}$, $z_3 = e^{i(\alpha+2\beta)}$, $z_4 = -e^{-i(\alpha+2\beta)}$, где $\alpha, \beta \in (0, \pi/2)$, $\pi < \alpha + 2\beta < 3\pi/2$. Отождествим точку $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ с комплексным числом $z = x + iy$. Обозначим

$$D_1 = \frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}, \quad D_2 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad D_3 = -ctg\beta\,\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}, \quad D_4 = ctg\beta\,\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}.$$

При $x \in B_{R-1}$ $(R > 1)$ рассмотрим функции

$$f_i(x) = \int\limits_{SO(n)} \left\langle A_i\delta(y), (\mathcal{P}_{\chi_T} f)\left(\begin{Vmatrix} k & x+ky \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}^{-1}\right)\right\rangle dk, \quad i = 1, 2, 3,$$

где δ –дельта-распределение в нуле пространства $\mathbb{R}^n$,

$$A_1=\begin{cases} D_1D_2D_3D_4, & \beta\neq\frac{\pi}{3},\\ D_1^2D_2D_3D_4, & \beta=\frac{\pi}{3},\end{cases}\qquad A_2=\begin{cases} D_1^2D_2D_3D_4, & \beta\neq\frac{\pi}{3}, \alpha+\beta\neq\frac{5\pi}{6},\\ D_1^7D_2D_3D_4, & \beta\neq\frac{\pi}{3}, \alpha+\beta=\frac{5\pi}{6}, \alpha\neq\frac{7\pi}{18},\\ D_1^{13}D_2D_3D_4, & \beta\neq\frac{\pi}{3}, \alpha+\beta=\frac{5\pi}{6}, \alpha=\frac{7\pi}{18},\\ D_1^5D_2D_3D_4, & \beta=\frac{\pi}{3}, \alpha\neq\frac{\pi}{3},\\ D_1^8D_2D_3D_4, & \alpha=\beta=\frac{\pi}{3},\end{cases}$$

A_3 – тождественный оператор. Положим $\mathcal{L}=\begin{cases}\Delta^2, & \beta\neq\frac{\pi}{3},\\ \Delta^3, & \beta=\frac{\pi}{3},\end{cases}$ Δ – оператор Лапласа.

Основным результатом работы является

Теорема 1. *Пусть $R>2$. Тогда для любого $k\in\mathbb{Z}_+$, $\rho\in(0,R)$ существуют распределения $\mathcal{U}_{l,i}$, $(l\in\mathbb{N},\ i=1,2,3,4)$ со следующими свойствами:*

(1) $\operatorname{supp}\mathcal{U}_{l,i}\subset B_{R-1}$ $(l\in\mathbb{N}, i=1,2,3)$, $\operatorname{supp}\mathcal{U}_{l,4}\subset B_R$ $(l\in\mathbb{N})$*;*

(2) *для любой функции $f\in C^\infty(B_R)$ имеют место равенства*

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}(\mathcal{L}f)(\rho e^{i\varphi})e^{-ik\varphi}d\varphi=\lim_{l\to\infty}\left(\langle\mathcal{U}_{l,1},f_1\rangle+\langle\mathcal{U}_{l,2},f_2\rangle\right), \tag{2}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(\rho e^{i\varphi})e^{-ik\varphi}d\varphi=\lim_{l\to\infty}\left(\langle\mathcal{U}_{l,3},f_3\rangle+\langle\mathcal{U}_{l,4},\mathcal{L}f\rangle\right). \tag{3}$$

Отметим, что структура распределений $\mathcal{U}_{l,i}$ видна из доказательства теоремы 1, которое приводится в п. 4 ниже. Относительно аналогов теоремы 1 для других компактов см. [7].

3. Вспомогательные утверждения.

Для мультииндекса $\varkappa=(\varkappa_1,\ldots,\varkappa_n)\in\mathbb{N}^n$ положим $\mu(\varkappa)=\mathcal{R}\left(D^\varkappa\chi_E\right)$, где $D^\varkappa=\frac{\partial^{\varkappa_1+\ldots+\varkappa_n}}{\partial x_1^{\varkappa_1}\ldots\partial x_n^{\varkappa_n}}$.

