МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ
АВТОМОБИЛЬНО-ДОРОЖНЫЙ ИНСТИТУТ
ГОСУДАРСТВЕННОГО ВЫСШЕГО УЧЕБНОГО ЗАВЕДЕНИЯ
ДОНЕЦЬКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Типовой расчет по элементарной математике
для студентов первого курса
автодорожного института ДонНТУ

Горловка 2007

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ
АВТОМОБИЛЬНО-ДОРОЖНЫЙ ИНСТИТУТ
ГОСУДАРСТВЕННОГО ВЫСШЕГО УЧЕБНОГО ЗАВЕДЕНИЯ
ДОНЕЦЬКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Типовой расчет по элементарной математике
для студентов первого курса
автодорожного института ДонНТУ

Утверждено на заседании
учебно-методической комссии
автодорожного института
ДонНТУ
протокол №2 от 02.04.2007г.

Утверждено на заседании
кафедры «Высшая математика»
протокол № 10 от 24.03.2007г.

Горловка 2007

УДК 510(075)

Типовой расчет по элементарной математике для студентов первого курса автодорожного института ДонНТУ / Сост. Л.П. Вовк, В.Н. Дугельный – Горловка: АДИ ДонНТУ, 2007. – 46с.

Учебное пособие предназначено для самостоятельной подготовки студентов первого курса по всем темам элементарной математики. Представлены систематизированные по типам и уровням сложности задания, позволяющие самостоятельно повторить и проработать весь школьный курс математики.

Составитель	Л.П.Вовк, проф., д.т.н. В.Н. Дугельный, доц., к.т.н.
Компьютерный набор	Л.П.Вовк, проф., д.т.н.
Рецензент	В.Г. Хребет, доц., к.ф.-м.н.
Ответственный за выпуск	Л.П.Вовк, проф., д.т.н.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение

Предлагаемый сборник заданий по элементарной математике адресован студентам первого курса высших технических учебных заведений. Материал сборника соответствует программам вступительных экзаменов по математике и охватывает все разделы школьного курса за исключением раздела «Интеграл», входящего в программу высшей математики в вузах.

Стоит отметить, что за последние годы общий уровень математической подготовки выпускников школ резко снизился. Большинство современных старшеклассников плохо владеет простейшей техникой тождественных преобразований, не умеет строить графики элементарных функций, не обладает пространственным воображением и не имеет навыков логического мышления. По сути дела, сегодня элементарная математика существует на двух уровнях, в двух ипостасях: школьная математика, усвоенная выпускниками школ как набор смутных понятий и нетвердых навыков, и трудно постигаемая математика олимпиад и вступительных экзаменов, владение которой необходимо для успешного освоения вузовской программы. Разрыв между этими уровнями огромный, и, к сожалению, с каждым годом он увеличивается. Многие выпускники и их родители это прекрасно осознают, поэтому вполне объяснима популярность подготовительных курсов при вузах. Фактически, должную довузовскую математическую подготовку в государственной системе образования сейчас дают только специализированные математические школы и отдельно взятые учителя-энтузиасты.

В последние годы появилось много интересных сборников задач по элементарной математике, написанных преподавателями общеобразовательной и высшей школы.

Как правило, это или пособия для подготовительных отделений вузов, или сборники задач вступительных экзаменов, уровень сложности которых резко отличается от соответствующего уровня задач школьных учебников. К сожалению, они не могут восполнить пробелы школьного образования, поскольку в большей степени анонсируют требуемый предвузовский уровень математических знаний, чем служат пособиями для самоподготовки. Из известных нам сборников задач для поступающих в вузы, как старых, так и современных, особо отметим пособия [26] и [35], которые отличаются удивительной методической продуманностью подобранных задач.

Настоящий сборник основан на материалах подготовительных курсов, проводимых в автомобильно-дорожном институте Донецкого национального технического университета. В него вошли также некоторые задачи олимпиад и вступительных экзаменов в Донецкий национальный университет. Конечно, за рамками книги остался дидактический материал и простые задачи, с которых начинается изучение каждой темы на подготовительных курсах. Основное содержание сборника составляют задачи для самостоятельного решения, рассортированные по темам и, в основном, систематизированные по методам решения и уровню сложности. Разобранные в конце пособия задачи демонстрируют приемы решения наиболее типичных задач, подчас незнакомые современным старшеклассникам. Мы сочли необходимым включить в начало сборника раздел «Справочный материал» — перечень основных формул по рассматриваемым темам, а также привести ряд определений и понятий из элементарной математики, на которых не акцентируется внимание в школе.

Для успешного освоения курса высшей математики студенту технического вуза следует иметь твердые знания и устойчивые навыки в решении задач по всем темам школьного курса математики. На лекциях и практических занятиях по высшей математике преподаватель не должен тратить время на обучение приемам решения школьных задач или на напоминание формул элементарной математики: их знание студентами предполагается обязательным.

Кратко изложим требования, которые предъявляются к математическим знаниям студентов-первокурсников, а также прокомментируем содержание настоящего сборника заданий.

Выпускнику средней школы необходимо твердо владеть формулами сокращенного умножения, легко делать тождественные преобразования и оперировать с рациональными степенями. Особо обращаем внимание на действия с иррациональными выражениями, умение избавляться от иррациональности в знаменателе и выделять полные квадраты в иррациональных выражениях. Навыки в решении рациональных уравнений заключаются не только в умении решать квадратные уравнения, но и в умении применять теорему Виета в нестандартных ситуациях, раскладывать многочлены на множители, вводить новые переменные для понижения степени уравнения. При решении рациональных неравенств требуется свободное владение методом интервалов, который является основой решения неравенств в других темах курса.

Решение различных уравнений и неравенств с модулем предполагает не только знание определения модуля, но и навыки в использовании свойств модуля при решении сложных задач.

В теме «Иррациональные уравнения» ключевую роль играет понятие равносильности уравнений на данном множестве. Азами школьного образования в этой теме

являются определение области допустимых значений, проверка корней после возведения в четную степень или введение дополнительных ограничений на обе части уравнения. Часто встречающийся пробел в математической подготовке старшеклассников — неумение решать иррациональные неравенства.

Решение показательных и логарифмических уравнений и неравенств основано на неформальном знании свойств показательной и логарифмической функций. Здесь также существенную роль играет искусство равносильных преобразований, а при решении сложных логарифмически неравенств — умение переходить к системе рациональных неравенств.

Тригонометрия — наиболее насыщенный формулами раздел школьного курса математики. Простого применения этих формул с использованием справочника явно недостаточно. Их нужно помнить, чтобы уверенно выбирать нужный путь решения. Трудность этой темы для абитуриентов заключается еще и в том, что она изучается в 9 и 10-х классах, и к концу 11-го класса многочисленные формулы тригонометрии, не закрепленные жестко усилиями учителей, учащимися просто забываются. Для освежения навыков работы с формулами тригонометрии в сборнике приведено много разнообразных тригонометрических уравнений, требующих для своего решения проведения различного рода тригонометрических преобразований. Практически не изучаемые в школе из-за недостатка времени тригонометрические неравенства также представлены в сборнике. Особое значение уровень освоения тригонометрии будет играть при прохождении таких тем высшей математики, как «Теория пределов и непрерывность функции», «Интегрирование», «Ряды» и др.

Незрелость логического аппарата у большинства старшеклассников обусловлена непродуманной реформой школьного курса математики, начавшейся еще в 1980-е годы. Сокращение количества часов, выделяемых в средних классах для решения задач на составление уравнений, поспешный переход от арифметики к алгебре в младших классах отучил школьников проводить логические рассуждения. На вступительных экзаменах это приводит к полной беспомощности абитуриентов перед заданиями с нестандартными условиями.

Для людей, претендующих на получение высшего технического образования, крайне необходимо умение анализировать весь комплекс условий задачи, вычленять основные соотношения между заданными и искомыми величинами и записывать их в виде уравнений или неравенств.

Не секрет, что преподавание геометрии во многих школах отброшено на уровень преподавания этого предмета в «доантичные времена», когда не существовало аксиоматики Евклида, культуры геометрических доказательств и построений. Именно поэтому большинство вузов уменьшило количество задач по геометрии, предлагаемых на вступительных экзаменах. В сборнике отсутствуют сложные задания по геометрии, так как их выполнение потребовало бы от студентов неимоверных методических усилий и большой работы с графическим материалом. Мы ограничились лишь тем, что привели основные сведения из элементарной геометрии и векторной алгебры, которые могут быть использованы при освоении курса высшей математики и рекомендуем проверять их знание во время приема типового расчета.

1. Справочный материал

Приводимые теоретические сведения по курсу элементарной математики не претендуют на полноту и преследуют цель облегчить выполнение заданий типового расчета и повторить основные формулы и теоремы перед освоением курса высшей математики.

