Зміст

Тема 1 Предмет нарисної геометрії.

1.1 Введення

Предмет нарисної геометрії – побудова зображень геометричних фігур (об'єктів) на площини й сукупність способів розв’язання геометричних задач за заданими зображеннями цих фігур.

Історична довідка – необхідність відображати фігури на площині виникла у людини тоді, коли в неї виникла потреба зберегти або передати інформацію про побачене, тобто, візуальну інформацію. Технологічно доступним для людини був один простий спосіб - відтворити побачене на гладкій поверхні, наприклад, на поверхні каменю. В результаті, візуальна інформація стала графічної. Імовірно, потреба відтворення і закріплення геометричної інформації могла спочатку виникнути при розв’язанні задач землекористування (γεω –земля, μετρια – вимірювати) і будівництва. У Шумерському царстві у Месопотамії, як носій інформації використовували спеціально зроблені глиняні таблички. Пізніше в древньому Єгипті папірус і пергамент і ще пізніше, в 2-ому столітті в Китаї був винайдений папір. Таким чином, із самого початку людина вирішувала можливість відображення потрібного їй об'єкта на поверхні. Зручніше за все на плоскій поверхні, тобто, на площині. Звідси випливає, що ще в стародавності інтуїтивно або усвідомлено, людина знаходила і використовувала способи відображення, тобто, проекціювання зображення на площину.

Задача зображення матеріальних об'єктів вирішувалася по-різному. Головне, чого було потрібно досягти, це наочності і відтворюваності зображеного. Наочність досягається при використанні проекцій, які зараз називають перспективними, коли відтворюється зображення об'єкта таке, яким його бачить людина. При цьому проекціюючі промені виходять із однієї точки - центра проекцій, яким при спостереженні в реальності є око людини. Для досягнення відтворюваності зображення, тобто, такого відображення геометричної інформації на площині, за якою можна точно відтворити реальний об'єкт, необхідно, щоб всі проекціюючі промені були паралельні один одному, і площин проекції було не менше двох.

В 1799 році француз Гаспар Монж (1746 - 1818) опублікував знамениту працю «Geometrie descriptive», у якій була запропонована система прямокутного проекціювання і методи розв’язання геометричних задач методами, що використовують побудови із застосуванням лінійки і циркуля. Методи, запропоновані Монжем, майже без змін використовуються дотепер.

Розвиток комп'ютерної техніки дозволив повернутися з новими інструментами до задачі, що виникла багато тисячоріч назад: як максимально вірогідно зберегти інформацію про матеріальний об'єкт. Тепер ми маємо інструменти для віртуального тривимірного моделювання практично будь-яких матеріальних об'єктів, у тому числі сукупностей окремих об'єктів. По отриманій моделі можна автоматично одержати проекції об'єкта на будь-які площини і, далі, роздрукувати ці проекції у вигляді звичних для людини плоских малюнків і креслень. Комп'ютерні технології розвили можливості людини до автоматизованого виготовлення реальних об'єктів - деталей машин і навіть скульптурних зображень за їх віртуальними моделями.

1.2 Позначення, які застосовуються

A, B, C, … 1, 2, 3,.. – точки;

a, b, c, d,.. – прямі і криві лінії, у тому числі зарезервовані позначення прямих ліній:

- ***h*** – горизонталь,
- ***f*** – фронталь,
- ***p*** – профільна пряма.

$\boldsymbol{\Theta}$, $\boldsymbol{\Lambda}$, $\boldsymbol{\Sigma}$, $\boldsymbol{\Gamma}$, $\boldsymbol{\Phi}$, $\boldsymbol{\Omega}$ - поверхні;

α, β, γ - кути;

Π_1 – горизонтальна площина проекцій;

Π_2 – фронтальна площина проекцій;

Π_3 – профільна площина проекцій;

$\in$ − належить ($\boldsymbol{A}\in\boldsymbol{a}$ – точка ***A*** належить лінії ***a***)

$\notin$ − не належить ($\boldsymbol{A}\notin\boldsymbol{a}$ – точка ***A*** не лежить лінії ***a***)

$\subset$ − включає ($\boldsymbol{a}\subset\boldsymbol{\Lambda}$ – лінія ***a*** належить (є підмножиною) поверхні ***Λ***);

$\not\subset$ − не включає;

