МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ДЕРЖАВНИЙ ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД
«ДОНЕЦЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ»
АВТОМОБІЛЬНО-ДОРОЖНІЙ ІНСТИТУТ

«ЗАТВЕРДЖУЮ»
Директор АДІ ДВНЗ «ДонНТУ»
М. М. Чальцев
10.06.2014 р.

Кафедра «Автомобільний транспорт»

МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ ДО ВИКОНАННЯ ПРАКТИЧНИХ РОБІТ ІЗ ПРОЕКТУВАННЯ ПІДПРИЄМСТВ АВТОСЕРВІСУ (ДЛЯ СТУДЕНТІВ СПЕЦІАЛЬНОСТІ 7.07010601 «АВТОМОБІЛІ ТА АВТОМОБІЛЬНЕ ГОСПОДАРСТВО»)

00/00-2014-00

«РЕКОМЕНДОВАНО»
Навчально-методична комісія
факультету
«Автомобільний транспорт»
Протокол № 6
від 18.02.2014 р.

«РЕКОМЕНДОВАНО»
Кафедра
«Автомобільний транспорт»
Протокол № 8
від 18.02.2014 р.

Горлівка – 2014

УДК

Методичні рекомендації до виконання практичних робіт із проектування підприємств автосервісу (для студентів спеціальності 7.07010601 «Автомобілі та автомобільне господарство») / укладач В. І. Кудінов. – Електрон. дані. – Горлівка: ДВНЗ «ДонНТУ» АДІ, 2014. – 1 електрон. опт. диск (CD-R); 12 см. – Систем. вимоги: Pentium; 32 MB RAM; WINDOWS 98/2000/NT/XP; MS Word 2000. – Назва з титул. екрану.

Методичні рекомендації містять приклади практичного розрахунку ряду задач по оптимізації показників роботи підприємств автосервісу.

Укладач: Кудінов В. І., канд. техн. наук, доц.

Рецензент: Корольов М.Є., канд. фізико-матем. наук

ЗМІСТ

ВСТУП

Для визначення необхідної кількості постів поточного ремонту (ПР) в автотранспортних підприємствах (АТП) та постів технічного обслуговування (ТО) і ремонту на станціях технічного обслуговування автомобілів (СТОА), місць очікування стоянок, автозаправних станцій (АЗС) зазвичай застосовують детерміновані методи. Однак, застосування одержаних за цими методами результатів обчислень на практиці веде до втрат, які несе підприємство, через те, що практично всі процеси ПР, ТО автомобілів мають випадковий характер. Потреба в ПР, ТО автомобілів приватних власників виникає у випадкові моменти часу, які зазвичай вчасно не плануються. Обсяги робіт ПР змінюються в дуже широких межах – від заміни однієї до декілька десятків деталей або агрегату в цілому. Тому час надходження, тривалість виконання ПР, ТО і знаходження автомобіля на постах є величиною випадковою.

Через випадковий характер моменту виникнення потреби у ремонті та тривалості його виконання на практиці в умовах АТП, СТОА в одних випадках можуть виникати черги автомобілів, які потребують ремонту, а в інших – можуть бути простої постів ПР та ТО. Через це знижується ефективність роботи автомобілів або підприємства, яке здійснює ПР та ТО. Із збільшенням кількості постів проявляються дві протилежні тенденції. З одного боку, скорочуються простої автомобілів в очікуванні ремонту, а з іншого – зменшується завантаження постів ПР і знижується ефективність роботи зон, дільниць ПР та ТО.

Для кожних конкретних умов роботи АТП, СТОА може бути знайдена оптимальна кількість постів ПР, ТО для якої ці втрати будуть мінімальними.

Розрахувати оптимальні параметри виробничо-технічної бази підприємств автомобільного транспорту, чисельність робітників, кількість запчастин та інше дозволяє застосування стохастичних моделей, а саме теорія черг або «теорія масового обслуговування».

1 ОСНОВНІ ПОЛОЖЕННЯ ТЕОРІЇ МАСОВОГО ОБСЛУГОВУВАННЯ (ТЕОРІЇ ЧЕРГ)

Під час організації технічного обслуговування (ТО) і особливо поточного ремонту (ПР) автомобілів характерним є те, що проміжок часу між надходженнями заявок і час, який витрачається на його виконання, є випадковими величинами, що підпорядковуються певним імовірнісним законам.

Одним з основних понять у теорії масового обслуговування (ТМО) є вхідний потік вимог (заявок). Основною характеристикою вхідного потоку є *параметр (інтенсивність) потоку вимог* – λ. Цей параметр визначає середню кількість заявок на обслуговування, що надходять у одиницю часу, та пов'язаний із середнім проміжком часу $\overline{\tau}$ між двома черговими заявками на обслуговування співвідношенням:

$$\lambda = \frac{1}{\overline{\tau}}, \text{ од./год.}; \qquad (1.1)$$

при цьому $\overline{\tau} = T / n$, де T – проміжок часу (годин, хвилин, днів і т.д.), протягом якого надійшло n заявок.

Потік вимог називають *ординарним* якщо ймовірність появи двох або більше вимог в один і той же самий момент часу дуже мала та вважається практично неможливим суміщення двох або більше подій в один і той же самий момент часу.

Потік заявок називається *стаціонарним*, якщо його ймовірнісний режим не змінюється у часі, тобто інтенсивність потоку заявок постійна $\lambda = \text{const}$.

Важливе значення в ТМО мають потоки вимог, в яких інтервали часу між послідовними вимогами, розподілено по експоненціальному (показовому) законі розподілу, щільність імовірності якого визначається рівнянням:

$$f(\tau) = \lambda e^{-\lambda\tau}. \qquad (1.2)$$

Такий потік називається *пуассоновським* потоком вимог, при якому малих проміжків часу між моментами виникнення заявок більше, ніж великих, і ймовірність виникнення заявки через інтервал τ спадає по мірі збільшення інтервалу τ.

Пуассоновські потоки вимог бувають стаціонарними ($\lambda = \text{const}$) та нестаціонарними ($\lambda \neq \text{const}$).

У деяких потоках число вимог, що поступили у систему після довільного моменту часу t, не залежить від того, яке число вимог надійшло у систему до моменту t. Ця властивість називається *відсутністю післядії*.

Потік називається *найпростішим*, якщо він одночасно ординарний, стаціонарний та без післядії.

Іншим основним поняттям ТМО є *середній час обслуговування*, $\overline{t}_{об}$ – величина, що характеризує витрати часу одним обслуговуючим апаратом, наприклад, постом поточного ремонту, на обслуговуванні вимоги, що надійшла.

Досить часто час обслуговування є випадковою величиною з експоненціальним законом розподілу, де щільність імовірності дорівнює:

$$f(t_{об}) = \mu \cdot e^{-\mu \cdot t_{об}}, \tag{1.3}$$

де μ – інтенсивність обслуговування або середня кількість обслуговувань в одиницю часу.

Досить близько до експоненціального закону є розподіл часу, який витрачається на ПР автомобілів, при якому на усунення дрібних технічних несправностей витрачається порівняно мало часу, а поточні ремонти великої тривалості зустрічаються порівняно рідко. Однак досить часто зустрічаються нормальний та інші закони розподілу часу обслуговування (витрати часу на ТО, капітальний ремонт автомобілів).

ТМО розглядає різні системи масового обслуговування. Усі вони складаються з трьох основних елементів: джерела вимог, накопичувача та вузла обслуговування.

Якщо вузол обслуговування складається всього з одного обслуговуючого апарату (поста, робітника, бригади робітників), така система називається *одноканальною*.

При більшій кількості обслуговуючих апаратів система називається *багатоканальною*.

Розрізняють замкнені та розімкнені (відкриті) системи масового обслуговування (СМО).

Відкрита СМО має джерело вимог з нічим не обмеженою і достатньо великою кількістю елементів (клієнтів), де умовно приймається що вимоги які обслужені безповоротно залишають систему. До такої системи можна віднести СТОА легкових автомобілів приватних власників, як тих, що мешкають у районі, так і тих, що проїжджають через район, який обслуговується станцією – дорожні СТОА. В розрахунках відкритих систем не враховується кількість елементів що обслуговуються СМО і використовують сумарний потік вимог, інтенсивність якого не залежить від ефективності роботи СМО.

Ознакою *замкнутої* СМО є те що в ній розглядається обмежений потік вимог і те що вимоги, які обслужені, не залишають систему, а повертаються у джерело вимог. При цьому від кількості вимог, що перебувають у системі (у накопичувачі й вузлі обслуговування), залежить інтенсивність вхідного потоку. Тому у замкнутій системі вхідний потік вимог не є стаціонарним. До різновиду такої системи можна віднести малі автотранспортні підприємства, що займаються обслуговуванням певної (обмеженої) кількості автомобілів, бригада слюсарів, що займається ремонтом визначеного числа устаткування, обслуговуванням постів одного підприємства та ін. Для вирішення завдань щодо замкнених систем переважно застосовують питомі параметри: інтенсивність заявок, які надходять не від всього джерела вимог, наприклад парку автомобілів, а від одного елемента що обслуговується, наприклад, автомобіля λ', та інтенсивності обслуговування одним апаратом, наприклад, постом поточного ремонту μ'.

Розрізняють також СМО із втратами та без втрат. Система із втратами характеризується тим, що вимога не може чекати обслуговування, або, що теж саме, система обслуговування відмовляє вимозі, якщо всі обслуговуючі апарати зайняті.

Системи без втрат називають системами з необмеженим очікуванням. Є ще СМО з обмеженням довжини черги або часу знаходження в ній, коли вимога (клієнт) залишає систему, якщо всі пости обслуговування та очікування зайняті, або коли час очікування перевищує граничну величину.

Розрізняють ще системи з пріоритетності обслуговування (ряд вимог обслуговується у першу чергу, незалежно від наявності черги інших вимог), з можливістю взаємодопомоги, або без неї (коли, наприклад інтенсивність обслуговування бригади дорівнює сумі інтенсивності роботи окремих виконавців) та деякі інші СМО [1, 2].