Лемма 1 ([5]). *Пусть $E\subset\overline{B}_r$ и $R>r$. Тогда для любой $f\in C^\infty(B_R)$ и $x\in B_{R-r}$ справедливо равенство*

$$(f*\mu(\varkappa))(x)=\int\limits_{SO(n)}\left\langle D^\varkappa\delta(y),(\mathcal{P}_{\chi_E}f)\left(\left\|\begin{matrix}k & x+ky\\ 0 & 1\end{matrix}\right\|^{-1}\right)\right\rangle dk.$$

Лемма 2. *Для любой $f\in C^3(T)$ имеем*

$$\int\limits_T(D_2D_3D_4f)(x,y)dxdy=(D_4f)(z_1)-(D_4f)(z_4)-(D_3f)(z_2)+(D_3f)(z_3).$$

Доказательство. Находим

$$\int\limits_T (D_2D_3D_4f)(x,y)dxdy = \int\limits_{\sin(\alpha+2\beta)}^{\sin\alpha} dy \int\limits_{y\,ctg\beta-\sin\alpha\,ctg\beta-\cos\alpha}^{-y\,ctg\beta+\sin\alpha\,ctg\beta+\cos\alpha} \frac{\partial}{\partial x}(D_3D_4f)dx =$$

$$\int\limits_{\sin(\alpha+2\beta)}^{\sin\alpha} [(D_3D_4f)(-y\,ctg\beta+\sin\alpha\,ctg\beta+\cos\alpha,y)- \tag{4}$$

$$(D_3D_4f)(y\,ctg\beta-\sin\alpha\,ctg\beta-\cos\alpha,y)]\,dy.$$

Учитывая, что

$$(D_3D_4f)(-y\,ctg\beta+\sin\alpha\,ctg\beta+\cos\alpha,y) = \frac{d}{dy}\left((D_4f)(-y\,ctg\beta+\sin\alpha\,ctg\beta+\cos\alpha,y)\right),$$

$$D_3D_4f)(y\,ctg\beta-\sin\alpha\,ctg\beta-\cos\alpha,y) = \frac{d}{dy}\left((D_4f)(y\,ctg\beta-\sin\alpha\,ctg\beta-\cos\alpha,y)\right),$$

из (4) получаем утверждение леммы 2. $\square$

Сферическое преобразование радиального распределения μ с компактным носителем в $\mathbb{R}^n$ определяется равенством

$$\widetilde{\mu}(\lambda) = \left\langle \mu(x), j_{\frac{n-2}{2}}(\lambda|x|)\right\rangle, \quad \lambda\in\mathbb{C}, \tag{5}$$

где $j_q(z)=J_q(z)/z^q$, J_q – функция Бесселя первого рода порядка q.

Лемма 3. *Пусть $\nu = D_4D_3D_2\chi_T$. Тогда для любого $k\in\mathbb{Z}_+$ имеет место равенство*

$$\widetilde{\mathcal{R}\left(D_1^k\nu\right)}(\lambda) = -\lambda^{2k}\left\{c_{1,k}\lambda^2 j_{k+1}(\lambda)+c_{2,k}j_k(\lambda)\right\}, \tag{6}$$

где

$$c_{1,k} = \frac{\cos(\alpha-\beta)}{\sin\beta}\left(z_2^k-z_1^k\right) - \frac{\cos(\alpha+3\beta)}{\sin\beta}\left(z_4^k-z_3^k\right),$$

$$c_{2,k} = k\left(ctg\beta\left(z_1^{k-1}+z_2^{k-1}-z_3^{k-1}-z_4^{k-1}\right)+i\left(z_1^{k-1}-z_2^{k-1}+z_3^{k-1}-z_4^{k-1}\right)\right).$$

Доказательство. Поскольку $j_q'(t) = -tj_{q+1}(t)$ (см. [8]), имеем

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(z^k j_q(\lambda|z|)\right) = kz^{k-1}j_q(\lambda|x|)-\lambda^2 xz^k j_{q+1}(\lambda|z|), \tag{7}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(z^k j_q(\lambda|z|)\right) = ikz^{k-1}j_q(\lambda|z|)-\lambda^2 yz^k j_{q+1}(\lambda|z|). \tag{8}$$

Из (7), (8) индукцией по k находим

$$(-1)^k D_1^k\left(J_0(\lambda|z|)\right) = \lambda^{2k}z^k j_k(\lambda|z|)$$

и (см. (5))

$$\widetilde{\mathcal{R}(D_1^k\nu)}(\lambda)=\lambda^{2k}\langle\nu(z),z^kj_k(\lambda|z|)\rangle. \tag{9}$$

Полагая $\psi(z)=z^kj_k(\lambda|z|)$ и используя лемму 2, получаем

$$\langle\nu(z),\psi(z)\rangle=-(D_4\psi)(z_1)+(D_4\psi)(z_4)+(D_3\psi)(z_2)-(D_3\psi)(z_3).$$

Отсюда и из (7) - (9) следует утверждение леммы 3. $\square$

Положим в (6) $k=1,2$. Тогда $c_{2,1}=c_{2,2}=0$,

$$\widetilde{\mathcal{R}\,(D_1\nu)}(\lambda)=-\lambda^4c_{1,1}j_2(\lambda), \tag{10}$$

$$\widetilde{\mathcal{R}\,(D_1^2\nu)}(\lambda)=-\lambda^6c_{1,2}j_3(\lambda), \tag{11}$$