$\equiv$ − збіг ($\boldsymbol{A_1}\equiv\boldsymbol{B_1}$ – проекція $\boldsymbol{A_1}$ точки ***A*** збігається с проекцією $\boldsymbol{B_1}$ точки ***B***);

$\cup$ − об'єднання фігур (множин);

$\cap$ − перетин фігур (множин);

$\perp$ − перпендикулярність;

$\parallel$ − паралельність;

$\dot{-}$ − неперетин (для прямих ліній - схрещування) ($\boldsymbol{a}\,\dot{-}\,\boldsymbol{b}$ – прямі лінії ***a*** і ***b*** схрещуються);

$\angle$ − плоский або двогранний кут, значення кута;

$\cong$ − конгруентні;

~ − подібні;

$\frown$ − дотичні фігури.

1.3 Метод проекцій

Метод проекцій – метод відображення реальних або віртуальних об'єктів (фігур) на площині (у загальному випадку – на поверхні).

Використовують два основних методи проекціювання: центральне проекціювання, паралельне проекціювання.

Центральні проекції.

Для одержання центральної проекції необхідні три елементи:

об'єкт проекціювання;

центр проекціювання – точка, яка позначається звичайно ***S***;

поверхня (площина) проекціювання – поверхня, на яку відображається об'єкт проекціювання (Рис. 1.1).

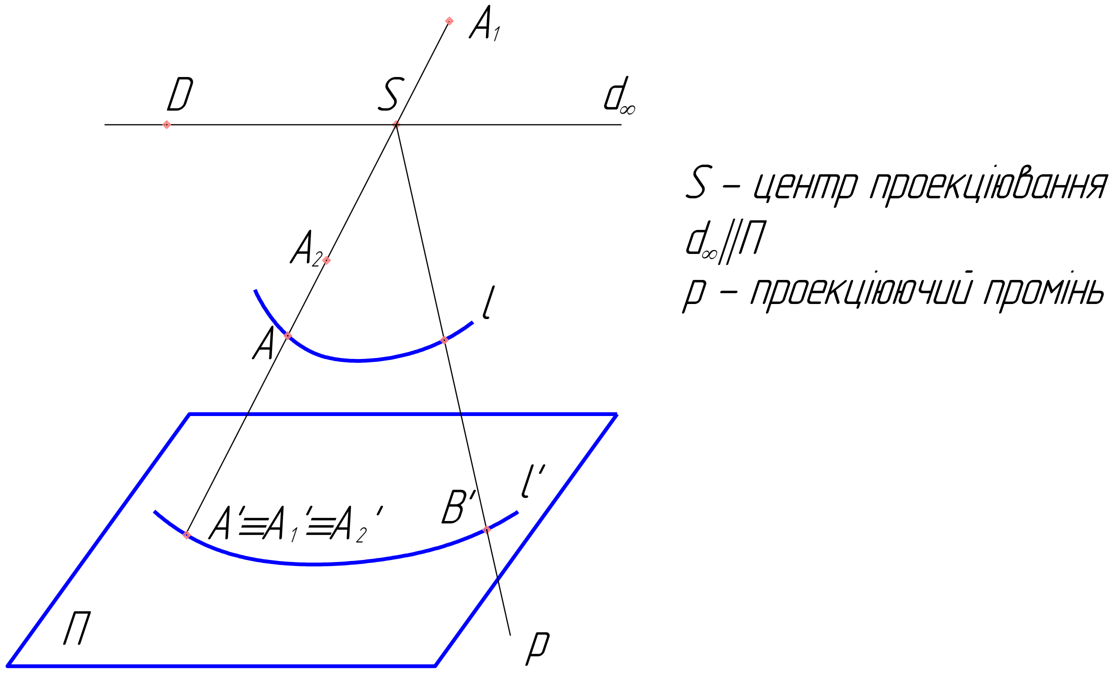


Рис. 1.1 Проекціювання кривої

Властивість центральної проекції – за центральної проекцією точки ***неможливо*** відновити положення точки в просторі.

Для того, щоб за центральною проекцією точки можна було відновити її положення в просторі, необхідні додаткові умови. Наприклад, це координати центра проекціювання і відстань від точки до її проекції уздовж променя проекціювання. Одна точка може мати будь-яку кількість проекцій залежно від вибору центра проекціювання (Рис. 1.2).