У загальному випадку СМО містить *n* робочих (обслуговуючих) та *m* допоміжних (очікування) постів.

В якості показників ефективності роботи СМО використовують наступні:

– інтенсивність обслуговування:

$$\mu = \frac{1}{\overline{t}_{об}}, \text{ од./год.}, \qquad (1.4)$$

де $\overline{t}_{об}$ – середня тривалість обслуговування однієї вимоги;

– приведена щільність потоку вимог (коефіцієнт завантаження системи):

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \lambda \cdot \overline{t}_{об}; \qquad (1.5)$$

– відносна пропускна здатність СМО ($P_{п.з}$) визначає частку вимог, що обслужені, від загальної їхньої кількості;

– абсолютна питома пропускна здатність (A) показує кількість вимог, що обслужені в одиницю часу, тобто:

$$A = \lambda \cdot P_{п.з}, \text{ од./год.}; \qquad (1.6)$$

– імовірність того, що всі пости вільні (P_0), характеризує такий стан системи, при якому всі об'єкти справні й не вимагають проведення технічних впливів, тобто вимоги відсутні;

– імовірність відмови в обслуговуванні ($P_{відм}$) має сенс для СМО з втратами та обмеженням по довжині черги або часу знаходження в ній. Вона показує частку «втрачених» для системи вимог;

– імовірність утворення черги ($P_{у.ч.}$) визначає такий стан системи, при якому всі обслуговуючі апарати зайняті, і наступна вимога «встає» у чергу з числом очікувань вимог – r;

– середній час знаходження у черзі:

$$\overline{t}_{оч} = \frac{r}{\lambda \cdot P_{п.з}}, \text{ год.}; \quad (1.7)$$

– середня кількість зайнятих постів ($n_{зайн}$) визначає математичне очікування середньої кількості постів, що зайняті обслуговуванням;

– кількість вимог, що пов'язані із системою:

$$K = r + n_{зайн}; \quad (1.8)$$

– середній час зв'язку вимоги із системою:

$$\overline{t}_{сис} = \overline{t}_{об} + \overline{t}_{оч}, \text{ год.}; \quad (1.9)$$

– витрати від функціонування системи (АТП):

$$H = c_1 \cdot r + c_2 \cdot n_{вільн}, \text{ крб./год.}; \quad (1.10)$$

де c_1 – питома (годинна) вартість простою автомобіля у черзі або втрати прибутку від неповного використання робочої площі, крб./год.;

c_2 – питома (годинна) вартість простою поста, крб./год.;

r – середня довжина черги (в одиницях вимог);

$n_{вільн}$ – середня кількість робочих постів, що простоюють;

2 ОПТИМІЗАЦІЯ ПОКАЗНИКІВ РОБОТИ ВІДКРИТОЇ БАГАТОКАНАЛЬНОЇ СМО З ВТРАТАМИ (ВІДМОВАМИ)

Приклад 1

Визначити оптимальну кількість місць стоянки автомобілів біля торговельного центру, якщо відома інтенсивність автомобільного потоку, що надходить λ = 20 авт./год., а середня тривалість стоянки t = 0,5 год.

Прибуток від експлуатації одного місця зберігання становить $П$ = 2,5 грн./год., тоді як вартість його утримання дорівнює B = 1,5 грн./год.

Розв’язання

Використовуємо формули (додаток А) для відкритої СМО з втратами, бо коли всі місця стоянки зайняті, клієнт залишає систему.

1. Враховуючи вихідні дані, попередньо приймаємо кількість місць на стоянці рівним коефіцієнту завантаження системи:

$$n_0 = \rho = \lambda \cdot t = 20 \cdot 0,5 = 10. \qquad (2.1)$$

2. Визначаємо ймовірність того, що стоянка повністю простоює (всі місця вільні):

$$P_0 = \left[\sum_{k=0}^{n} \frac{\rho^k}{k!} \right]^{-1} = \left[\sum_{k=0}^{10} \frac{(10)^k}{k!} \right]^{-1} = 7,79 \cdot 10^{-5}. \qquad (2.2)$$

3. Імовірність того, що всі місця будуть зайняті (імовірність відмови) дорівнює:

$$P_{відм} = P_0 \frac{\rho^n}{n!} = 7,79 \cdot 10^{-5} \cdot \frac{(10)^{10}}{10!} = 0,215. \qquad (2.3)$$

4. Відносна пропускна спроможність стоянки:

$$P_{п.з} = 1 - P_{відм} = 1 - 0,215 = 0,785. \qquad (2.4)$$

Отже 21,5 % від усіх автомобілів, що потребують стоянки, отримають відмову, а 78,5 % будуть обслуговані.

5. Визначаємо середнє число зайнятих місць стоянки:

$$n_{зайн} = \rho \cdot P_{п.з} = 10 \cdot 0,785 = 7,9. \qquad (2.5)$$

При цьому коефіцієнт використання місця стоянки дорівнює:

$$K_M = \frac{n_{зайн}}{n} = \frac{7,9}{10} = 0,79. \qquad (2.6)$$

6. Середня кількість вільних місць дорівнює:

$$n_{вільн} = n - n_{зайн} = 10 - 7,9 = 2,1. \qquad (2.7)$$

7. Абсолютна питома пропускна спроможність стоянки:

$$A = \lambda \cdot P_{п.з} = 20 \cdot 0,785 = 15,7 \text{ авт./год.} \qquad (2.8)$$

8. Визначаємо економічний ефект від функціонування стоянки на 10 місць:

$$E_Ф = П \cdot n_{зайн} - В \cdot n_{вільн} = 2,5 \cdot 7,9 - 1,5 \cdot 2,1 = 16,42 \text{ грн./год.} \qquad (2.9)$$

9. Змінимо кількість місць зберігання у бік збільшення на 1 одиницю та розрахуємо при цьому $E_Ф$. Якщо він збільшиться, продовжимо покрокове збільшення кількості місць до одержання максимального прибутку. Якщо росту $E_Ф$ не буде – почнемо зменшувати кількість місць стоянки.

Результати розрахунків наведено у таблиці 2.1.

Таблиця 2.1 – Визначення оптимальної кількості місць на стоянці

n	10	11	12	13	14	15
P_0	$7{,}79\cdot10^{-5}$	$6{,}52\cdot10^{-5}$	$5{,}74\cdot10^{-5}$	$5{,}25\cdot10^{-5}$	$4{,}97\cdot10^{-5}$	$4{,}83\cdot10^{-5}$
$n_{зайн}$	7,9	8,4	8,8	9,2	9,4	9,6
$n_{вільн}$	2,1	2,6	3,2	3,8	4,6	5,4
$E_Ф$	16,42	16,97	17,21	17,12	16,72	16,02
$E_Ф'$	21,42	22,47	23,21	23,62	23,72	23,52

Отже, при заданих вихідних даних, економічно вигідно буде прийняти n_{opt} = 12 місць. Коефіцієнт використання місця при цьому дорівнює K_M = 8,8/12 = 0,73.

Імовірність відмови в обслуговуванні (формула 2.3):

$$P_{відм} = 5,74\cdot10^{-5}\cdot\frac{10^{12}}{12!} = 0,120.$$

9. Якщо домогтися зниження витрат на утримання місця зберігання на 0,5 грн. і тим самим підвищити прибуток на цю ж суму, то оптимальна кількість місць буде дорівнювати n_{opt} = 14 (див. останній рядок таблиці 2.1).

При цьому сумарний годинний прибуток зростає:

$$E_Ф{}' = П'\cdot n_{зайн} - B'\cdot n_{вільн} = 3\cdot9,7 - 1\cdot5,3 = 23,72 \text{ грн./год.}$$

Коефіцієнт використання місця стоянки дорівнює:

$$K_M = \frac{9,4}{14} = 0,67.$$

Імовірність відмови в обслуговуванні:

$$P_{відм} = 4,97\cdot10^{-5}\cdot\frac{10^{14}}{14!} = 0,057.$$

3 ОПТИМІЗАЦІЯ ПОКАЗНИКІВ РОБОТИ ВІДКРИТОЇ БАГАТОКАНАЛЬНОЇ СМО З ОБМЕЖЕННЯМ ЧАС ОЧІКУВАННЯ У ЧЕРЗІ

Приклад 2

Визначити оптимальну кількість робочих та допоміжних (очікування) постів міської СТОА, якщо відомо, що на СТОА надходить пуассоновський потік заявок із щільністю λ = 2 авт./год., а час обслуговування однієї машини розподілено за показовим експоненціальним законом і характеризується середньою тривалістю $t_{об}$ = 2 год./авт. Прийняти пропускну спроможність СТОА не менше 50 % ($P_{пр} \geq 0{,}5$), а середній час очікування у черзі не більше $t_{оч} \leq 1{,}5$ год. Якщо прийняти вартість утримання робочого поста за 100 % (c_1 = 1,0), тоді прибуток від його експлуатації прийняти 30 % ($П$ = 0,3), а вартість утримання поста очікування 10 % (c_2 = 0,1) від вартості утримання робочого поста.

Розв’язання

1. Для того, щоб станція працювала ефективно, необхідно забезпечити умову рівності та перевищення кількості постів (робочих n та допоміжних m) коефіцієнта завантаження системи:

$$n + m \geq \rho = \lambda \cdot \overline{t}_{об} = 2 \cdot 2 = 4\,. \qquad (3.1)$$

Приймаємо мінімальну сумарну кількість постів на СТОА – чотири.

2. Для того, щоб забезпечити умову $\overline{t}_{оч} \leq 1{,}5$ год. необхідно прийняти кількість постів очікування:

$$m \geq \overline{t}_{оч} \cdot \lambda \cdot P_{п.з} = 1{,}5 \cdot 2 \cdot 0{,}5 = 1{,}5\,. \qquad (3.2)$$

Тут прийнято пропускну здатність станції $P_{п.з}$ = 50 %. Отже приймаємо $m_{\min}$ = 2. Тоді мінімальна кількість робочих постів дорівнює $n_{\min}$ = 4 – 2 = 2.