1.1. Основные формулы и теоремы алгебры

Уравнением с одной переменной называется равенство, содержащее эту переменную. Чаще всего уравнение записывается в виде

$$f(x) = g(x).$$

В зависимости от характера функций $f(x)$ и $g(x)$ в элементарной математике рассматривают уравнение рациональное, иррациональное, тригонометрическое, показательное или логарифмическое. Если в уравнение входят различные типы функций, например тригонометрические и показательные, то его называют смешанным. Напомним некоторые общие понятия, связанные с решением всех типов уравнений.

Множество всех значений переменной x, при которых имеют смысл (определены) левая и правая части уравнения $f(x) = g(x)$, называется *областью допустимых значений* (ОДЗ) или *областью определения* уравнения и обозначается через D. Таким образом, областью допустимых значений уравнения $f(x) = g(x)$ называется множество $D(f) \cap D(g)$, где $D(f)$ и $D(g)$ – области допустимых значений функций $f(x)$ и $g(x)$.

Определенное значение переменной называется *корнем* или *решением* уравнения, если при подстановке его в уравнение получается тождество.

Решить уравнение – это значит найти все его корни или доказать, что их нет.

Если из истинности высказывания **А** следует истинность высказывания **В**, то употребляют знак логического следования

$\Rightarrow$, т.е. **A** $\Rightarrow$ **B** (из **A** следует **B**). Если **A** $\Rightarrow$ **B** и **B** $\Rightarrow$ **A**, то такие высказывания называются *равносильными* или *эквивалентными*. Записывается это так: **A** $\Leftrightarrow$ **B**.

Два уравнения называются *эквивалентными* или *равносильными*, если множества их решений совпадают, т.е. любое решение первого уравнения является решением второго. И обратно, любое решение второго уравнения является решением первого. Другими словами равносильными будут уравнения, которые имеют одни и те же корни. Отметим, что равносильными будут и уравнения, каждое из которых не имеет корней.

Например, равносильны уравнения $2^{x-3} = 8$ и $\sqrt{x-2} = 2$, т.к. каждое из них имеет единственный корень $x = 6$.

Преобразования, при которых уравнение переходит в равносильное ему уравнение, следующие: 1) перемена местами левой и правой частей уравнения; 2) перенос какого-либо слагаемого из одной части уравнения в другую с изменением его знака на противоположный; 3) умножение или деление обеих частей уравнения на отличное от нуля число; 4) добавление или вычитание из обеих частей уравнения одного и того же числа; 5) добавление или вычитание из обеих частей уравнения одной и той же функции при условии, что области определения полученного и исходного уравнения совпадают.

Если к обеим частям уравнения $3x^2 + x = 0$ добавить функцию $\varphi(x) = \dfrac{1}{x}$, то получим уравнение $3x^2 + x + \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{x}$, которое неравносильно исходному, т.к. добавленное выражение имеет смысл не при всех x из ОДЗ уравнения, а только при значениях $x \neq 0$. Данное преобразование сузило ОДЗ уравнения, что может привести к потере корней. В данном случае значение $x = 0$ является корнем исходного уравнения, но не является корнем преобразованного уравнения.

Если каждый корень уравнения $f(x) = g(x)$ является в то же время корнем уравнения $f_1(x) = g_1(x)$, полученного с

помощью некоторых преобразований из уравнения $f(x) = g(x)$, то уравнение $f_1(x) = g_1(x)$ называют *следствием уравнения* $f(x) = g(x)$. Так, уравнение $x^2 + 3x = 0$ является следствием уравнения $x + 3 = 0$, а уравнение $x + 3 = 0$ не является следствием уравнения $x^2 + 3x = 0$.

Если каждое из двух уравнений является следствием другого из них, то такие уравнения являются равносильными.

Несколько уравнений с одной переменной образуют *совокупность уравнений*, если ставится задача об отыскании всех таких значений переменной, каждое из которых удовлетворяет, по крайней мере, одному из заданных уравнений. Уравнения, образующие совокупность, записывают либо в столбик с помощью квадратной скобки, например $\left[\begin{array}{l} 6x = x^2 + 5 \\ 2x + 3 = 5x^2 \end{array}\right.$, либо в строку с помощью знака «;», например $6x = x^2 + 5$; $2x + 3 = 5x^2$.

Решением совокупности уравнений является объединение множеств корней уравнений, образующих данную совокупность. Например, уравнение $(x^2 + 4x - 12)(2x^2 + x - 3) = 0$ равносильно совокупности уравнений:

$$(x^2 + 4x - 12)(2x^2 + x - 3) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 + 4x - 12 = 0 \\ 2x^2 + x - 3 = 0 \end{array}\right.$$

Решая каждое из уравнений совокупности, получаем корни исходного уравнения: $x_1 = -6$; $x_2 = 2$; $x_3 = 1$; $x_4 = -\dfrac{3}{2}$.

При решении уравнений приходится также применять «опасные» преобразования, которые могут привести к появлению посторонних корней или даже к потере корней. Причиной этого могут быть преобразования, выполняемые с помощью формул, изменяющих ОДЗ уравнений. Чаще всего это происходит при возведении в квадрат (или в любую четную степень) обеих частей уравнения, умножение (или деление) обеих частей уравнения на алгебраическое выражение, содержащее переменную, логарифмирование обеих частей уравнения и т.д.

Во всех случаях, когда преобразование, выполняемое в процессе решения уравнения, приводит к уравнению, являющемуся следствием заданного уравнения, но не установлена равносильность полученного и заданного уравнений, необходима проверка найденных корней. Решение в этом случае не может считаться законченным, если не сделана проверка. Зачастую, однако, оказывается, что проверка корней оказывается сложнее решения уравнения. Например, это происходит, если найденные корни иррациональны. В этом случае необходимо провести доказательство равносильности выполняемых преобразований уравнения на всех этапах решения, т.е. определить «опасные» выкладки и обосновать их. Так, при умножении обеих частей уравнения на выражение, содержащее неизвестную, нужно исследовать те значения переменной, при которых это выражение обращается в нуль, а при возведении в четную степень обеих частей уравнения, необходимо потребовать перед этим преобразованием неотрицательности левой и правой части уравнения.

Таким образом, решение уравнения обычно осуществляется в следующем порядке: 1) отыскивается ОДЗ уравнения; 2) исходное уравнение путем различного рода преобразований сводится к уравнению (чаще всего квадратному), корни которого могут быть найдены по известным формулам или по известному алгоритму. Находятся корни преобразованного уравнения; 3) проверяется принадлежность найденных корней к ОДЗ исходного уравнения; 4) выполняется проверка тех из найденных корней, которые принадлежат ОДЗ.

Целое алгебраическое уравнение принято записывать в виде:

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0,$$

где $a_0, a_1, \ldots a_n$ – заданные числа, x – неизвестное (переменная), n – степень алгебраического уравнения (наибольшая степень

уравнения). Выражение $P(x)$ называют *многочленом степени n*, если коэффициент при старшей степени неизвестной не равен нулю $(a_0 \neq 0)$. Если $a_0 = 1$, то целое алгебраическое уравнение называется *приведенным*.

Уравнения, содержащие многочлены и алгебраические дроби (дроби вида $\frac{P(x)}{Q(x)}$, где $P(x)$ и $Q(x)$ – многочлены), называются *дробными алгебраическими уравнениями* или *дробно-рациональными уравнениями*.

Уравнение вида $ax^2 + bx + c = 0, (a \neq 0)$ называется *квадратным уравнением* с одной переменной. Его корни вычисляются по формулам

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Выражение $D = b^2 - 4ac$ называют дискриминантом квадратного уравнения. Таким образом, квадратное уравнение имеет действительные корни только в случае $D \geq 0$.

Если $b = 2k$, $k \in Z$, т.е. b – четное число, то квадратное уравнение можно записать в виде $x^2 + 2kx + c = 0$. Тогда формулу для корней квадратного уравнения можно упростить и использовать в виде

$$x_{1,2} = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 - ac}}{a}.$$

Наконец, если к тому же $a = 1$, то формулы для определения корней уравнения $x^2 + 2kx + c = 0$ еще более упрощаются и принимают вид

$$x_{1,2} = -k \pm \sqrt{k^2 - c}.$$

При решении квадратных уравнений возможно использование *теоремы Виета*: $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$, $x_1x_2 = \frac{c}{a}$.

Путем разложения на множители квадратное уравнение можно записать в виде:

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2),$$

где x_1 и x_2 – корни уравнения $ax^2+bx+c=0$.

При решении целых алгебраических уравнений преобразования, выполняемые в процессе решения, приводят только к уравнениям, равносильным заданному. Поэтому найденные корни формально можно не проверять. При решении же дробно-рациональных уравнений вида $\frac{P(x)}{Q(x)}=0$ обе части уравнения умножают на одно и то же выражение $Q(x)$, что может привести к появлению посторонних корней. Поэтому при решении дробно-рациональных уравнений необходима либо проверка, либо, если она затруднительна, отслеживание опасных выкладок и исключение тех значений неизвестной, при которых $Q(x)=0$.