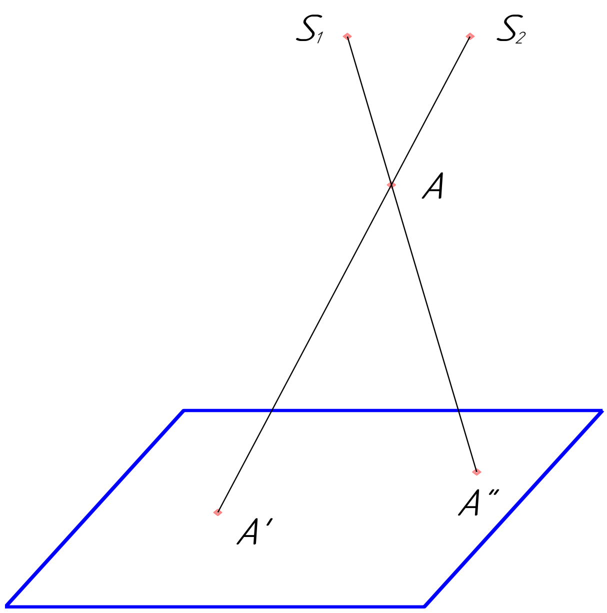


Рис. 1.2 Центральне проекціювання точки

Паралельні проекції.

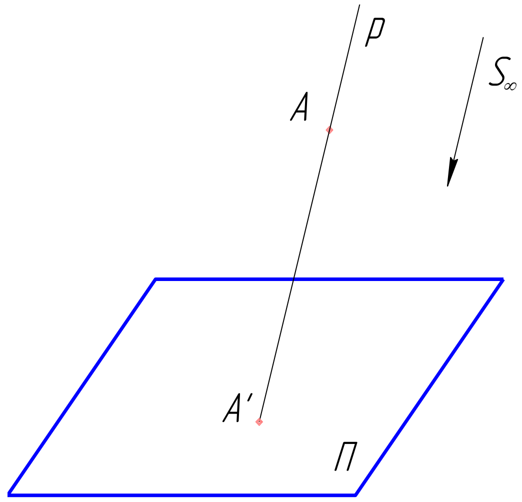
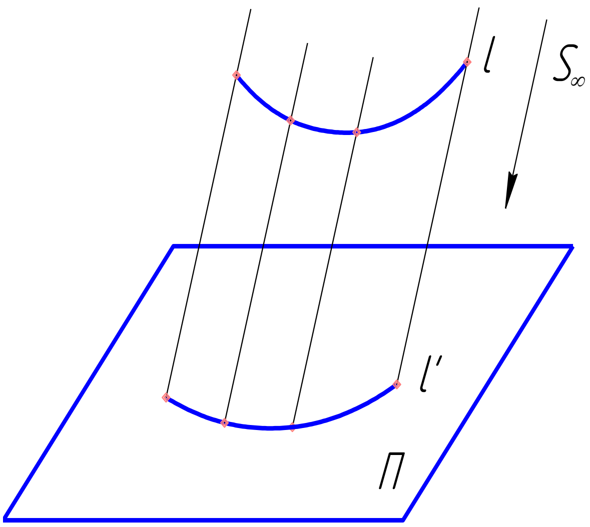


Рис. 1.3 Паралельне проекціювання точки

Якщо помістити центр проекціювання в безкінечність, промені проекціювання стануть паралельними (Рис. 1.3). Проекції із взаємно паралельними променями проекціювання називаються паралельними проекціями.

Позначимо $\boldsymbol{S_\infty}$ напрямок проекціювання. Тоді перетин променя $\boldsymbol{p \| S_\infty}$, який проходить через точку ***A***, з площиною ***П*** дає проекцію ***A'*** точки ***A*** на площину ***П.***



Для побудови паралельної проекції лінії ***l*** необхідно одержати проекції всіх її точок на площину. При цьому проекціюючі промені, паралельні один одному, утворять циліндричну поверхню. Тому паралельне проектування іноді називають ***циліндричним*** (Рис. 1.4).

Центральне проекціювання за тією ж причиною називають ***конічним***.

Рис. 1.4 Паралельне проекціювання кривої

Якщо напрямок проекціювання перпендикулярний площині проекцій – проекціювання називається ***прямокутним***. В інших випадках – ***косокутним***.