где $c_{1,1},c_{1,2}\neq 0$, поскольку

$$c_{1,1}=-\frac{2\sin(2\alpha+2\beta)\sin 3\beta}{\sin\beta},\quad c_{1,2}=\frac{2i\sin(4\beta)\cos(3\alpha+3\beta)}{\sin\beta}.$$

По теореме Винера - Пэли [9, теорема 7.3.1] существуют радиальные распределения μ_1 и μ_2 с носителями в $\overline{B}_1$, для которых

$$\widetilde{\mu}_1(\lambda)=-c_{1,1}j_2(\lambda),\quad \widetilde{\mu}_2(\lambda)=-c_{1,2}\lambda^2j_3(\lambda). \tag{12}$$

Из (10) - (12) находим

$$\Delta^2\mu_1=\mathcal{R}(D_1\nu),\quad \Delta^2\mu_2=\mathcal{R}(D_1^2\nu). \tag{13}$$

Далее нам потребуется оценка снизу функции $\widetilde{\mu}_1(\lambda)\widetilde{\mu}_2(\lambda)j_k(\varepsilon\lambda)$, где $\varepsilon>0$.

Лемма 4. *Пусть $a_1,a_2,a_3>0$, $k\in\mathbb{Z}_+$,*

$$\theta(\lambda)=j_2(a_1\lambda)j_3(a_2\lambda)j_k(a_3\lambda).$$

Тогда существуют константы L_{1k}, L_{2k}такие, что для любого $l\geqslant L_{1k}$ можно выбрать $\rho_l\in(l,l+1)$ с условием: если $|\lambda|=\rho_l$ или $|\mathrm{Im}\lambda|\geqslant 1$ и $|\lambda|\geqslant L_{1k}$, то

$$|\theta(\lambda)|\geqslant\frac{L_{2k}}{|\lambda|^{k+\frac{13}{2}}}\mathrm{e}^{(a_1+a_2+a_3)|\mathrm{Im}\lambda|}.$$

Доказательство. В силу четности $\theta(\lambda)$ можно считать, что $\mathrm{Re}\lambda \geqslant 0$. Из асимптотического разложения функции Бесселя (см. [10]) находим

$$\theta(\lambda) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{3/2} \frac{(a_1)^{-\frac{5}{2}}(a_2)^{-\frac{7}{2}}(a_3)^{-k-\frac{1}{2}}}{\lambda^{k+\frac{13}{2}}} \cos\left(a_1\lambda - \frac{5\pi}{4}\right) \times$$

$$\times \cos\left(a_2\lambda - \frac{7\pi}{4}\right) \cos\left(a_3\lambda - (2k+1)\frac{\pi}{4}\right) + \mathrm{O}\left(\frac{\mathrm{e}^{(a_1+a_2+a_3)|\mathrm{Im}\lambda|}}{|\lambda|^{k+\frac{15}{2}}}\right).$$

По неравенству Лоясевич имеем (см. [5])

$$|\cos z| \geqslant \frac{1}{\pi \mathrm{e}} d(z, V) \mathrm{e}^{|\mathrm{Im} z|}, \tag{14}$$

где $V = \{(2l+1)\pi/2, l \in \mathbb{Z}\}$, $d(z, V) = \min(1, dist(z, V))$. Используя (14) и повторяя рассуждения из доказательства леммы 7 работы [5], получаем утверждение леммы 4.

□

Пусть $\{\varepsilon_m\}_{m=1}^{\infty}$ – строго возрастающая последовательность положительных чисел с пределом $\frac{R}{2} - 1$, $R_m = 2(1+\varepsilon_m)$, $m \geqslant 1$, $R_0 = 0$.

Лемма 5. *Пусть $R > 2$. Тогда для любого $k \in \mathbb{Z}_+$, $m \in \mathbb{N}$, $t \in [R_{m-1}, R_m)$ существуют две последовательности радиальных распределений $\mu_{l,i}$ ($l \geqslant 1, i = 1, 2$), удовлетворяющих следующим условиям:*

(1) $\mathrm{supp}\mu_{l,i} \subset B_{R_m-1}$, $i = 1, 2$, $l \in \mathbb{N}$,

(2) *существуют константы $L = L(k, R, \varepsilon_1), C = C(R, \varepsilon_1) > 0$, для которых при $l \geqslant L$ имеет место неравенство*

$$|j_k(t\lambda) - (\widetilde{\mu}_1(\lambda)\widetilde{\mu}_{l,1}(\lambda) + \widetilde{\mu}_2(\lambda)\widetilde{\mu}_{l,2}(\lambda))| \leqslant$$

$$\frac{C(R, \varepsilon_1)}{l} \frac{\|\lambda\|^{4-k}}{t^k} \mathrm{e}^{R_m|\mathrm{Im}\lambda|}, \quad \|\lambda\| = \max(1, |\lambda|).$$

Для доказательства леммы 5 достаточно использовать лемму 4 и повторить рассуждения из доказательства предложения 8 работы [5].