<u>Теорема Безу</u>. Остаток от деления полинома $P_n(x)$ на двучлен $(x-a)$ равен значению этого полинома при $x=a$.

<u>Следствие</u>. Если коэффициенты приведенного целого алгебраического уравнения

$$x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=0$$

являются целыми числами, то целые корни следует искать среди делителей свободного члена.

Формулы сокращенного умножения

$$(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$$
$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=a^3+b^3+3ab(a+b)$$
$$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3=a^3-b^3-3ab(a-b)$$
$$(a\pm b)^4=a^4\pm 4a^3b+6a^2b^2\pm 4ab^3+b^4$$
$$(a\pm b)^5=a^5\pm 5a^4b+10a^3b^2\pm 10a^2b^3+5ab^4\pm b^5$$
$$a^2-b^2=(a-b)(a+b)$$
$$a^3\pm b^3=(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2)$$

$$a^4-b^4=(a^2+b^2)(a^2-b^2)=(a^2+b^2)(a-b)(a+b)$$
$$a^5-b^5=(a-b)(a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4)$$
$$a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1}),\, n\in Z.$$

Абсолютная величина действительного числа и функции

$$|x|=\begin{cases}x, & x\ge 0\\ -x, & x<0\end{cases}=\max(-x,x)\,;\ |f(x)|=\begin{cases}f(x), & f(x)\ge 0\\ -f(x), & f(x)<0\end{cases}$$

Некоторые свойства модулей

1. $|f(x)|=|-f(x)|$

2. $|f(x)\cdot g(x)|=|f(x)|\cdot|g(x)|$.

В частности, $|f^2(x)|=|f(x)|^2=f^2(x)$.

3. $\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right|=\frac{|f(x)|}{|g(x)|}$

4. $|f(x)|=a \;\Leftrightarrow\; \left[\begin{array}{l}f(x)=a\\ f(x)=-a\end{array}\right.$, если $a\ge 0$. При $a\le 0$ решений нет.

5. $|f(x)|=|g(x)| \;\Leftrightarrow\; \left[\begin{array}{l}f(x)=g(x)\\ f(x)=-g(x)\end{array}\right.$

6. $|f(x)|=g(x) \;\Leftrightarrow\; \begin{cases}\left[\begin{array}{l}f(x)=g(x)\\ f(x)=-g(x)\end{array}\right.\\ g(x)\ge 0\end{cases}$

Действия с радикалами

Теорема. Если обе части иррационального уравнения возвести в одну и ту же <u>нечетную</u> степень и освободиться от радикалов, то получится уравнение, равносильное исходному. Если обе части иррационального уравнения неотрицательны для всех значений переменного из ОДЗ, то при возведении обеих частей уравнения в четную степень, получится уравнение, равносильное исходному на множестве ОДЗ.

Теорема. Если $f(x)\ge 0$ и $g(x)\ge 0$, то неравенства $f(x)\le g(x)$ и $f^2(x)\le g^2(x)$ равносильны.

1. $\sqrt[2n]{f^{2n}(x)}=|f(x)|$. В частности, $\sqrt{f^2(x)}=|f(x)|$.
2. $\sqrt[2n+1]{f^{2n+1}(x)}=f(x)$.
3. $\sqrt{A\cdot B}=\begin{cases}\sqrt{A}\cdot\sqrt{B}, & A\ge 0, B\ge 0\\ \sqrt{-A}\cdot\sqrt{-B}, & A<0, B<0\end{cases}=\sqrt{|A|}\cdot\sqrt{|B|}$.
4. $\sqrt[2n]{f^{2n}(x)\cdot g(x)}=|f(x)|\cdot\sqrt[2n]{g(x)}$
5. $f(x)\cdot\sqrt[2n]{g(x)}=\begin{cases}\sqrt[2n]{f^{2n}(x)\cdot g(x)}, & f(x)\ge 0\\ -\sqrt[2n]{f^{2n}(x)\cdot g(x)}, & f(x)<0\end{cases}$.

Основные формулы тригонометрии

$$\sin^2 x+\cos^2 x=1$$
$$\sin^2 x=1-\cos^2 x=(1-\cos x)\cdot(1+\cos x)$$
$$\cos^2 x=1-\sin^2 x=(1-\sin x)\cdot(1+\sin x)$$
$$tg^2x+1=\frac{1}{\cos^2 x},\ ctg^2x+1=\frac{1}{\sin^2 x}$$
$$a\sin x+b\cos x=\sqrt{a^2+b^2}\sin\left(x+arctg\frac{b}{a}\right), a>0$$
$$\sin x\pm\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x\pm\frac{\pi}{4}\right)$$
$$\sin x+\sin y=2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$$
$$\sin x-\sin y=2\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2}$$

$$\cos x+\cos y=2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$$
$$\cos x-\cos y=-2\sin\frac{x-y}{2}\sin\frac{x+y}{2}$$
$$\sin(x\pm y)=\sin x\cdot\cos y\pm\cos x\cdot\sin y$$
$$\cos(x\pm y)=\cos x\cdot\cos y\mp\sin x\cdot\sin y$$
$$\cos x\cdot\cos y=\frac{1}{2}\left(\cos(x+y)+\cos(x-y)\right)$$
$$\sin x\cdot\sin y=\frac{1}{2}\left(\cos(x-y)-\cos(x+y)\right)$$
$$\sin x\cdot\cos y=\frac{1}{2}\left(\sin(x-y)+\sin(x+y)\right)$$
$$\cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2},\quad \sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}$$
$$1+\cos 2x=2\cos^2 x,\quad 1-\cos 2x=2\sin^2 x$$
$$\sin 2x=2\sin x\cdot\cos x$$
$$\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x=2\cos^2 x-1=1-2\sin^2 x$$
$$\cos 3x=4\cos^3 x-3\cos x,\quad \sin 3x=3\sin x-4\sin^3 x$$
$$\sin 2x=\frac{2tgx}{1+tg^2x};\quad \cos 2x=\frac{1-tg^2x}{1+tg^2x},\ x\ne\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z$$
$$\sin^2 x=\frac{tg^2x}{1+tg^2x};\quad \cos^2 x=\frac{1}{1+tg^2x},\ x\ne\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z$$
$$tg2x=\frac{2tgx}{1-tg^2x};\quad x\ne\frac{\pi}{2}+\pi n,\ 2x\ne\frac{\pi}{2}+\pi n\ \ n\in Z$$
$$tg(x\pm y)=\frac{tgx\pm tgy}{1\mp tgx\cdot tgy};\quad x,y,x\pm y\ne\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z$$
$$\sin x=a,\ |a|\le 1\quad\Leftrightarrow\quad x=(-1)^n\arcsin a+\pi n,\ n\in Z$$
$$\cos x=a,\ |a|\le 1\quad\Leftrightarrow\quad x=\pm\arccos a+2\pi n,\ n\in Z$$
$$tgx=a,\ a\in R\quad\Leftrightarrow\quad x=arctga+\pi n,\ n\in Z$$

$ctgx = a,\ a \in R \qquad \Leftrightarrow \qquad x = arcctga + \pi n,\ n \in Z$

Свойства показательных функций

1. $a^x > 0\ \ \forall x \in R$.
2. $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$.
3. $\dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$.
4. $a^{-x} = \dfrac{1}{a^x}$.
5. $\left(a^x\right)^y = a^{x \cdot y}$.
6. $(a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x$.
7. $\sqrt[x]{a^y} = a^{\frac{y}{x}}$, если $x = 2,3.4,...$
8. $a^0 = 1$, $a^1 = a$, $1^x = 1$.
9. Если $a^x = a^y$ для $a > 0, a \neq 1$, то $x = y$.

Свойства логарифмов

1. $a^{\log_a x} = x$, $\quad x > 0$, $a > 0$, $a \neq 1$.
2. $\log_a (x \cdot y) = \log_a |x| + \log_a |y|$.
3. $\log_a \left(\dfrac{x}{y}\right) = \log_a |x| - \log_a |y|$.
4. $\log_a \left(x^p\right) = p \cdot \log_a |x|$.
5. $\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}$.
6. $\log_{a^k} x = \dfrac{1}{k} \log_{|a|} x$.
7. $\log_{a^k} x^p = \dfrac{p}{k} \log_{|a|} |x|$.

8. $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$.
9. $a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$.
10. $\log_a x = \log_a y \qquad \Leftrightarrow \qquad x = y$, $x, y, a > 0$, $a \neq 1$.

1.2. Формулы и правила дифференцирования

1. $\left(x^p\right)' = p \cdot x^{p-1}$

В частности, $\left(x^2\right)' = 2x$, $\left(\sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, $\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}$.