1.4 Основні властивості центральних і паралельних проекцій

- у даній системі проекціювання кожна точка простору має єдину проекцію;
- проекція прямої лінії - пряма лінія;
- якщо точка $\boldsymbol{A}$ належить лінії $\boldsymbol{l}$ $\boldsymbol{(A \in l)}$, то проекція $\boldsymbol{A'}$ точки належить проекції $\boldsymbol{l'}$ лінії ($\boldsymbol{A' \in l'}$);
- пряма, паралельна площини проекцій, паралельна своїй проекції на цю площину.

1.5 Додаткові властивості паралельних проекцій

- лінія, що лежить у площині, паралельній площині проекцій, проекціюється на неї без спотворення;
- проекції взаємно паралельних прямих паралельні;
- відношення проекцій відрізків прямої дорівнює відношенню самих відрізків (Рис. 1.5);

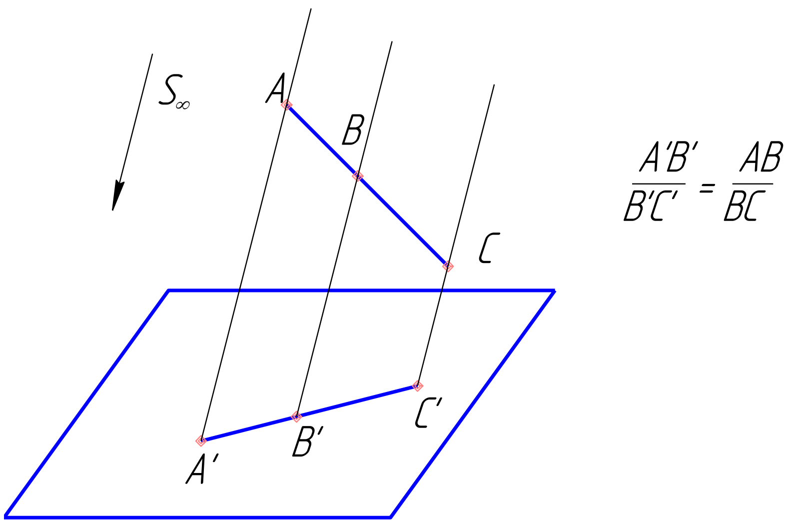


Рис. 1.5

- Відношення проекцій відрізків паралельних прямих дорівнює відношенню цих відрізків (Рис. 1.6);

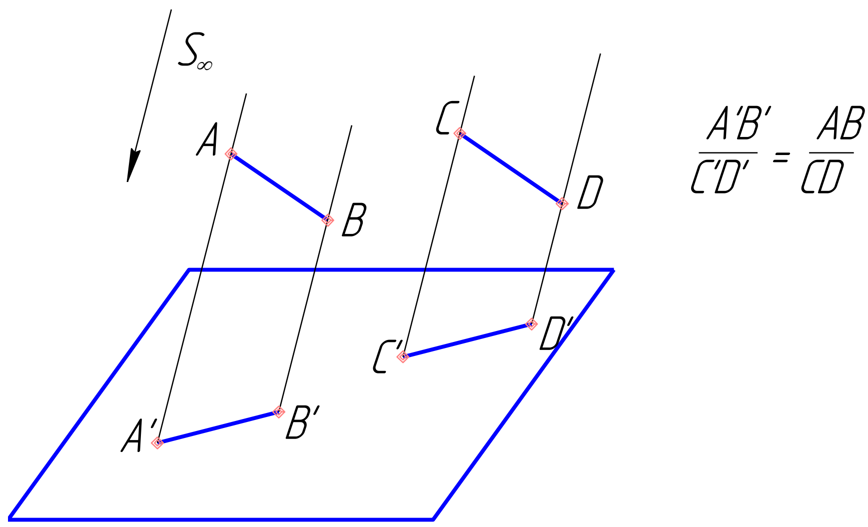


Рис. 1.6

1.6 Ортогональна система проекціювання. Точка в просторі

У нарисній геометрії, як взагалі в інженерній графіці, як база відліку використовується ортогональна система координат, утворена трьома взаємно перпендикулярними (ортогональними) площинами проекцій:

Π_1 – горизонтальної;

Π_2 – фронтальної;

Π_3 – профільної.

Ортогональну систему координат інакше називають декартовой на честь французького філософа і математика Рене Декарта (XV століття).