3. Знаходимо ймовірності повного простою станції при заданому ρ = 4 і прийнятих n = 2 та m = 2 (формули дивись додаток А):

$$P_0 = \left[\sum_{k=0}^{n} \frac{\rho^k}{k!} + \frac{\rho^n}{n!} \sum_{s=1}^{m} \left[\frac{\rho}{n} \right]^s \right]^{-1} = \left[1 + 4 + \frac{4^2}{2} + \frac{4^2}{2} \cdot \left[2 + 2^2 \right] \right]^{-1} = 0{,}0164\,. \qquad (3.3)$$

4. Визначаємо ймовірність утворення черги:

$$P_{у.ч.} = P_0 \cdot \frac{\rho^n}{n!} = 0{,}0164 \cdot \frac{4^2}{2} = 0{,}131. \qquad (3.4)$$

5. Визначаємо ймовірність відмови в обслуговуванні, тобто ймовірність зайнятості усіх постів (як робочих так і очікування):

$$P_{відм} = P_{у.ч.} \cdot \left[\frac{\rho}{n}\right]^m = 0{,}131 \cdot 2^2 = 0{,}525. \qquad (3.5)$$

6. Знаходимо відносну пропускну здатність станції:

$$P_{п.з} = 1 - P_{відм} = 1 - 0{,}525 = 0{,}475. \qquad (3.6)$$

Цей результат суперечить умові завдання, оскільки $P_{п.з} < 0{,}5$.

7. Підвищуємо кількість робочих постів до трьох $n = 3$. Кількість допоміжних постів залишаємо попередньою. Визначаємо перелічені вище показники:

$$P_0 = \left[1 + 4 + \frac{4^2}{2} + \frac{4^3}{2 \cdot 3} + \frac{4^3}{2 \cdot 3} \cdot \left[\frac{4}{3} + \left[\frac{4}{3}\right]^2\right]\right]^{-1} = 0{,}0176;$$

$$P_{у.ч.} = 0{,}0176 \cdot \frac{4^3}{2 \cdot 3} = 0{,}188;$$

$$P_{відм} = 0{,}188 \cdot \left[\frac{4}{3}\right]^2 = 0{,}333;$$

$$P_{п.з} = 1 - 0{,}333 = 0{,}666.$$

8. Обчислюємо питому абсолютну пропускну спроможність станції:

$$A = \lambda \cdot P_{п.з} = 2 \cdot 0{,}666 = 1{,}33 \text{ авт./год.} \qquad (3.7)$$

9. Обчислюємо середню кількість робочих постів, що зайняті обслуговуванням автомобілів:

$$n_{зайн} = P_0 \left[\sum_{k=1}^{n} \frac{\rho^k}{(k-1)!} + \frac{\rho^n}{(n-1)!} \sum_{s=1}^{m} \left[\frac{\rho}{n}\right]^s\right] =$$
$$= 0{,}0176\left[4 + 4^2 + \frac{4^3}{2} + \frac{4^3}{2}\left[\frac{4}{3} + \left[\frac{4}{3}\right]^2\right]\right] = 2{,}66. \qquad (3.8)$$

Тоді середня кількість вільних робочих постів:

$$n_{вільн} = 3 - 2{,}66 = 0{,}34.$$

10. Визначаємо середню довжину черги (у кількості автомобілів):

$$r = P_{у.ч.} \cdot \sum_{s=1}^{m} s\left[\frac{\rho}{n}\right]^{s} = 0{,}188 \cdot \left[\frac{4}{3} + 2 \cdot \left[\frac{4}{3}\right]^{2}\right] = 0{,}92\,. \quad (3.9)$$

11. Знаходимо середній час очікування у черзі:

$$\overline{t}_{оч} = \frac{r}{\lambda \cdot P_{п.з}} = \frac{0{,}92}{2 \cdot 0{,}666} = 0{,}69 \text{ год.} \quad (3.10)$$

Отриманий результат відповідає умові завдання: $\overline{t}_{оч} < 1{,}5$ год.

12. Визначаємо економічний ефект від роботи станції з прийнятою кількістю постів:

$$E_{Ф} = П \cdot n_{зайн} - c_1 \cdot n_{вільн} - c_2 \cdot m = \quad (3.11)$$

$$= 0{,}3 \cdot 2{,}66 - 1 \cdot 0{,}34 - 0{,}1 \cdot 2 = 0{,}258 \text{ ум. од.}$$

13. Збільшуємо кількість робочих постів до чотирьох. Кількість постів очікування залишаємо попередньою. Обчислюємо перелічені вище показники та заносимо їх у таблицю 3.1.

Таблиця 3.1. – Розрахункові показники СМО при різному співвідношенню кількості робочих та допоміжних постів

№	Кільк. постів $(n-m)$	P_0	$P_{у.ч}$	$P_{відм}$	$P_{п.з}$	$n_{зайн}$	$n_{вільн}$	r	$t_{оч}$	$E_{Ф}$
1	2 – 2	0,0164	0,131	0,525	0,475	–	–	–	–	–
2	3 – 2	0,0176	0,188	0,333	0,666	2,66	0,34	0,92	0,69	0,258
3	4 – 2	0,0180	0,192	0,192	0,808	3,23	0,77	0,58	0,36	–
4	3 – 3	0,0122	0,130	0,083	0,917	2,71	0,29	1,25	0,68	0,224
5	3 – 4	0,0151	0,161	0,071	0,929	2,71	0,29	2,11	1,14	0,128

Збільшилася пропускна здатність СТОА, але збільшилася і кількість вільних постів, а економічний ефект став нульовим. Отже, цей варіант неприйнятний (варіант 3).

14. Збільшуємо кількість постів очікування до трьох, а кількість робочих постів залишаємо попередньою. Розраховуємо показники роботи станції (варіант 4) та аналізуємо отримані результати.

В цьому варіанті значно збільшилася пропускна здатність станції, але трохи зменшилась економічна ефективність роботи порівняно з варіантом 2.

15. Збільшуємо кількість постів очікування до чотирьох. Кількість робочих постів залишаємо попередньою. Розраховуємо показники роботи станції та аналізуємо отримані результати (варіант 5).

Пропускна здатність ще трохи піднялась але економічний ефект роботи значно знизився.

Отже, з умов найбільшої ефективності роботи, остаточно приймаємо: кількість робочих постів n = 3, кількість постів очікування m = 3.

4 ОПТИМІЗАЦІЯ ПОКАЗНИКІВ РОБОТИ ВІДКРИТОЇ БАГАТОКАНАЛЬНОЇ СМО З ОБМЕЖЕННЯМ ЧАСУ ОБСЛУГОВУВАННЯ

Приклад 3

При виконанні автомобілями термінової роботи з перевезення вантажу (збирання врожаю сільськогосподарської продукції) пересувній авторемонтній майстерні необхідно забезпечити високий коефіцієнт технічної готовності автомобілів, тобто час простою автомобіля в ТО та ремонті повинен бути мінімальним.

Необхідно визначити кількість ремонтних робітників для виконання поставленої задачі, якщо відомо, що потік вимог пуассоновський із середньою інтенсивністю λ = 8 заявок за 1 день (12 годин роботи). Трудомісткість ТО та ремонту автомобілів розподілена по експоненціальним законом з середнім значенням трудомісткості $T_{mo,p} = 2$ люд.·год.

Прийняти пропускну спроможність майстерні не менше 90 % за час, що гарантується продуктивністю робітника не менше 95 % (гама-процентна продуктивність $P_{t \le t\gamma} = 1 - \gamma = 0,95$).

Розв'язання

Дана СМО є розімкненою (відкритою) без втрат і без обмеження на довжину черги, тобто всі автомобілі, що надійшли, повинні бути обслугованими. Але висунута вимога забезпечення мінімальної пропускної спроможності майстерні. Використовуємо формули які надані в підручнику [4] враховуючи задану продуктивність робітника.

Пропускна спроможність обслуговуючої системи повинна бути більше інтенсивності потоку вимог, тобто:

$$\psi = \frac{\lambda}{\mu_{бр}} < 1,0, \qquad (4.1)$$

де λ = 8/12 = 0,667 авт./год. – параметр потоку вимог;

$\mu_{бр}$ = $\mu \cdot n$ – інтенсивність обслуговування автомобілів бригадою в n слюсарів.

Якщо автомобіль обслуговує один робітник, тоді середній час обслуговування дорівнює трудомісткості $T_{mo,p}$, а саме $t_{об}$ = 2,0 год.

Тоді інтенсивність роботи (продуктивність) одного робітника дорівнює:

$$\mu = \frac{1}{2} = 0,5 \text{ авт./год.}$$

1. Визначаємо мінімальну кількість робітників для виконання вище зазначеної умови:

$$\psi = \frac{0,667}{0,5 \cdot n} < 1,0\,;\; n_{\min} > 1,33.$$

Приймаємо $n_{\min}$ = 2 люд., тоді коефіцієнт завантаження системи дорівнює:

$$\psi = \frac{0,667}{0,5 \cdot 2} = 0,667\,,$$

а середній час обслуговування бригадою з 2-х слюсарів дорівнює:

$$t_{об} = T_{\text{то,р}} \,/\, 2 = 1 \text{ год.}$$

2. Визначаємо ймовірність простою майстерні (за відсутності заявок):

$$P_0 = \left[\frac{(\psi \cdot n)^n}{n! \cdot (1-\psi)} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\psi \cdot n)^k}{k!} \right]^{-1} = \left[\frac{(0,667 \cdot 2)^2}{2 \cdot (1-0,667)} + 1 + 1,333 \right]^{-1} = 0,20. \quad (4.2)$$

3. Визначаємо ймовірність відмови у негайному обслуговуванні (тобто ймовірність потрапляння у чергу):

$$P_{п.ч.} = P_0 \cdot \frac{(\psi \cdot n)^n}{n! \cdot (1-\psi)} = 0,2 \cdot \frac{(0,667 \cdot 2)^2}{2 \cdot (1-0,667)} = 0,532. \quad (4.3)$$

4. Визначаємо мінімальний час обслуговування автомобіля для забезпечення гамма-відсоткової продуктивності робітника (1-γ) = 0,95

$$P_{t \le t\gamma} = 1 - \gamma = 1 - e^{-t_\gamma / \overline{t}_{об}} = 0,95, \text{ звідки} \quad (4.4)$$

$$e^{-t_\gamma / \overline{t}_{об}} = 0,05.$$

Логарифмуючи отримаємо: $-\,t_\gamma \,/\, \overline{t}_{об} = ln\ 0,05 = -3$.