2. $\left(a^x\right)' = a^x \cdot \ln a$, $\quad \left(e^x\right)' = e^x$.
3. $\left(\log_a x\right)' = \dfrac{1}{x \ln a}$, $\left(\ln x\right)' = \dfrac{1}{x}$.
4. $(\sin x)' = \cos x$.
5. $(\cos x)' = -\sin x$.
6. $(tgx)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$.
7. $(ctgx)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$.
8. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$.
9. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$.
10. $(arctgx)' = \dfrac{1}{1 + x^2}$.
11. $(arcctgx)' = -\dfrac{1}{1 + x^2}$.
12. $(c \cdot u(x))' = c \cdot u'(x)$, $\qquad c = const$.

13. $(u(x) \pm v(x)) = u^{/}(x) \pm v^{/}(x)$.
14. $(u(x) \cdot v(x))^{/} = u^{/}(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v^{/}(x)$.
15. $\left(\dfrac{u(x)}{v(x)}\right)^{/} = \dfrac{u^{/}(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v^{/}(x)}{v^2(x)}, \qquad v(x) \neq 0$.
16. $(u(v(x)))^{/} = u_v^{/}(v(x)) \cdot v^{/}(x)$.

Уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ имеет вид

$$y = y_0 + f^{/}(x_0) \cdot (x - x_0),$$

где $(x_0; y_0)$ – точка касания, $y_0 = f(x_0)$ – значение функции в точке касания, $f^{/}(x_0)$ – угловой коэффициент касательной (тангенс угла наклона касательной к положительному направлению оси Ox).

1.3. Определения, теоремы и формулы планиметрии

1. Сумма внутренних углов треугольника равна 180^0.
2. Внешний угол треугольника рамен сумме двух внутренних улов, не смежных с ним.
3. Метрические соотношения в прямоугольном треугольнике: если a и b – катеты, c – гипотенуза, h – высота, $a^{/}$ и $b^{/}$ – проекции катетов на гипотенузу, то:
а) $h^2 = a^{/} \cdot b^{/}$; б) $a^2 = c \cdot a^{/}$; в) $b^2 = c \cdot b^{/}$; г) $a^2 + b^2 = c^2$ (теорема Пифагора); д) $h = \dfrac{a \cdot b}{c}$.
4. В прямоугольном треугольнике медиана, проведенная к гипотенузе, равна ее половине. Верна и обратная теорема: если в треугольнике одна из медиан равна половине стороны, к которой она проведена, то этот треугольник прямоугольный.
5. Три медианы треугольника пересекаются в одной точке (ее называют центром тяжести или центроидом треугольника) и делятся в этой точке в отношении $2:1$, считая от вершины.

Три высоты треугольника пересекаются в одной точке (ее называют ортоцентром треугольника).
Три биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке.
6. Углы со взаимно параллельными и взаимно перпендикулярными сторонами равны.
7. Свойства средней линии трапеции:
а) средняя линия трапеции параллельна основаниям трапеции и равна их полусумме;
б) средняя линия (и только она) делит пополам любой отрезок, заключенный между основаниями трапеции.
Эти утверждения справедливы и для средней линии треугольника, если считать треугольник «вырожденной» трапецией, одно из оснований которой имеет длину, равную нулю.
8. Свойство биссектрисы внутреннего угла треугольника: биссектриса внутреннего угла треугольника делит сторону, к которой она проведена, на части, пропорциональные прилежащим сторонам.
9. Определение вида треугольника по его сторонам: пусть a, b и c – стороны треугольника, причем c – наибольшая сторона, тогда:
а) если $c^2 < a^2 + b^2$, то треугольник остроугольный;
б) если $c^2 = a^2 + b^2$, то треугольник прямоугольный;
в) если $c^2 > a^2 + b^2$, то треугольник тупоугольный.
10. Метрические соотношения в параллелограмме: сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов всех его сторон: $d_1^2 + d_2^2 = 2a^2 + 2b^2$.
11. Свойства касательных к окружности:
а) радиус, проведенный в точку касания, перпендикулярен касательной;
б) две касательные, проведенные к окружности из одной точки, равны, и центр окружности лежит на биссектрисе угла между ними.
12. Измерение углов, связанных с окружностью:

а) центральный угол измеряется дугой, на которую он опирается;
б) вписанный угол измеряется половиной дуги, на которую он опирается;
в) угол между касательной и хордой измеряется половиной дуги, заключенной между касательной и хордой.

13. Около всякого треугольника можно описать окружность; центром окружности служит точка пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника.
Во всякий треугольник можно вписать окружность; центром окружности служит точка пересечения биссектрис внутренних углов треугольника.

14. Для того, чтобы около четырехугольника можно было описать окружность, необходимо и достаточно, чтобы сумма противолежащих углов четырехугольника была равной 180^0.
Для того, чтобы в четырехугольник можно было вписать окружность, необходимо и достаточно, чтобы суммы противолежащих его сторон были равны ($a+b=c+d$).

15. Метрические соотношения в окружности:
а) если хорды AB и CD пересекаются в точке M, то $AM\cdot BM=CM\cdot DM$;
б) если из точки M к окружности проведены две секущие MAB и MCD, то $AM\cdot BM=CM\cdot DM$;
в) если из точки M к окружности проведены секущая MAB и касательная MC, то $AM\cdot BM=CM^2$.

16. Отношение площадей подобных фигур равно квадрату коэффициента подобия.

17. Если два треугольника имеют равные основания, то площади этих треугольников относятся, как высоты; если два треугольника имеют равные как высоты, то площади этих треугольников относятся, как основания.

18. Формулы для вычисления площади треугольника (a,b,c – стороны треугольника, h – высота, R,r – радиусы описанной и вписанной окружностей соответственно, $p=\dfrac{a+b+c}{2}$ – полупериметр):

1) $S=\dfrac{ah}{2}$; 2) $S=\dfrac{ab\sin C}{2}$; 3) $S=\dfrac{abc}{4R}$; 4) $S=pr$;
5) $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ – формула Герона.

19. Формулы для вычисления площади выпуклого четырехугольника $ABCD$:
1) $S=\dfrac{1}{2}AC\cdot BD\sin\alpha$ (AC и BD – диагонали четырехугольника, α – угол между ними);
2) $S=pr$ (если в четырехугольник можно вписать окружность радиуса r).

20. Выпуклый многоугольник называется правильным, если все его стороны равны и все углы тоже равны.
Выпуклый n–угольник будет правильным, тогда и только тогда, когда при повороте на угол $\dfrac{2\pi}{n}$ с центром в некоторой точке O (центре многоугольника) он переходит в себя.
Зависимость между сторонами правильных вписанного (a_n) и описанного (b_n) многоугольников:

$$a_n=2R\cdot\sin\left(\frac{180^0}{n}\right);\ \ b_n=2R\cdot tg\left(\frac{180^0}{n}\right).$$

21. Формулы для вычисления площади параллелограмма $ABDC$ ($AB=CD=a$, $AC=BD=b$ – стороны, $AD=d_1$, $CB=d_2$ – диагонали параллелограмма, α – угол между ними, h – высота параллелограмма, опущенная из точки A):
1) $S=ah$; 2) $S=ab\sin C$; 3) $S=\frac{1}{2}d_1d_2\sin\alpha$.

22. Формула для вычисления площади трапеции (a и b – основания трапеции, h – ее высота):

$$S=\frac{a+b}{2}h.$$

22. Формула площади кругового сектора радиуса R с углом раствора α (радианная мера)

$$S = \frac{1}{2} R^2 \alpha .$$

23. Формула площади кругового сегмента радиуса R с углом раствора α (радианная мера)

$$S = \frac{1}{2} R^2 (\alpha - \sin\alpha).$$

24. В прямоугольном треугольнике катет равен гипотенузе, умноженной на синус противолежащего или на косинус прилежащего угла. С другой стороны, катет равен другому катету, умноженному на тангенс противолежащего или на котангенс прилежащего угла.

25. Во всяком треугольнике выполняется соотношение

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R \text{ (теорема синусов)},$$

Где A, B, C – углы, $a, b.c$ – противолежащие им стороны треугольника, R – радиус описанной окружности.

26. Во всяком треугольнике выполняется соотношение

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A \text{ (теорема косинусов).}$$

1.4. Определения, теоремы и формулы стереометрии

1. Призма.

а). Площадь боковой поверхности призмы $S_{бок}$ равна боковому ребру l, умноженному на периметр сечения призмы $P_{сеч}$ плоскостью, перпендикулярной боковым ребрам: $S_{бок} = P_{сеч} \cdot l$.

б). Объем призмы V равен площади ее основания $S_{осн}$, умноженной на высоту H: $V = S_{осн} \cdot H$.

в). Площадь боковой поверхности прямой призмы равна периметру ее основания $P_{осн}$, умноженному на высоту: $S_{бок} = P_{осн} \cdot H$.

2. Прямоугольный параллелепипед.

Если a, b, c – стороны прямоугольного параллелепипеда, то его диагональ d, объем, площадь боковой и полной поверхностей находятся по формулам:

$$d^2 = a^2 + b^2 + c^2;\ V = abc;\ S_{бок} = P \cdot H = 2(a+b)c;$$

$$S_{полн} = 2(ab + ac + bc).$$

3. Пирамида.