Лінія x перетину горизонтальної площини Π_1 із фронтальною площиною Π_2 ($x = \Pi_1 \cap \Pi_2$) називається віссю ***абсцис;***

Лінія z перетину фронтальної площини Π_2 із профільною площиною Π_3 ($z = \Pi_2 \cap \Pi_3$) називається віссю ***аппликат***;

Лінія y перетину горизонтальної площини Π_1 із профільною площиною Π_3 ($y = \Pi_1 \cap \Pi_3$) називається віссю ***ординат***.

Проекціювання виконується в напрямках перпендикулярних площинам проекцій.

Положення точки ***A*** в просторі визначено, якщо визначені її координати ***x; y; z*** у декартовой системі координат (Рис. 1.7).

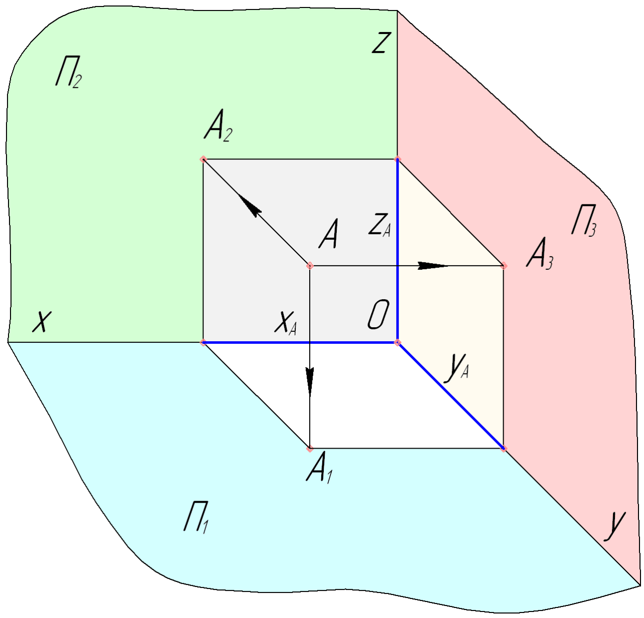


Рис. 1.7 Ортогональне проекціювання точки

При цьому проекціювання точки на площини проекцій дає її проекції

- $\boldsymbol{A_1}$ на горизонтальну ПП;
- $\boldsymbol{A_2}$ на фронтальну;
- $\boldsymbol{A_3}$ на профільну.

На цих площинах проекції визначені парами координат:

на $\boldsymbol{\Pi_1}$ – ***x*** і ***y***;

на $\boldsymbol{\Pi_2}$ – ***x*** і ***z***;

на $\boldsymbol{\Pi_3}$ – ***y*** і ***z***.

Звідси видно, що будь-які пари проекцій точки в ортогональній системі проекціювання містять всю необхідну інформацію для визначення положення точки в просторі.

1.7 Комплексний рисунок

Якщо ортогональну систему координат із проекціями точки ***A*** розсікти уздовж осі ***y*** і потім повернути горизонтальну площину проекцій $\boldsymbol{\Pi_1}$ навколо осі ***x*** до сполучення із фронтальною площиною проекцій $\boldsymbol{\Pi_2}$, потім повернути профільну площину проекції $\boldsymbol{\Pi_3}$ навколо осі $\boldsymbol{z}$ також до сполучення із фронтальною площиною проекцій $\boldsymbol{\Pi_2}$, отримаємо наступний плоский рисунок (Рис. 1.8):