Отже $t_{\gamma=0,05} = 3 \cdot \overline{t}_{об} = 3 \cdot 1 = 3$ год.

5. Визначаємо ймовірність того, що повний час знаходження автомобіля у ремонті (включаючи і час очікування) не перевищуватиме t = 3 години:

$$Q_t = 1 - e^{-t/\overline{t}_{об}} + \frac{P_{п.ч.}}{n - \psi \cdot n - 1} \cdot e^{\frac{-n(1-\psi)}{\overline{t}_{об}} t} \cdot (1 - e^{\frac{n-\psi \cdot n-1}{\overline{t}_{об}} t}) =$$

$$= 0,95 + \frac{0,532}{2 - 0,667 \cdot 2 - 1} \cdot e^{\frac{-2(1-0,667)}{1} \cdot 3} \cdot (1 - e^{\frac{2-0,667 \cdot 2-1}{1} \cdot 3}) = \quad (4.5)$$

$$= 0,95 - 0,136 = 0,814.$$

Отже за t_γ=3 год. буде обслуговано 81,4% автомобілів, що менше потрібної величини $Q_t \geq 90\%$.

Збільшимо кількість робітників: n=3, тоді отримаємо:

$$t_{об} = \frac{T}{n} = \frac{2}{3} = 0,667\text{; } \psi = 0,444\text{; } P_0 = 0,257\text{; } P_{п.ч.} = 0,18;$$

$$t_{\gamma=0,05} = 3 \cdot t_{об} = 3 \cdot 0,667 = 2 \text{ год.}$$

$$Q_t = 0,95 + \frac{0,18}{3-0,444\cdot 3-1} \cdot e^{\frac{-3(1-0,444)}{0,667}\cdot 2} \cdot (1-e^{\frac{3-0,444\cdot 3-1}{0,667}\cdot 2}) =$$

$$= 0,95 - 0,01 = 0,94$$

Отриманий результат задовольняє умові завдання ($Q_t \geq 90\%$).

Далі визначимо основні показники роботи системи з 3-х слюсарів.

6. Визначаємо середню кількість автомобілів у черзі:

$$r = \psi P_0 \frac{(\psi \cdot n)^n}{n!(1-\psi)^2} = 0,444 \cdot 0,254 \frac{(0,444\cdot 3)^3}{2\cdot 3(1-0,444)^2} = 0,145. \qquad (4.6)$$

7. Визначаємо середню кількість автомобілів у системі:

$$K = r + n_{зайн} = r + \psi \cdot n = 0,145 + 0,444 \cdot 3 = 1,48. \qquad (4.7)$$

8. Середній час очікування початку обслуговування:

$$\overline{t}_{оч} = P_0 \overline{t}_{об} \frac{\psi^n n^{n-1}}{n!(1-\psi)^2} = 0,254 \cdot 0,667 \frac{0,444^3 \cdot 3^2}{2\cdot 3(1-0,444)^2} = 0,072 \text{ год.} \qquad (4.8)$$

9. Середній час знаходження заявки у системі:

$$\overline{t}_c = \overline{t}_{оч} + \overline{t}_{об} = 0,072 + 0,667 = 0,74 \text{ год.} \qquad (4.9)$$

5 ОПТИМІЗАЦІЯ ПОКАЗНИКІВ РОБОТИ ВІДКРИТОЇ БАГАТОКАНАЛЬНОЇ СМО З ЗАБЕЗПЕЧЕННЯМ МАКСИМАЛЬНОЇ ПРОПУСКНОЇ СПРОМОЖНОСТІ

Приклад 4

На СТОА надходить пуассонівський потік заявок на ремонт з інтенсивністю λ = 9 авт./добу. Один пост поточного ремонту за добу (робочий час) може обслужити μ = 2 автомобілі.

Потрібно визначити оптимальну кількість постів поточного ремонту та необхідну кількість місць очікування щоб забезпечити її максимальну пропускну спроможність (не менше 95%). Прийняти, що прибуток від експлуатації одного поста ремонту повинна бути 30 %, а утримання одного місця для очікування 1 % від вартості утримання робочого поста (відкрита стоянка).

Розв’язання

Також як і у попередньому прикладі 3, для СМО є вимога забезпечення певної (максимальної) пропускної спроможності. Використовуємо ті самі формули [4.1, 4.2 та інші] враховуючи задану продуктивність одного поста.

1. Для того, щоб СТОА могла обслужити весь потік вимог необхідно щоб коефіцієнт завантаження станції був не більше одиниці:

$$\psi = \frac{\lambda}{\mu_{бр}} = \frac{9}{2 \cdot n} \le 1; \; n \ge 4,5.$$

Отже, мінімальна кількість постів повинна дорівнювати п'яти. Тоді:

$$\psi = \frac{9}{2 \cdot 5} = 0,9$$

2. Визначаємо ймовірність простою всіх постів одночасно через відсутність заявок:

$$P_0 = \left[\frac{(0,9 \cdot 5)^5}{5!(1-0,9)} + \sum_{k=0}^{4} \frac{(0,9 \cdot 5)^k}{k!} \right] = 0,00496$$

3. Визначаємо середню кількість автомобілів у черзі:

$$r = 0,9 \cdot 0,00496 \frac{(0,9 \cdot 5)^5}{5!(1-0,9)^2} = 6,86 \text{ авт.}$$

4. Визначаємо середню кількість зайнятих та вільних від роботи постів:

$$n_{зайн} = \psi \cdot n = 0,9 \cdot 5 = 4,5$$
$$n_{вільн} = n - n_{зайн} = 5 - 4,5 = 0,5$$

5. Для забезпечення найбільш рівномірного надходження автомобілів на робочі пости приймаємо гамма-відсоткову пропускну спроможність зони очікування $(1-\gamma) = 95\%$, тоді кількість автомобіля-місць стоянки повинна бути у три рази більше середньої кількості автомобілів у черзі (див. приклад 3):

$$m = 3 \cdot r = 3 \cdot 6,9 \approx 21.$$

6. Визначаємо економічний ефект від роботи даної системи:

$$E_ф = П \cdot n_{зайн} - c_1 \cdot n_{вільн} - c_2 \cdot m =$$
$$= 0,3 \cdot 4,5 - 1 \cdot 0,5 - 0,01 \cdot 21 = 0,64 \text{ ум. од.}$$

Тут прийнято (з умови завдання) прибуток від експлуатації поста $П$ = 0,3 (30%), вартість утримання робочого поста c_1 = 1,0 (100 %), вартість утримання місця зберігання c_2 = 0,01 (1 %).

7. Збільшуємо кількість постів на одиницю, тобто $n = 6$ і визначаємо вказані вище показники та економічний ефект від роботи:

$$\psi = \frac{9}{12} = 0,75;$$

$$P_0 = 0,00914; \; r = 1,26; \; n_{зайн} = 4,5; \; n_{вільн} = 1,5; \; m = 1,26 \cdot 3 \approx 4;$$

$$E_ф = 0,3 \cdot 4,5 - 1 \cdot 1,5 - 0,01 \cdot 4 = -0,19.$$

Отже при цих даних буде отриманий від'ємний економічний ефект. Тому приймаємо n_{opt} = 5 та 21 місце очікування.

8. Визначаємо середній час очікування початку обслуговування (при середній тривалості обслуговування $\overline{t}_{об} = 0,5$ дня тому що μ = 2 авт./добу):

$$\overline{t}_{оч} = 0,00496 \cdot 0,5 \cdot \frac{0,9^5 \cdot 5^4}{5!(1-0,9)^2} = 0,76 \text{ дня.}$$

9. Сумарний час знаходження заявки у системі дорівнює:

$$\overline{t}_c = \overline{t}_{оч} + \overline{t}_{об} = 0,5 + 0,76 = 1,3 \text{ дня.}$$

Приклад 5

Необхідно визначити оптимальну кількість постів приймання та діагностування на СТОА із умови мінімальних витрат на утримання постів діагностування та робочих постів ТО і ремонту. Інтенсивність потоку вимог на діагностування у середньому λ= 2 авт./год., тривалість діагностування $t_д$ = 0,4 год. Автомобіль не надходить на робочий пост поки не буде виконано його діагностування. Вартість простою робочого поста ТО у 1,5 разів дорожче вартості простою поста діагностування.

Розв'язання

Приймаємо що СМО є відкритою з необмеженою довжиною черги. Використовуємо формули наведені в додатку А ($m \to \infty$).

1. Визначаємо інтенсивність діагностування:

$$\mu = \frac{1}{0,4} = 2,5 \text{ авт./год.}$$

2. Приведена щільність потоку вимог:

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{2}{2,5} = 0,8. \qquad (5.1)$$

Умова $\rho < 1$ виконується, черга не буде постійно зростати.

3. Ймовірність того, що пост вільний:

$$P_0 = 1 - \rho = 1 - 0,8 = 0,2. \qquad (5.2)$$

4. Ймовірність утворення черги:

$$P_{у.ч.} = \rho^2 \cdot P_0 = 0,8^2 \cdot 0,2 = 0,128. \qquad (5.3)$$

Відносна пропускна здатність $P_{п.з} = 1$, оскільки всі автомобілі повинні пройти через діагностичний пост (умови завдання).