а). Объем пирамиды равен одной трети произведения площади ее основания на высоту: $V = \frac{1}{3} S_{осн} \cdot H$.

б). Объем усеченной пирамиды с площадями основания S_1 и S_2 и высотой H выражается формулой $V = \frac{H}{3}\left(S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 S_2}\right)$.

4. Цилиндр.

Если R – радиус основания, H – высота цилиндра, то его объем, площадь боковой и полной поверхностей находятся по формулам:

$$V = \pi R^2 H;\ S_{бок} = 2\pi R H;\ S_{полн} = 2\pi R H + 2\pi R^2.$$

5. Конус.

а). Если R – радиус основания, H – высота, а l – образующая конуса, то его объем, площадь боковой и полной поверхностей находятся по формулам:

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 H;\ S_{бок} = \pi R l;\ S_{полн} = \pi R l + \pi R^2.$$

б). Если S и s – площади оснований, R и r – радиусы оснований, H – высота, а l – образующая усеченного конуса, то его объем и площадь боковой находятся по формулам:

$$V = \frac{H}{3}\left(S + s + \sqrt{S \cdot s}\right) = \frac{\pi H}{3}\left(R^2 + r^2 + R \cdot r\right);\ S_{бок} = \pi(R + r) \cdot l.$$

6. Шар, сфера, шаровой сегмент, шаровой сектор.

Если R – радиус сферы, а H – высота сегмента, то:

а). Площадь сферы равна $S = 4\pi R^2$.

б). Объем шара равен $V = \frac{4}{3}\pi R^3$.

в). Площадь шарового сегмента равна $S_{сегм} = 2\pi RH$.

г) Объем шарового сегмента равен $V = \pi H^2 \left(R - \frac{H}{3} \right)$.

1.5. Элементы векторной алгебры

Вектором называется направленный отрезок в пространстве. Длиной этого вектора называется длина этого отрезка. Два вектора называются равными, если их длины равны и векторы одинаково направлены.

Если $M_1(x_1; y_1; z_1)$ – начало, а $M_2(x_2; y_2; z_2)$ – конец вектора, то такой вектор обозначается символом $\overrightarrow{M_1M_2}$. Числа $X = x_2 - x_1$, $Y = y_2 - y_1$, $Z = z_2 - z_1$ называются координатами вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$ в системе координат $Oxyz$. Употребляется запись

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \{X, Y, Z\}.$$

Расстояние в пространстве между двумя точками $M_1(x_1; y_1; z_1)$ и $M_2(x_2; y_2; z_2)$ (модуль вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$):

$$|M_1M_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Пусть $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – единичные векторы (орты), направленные вдоль осей Ox, Oy, Oz. Тогда векторное равенство

$$\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k}.$$

называется разложением вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$ по ортам координатных осей.

Если $\vec{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$, $\vec{b} = \{b_x, b_y, b_z\}$, то

$\vec{a} \pm \vec{b} = \{a_x \pm b_x; a_y \pm b_y; a_z \pm b_z\}$,

$c\vec{a} = \{ca_x; ca_y; ca_z\}$, $\quad c = const$.

Ненулевые векторы называются коллинеарными, если они лежат на параллельных прямых. Необходимым и

достаточным условием коллинеарности (параллельности) двух векторов $\vec{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$ и $\vec{b} = \{b_x, b_y, b_z\}$ является условие пропорциональности их координат

$$\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}.$$

Скалярным произведением двух векторов называется число

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos\left(\vec{a} \hat{,} \vec{b}\right) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$$

Косинус угла между двумя векторами $\vec{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$ и $\vec{b} = \{b_x, b_y, b_z\}$:

$$\cos\left(\vec{a} \hat{,} \vec{b}\right) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \cdot \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}.$$

Необходимым и достаточным условием перпендикулярности двух векторов $\vec{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$ и $\vec{b} = \{b_x, b_y, b_z\}$ является равенство нулю их скалярного произведения

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0.$$

2. Варианты заданий для выполнения типового расчета

1. $\dfrac{4}{x+3}+\dfrac{4}{x-3}=1$
2. 2. $\dfrac{x}{x+4}+\dfrac{4}{x-4}=\dfrac{20}{x^2-16}$
3. $\dfrac{2x}{x+5}-\dfrac{5}{5-x}=\dfrac{25}{x^2-25}$
4. $\dfrac{x}{x+3}-\dfrac{5}{x-3}=\dfrac{18}{x^2-9}$
5. $\dfrac{x-2}{2x-1}-\dfrac{x+1}{3x-1}=\dfrac{x-8}{6x-2}$
6. $\dfrac{x+2}{x-1}+\dfrac{2x-1}{x+3}=\dfrac{3x-4}{x+4}$
7. $\dfrac{2x-1}{x+3}+\dfrac{x}{x+1}=\dfrac{3x}{x+4}$
8. $\dfrac{x}{x-4}=\dfrac{4}{x-4}+\dfrac{2}{x+4}+\dfrac{7}{x^2-16}$
9. $\dfrac{x^2+x+1}{x^2-x+1}=\dfrac{7}{9}\cdot\dfrac{x+1}{x-1}$
10. $\dfrac{7(x-2)(x-3)(x-4)}{(2x-7)(x+2)(x-6)}=-2$
11. $x^3+x^2-10x+8=0$
12. $x^3-6x^2+5x+12=0$
13. $x^3-4x^2+x+6=0$
14. $x^4+x^3-x^2-7x-6=0$
15. $x^4+2x^3-x=2$
16. $x^3-3x+2=0$
17. $x^3-x-6=0$
18. $x^3-3x^2+4=0$
19. $8x^3-4x^2-5x+1=0$
20. $4x^3-3x^2+7=0$
21. $\dfrac{1}{x^2-2x+2}+\dfrac{2}{x^2-2x+3}=\dfrac{6}{x^2-2x+4}$
22. $\dfrac{x^2-x}{x^2-x+1}-\dfrac{x^2-x+2}{x^2-x-2}=1$
23. $(x+3)^4-3(x+3)^2+2=0$
24. $\dfrac{x^2+2x+1}{x^2+2x+2}+\dfrac{x^2+2x+2}{x^2+2x+3}=\dfrac{7}{6}$
25. $(x^2+x+1)(x^2+x+2)=12$
26. $\dfrac{x^4}{(2x+3)^2}-\dfrac{2x^2}{2x+3}+1=0$ Отв.: $-1;\ 3$.
27. $\dfrac{21}{x^2-4x+10}-x^2+4x=6$ Отв.: $1;\ 3$.
28. $\dfrac{x^2-3x-6}{x}-\dfrac{8x}{x^2-3x-6}=-2$ Отв.: $-3;\ -1;\ 2;\ 6$.
29. $\dfrac{3x^2-9x}{2}-\dfrac{12}{x^2-3x}=3$
30. $(x^2-6x)^2-2(x-3)^2=81$
31. $(x^2-1)\sqrt{2x-1}=0$
32. $(x^2-4)\sqrt{x+1}=0$
33. $(x^2-4)\sqrt{2x+1}=0$
34. $(x^2-1)\sqrt{3x+4}=0$

35. $(4x^2-9)\sqrt{x-1}=0$

36. $\sqrt{4-x^2}(x^2-4x-5)=0$

37. $\sqrt{3-x^2}(x^2-3x-4)=0$

38. $\sqrt{3-x}+\sqrt{x-5}=3$

39. $\sqrt{\dfrac{4-x}{x}}+\sqrt{\dfrac{x-4}{x+1}}=2-\sqrt{x^2-12}$

40. $\sqrt{4-x^2}+\sqrt{x-2}=\sqrt{x+7}-\sqrt{4x+1}$

41. $\sqrt{2-x}-\sqrt{x+8}=2$

42. $2\sqrt{x+31}=4-x$

43. $\sqrt{15x^2-14}=2-3x$

44. $x+5=\sqrt{8-9x-x^2}$

45. $\sqrt{3-x}+\sqrt{x-6}=5$

46. $\sqrt{1+8x-x^2}=2x-2$

47. $\sqrt{2x^2+8x+7}-x=2$

48. $\sqrt{x^4-2x-5}=1-x$

49. $\sqrt{x-1}+\sqrt{2x+6}=6$

50. $\sqrt{x+1}=8-\sqrt{3x+1}$

51. $\sqrt{\dfrac{3x}{x+2}}-\sqrt{\dfrac{3(x+2)}{x}}-2=0$

52. $\sqrt{9x^3+7}+\sqrt[4]{9x^3+7}=6$ Отв.: 1.

53. $\sqrt[3]{x}+\sqrt[6]{x}=12$ Отв.: 729.