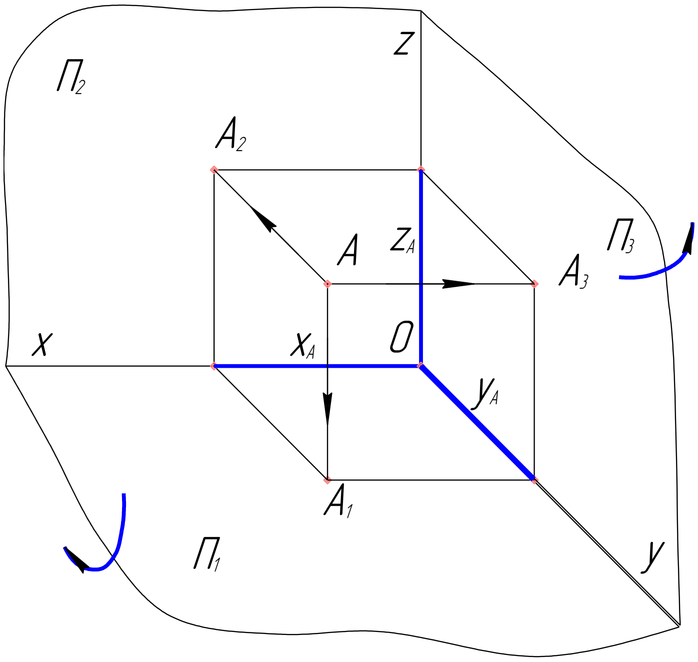


Рис. 1.8 Утворення плоского (комплексного) рисунка

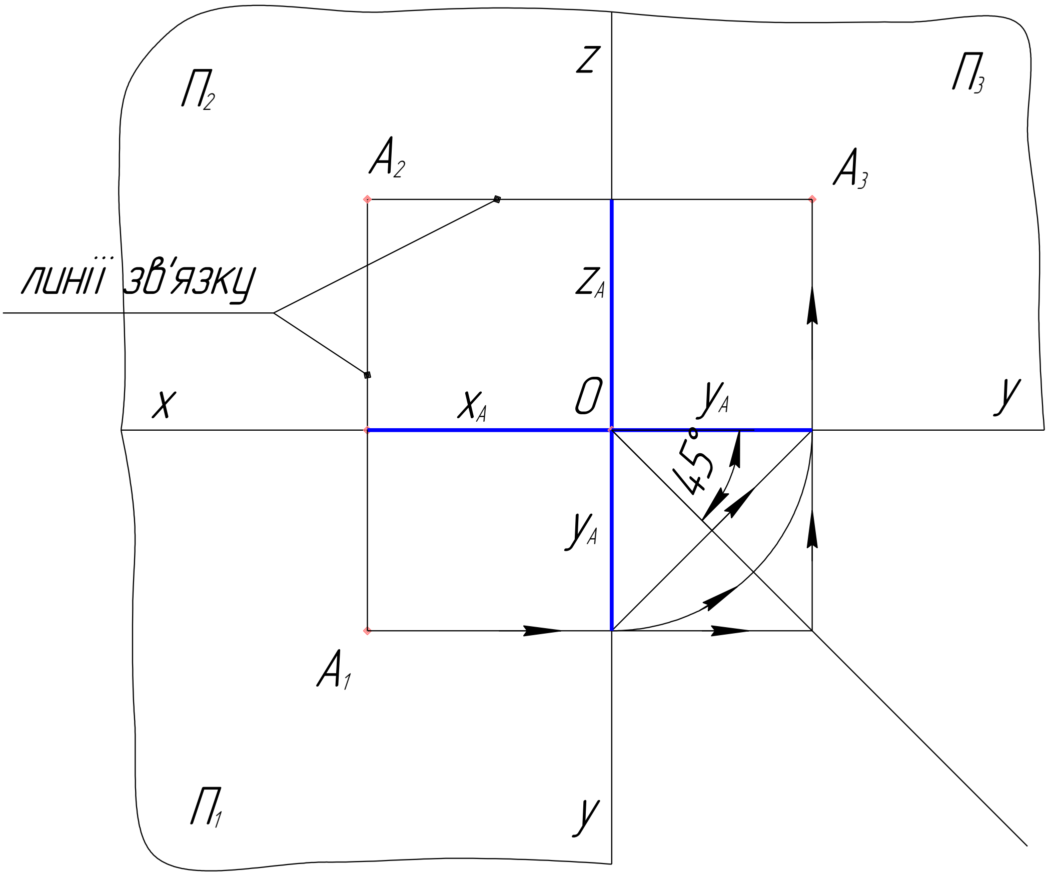


Рис. 1.9 Комплексний рисунок точки

Такий рисунок в нарисній геометрії прийнято називати эпюром Монжа.

1.8 Пряма загального положення

В аналітичній геометрії рівняння прямої має вигляд

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

У нарисній геометрії на комплексному рисунку пряму задають її проекціями (Рис. 1.10).