5. Середня кількість зайнятих та вільних постів діагностування (в даному випадку використання одного поста):

$$n_{зайн} = \rho = 0,8, \qquad (5.4)$$

$$n_{вільн} = 1 - n_{зайн} = 0,2. \qquad (5.5)$$

6. Середня кількість вимог, які знаходяться у черзі:

$$r = \frac{\rho^2}{1-\rho} = \frac{0,8^2}{1-0,8} = 3,2. \qquad (5.6)$$

7. Середній час знаходження у черзі:

$$t_{оч} = \frac{\rho}{\mu(1-\rho)} = \frac{r}{\mu \cdot \rho} = \frac{r}{\lambda} = \frac{3,2}{2} = 1,6 \text{ год.} \qquad (5.7)$$

Тобто час очікування перевищує час діагностування у 4 рази.

8. Визначаємо питомі втрати від функціонування системи, якщо прийняти вартість простою поста діагностики за 100 % (c_2 = 1,0), а вартість простою робочого поста c_1 = 1,5 (згідно умов завдання):

$$B = c_1 r + c_2 n_{вільн} = \qquad (5.8)$$
$$= 1,5 \cdot 3,2 + 1 \cdot 0,2 = 5,0 \text{ ум. од./день.}$$

Тут прийнято що очікування діагностування збільшує витрати на утримання робочого поста.

9. Збільшуємо кількість постів діагностування n = 2 та визначаємо ймовірність того, що обидва поста будуть вільними:

$$P_0 = \left[\sum_{k=0}^{n} \frac{\rho^k}{k!} + \frac{\rho^{n+1}}{n!(n-\rho)} \right]^{-1} = \left[1 + 0,8 + \frac{0,8^2}{2} + \frac{0,8^3}{2(2-0,8)} \right]^{-1} = 0,428. \quad (5.9)$$

10. Ймовірність створення черги:

$$P_{у.ч.} = \frac{\rho^n}{n!} P_0 = \frac{0,8^2}{2} \cdot 0,428 = 0,137. \quad (5.10)$$

11. Ймовірність відмови у негайному обслуговуванні, тобто ймовірність простою у черзі:

$$P_{пр} = P_0 \frac{\rho^n}{(n-1)!(n-\rho)} = 0,428 \frac{0,8^2}{(2-0,8)} = 0,228. \quad (5.11)$$

12. Середня кількість зайнятих постів:

$$n_{зайн} = \rho = 0,8. \quad (5.12)$$

13. Середня кількість вільних постів діагностування:

$$n_{вільн} = n - n_{зайн} = 2 - 0,8 = 1,2. \quad (5.13)$$

14. Середня кількість вимог, що знаходяться у черзі:

$$r = \frac{\rho \cdot P_{пр}}{n-\rho} = \frac{0,8 \cdot 0,228}{2-0,8} = 0,15. \quad (5.14)$$

15. Середній час знаходження у черзі:

$$t_{оч} = \frac{P_{пр}}{\mu(n-\rho)} = \frac{r}{\lambda} = \frac{0,15}{2} = 0,076 \text{ год.} \quad (5.15)$$

16. Питомі витрати від функціонування системи:

$$B = 1,5 \cdot 0,15 + 1 \cdot 1,2 = 1,42 \text{ ум. од./день.}$$

Показники роботи СМО значно покращилися.

17. При збільшенні кількості постів до n = 3 отримаємо наступні результати:

$$P_0 = 0,447;\ P_{пр} = 0,052;\ r = 0,019;\ n_{вільн} = 2,2;$$
$$B = 1,5 \cdot 0,019 + 1 \cdot 2,2 = 2,23 \text{ ум. од./день.}$$

Економічний критерій оцінки роботи зони діагностування при n = 3 збільшився, отже оптимальна кількість постів $n_{opt} = 2$.

Приклад 6

На СТОА надходить пуассоновський потік заявок на заміну певної деталі (механізму) з інтенсивністю λ = 0,2 деталі/день (у середньому потрібна одна деталь за п'ять днів $K_0 = 1 / \lambda = 5$). Середній час, потрібний на придбання цієї деталі в торговельній мережі (оформлення документів, оплата транспортування), становить $\overline{t}_{об} = 20$ днів. Потрібно визначити необхідну мінімальну кількість цих деталей на складі, щоб забезпечити мінімальну ймовірність простою автомобіля (до 1 %) в очікуванні ремонту через відсутність запасної деталі.

Розв’язання

Для вирішення даної задачі не має значення закон розподілу часу на придбання деталі. Він може бути будь-яким. При цьому приймається, що ринок пропозицій цих деталей нескінченний, тобто система масового обслуговування відкрита (розімкнута).

Для даного випадку ймовірність того, що в будь-який момент часу на СТОА надійшло n вимог на заміну деталі визначається за законом Пуассона:

$$P_{(n)} = \frac{1}{n!}(\overline{t}_{об}\lambda)^n \cdot e^{-\overline{t}_{об}\lambda}. \qquad (5.16)$$

де λ – інтенсивність надходження заявок;

$\overline{t}_{об}$ – середній час обслуговування заявки;

n – кількість вимог у системі.

Якщо на складі СТОА є k запасних деталей, тоді простій автомобіля через відсутність цієї деталі буде, коли $n > k$. Ймовірність простою $P_{пр}$ у будь-який момент часу дорівнює сумі ймовірностей P_n для всіх випадків коли $n > k$:

$$P_{пр} = \sum_{n=k+1}^{\infty} P_n = 1 - \sum_{n=0}^{k} P_n = 1 - \sum_{n=0}^{k} \frac{(\overline{t}_{об} \cdot \lambda)^n}{n!} \cdot e^{-\overline{t}_{об}\lambda}. \qquad (5.17)$$

Якщо в запасі є одна запасна деталь:

$$P_{пр} = 1 - \sum_{n=0}^{1} \frac{1}{n!}(20 \cdot 0,2)^n \cdot e^{-20 \cdot 0,2} = 0,908. \qquad (5.18)$$

Будемо збільшувати послідовно на одиницю k, поки не одержимо $P_{пр} < 0,01$. Цей результат буде при $k = 10$. При цьому:

$$P_{np} = 1 - \left(1 + 4 + \frac{4^2}{2} + \frac{4^3}{3!} + \frac{4^4}{4!} + \frac{4^5}{5!} + \frac{4^6}{6!} + \frac{4^7}{7!} + \frac{4^8}{8!} + \frac{4^9}{9!} + \frac{4^{10}}{10!}\right) e^{-4} \approx 0,008$$

Якби розрахунки були б зроблені за середньоарифметичними даними (детермінований метод), то запасний фонд склав би $k = 5$, оскільки за час $t_{об} = 20$ днів потребується заміна $k = \frac{20}{5} + 1 = 5$. При цьому ймовірність простою буде дорівнювати $P_n = 0,22$, це значно перевищує необхідний показник ($P_{пр} \le 0{,}01$).

6 ОПТИМІЗАЦІЯ ПОКАЗНИКІВ РОБОТИ ЗАМКНЕНОЇ СМО

Потік вимог не відповідає закону Пуассона.

Такого роду система призначена для обслуговування визначеного і притому постійного числа вимог. Як тільки заявку обслуговано, вона вертається у джерело вимог. Приймається, що джерело вимог має інтенсивність пропорційну числу справних об'єктів обслуговування, що містяться в ньому.

Нехай на підприємстві є N механізмів (автомобілів, верстатів). Інтенсивність потоку вимог на обслуговування від одного механізму λ'. Якщо у деякий момент часу число механізмів, що очікують ремонту або тих, що ремонтуються дорівнює n, тоді число механізмів, які працюють, дорівнює $N - n$, а інтенсивність вхідного потоку дорівнює $(N - n) \cdot \lambda' = \lambda$.

Якщо в СМО є s приладів (постів або слюсарів) і інтенсивність обслуговування одним приладом дорівнює μ', тоді ймовірності стану системи та основні розрахункові показники будуть мати значення (при $\psi' = \frac{\lambda'}{\mu'}$):

1. Ймовірність того, що всі механізми справні й у системі немає заявок на ремонт:

$$P_0 = \left[\sum_{n=0}^{s} \frac{N!\psi'^n}{n!(N-n)!} + \sum_{n=s+1}^{N} \frac{N!\psi'^n}{s^{n-s} \cdot s!(N-n)!}\right]^{-1}. \tag{6.1}$$

2. Ймовірність того, що у системі знаходиться n заявок:

$$P_n = \frac{N!\psi'^n}{(N-n)!} \cdot \frac{P_0}{n!}, \text{ коли } (0 < n \le s); \tag{6.2}$$

$$P_n = \frac{N!\psi'^n}{(N-n)!} \cdot \frac{P_0}{s^{n-s} \cdot s!}, \text{ коли } (s < n \le N). \tag{6.3}$$

3. Математичне сподівання числа механізмів, які очікують обслуговування:

$$r = \sum_{n=s+1}^{N} (n-s)P_n \,. \tag{6.4}$$

4. Математичне сподівання числа вільних обслуговуючих елементів:

$$s_{вільн} = \sum_{n=0}^{s-1} (s-n)P_n \,. \tag{6.5}$$

Розглянемо ряд прикладів застосування формул даної системи.

Приклад 7

В АТП один слюсар обслуговує N= 6 металорізальних верстатів. У середньому кожен верстат вимагає поточного ремонту або наладки слюсарем один раз на тиждень (λ' = 1). За тиждень слюсар може виконати невеликий поточний ремонт 10 верстатів (μ' = 10). У цьому завданні слюсар є одним-єдиним обслуговуючим апаратом (s = 1). Необхідно визначити середнє число верстатів, які очікують обслуговування, коефіцієнт простою верстатів і коефіцієнт простою слюсаря [3].

Розв'язання

Розглянута система може перебувати в семи різних станах: всі верстати працюють; один стоїть і обслуговується слюсарем, а п'ять працюють; два стоять, з них один обслуговується слюсарем, один чекає обслуговування, а чотири працюють і т. д. і, нарешті, всі верстати стоять, один з них обслуговується, а п'ять чекають своєї черги.