4. Доказательство основного результата

Докажем теорему для случая $\beta \neq \frac{\pi}{3}, \alpha+\beta \neq \frac{5\pi}{6}$. В остальных случаях рассуждения проводятся аналогично.

Из леммы 5 следует (см. [5, доказательство теоремы 9]), что для любого $m \in \mathbb{N}$, $t \in [R_{m-1}, R_m)$ существуют распределения $\mathcal{U}_{l,i}$ ($l \in \mathbb{N}, i = 1, 2$) с носителями в R_{R-1}, для которых при $l \geqslant L(k,R,\varepsilon_1)$ и любой функции $f \in C^\infty(B_R)$ справедлива оценка

$$\left|\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(\rho e^{it})e^{-ikt}dt - \langle \mathcal{U}_{l,1}, f*\mu_1\rangle - \langle \mathcal{U}_{l,2}, f*\mu_2\rangle\right| \leqslant$$

$$\frac{c_1}{l}\,(R-R_m)^{-8} \sup_{\substack{|z|\in B_{R'_m}\\ |\alpha|\leqslant 8}} \left|\frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2}}{\partial x^{\alpha_1}\partial y^{\alpha_2}} f(z)\right|, \tag{15}$$

где $R'_m = \frac{2}{3}R + \frac{1}{3}R_m$ и константа c_1 зависит от R, ε_1. Применяя (15) к $\mathcal{L}f$ и учитывая (13), из леммы 1 получаем равенство (2). Пусть теперь $\nu_1 = \mathcal{R}\chi_T$, $\nu_2 = \mathcal{L}\delta$. Тогда $\widetilde{\nu}_1(0) = \int\limits_T dxdy \neq 0$, $\widetilde{\nu}_2(\lambda) = \begin{cases} \lambda^4, & \beta \neq \frac{\pi}{3}, \\ -\lambda^6, & \beta = \frac{\pi}{3}, \end{cases}$, т.е. $\widetilde{\nu}_1$, $\widetilde{\nu}_2$ не имеют общих нулей. Кроме того, $\widetilde{\nu}_1$ имеет такое же асимптотическое поведение, что и функция Бесселя (см. [4, 5]). Поэтому существуют распределения $\mathcal{U}_{l,i}$ $(l \in \mathbb{N}, i = 3,4)$, для которых выполнено равенство (3). Теорема доказана.

Список литературы

[1] Беренстейн К.А., Струппа Д. Комплексный анализ и уравнения в свёртках // Итоги науки и техн. Соврем. пробл. матем. Фундам. направления. Т. 54: ВИНИТИ. 1989. С. 5-111.

[2] Zalcman L. A bibliographic survey of the Pompeiu problem // Approximation by solutions of partial differential equations / ed. Fuglede B. et. al. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1992. P. 185-194.

[3] Volchkov V.V. Integral geometry and convolution equations. - Dordrecht-Boston-London: Kluwer Acad. Publ., 2003.

[4] C.A. Berenstein and R. Gay. Le probléme de Pompeiu locale // J. Anal. Math. 1989. V. 52. P. 133-166.

[5] C.A. Berenstein, R. Gay, A. Yger. Inversion of the local Pompeiu transform // J. Anal. Math. 1990. V. 54. P. 259-287.

[6] Volchkov V.V. The global Pompeiu property always implies the local Pompeiu property. - Donetsk National University Press, 2005.

[7] Volchkova N.P. Inversion of the local Pompeiu transform // Functional analysis and its applications, 2004. V. 197. P. 301-309.

[8] Владимиров В.С. Уравнения математической физики. -М.: Наука, 1981. - 512 с.

[9] Хермандер Л. Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными: В 4 т. -М.: Мир, 1986. - Т 1. - 474 с.

[10] Риекстыньш Э.Я. Асимптотические разложения интегралов: В 3 т. - Рига: Зинатне, 1974. - Т. 1. - 390 с.

Аннотация

Н.П. Волчкова

О функциях с заданными интегральными средними

Получена конструкция обращения локального преобразования Помпейю для равнобедренной трапеции.

Библиография: 10 названий.

Abstract

N.P. Volchkova

On functions with given integral means

We obtain the construction of inversion of the local Pompeiu transform for a isosceles trapezium.

Bibliography: 10 titles.