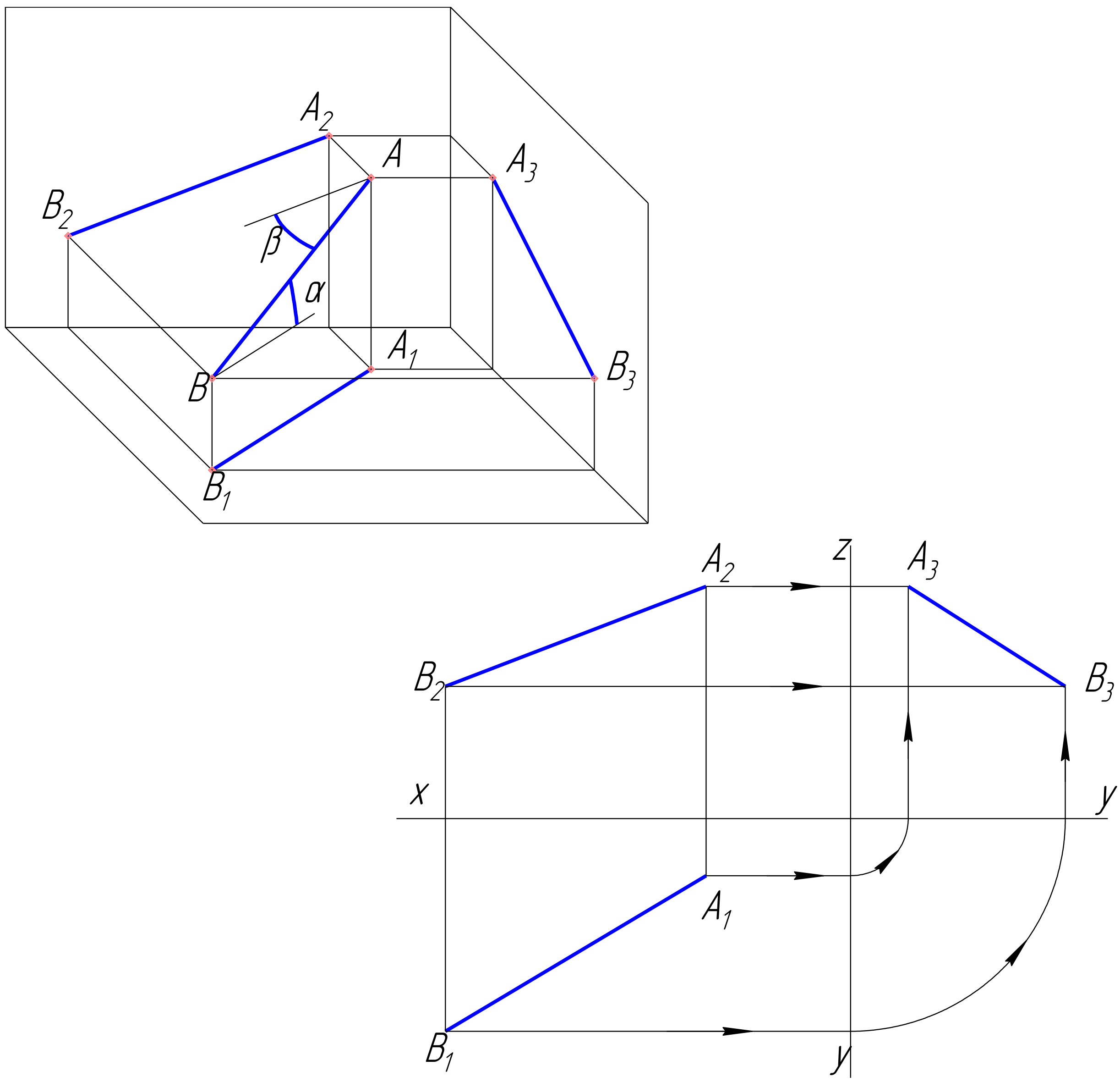


Рис. 1.10 Проекційний рисунок відрізка прямої

Властивості проекцій відрізка прямої:

- пряма $\boldsymbol{AB}$ – має прямі проекції $\boldsymbol{A_1B_1}$, $\boldsymbol{A_2B_2}$ і $\boldsymbol{A_3B_3}$;
- проекції прямої не більше самої прямої

$$A_1B_1 \le AB; \qquad A_2B_2 \le AB; \qquad A_3B_3 \le AB;$$

$$A_1B_1 = AB \cdot \cos\alpha; \qquad A_2B_2 = AB \cdot \cos\beta; \qquad A_3B_3 = AB \cdot \cos\gamma.$$

Якщо кути α, β, γ між прямою і площинами проекцій не дорівнюють нулю і не рівні 90°, маємо пряму загального положення.

1.9 Прямі лінії окремого положення

Пряма, паралельна горизонтальній площини проекцій Π_1 ($AB \parallel \Pi_1$), інакше – яка лежить в площині, паралельній Π_1, називається – ***горизонталь*** (Рис.1.11).