54. $x\cdot\sqrt{x^2+15}-\sqrt{x}\cdot\sqrt[4]{x^2+15}=2$

55. $\sqrt[3]{x}+2\sqrt[3]{x^2}=3$ Отв.: 1; $-\dfrac{27}{8}$.

56. $\dfrac{x+5}{x}-\sqrt{\dfrac{x+5}{x}}=30$ Отв.: $\dfrac{1}{7}$.

57. $\sqrt{x^2+8x}+6=x^2+8x$

58. $\sqrt{x^2+8x}+6=x^2+8x$

59. $(x+5)(x-2)+3\sqrt{x(x+3)}=0$

60. $2\sqrt{7x^2-6x-1}=1+6x-7x^2$

61. $x^2-5|x|-24=0$

62. $x^2+|x+1|=1-2x$

63. $x^2-4|x+4|=28$

64. $x\cdot|3x+5|=3x^2+4x+3$

65. $|x-2|\cdot x-6x+8=0$

66. $|2x+1|\cdot x-3x-4=0$

67. $x^2+2x+3\cdot\dfrac{|x-1|}{x-1}=0$

68. $x|x|=-1$

69. $x+1+|x^2-x-3|=0$

70. $x^2-\left|x-\dfrac{1}{4}\right|=0$

71. $0\le(2x+3)^2<5$

72. $0<(6x-7)^2\le 3$

73. $-2\le 2x^2+7x+3\le 0$

74. $0\le 3x^2+x-2\le 78$

75. $0\le x(2x-3)<x^2+x+1$

76. $-9\le x(x-6)\le -5$

77. $-9\le x^2<25$

78. $-4 < x^2 - 4x \le 0$

79. $2 \le x^2 + x < 6$

80. $-2 < 3x^2 - 4x < 0$

81. $(2x-1)^3(3x+4)(x-6)^2 > 0$

82. $(6-x)^5(7+x)^2(3-x)^4(x+8)^6 \le 0$

83. $\dfrac{x^3(x-1)^4(x+5)}{(1-4x)(x+3)^2(x-8)} < 0$

84. $\dfrac{(3x+1)(5x-6)(x-11)^2}{(x-4)(1-7x)^2(x-3)} \le 0$

85. $\dfrac{4x^2-4x+1}{(x+4)(x-3)} \ge 0$

86. $\dfrac{(x^2-10x+21)(x^2-6x-7)}{(x^2+5x+6)(x^2-4)} \le 0$

87. $\dfrac{(x-2)(x^2-1)(4x-5-3x^2)}{(x+7)} < 0$

88. $\dfrac{(x^2-10x+21)(x^2-6x-7)}{(x^2+5x+6)(x^2-4)} \le 0$

89. $\dfrac{(x^2-9)(x^2-7x+10)(x^2-7x+13)}{(2x^2+7)(3-2x)} \ge 0$

90. $\dfrac{(x+2)(2x^2-x-1)}{7x^2-4x-3} \ge 0$

91. $\dfrac{1}{2-x} + \dfrac{5}{2+x} < 1$

92. $\dfrac{2}{3x+7} \le \dfrac{1}{x+3} - \dfrac{1}{x+1}$

93. $\dfrac{2x+3}{x^2+x-12} \le \dfrac{1}{2}$

94. $2 + \dfrac{1}{x-3} - \dfrac{x+3}{x+2} \le \dfrac{1}{(x-3)(x+2)}$

95. $\dfrac{2}{x^2-3x-4} \ge \dfrac{3}{x^2+x-6}$

96. $\dfrac{1}{x+6} + \dfrac{7}{x-3} \le \dfrac{5}{x-6}$

97. $\dfrac{2x+3}{12-x-x^2} + \dfrac{1}{2} \ge 0$

98. $\dfrac{6x+1}{4x-3} \le \dfrac{3x+2}{2x+1}$

99. $\dfrac{x^2+3x-2}{(x-1)^2-9} - \dfrac{3x+1}{3x-12} \le 0$

100. $\dfrac{x+3}{x-2} \ge \dfrac{x-3}{x+4}$

101. $\dfrac{1}{|x|-3} < \dfrac{1}{2}$

102. $\dfrac{x^2-7|x|+10}{x^2-6x+9} < 0$

103. $\dfrac{x^2-|x|-12}{x-3} \ge 2x$

104. $\dfrac{x^2-3|x|-4}{x+1} < -3x$

105. $\dfrac{(x+2)(x+1)}{x^2-|x|-2} \le -3x$

106. $\dfrac{x^2-|x|-6}{x^2+5x+6} > x - \dfrac{3}{2}$

107. $\dfrac{x^2-1}{|x|-1} > 0$

108. $\frac{|x+2|-x}{x}<2$

109. $\frac{|x+3|+x}{x+2}>1$

110. $\frac{|4-x|}{3+x}\le 2$

111. $\sqrt{x^2-5x+4}<x-3$

112. $\sqrt{x^2-5x-24}>x-2$

113. $\sqrt{4+3x-x^2}<x-1$

114. $\sqrt{-x^2+6x-5}>8-2x$

115. $\sqrt{2x^2-8x+7}<x-2$

116. $2-3x<\sqrt{4+9x-9x^2}$

117. $\sqrt{x^2-3x+2}>2-x$

118. $\sqrt{x^2+4x-5}>2x-3$

119. $\sqrt{5x-x^2-4}>2x-5$

120. $\sqrt{5-x}+\sqrt{5+x}\le 4$

121. $2tgx+5ctgx=7$

122. $3\cos^2 x-10\cos x+3=0$

123. $\sin^2(180^0+x)-\sin x-2=0$

124. $\cos x+\frac{1}{\cos x}=2$

125. $6\cos^2 x+5\sin x-7=0$

126. $2\cos^2 x+4\cos x=3\sin^2 x$

127. $2\sin^2 3x+\cos^2 3x+\sin 3x=1$

128. $tgx+3ctgx=4$

129. $\frac{1}{\cos^2 x}-4tgx=-2$

130. $tgx-5tg\left(x-\frac{5\pi}{2}\right)=6\sin\left(\frac{13\pi}{2}\right)$

131. $4\sin 2x-3\sin\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)=5$

132. $\sin(\pi-6x)+\sqrt{3}\sin\left(\frac{\pi}{2}+6x\right)=\sqrt{3}$

133. $\sin x+\cos x=1$

134. $\sin x+\cos x=\sqrt{2}$

135. $\sqrt{3}\cos x+\sin x=2$

136. $\sqrt{3}\sin 2x-\cos 2x-2=0$

137. $5\sin x+12\cos x=13$

138. $\sin x-\cos x=\sqrt{2}$

139. $3\sin 2x+4\cos 2x=-5$

140. $\sin 3x+\cos 3x=\frac{1}{\sqrt{2}}$

141. $\sin 3x+\sin 7x=2\sin 5x$

142. $\sin 3x=\cos x-\sin x$

143. $\sin x+\sin 2x+\sin 3x=0$

144. $\sin x+\sin 2x+\sin 3x+\sin 4x=0$

145. $\sin x - \sin 3x = \sin 4x - \sin 2x$

146. $\sin x - \sin 3x - \sin 5x + \sin 7x = 0$

147. $\sqrt{3}\sin 2x + \cos 5x - \cos 9x = 0$

148. $\cos\left(\frac{\pi}{2} + 5x\right) + \sin x = 2\cos 3x$

149. $\sin 3x - \sin 7x = \sqrt{3}\sin 2x$

150. $\cos x - \sin\left(5x + \frac{3\pi}{2}\right) = \sqrt{3}\cos(3x + \pi)$

151. $\cos 2x + \sqrt{2}\sin x = 1$

152. $\cos 2x + 3\sin x = 2$

153. $1 + \cos x + \cos 2x = 0$

154. $\cos x + 2\cos 2x = 1$

155. $3\sin^2 x - 3\cos 2x - 12\sin x + 7 = 0$

156. $2\sin\left(\frac{13}{3}\pi\right)\cdot\sin 5x + 1 = \cos 10x$

157. $3 + 5\sin 2x = \cos 4x$

158. $\cos 4x + 2\cos^2 x = 0$

159. $\cos 2x = \sqrt{2}(\cos x - \sin x)$

160. $\cos 2x = \frac{\sqrt{6}}{2}(\cos x - \sin x)$

161. $32^{3(x^3-8)} = 8^{19(2x-x^2)}$

162. $2^{x-1} - 2^{x-2} = 6\cdot 3^{2-x}$

163. $9^x - 2^{x+\frac{1}{2}} = 2^{x+\frac{7}{2}} - 3^{2x-1}$

164. $4^x - 3^{x-\frac{1}{2}} = 3^{x+\frac{1}{2}} - 2^{2x-1}$

165. $\left(\frac{4}{9}\right)^{x+2\sqrt{x}-1} = (2{,}25)^{x+\sqrt{x}-1}$

166. $0{,}5^{x^2-9x+17{,}5} = \frac{8}{\sqrt{2}}$

167. $7^x\left(\sqrt{2}\right)^{2x^2-6} - \left(\frac{7}{4}\right)^x = 0$

168. $0{,}125\cdot 4^{2x-8} = \left(\frac{0{,}25}{\sqrt{2}}\right)^{-x}$

169. $(2\cdot 5)^{x^2-3} = 10^{-2}\cdot 10^{3x-3}$

170. $2^{x^2+x-6} - 2^{x^2+x-9} = 56$

171. $3\cdot 16^x + 36^x = 2\cdot 81^x$

172. $3\cdot 4^x - 7\cdot 10^x + 2\cdot 25^x = 0$

173. $2^{2x+1} + 3^{2x+1} = 5\cdot 6^x$

174. $10^{\frac{2}{x}} + 25^{\frac{1}{x}} = 4{,}25\cdot 50^{\frac{1}{x}}$

175. $\frac{2^x + 10}{4} = \frac{9}{2^{x-2}}$