Нагадаємо, що P_1 – ймовірність того, що слюсар зайнятий обслуговуванням одного верстата, а інші верстати працюють; P_n – ймовірність того , що слюсар ремонтує один верстат , а (n - 1) верстат стоїть в очікуванні ремонту. За приведеними вище формулами зробимо обчислення для всіх семи можливих станів системи і результати цих обчислень зведемо в табл. 6.1.

Таблиця 6.1 – Результати розрахунків одно канальної СМО

№ стану системи, n	Число станків, які очікують обслуговування, (n - 1)	P_n / P_0	P_n	(n - 1)P_n
1	2	3	4	5
0	0	1,00000	0,4845	0
1	0	0,60000	0,2907	0
2	1	0,30000	0,1454	0,1454
3	2	0,12000	0,0582	0,1164
4	3	0,03600	0,0175	0,0525
5	4	0,00720	0,0035	0,0140
6	5	0,00072	0,0003	0,0015
	Разом:	2,06392	1,0000	0,3298

Для відповіді на поставлені питання можна скористатися формулами 6.2 і 6.3, поклавши в них $s = 1$. Згідно з цими формулами:

$$P_1 = \frac{6!}{(6-1)!} \cdot (0{,}1)^1 \cdot P_0 \text{ , коли } (0 < n \le s);$$

$$P_n = \frac{6!}{(6-n)!} \cdot (0{,}1)^n \cdot P_0 \text{ , коли } (s < n \le N).$$

У цій таблиці перший обчислюється третій стовпець, тобто відношення P_n / P_0 при $n = 0, 1, 2, \ldots, 6$ за наведеною вище формулою.

Наприклад:

$$\frac{P_3}{P_0} = \frac{6!}{(6-3)!} \cdot (0{,}1)^3 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot 0{,}001 = 0{,}12000.$$

Потім, підсумовуючи третій стовпець і враховуючи, що $\sum\limits_{n=0}^{6} P_n = 1{,}00$, отримуємо:

$$\sum_{n=0}^{6} \frac{P_n}{P_0} = \frac{1}{P_0} \cdot \sum_{n=0}^{6} P_n = \frac{1}{P_0},$$

звідки $$P_0 = 1 / 2{,}06392 = 0{,}4845 .$$

Помножуючи величини третього стовпця на P_0 = 0,4845, отримуємо четвертий стовпець. Величина P_0 = 0,4845 дорівнює ймовірності того, що всі верстати працюють, може бути зрозуміла, як ймовірність того, що слюсар вільний. Значить, у розглянутому випадку слюсар буде зайнятий тільки близько половини всього робочого часу. Однак це не означає, що черга верстатів, які очікують обслуговування, завжди буде відсутня.

Математичне сподівання числа верстатів, що стоять в черзі:

$$r = \sum_{n=2}^{6} (n-1) P_n .$$

Підсумовуючи п'ятий стовпець, отримаємо r = 0,3298. Отже, в середньому з 6 верстатів 0,33 верстата буде простоювати в очікуванні, поки звільниться слюсар.

Таким чином, розглянута замкнута система масового обслуговування з одним приладом (одно канальна). Далі розглянемо багатоканальну замкнуту систему. Нехай тепер не один робітник, а бригада з трьох осіб обслуговує 20 станків. У середньому на одного робітника припадає 6 і 2/3 верстата. Всі інші умови залишаємо з попереднього прикладу. Таким чином, тепер одночасно можуть обслуговуватися три верстата. Визначимо ті ж параметри, що і в попередньому завданню. Результати таких обчислень наведено в табл. 6.2.

Таблиця 6.2 – Результати розрахунків закритої багатоканальної СМО

№ стану системи, n	Число верстатів, що знаходяться в обслуговуванні	Число верстатів, які очікують обслуговування, $(n - 3)$	Число вільних робочих	P_n	$(n-3)\,P_n$
1	2	3	4	5	6
0	0	0	3	0,13626	–
1	1	0	2	0,27250	–
2	2	0	1	0,25888	–
3	3	0	0	0,15533	–
4	3	1	0	0,08802	0,08802
5	3	2	0	0,04694	0,09388
6	3	3	0	0,02347	0,07041
7	3	4	0	0,01095	0,04380
8	3	5	0	0,00475	0,02375
9	3	6	0	0,00190	0,01140
10	3	7	0	0,00070	0,00490
11	3	8	0	0,00023	0,00184
12	3	9	0	0,00007	0,00063
				Разом:	0,33863

При $n > 12$ значеннями P_n з точністю до п'ятого знака можна знехтувати. Математичне сподівання числа верстатів, які очікують обслуговування:

$$r = \sum_{n=4}^{12} (n-3)P_n = 0{,}33863$$

Математичне сподівання числа вільних робочих:

$$s_{вільн} = \sum_{n=0}^{2} (3-n)P_n = 3P_0 + 2P_1 + P_2 = 1{,}21266\,.$$

Звідси коефіцієнт простою одного робочого 1,21266 / 3 = 0,4042.

Порівняємо результати, отримані в першому і в другому прикладах:

Показник	1-й приклад (6 верстатів)	2-й приклад (20 верстатів)
Число верстатів , що обслуговуються одним слюсарем	6	6,67
Математичне сподівання числа верстатів, які очікують обслуговування	0,33	0,34
Коефіцієнт простою верстата	0,33 / 6 = 0,055	0,34 / 20 = 0,017
Коефіцієнт простою слюсаря	0,4845	0,4042

У другому випадку скоротилося питома кількість слюсарів для обслуговування верстатів (6,67 верстата проти 6 верстатів на 1 слюсаря). Можна було б очікувати, що черги при цьому зростуть. Однак цього не сталося. Більше того, отримали більш ніж утричі низький коефіцієнт простою верстатів. Це пояснюється тим, що були об'єднані три системи масового обслуговування по 6 ... 7 верстатів і по одному слюсарю до бригади з трьох робочих які обслуговували одночасно всі 20 верстатів. Якщо раніше робочий простоював би в одній ізольованій системі, то в об'єднаній системі він може обслуговувати верстат, раніше за ним не закріплений.

Ці два приклади показують, що централізація обслуговування призводить до позитивних результатів і що застосування методів теорії масового обслуговування дозволяє знаходити і обґрунтовувати більш раціональні способи організації обслуговування, що забезпечують значну економію і підвищення продуктивності праці без додаткових матеріальних витрат.

Розглянуто приклади для невеликої кількості машин що обслуговуються (6 і 20 верстатів). За такою ж методикою, як і для СТОА (розімкнена система масового обслуговування), можна було б розрахувати оптимальне число постів поточного ремонту для АТП (замкнута система), а також обґрунтувати доцільність і розумні межі об'єднання дрібних автогосподарств у великі.

Однак сучасні великі автопідприємства у своєму розпорядженні мають досить значну кількістю автомобілів, тому практичні розрахунки за формулами 6.1 – 6.5, пов'язані з необхідністю обчислення значень $N!$ і $(N - n)!$ при $N = 50$ і більше автомобілів, викликають ще більші труднощі, ніж розрахунки для розімкнутих систем масового обслуговування.

Проте ці розрахунки можна істотно спростити використовуючи перетворені формули [1, 3, 4]. Вони дозволяють визначити параметри замкнутої системи масового обслуговування при всіх практично можливих значеннях кількості автомобілів N у найбільших сучасних АТП (приклади 9, 10).

Приклад 8

Потрібно оптимізувати кількість верстатів, що закріплюються за одним ремонтним слюсарем, якщо відомо, що в середньому кожний верстат вимагає обслуговування один раз на тиждень ($\lambda' = 1$). За тиждень слюсар може виконати обслуговування (за затвердженими нормами) 10 верстатів ($\mu' = 10$).

Робочий верстат дає прибуток – 30 % від собівартості його експлуатації. Статті цієї собівартості становлять: 80 % – технічне обслуговування та ремонт (зарплата слюсаря); 20 % витрати на електроенергію та запчастини при роботі верстата.

Розв’язання

1. Визначаємо коефіцієнт завантаження системи:

$$\psi' = \frac{\lambda'}{\mu'} = \frac{1}{10} = 0{,}1.$$

2. Визначаємо показники роботи системи, якщо за слюсарем закріпити нормативну кількість верстатів $N = 10$.

Імовірність того, що всі верстати справні й слюсар простоює (формула 6.1):

$$P_0 = \left[\sum_{n=0}^{1} \frac{10! \cdot 0{,}1^n}{n!(10-n)!} + \sum_{n=2}^{10} \frac{10! \cdot 0{,}1^n}{(10-n)!} \right]^{-1} = 0{,}2146.$$

3. Визначаємо ймовірності стану системи коли потрібен ремонт $1,..2,...n...10$ верстатам (див. таблицю 6.3)

Таблиця 6.3 – Розрахунок ймовірностей станів системи

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
P_n	0,215	0,193	0,154	0,108	0,065	0,032	0,0129	0,0038	0,0008	0,00008

4. Визначаємо середню кількість верстатів, що стоять у черзі на ремонт:

$$r = \sum_{n=s+1}^{N} (n-s)P_n = \sum_{n=2}^{10} (n-1)P_n = 1{,}36.$$

5. Визначаємо коефіцієнти простою верстата та слюсаря:

$$K_{пр}^{вер} = \frac{1{,}36}{10} = 0{,}136;$$

$$K_{пр}^{сл} = P_0 = 0{,}215.$$

Останній коефіцієнт дорівнює середній кількості «вільних» слюсарів:

$$s_{вільн} = 0,215.$$

6. Визначаємо економічний ефект від роботи даної системи:

$$\begin{gathered} E_{ф} = П(N - r) - 1 \cdot r - З_{сл} \cdot s_{вільн} = \\ = 0,3(10 - 1,36) - 1,36 - 0,8 \cdot 0,215 = 1,06 \textit{ ум. од.} \end{gathered} \tag{6.6}$$

Тут прийнято: $П$ = 0,3 – прибуток від роботи верстатів; (N - r) – середня кількість працюючих верстатів; $З_{сл}$ = 0,8 – доля заробітної плати ремонтного слюсаря у собівартості експлуатації верстата.