176. $4^{\frac{2}{x}} - 5\cdot 4^{\frac{1}{x}} + 4 = 0$

177. $3\cdot 5^{x-2} - 2\cdot 5^{4-x} - 5 = 0$

178. $17\cdot 2^{\sqrt{x^2-8x}} - 8 = 2\cdot 4^{\sqrt{x^2-8x}}$

179. $49^{1+\sqrt{x-2}} - 344\cdot 7^{\sqrt{x-2}} = -7$

180. $2^{x+2} + 8^x = 5\cdot 4^x$

181. $\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{x+2}} > 3^{-x}$

182. $\left(\frac{3}{4}\right)^{x^2-4x+5} < \left(\frac{3}{4}\right)^{x-1}$

183. $\left(\left(\frac{3}{7}\right)^{1/x^2}\right)^{x^2-2x} \geq 1$

184. $\left(\frac{2}{7}\right)^{3(2x-7)}\cdot 12{,}25^{\frac{4x+1}{2}} \geq 1$

185. $2^{x+2}-2^{x+3}-2^{x+4}>5^{x+1}-5^{x+2}$

186. $3\cdot 4^{x}+\frac{1}{3}\cdot 9^{x+2}-6\cdot 4^{x+1}+\frac{1}{2}\cdot 9^{x+1}\le 0$

187. $(\sqrt{5}+2)^{x-1}\ge(\sqrt{5}-2)^{\frac{x-1}{x+1}}$

188. $2^{\sqrt{x}+1}-16\cdot\sqrt{(0{,}25)^{5-\frac{x}{4}}}\ge 0$

189. $2^{\frac{x+1}{x-2}}\ge 4$

190. $2^{x^2+3x}-8\cdot 2^{x}>0$

191. $\log_{2x^2-2}(3x^2+x-4)=\log_8 16-\log_{27}3$

192. $\log_x\left(x^3-3x+2\right)=3$

193. $\log_3\left(9^x+x^2-3x+2\right)=2x$

194. $\log_{\frac{1}{2}}(x^2-4x-1)-\log_{\frac{1}{2}}(x^2-3x-2)=-1$

195. $0{,}5\cdot\lg(x+3)-2\lg 2=1-\lg\sqrt{25x+375}$

196. $\log_{2+\sqrt{5}}(x^2+x-1)=\log_{\sqrt{5}-2}(x+3)$

197. $\log_{x+2}\left(x^2+2x+4\right)=2$

198. $\log_2\left(2^x+x^2-3x+2\right)=x$

199. $\log_9\left(3^{2x}+x^2-5x+6\right)=x$

200. $\log_{x+1}\left(x^2-3x+5\right)=\log_{x+1}5$

201. $2\lg\lg x=\lg(3-2\lg x)$

202. $\lg^2 x=\lg 10x$

203. $\lg^2 x-\lg x^2=\lg^2 3-1$

204. $\lg^2 x-\lg x^8-\lg^2 5+16=0$

205. $\lg^2 x+\lg\frac{2}{x}+\lg\frac{5}{x}=4$

206. $\log_3(3^x-1)\cdot\log_3(3^{x+1}-3)=6$

207. $\lg^2 x+\lg x^2=3$

208. $\lg^2 x^2-3\lg x-1=0$

209. $\lg^2 x^3-10\lg x+1=0$

210. $\log_2^2 x^3-\log_2 x^8-1=0$

211. $\left(\frac{2}{5}\right)^{\log_{0,25}(x^2-5x+8)}\le 2{,}5$

212. $\log_2(2^x-2)<3-x$

213. $\dfrac{\log_{0,3}(x+1)}{\log_{0,3}100-\log_{0,3}9}<1$

214. $\log_{\frac{1}{2}}(x^2-5x+6)>-1$

215. $\log_3(x^2-x)\ge\log_3(3x+2)$

216. $\lg(x+5)\ge-2\lg\frac{1}{3-x}$

217. $2\log_2\left(x-1\right)-\log_2\left(5-x\right)>1$

218. $\log_{0,2}(x^2-x-20)+\log_5(x+4)>0$

219. $\log_2 x<\log_{\frac{1}{2}}(3x-1)-2$

220. $\log_{\frac{1}{2}}\left(x^2-3x+4\right)<\log_{\frac{1}{2}}\left(2x-2\right)$

Вычислить производную функций (221-230):

221. $y=(x^4-x^2+1)^3$; $y=\sin(\sin x)$

222. $y=\dfrac{x^3-3x^2+1}{x-1}$; $y=\cos x-\frac{1}{3}\cos^3 x$

223. $y=\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-8x+15}$; $y=\sqrt{1+\ln^2 x}$

224. $y=\left(x+\sqrt[3]{x}\right)\cdot\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right)$; $y=\ln(x^2-4x)$.

225. $y=\left(\dfrac{2}{\sqrt{x}}-\sqrt{3}\right)\cdot\left(4x\sqrt[3]{x}+\dfrac{\sqrt[3]{x^2}}{3x}\right)$; $y=\ln\dfrac{x+\sqrt{1-x^2}}{x}$

226. $y=\sqrt[3]{\dfrac{1}{1+x^2}}$; $y=\dfrac{1}{\cos^2 x}+\dfrac{1}{\sin^2 x}$

227. $y=\dfrac{1}{\sqrt[3]{2x-1}}+\dfrac{5}{\sqrt[4]{(x^2+2)^3}}$; $y=e^{-x}\cdot\cos x$.

228. $y=\sqrt[3]{1+x\sqrt{x+3}}$; $y=\sin^2(\cos 3x)$

229. $y=\sqrt[11]{9+6\sqrt[5]{x^9}}$; $y=(x^2-2x+3)\cdot e^x$

230. $y=(x^3-3x+3)\cdot(x^4-x^2+1)$; $y=\dfrac{1}{3}tg^3x-tgx+x$

Напишите уравнение касательной к графику функции $y=f(x)$ в указанной точке:

231. $y=x(\ln x-1),\ x_0=e$

232. $y=x^2e^{-x},\ \ x_0=1$

233. $y=\dfrac{x^2}{x^2+1},\ \ x_0=1$

234. $y=\ln(2e-x),\ \ x_0=e$

235. $y=x^4-2x^2,\ \ x_0=0{,}5$

236. $y=x(x-4)+3,\ \ x_0=0$

237. $y=\dfrac{x}{x^2-1},\ \ x_0=0$

238. $y=\dfrac{x^2}{x^2+1},\ \ x_0=1$

239. $y=\sin 2x,\ \ x_0=\dfrac{\pi}{12}$

240. $y=\cos^2 x,\ \ x_0=\dfrac{\pi}{4}$

241. В прямоугольном треугольнике катеты равны a и b. Найти медиану, проведенную к гипотенузе.
242. Гипотенуза прямоугольного треугольника составляет с катетом, длина которого a, угол β. Найти периметр и площадь треугольника.
243. Гипотенуза c прямоугольного треугольника составляет с одним из катетов угол β. Найти периметр и площадь треугольника.
244. В равнобедренном треугольнике с углом при основании 60^0 вписана окружность радиуса $2\sqrt{3}$. Найти длину основания треугольника.
245. В прямоугольном треугольнике ABC дано: катет CB равен 4,5, синус угла BAC равен $\dfrac{15}{17}$. Найти площадь треугольника.
246. В прямоугольном треугольнике ABC даны: длина катета BC равная 3,5 и длина гипотенузы AB, равная 12,5. Вычислить периметр данного треугольника.
247. В прямоугольном треугольнике известны длины катетов, равные 21 и 3,25. Вычислить радиус круга, описанного около треугольника.
248. В треугольнике ABC длина стороны AC равна 26,35 и синусы острых углов BAC и BCA равны соответственно 0,352 и 0,6. Найти площадь треугольника.
249. Хорда делит окружность на две дуги в отношении 3:7. Найти величину меньшего вписанного угла, опирающегося на эту хорду.
250. Концы диаметра удалены от касательной на 1,6м и 0,6м. Найти длину диаметра.
251. Высота правильной треугольной пирамиды равна высоте основания этой пирамиды. Найти объем пирамиды, если апофема равна $\sqrt{30}$.
252. Высота правильной треугольной пирамиды равна 6м, а боковая грань образует с плоскостью основания угол 30^0. Определить площадь боковой поверхности пирамиды.

253.Осевым сечением конуса является треугольник с боковой стороной b и углом α между этой стороной и основанием. Найти площадь боковой поверхности и объем конуса.

254. Осевое сечение конуса – треугольник с основанием a и углом при вершине β. Найти объем и площадь боковой поверхности конуса.

255. Радиус основания конуса R, наибольший угол между образующими α. Найти объем и площадь боковой поверхности конуса.

256. Радиус основания конуса R, образующая составляет с основанием угол α. Найти объем и площадь боковой поверхности конуса.

257. Образующая конуса, длина которой l, составляет с высотой угол φ. Найти объем и полную поверхность конуса.

258. Площадь основания конуса S, угол между высотой и образующей α. Найти объем и площадь боковой поверхности конуса.

259. Длина стороны квадрата, вписанного в основание конуса – a, образующая составляет с основанием угол φ. Найти объем конуса.

260. Высота конуса H, угол между образующей и высотой β. Найти объем и полную поверхность конуса.

261. Вычислить площадь треугольника, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ составляют угол 45^0 и $\vec{a}\cdot\vec{b}=4$.

262. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ составляют угол 30^0 и $\vec{a}\cdot\vec{b}=\sqrt{3}$.

263. При каких значениях x и y векторы $\vec{a}=\{3;-2;x\}$ и $\vec{b}=\{y;4;2\}$ коллинеарны?

264. При каких значениях x векторы $\vec{a}=\{-1;1;2\}$ и $\vec{b}=\{x^2;x-2;x^2-12\}$ коллинеарны?

265. При каком значении x векторы $\vec{a}=\{x;3;4\}$ и $\vec{b}=\{5;6;3\}$ перпендикулярны?

266. При каких значениях x длина вектора $\vec{c}=2\vec{i}-9\vec{j}+x\vec{k}$ равна 11?

267. Найти длину вектора $\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$, если $\vec{a}=\{1;2;3\}$ и $\vec{b}=\{4;-2;9\}$.

268. Найти длину вектора $\vec{c}=2\vec{a}-\vec{b}$, если $\vec{a}=\{6;2;1\}$ и $\vec{b}=\{0;-1;2\}$.

269. Найти угол между векторами $\vec{a}=2\vec{i}+5\vec{j}-\vec{k}$ и $\vec{b}=\vec{i}-\vec{j}-3\vec{k}$.

270. Найти угол между диагоналями четырехугольника с вершинами в точках $A(3;3)$, $B(2;6)$, $C(1;5)$, $D(6;2)$.

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Балаян Э.Н. Математика. Сам себе репетитор. Задачи повышенной сложности. – Ростов-на-Дону: Изд-во «Феникс», 2004. – 480с.
2. Будак А.Б., Щедрин Б.М. Элементарная математика. Руководство для поступающих в вузы. 4-е изд., испр. – М.: Издательский отдел УНЦДО, ФИЗМАТЛИТ, 2002. – 690с.
3. Гайштут О.Г., Литвиненко Г.М. Розв'язування алгебраїчних задач. – Київ: Рад. шк., 1991. – 224с.
4. Гайштут А.Г., Ушаков Р.П. Сборник задач по математике с примерами решений. – Киев: А.С.К., 2002. – 592с.
5. Гельфанд М.Б., Мануха А.С., Ушаков Р.П. Математика. Справочное пособие. – Киев: Вища школа, 1982. – 464с.
6. Говоров В.М., Дыбов П.Т., Мирошин Н.В., Смирнова С.Ф. Сборник конкурсных задач по математике. – М.: Наука, 1983. – 384с.
7. Егоров А.А., Раббот Ж.М. Иррациональные уравнения // «Квант». – 2001. – №5. – С. 42–45.
8. Егоров А.А., Раббот Ж.М. Монотонные функции в конкурсных задачах. // «Квант». – 2002. – №6. – С. 34–40.
9. Иванов О.А. Задачи по алгебре и началам анализа. – СПб.: БХВ-Петербург, 2005. – 384с.
10. Кононов Ю.Н., Солонский Ю.Н., Шалдырван В.А. Как подготовиться к вступительным экзаменам в вуз. Донецк: ДНУ, 1995. – 128с.
11. Кушнір І. Задачі з однією підказкою. – Київ: ФАКТ, 2003. – 176с.
12. Литвиненко В.Н., Мордкович А.Г. Задачник-практикум по математике. Алгебра. Тригонометрия. – М.: ООО "Издательский дом "ОНИКС 21 век": ООО "Издательство "Мир и Образование", 2005. – 464с.
13. Лунгу К.Н. Тесты по математике для абитуриентов. – М.: Абрис-пресс, 2004. – 352с.
14. Математика для поступающих в вузы. Учебное пособие / Бондаренко М.Ф. и др.; Под ред. Семенца В.В. – Харьков, ХТУРЭ. – 1120с.

15. Математика: сборник задач с решениямидля поступающих в вузі / Н.В. Мирошин и др.; под ред. В.М. Говорова, Н.В. Мирошина. – М.: АСТ: Астрель, 2005. – 829с.
16. Материалы вступительных экзаменов. Задачи по физике и математике / Егоров А.А. и др.; Под ред. Розова Н.Х. и Стасенко А.Л. – М.: Бюро Квантум, 1993. – 320с.
17. Махров В.Г., Махрова В.Н. Новый репетитор по математике для старшекласников и абитуриентов. – Ростов н/Д: Изд-во «Феникс», 2004. – 544с.
18. Мерзляк А.Г., Полонский В.Б., Якир М.С. Алгебраический тренажер. – М.: Илекса, Харьков: Гимназия, 1998. – 320с.
19. Методы решения задач по алгебре: от простых до самых сложных / Кравцов С.В. и др. – М.: Издательство "Экзамен", 2005. – 544с.
20. Назаретов А.П. 1000 задач по математике для поступающих в вузы. – М.: Аквариум, 2001. – 416с.
21. Нестеренко Ю.В., Олейник С.Н., Потапов М.К. Задачи вступительных экзаменов по математике. – М.: Наука. Главная ред.. физ.-мат. литературы, 1983. – 448 с.
22. Письменный Д.Т. Готовимся к экзамену по математике. . – М.: Айрис-пресс, 2004. – 320с.
23. Сборник задач по математике для поступающих в вузы / Бортаковский А.С. и др.; Под ред. Молодожниковой Р.Н. – М.: Изд-во МАИ, 1995. – 464с.
24. Сборник задач по математике для поступающих в вузы / Егерев В.К. и др.; Под ред. Сканави М.И. – Киев: Канон, 1997. – 528с.
25. Сборник материалов математических олимпиад: 906 самых интересных задач и примеров с решениями / Довбыш Р.И. и др.– Донецк: ООО ПКФ «БАО», 2005. – 336с.
26. Сборник тренировочных задач по математике от простых до самых сложных. Методические материалы для слушателей школ инженерного резерва дистанционного обучения ДонНТУ. – Донецк, 2006. – 99с.
27. Суконник Я.Н. Математические задачи повышеннной трудности. Пособие для учителей. – Киев: Рад. Шк., 1985. – 176с.
28. Титаренко А.М., Роганин А.Н. Форсированній курс

школьной математики. – Х.: Торсинг, 2005. – 448с.
29. Титаренко О.М. 5770 задач з математики. – Харків: Торсінг, 2004. – 336с.
30. Улитин Г.М., Мироненко Л.П. Математика. Методическое пособие для абитуриентов. – Донецк: ДонНТУ, 2004. – 330с.
31. Черкасов О.Ю., Якушев А.Г. Математика: интенсивный курс підготовки к екзамену. – М.: Айрис-пресс, 2004. – 420с.
32. Шарыгин И.Ф. Математика. Для поступающих в вузы. – М.: Дрофа, 1997. – 416с.
33. Шарыгин И.Ф. Факультативный курс по математике: Решение задач: Учеб. пособие для 10 кл. средней школы. – М.: Просвещение, 1989. – 252с.
34. Ярский А.С. Уравнения, которые «не решаются» // «Квант». – 1998. – №3. – С. 47–49.
35. 3000 конкурсных задач по математике / Куланин Е.Д. и др.; Под ред. Бобылева Н.А. – М.: Рольф, 1997. – 608с.

Типовой расчет по элементарной математике
для студентов первого курса
автодорожного института ДонНТУ

Леонид Петрович Вовк
Владимир Николаевич Дугельный

Подписано к печати Тираж 200
Усл. печ. листов.
Заказ Формат 70*90/16

АДИ ГВУЗ ДонНТУ
84646, г. Горловка, ул. Кирова, 51