7. Для визначення оптимальної кількості верстатів, що закріплені за одним ремонтним слюсарем, збільшуємо їх кількість до N = 11. Для даної системи отримаємо наступні розрахункові величини:

$$P_0 = 0,163;\ r = 1,79;\ K_{пр}^{вер} = 0,163;\ K_{пр}^{сл} = s_{вільн} = 0,163;$$

$$E_{ф} = 0,84 \text{ ум. од.}$$

Економічна ефективність роботи зменшилася, отже кількість верстатів, що обслуговуються одним слюсарем, потрібно зменшити.

Шляхом простого перебору знаходимо оптимальну кількість верстатів за максимальною ефективністю роботи системи. Результати розрахунків наведено у таблиці 6.4.

Таблиця 6.4 – Розрахунок оптимальної кількості верстатів

N	11	10	9	8	7	6
P_0	0,163	0,215	0,273	0,338	0,409	0,484
r	1,79	1,36	1,01	0,72	0,50	0,33
$s_{вільн}$	0,163	0,215	0,273	0,338	0,409	0,484
$E_{ф}$	0,84	1,06	1,17	1,19	1,12	0,98

Отже $N_{опт}$ = 8 верстатів.

При цьому коефіцієнт простою верстата становить: $K_{пр}^{вер} = \dfrac{0,72}{8} = 0,09$,

а коефіцієнт простою слюсаря: $K_{пр}^{сл} = 0,338$.

Питомий економічний ефект, що приходиться на один верстат:

$$E_{ф}^{пит} = \frac{1,19}{8} = 0,149 \text{ ум.од.}$$

Приклад 9

За бригадою з трьох слюсарів закріплено 24 верстата для обслуговування та ремонту. Вихідні дані аналогічні попередньому прикладу 8.

Потрібно визначити показники роботи системи та порівняти їх за попереднім прикладом 8.

Розв'язання

Для системи з великою кількістю механізмів, що обслуговуються, (ускладнюються розрахунки) вище наведені формули можна спростити [1]:

1. Імовірність того, що всі механізми справні і не потребують обслуговування:

$$P_0 = \left[\sum_{n=0}^{R} A_n \right]^{-1}, \tag{6.7}$$

де A_n – рекурентна функція, де кожний наступний член функції визначається значенням попереднього члена (A_{n-1}), а саме:

$A_0 = 1$ – початкова умова;

$A_n = A_{n-1} \cdot K$,

де $K = (N - n + 1)\dfrac{\Psi}{n}$, коли $n \le s$, та $K = (N - n + 1)\dfrac{\Psi}{s}$, коли $n > s$;

R – мінімальне значення n, при якому $A_n < 0{,}00001$.

2. Середня кількість механізмів у черзі на обслуговування:

$$r = P_0 \sum_{n=s+1}^{R} (s - n)A_n ; \tag{6.8}$$

3. Середня кількість вільних робочих місць:

$$s_{вільн} = P_0 \sum_{n=0}^{s-1} (s - n)A_n . \tag{6.9}$$

4. Визначаємо ті ж параметри, що і у попередньому прикладі 7, але за спрощеними формулами та для n = 24.

$$P_0 = 0{,}0839;\ r = 0{,}752;\ s_{вільн} = 0{,}886;\ K_{пр}^{вер} = \frac{0{,}752}{24} = 0{,}030;$$

$$K_{пр}^{сл} = \frac{0{,}886}{6} = 0{,}295;\ E_ф = 5{,}51 \text{ ум. од.};\ E_ф^{пит} = \frac{5{,}51}{24} = 0{,}229.$$

Порівнюючи отримані результати з попередніми можна відзначити поліпшення питомих техніко-економічних показників роботи об'єднаної системи (бригади) з трьох систем (по одній людині).

3. Збільшуємо кількість верстатів, що закріплені за бригадою із трьох людей. Визначаємо техніко-економічні показники роботи системи. Результати розрахунків наведено у таблиці 6.5.

Таблиця 6.5 – Визначення техніко-економічних показників роботи системи

N	25	26	27	28	29	30
P_0	0,0736	0,0641	0,0555	0,0478	0,0408	0,0345
r	0,902	1,075	1,275	1,505	1,768	2,068
$s_{вільн}$	0,809	0,734	0,661	0,591	0,524	0,461
$K_{пр}^{вер}$	0,036	0,041	0,047	0,054	0,061	0,069
$K_{пр}^{сл}$	0,269	0,245	0,220	0,197	0,175	0,154
$E_{ф}$	5,68	5,81	5,91	5,97	5,98	5,94
$E_{ф}^{пит}$	0,227	0,24	0,219	0,213	0,206	0,198

Отже, за максимальним економічним ефектом, оптимальна кількість верстатів, які можуть бути закріплені за бригадою з трьох слюсарів буде $N_{опт} = 29$, тобто ця кількість наближається до затвердженої середньої норми у 10 верстатів на одного робітника.

Приклад 10

Визначити оптимальну кількість універсальних постів ПР для технологічно сумісної групи автомобілів. Базова модель КамАЗ-5320, приведена кількість 50 од. Середньо добовий пробіг одного автомобіля 250 км, категорія умов експлуатації – друга. Дні роботи АТП – 305 діб, коефіцієнт випуску автомобілів – 0,9. Середня питома трудомісткість ПР для даної групи автомобілів 5,0 люд.-год./1000км. Доля розбирально-складальних та регулювальних робіт, які виконуються на універсальних постах, складає 35% від загальної трудомісткості ПР. Режим роботи зони ПР: 253 дні в році, одна зміна у 8 год. Інші вихідні дані прийняти згідно норм технологічного проектування. Прийняти що втрати від простою автомобіля перевищують собівартість утримання поста в три рази.

Розв’язання

1. Визначаємо потрібну кількість постів детермінованим методом, а саме за формулою:

$$X = \frac{T_{пр} \cdot \delta \cdot \kappa_{н}}{Д_{рз} \cdot T_{з} \cdot C \cdot P_{п} \cdot \kappa_{вик}}, \text{ од.} \qquad (6.10)$$

де $T_{пр}$ – річний обсяг робіт поточного ремонту групи автомобілів, люд.-год.;

δ – доля робіт поточного ремонту що припадає на розбирально-складальні та регулювальні роботи;

$\kappa_{н}$ – коефіцієнт нерівномірності завантаження постів. В даному випадку $\kappa_{н} = 1{,}2$;

$Д_{рз}$ – дні роботи зони ПР за рік, $Д_{рз}$ = 253 діб;

$Т_з$ – тривалість робочої зміни, $Т_з$ = 8 год.;

$С$ – кількість робочих змін за добу, $С$ = 1;

$Р_п$ – середня чисельність робітників, які одночасно працюють на одному посту, $Р_п$ = 1,5 осіб;

$К_{вик}$ – коефіцієнт використання робочого часу поста. Для середніх умов $К_{вик}$ = 0,8.

2. Для вирішення вказаного рівняння треба знати сумарний річний пробіг групи автомобілів. Для знов проектованого АТП він визначається за формулою [1]:

$$L_p = \frac{А_{гр} \cdot Д_р}{\dfrac{1}{l_{сд}} + \dfrac{D_к}{L_к} + \dfrac{d_{пр}}{1000}}, \text{ км}; \qquad (6.11)$$

де $А_{гр}$ – кількість автомобілів в групі, 50 од.;

$Д_р$ – дні роботи автомобіля на лінії за рік, $Д_р$ = 305 · 0,9 = 274,5 діб;

$l_{сд}$ – середньо добовий пробіг одного автомобіля, $l_{сд}$ = 250 км;

$D_к$ – дні знаходження автомобіля в капітальному ремонті. В даному випадку приймається $D_к$ = 0 діб, бо капремонт не передбачається;

$L_к$ – скоригований пробіг автомобіля до капітального ремонту.
Для КамАЗ-5320 $L_к$ = 300000 км;

$d_{пр}$ – питома тривалість простою автомобіля під час поточного ремонту. В даному випадку $d_{пр}$ = 0,43 дня/1000 км.

3.Вихідні нормативи ТО та ремонту коригуються за методикою ОНТП-91. Коригування здійснюється коефіцієнтами, які враховують:

$К_1$ – категорію умов експлуатації;

$К_2$ – модифікацію рухомого складу та організацією його роботи;

$К_3$ – природно-кліматичні роботи;

$К_4$ – кількість технологічно-сумісного рухомого складу;

$К_5$ – умови зберігання рухомого складу.

Норматив трудомісткості ПР коригують всіма вказаними коефіцієнтами, а норматив простою в ТО і ПР коефіцієнтом $К_2$.

$$t_{пр} = t_{пр.н} \cdot K_1 \cdot K_2 \cdot K_3 \cdot K_4 \cdot K_5 = 5{,}0 \cdot 1{,}1 \cdot 1{,}0 \cdot 1{,}0 \cdot 1{,}35 \cdot 1{,}0 = 7{,}425 \text{ люд.-год./1000 км;}$$

$$d_{пр} = d_{пр.н} \cdot K_2 = 0{,}43 \cdot 1{,}0 = 0{,}43 \text{ дня /1000 км.}$$

На підставі вказаних норм розраховуємо загальний пробіг та трудомісткість ПР :

$$L_p = 50 \cdot 305 \cdot 0{,}9 \,/\, (\, 1/250 + 0{,}43/1000 \,) = 3098194{,}13 \text{ км;}$$

$$T_{пр} = L_p \cdot t_{пр} \,/\, 1000 = 3098194{,}13 \cdot 7{,}425 \,/\, 1000 = 23004{,}1 \text{ люд.-год.}$$

Розрахункова кількість універсальних постів поточного ремонту:

$$X = 23004{,}1 \cdot 0{,}35 \cdot 1{,}2 \,/\, (\, 1000 \cdot 253 \cdot 8 \cdot 1 \cdot 1{,}5 \cdot 0{,}8 \,) = 3{,}98.$$

Отже, за детермінованим розрахунком потрібно 4 універсальних постів ПР.

Визначимо оптимальну кількість постів ПР стохастичним методом. Для застосування формул теорії масового обслуговування визначимо коефіцієнт завантаження системи (зони ПР АТП) [1]:

$$\psi' = \lambda' / \mu' = L_p \cdot t_{пр} \cdot \delta \,/\, (1000 \cdot A_{гр} \cdot Д_{рз} \cdot C \cdot T_з \cdot P_п \cdot к_{вик}) = 0{,}0663; \qquad (6.12)$$

де λ' - інтенсивність заявок, які надходять від одного автомобіля, од./добу;

μ' - інтенсивність обслуговування одним постом, од./добу.

Попередньо приймаємо кількість постів ПР: $X = 4$ и розраховуємо середню кількість вільних (не завантажених) постів та середню довжину черги (автомобілів, що очікують обслуговування).

Для розрахункових величин знаходимо середні питомі втрати від утримування не завантажених постів та автомобілів що простоюють в черзі:

$$C = C_1 \cdot r_{оч} + C_2 \cdot n_{віл} \text{, ум.од.;} \qquad (6.13)$$

де $r_{оч}$ – середня кількість автомобілів в черзі;

$n_{віл}$ – середня кількість вільних постів.

Знаходимо $r_{оч}$ та $n_{віл}$ за формулами 6.7, 6.8, 6.9.

Приймаємо що втрати C_1 в три рази більше C_2. Тобто, якщо C_2=1,0 тоді C_1=3.

Отже, для $X = 4$ питомі втрати дорівнюють:

$$C = 3 \cdot 1{,}17 + 1 \cdot 0{,}96 = 4{,}46 \text{ ум. од.}$$

Збільшуємо кількість робочих постів (щоб зменшити чергу) та розраховуємо втрати. Порівнюємо питомі втрати і приймаємо рішення про подальше збільшення (або зменшення) кількості постів. Оптимальна буде кількість де втрати будуть мінімальними.

Табл. 6.6 Порівняльна таблиця

Умов. позначка, од. виміру	Кількість робочих постів *X*:			
	4	5	6	7
$n_{віл}$, постів	0,96	1,91	2,90	3,89
$r_{оч}$, авто	1,17	0,318	0,09	0,025
C	4,46	2,86	3,17	3,97

Згідно здобутих результатів, оптимальною кількістю постів, для заданих умов, є: $X_{опт} = 5$.

ВИСНОВКИ

Розглянуті умовні приклади свідчать про те, що теорія масового обслуговування дає змогу успішно розв’язувати низку практичних задач, пов’язаних із організацією та плануванням ТО і ремонту автотранспортних засобів.

При накладанні різних вимог, обмежень до системи масового обслуговування використовуються різні формули обчислень. Тому треба вивчати методи складання цих формул, добре знати розділ математики – теорію черг.

ПЕРЕЛІК ВИКОРИСТАНИХ ЛІТЕРАТУРНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Технологічне проектування автотранспортних підприємств: Навч. посіб. / За ред. Проф. С.І. Андрусенка. – К.: Каравела, 2009 – 368 с.
2. Кузнецов Е. С. Техническая эксплуатация автомобилей: учебник для вузов / Е. С. Кузнецов и др. – М.: Транспорт, 1991. – 413 с.
3. Техническое обслуживание, ремонт и хранение автотранспортных средств: Учебник: В 3 кн. – Кн. 2. Организация, планирование и управление / В. Е. Канарчук, А.А. Лудченко, И.П. Курников, И.А. Луйк. – К.: Выща шк., 1991. – 406 с.
4. Основи технічного обслуговування і ремонту автомобілів: У 3 кн. – Кн. 2: Організація, планування і управління: Підручник / В.Є. Канарчук, О.А. Лудченко, А.Д. Чигринець. – К. Вища школа, 1994. – 383 с.
5. Применение экономико-математических методов и моделей при проектировании технологического процесса обслуживания и ремонта автомобилей: Учебное пособие / И.А. Луйк – К. : УМК ВО, 1989. 80 с.
6. Кудинов В. И. Методические указания к практическим занятиям по научно-исследовательской работе / В. И. Кудинов. – Донецк: ДПИ, 1989. – 43 с.

ДОДАТОК А

Таблиця А.1 – Зведена таблиця показників роботи відкритих СМО

Показники СМО, що має: а) n апаратів; б) $n = 1$	Тип СМО		
	З втратами $m = 0$	З обмеженням довжини черги m, од.	Без обмеження довжини черги $m \to \infty$
1	2	3	4
1. а) ймовірність простою СМО (усі апарати вільні), $n > 1$	$P_0 = \left[\sum_{k=0}^{n} \frac{\rho^k}{k!}\right]^{-1}$	$P_0 = \left[\sum_{k=0}^{n} \frac{\rho^k}{k!} + \frac{\rho^n}{n!} \sum_{s=1}^{m} \left(\frac{\rho}{n}\right)^s\right]^{-1}$	$P_0 = \left[\sum_{k=0}^{n} \frac{\rho^k}{k!} + \frac{\rho^{n+1}}{n!(n-\rho)}\right]^{-1}$
б) ймовірність простою СМО (усі апарати вільні), $n = 1$	$P_0 = \frac{\mu}{\mu + \lambda}$	$P_0 = \frac{1-\rho}{1+\rho^{m+2}}$	$P_0 = 1 - \rho$
2. а) ймовірність утворення черги (усі апарати зайняті), $n > 1$	$P_{у.ч} = P_{відм} = P_0 \frac{\rho^n}{n!}$	$P_{у.ч} = P_0 \frac{\rho^n}{n!}$	$P_{у.ч} = P_0 \frac{\rho^n}{n!}$
б) ймовірність утворення черги (усі апарати зайняті), $n = 1$	$P_{у.ч} = P_{відм} = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}$	$P_{у.ч} = P_0 \cdot \rho$	$P_{у.ч} = P_0 \rho$
3. а) ймовірність простою у черзі, $n > 1$	$P_{пр} = 0$	$P_{пр} = P_{у.ч} \cdot \frac{\rho}{n}$	$P_{пр} = P_0 \frac{\rho^n}{(n-1)!(n-\rho)}$
б) ймовірність простою у черзі, $n = 1$	$P_{пр} = 0$	$P_{пр} = P_0 \cdot \rho^2$	$P_{пр} = \rho$
4. а) ймовірність відмови в обслуговуванні, $n > 1$	$P_{відм} = P_{у.ч} = P_0 \frac{\rho^n}{n!}$	$P_{відм} = P_{у.ч} \left(\frac{\rho}{n}\right)^m$	$P_{відм} = 0$
б) ймовірність відмови у обслуговуванні, $n = 1$	$P_{відм} = P_{у.ч} = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}$	$P_{відм} = P_0 \cdot \rho^{m+1} = P_{у.ч} \cdot \rho^m$	$P_{відм} = 0$
5. а) відносна пропускна спроможність, $n > 1$	$P_{п.з} = 1 - P_{відм}$	$P_{п.з} = 1 - P_{відм}$	$P_{п.з} = 1$
б) відносна пропускна спроможність, $n = 1$	$P_{п.з} = \frac{\mu}{\lambda + \mu}$	$P_{п.з} = 1 - P_{відм}$	$P_{п.з} = 1$

Продовження таблиці А.1

1	2	3	4
6. а) середня кількість зайнятих апаратів, $n > 1$	$n_{зайн} = \rho \cdot P_{п.з}$	$n_{зайн} = n - n_{вільн} = P_0 \left[\sum_{k=1}^{n} \frac{\rho^k}{(k-1)!} + \frac{\rho^n}{(n-1)!} \sum_{s=1}^{m} \left(\frac{\rho}{n} \right)^{s'} \right]$	$n_{зайн} = \rho$
б) середня кількість зайнятих апаратів, $n = 1$	$n_{зайн} = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}$	$n_{зайн} = 1 - P_0$	$n_{зайн} = \rho$
7. а) середня кількість вільних апаратів, $n > 1$	$n_{вільн} = n - n_{зайн}$	$n_{вільн} = n - n_{зайн} = P_0 \sum_{k=0}^{n-1} (n-k) \frac{\rho^k}{n!}$	$n_{вільн} = n - \rho$
б) середня кількість вільних апаратів, $n = 1$	$n_{вільн} = 1 - n_{зайн}$	$n_{вільн} = P_0$	$n_{вільн} = 1 - \rho$
8. а) середня кількість заявок у черзі, $n > 1$	$r = 0$	$r = P_{у.ч} \sum_{s=1}^{m} s \left(\frac{\rho}{n} \right)^{s'}$	$r = \frac{P_{пр} \cdot \rho}{n - \rho}$
б) середня кількість заявок у черзі, $n = 1$	$r = 0$	$r = P_{у.ч} \sum_{s=1}^{m} s \rho^{s'}$	$r = \frac{P_{пр} \cdot \rho}{1 - \rho} = \frac{\rho^2}{n_{вільн}}$
9. а)середній час очікування у черзі, $n > 1$	0	$\overline{t}_{оч} = \frac{r}{\lambda P_{відм}}$	$\overline{t}_{оч} = \frac{r}{\lambda} = \frac{P_{пр}}{\mu(n - \rho)}$
б) середній час очікування у черзі, $n = 1$	0	$\overline{t}_{оч} = \frac{r}{\lambda P_{відм}}$	$\overline{t}_{оч} = \frac{r}{\lambda}$
10. Середній час знаходження у СМО	$\overline{t}_c = \overline{t}_{обс}$	$\overline{t}_c = \overline{t}_{обс} + \overline{t}_{оч}$	$\overline{t}_c = \overline{t}_{обс} + \overline{t}_{оч}$
11. Середня кількість заявок у СМО	$n_c = n_{зайн}$	$n_c = n_{зайн} + r$	$n_c = n_{зайн} + r$