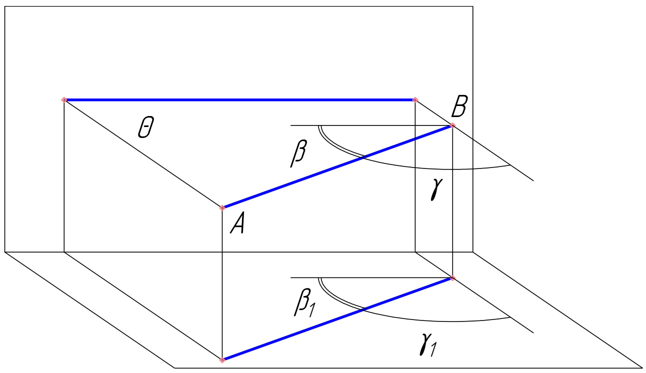


Рис. 1.11 Горизонталь

Проведемо через пряму AB площину $\Theta \parallel \Pi_1$. Бачимо, що $A_2B_2 \parallel x_{1,2}$.

Бачимо також, що $A_1B_1 = AB$, тому що маємо прямокутник A_1B_1AB, у якого протилежні сторони рівні і паралельні.

Тобто, говорять, що лінія AB проекціюється на Π_1 у натуральну величину. Кут β між прямою AB і фронтальною площиною проекцій Π_2, а також кут γ між прямою AB і профільною площиною проекцій Π_3 проекціюється в натуральну величину (Рис. 1.12).

Фронталь (фронтальна пряма) – пряма, паралельна фронтальній площині проекцій Π_2. Фронталь має фронтальну проекцію, рівну натуральній величині прямої. Кути між фронталлю, горизонтальною і профільною площинами на фронтальній площині проекцій відображаються в натуральну величину;

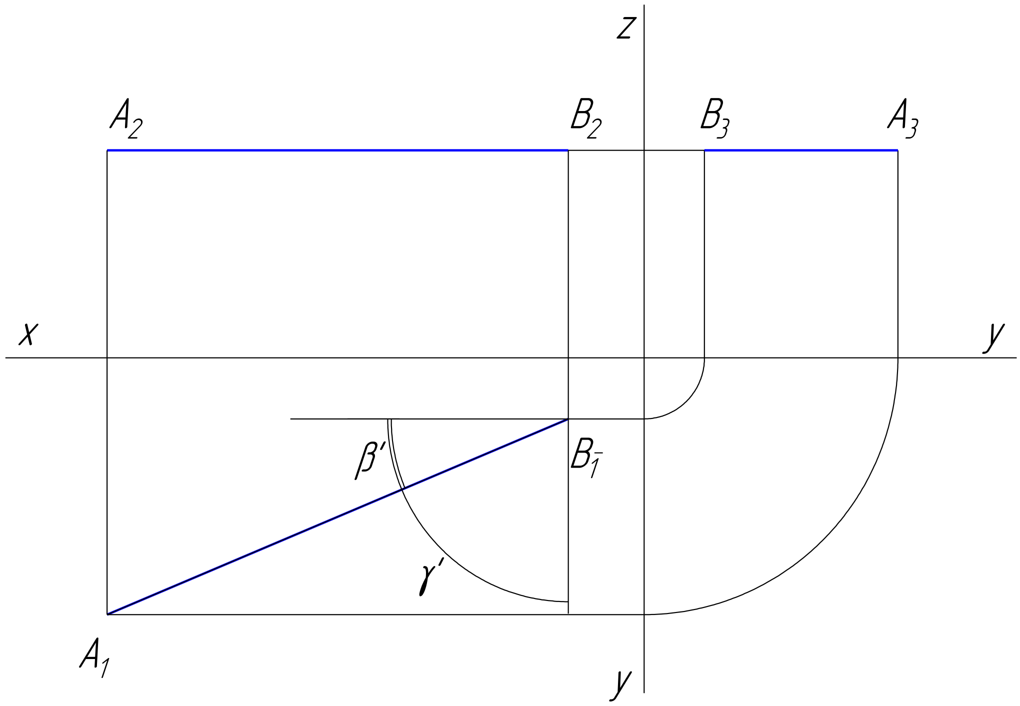


Рис. 1.12 Проекції горизонталі

Профільна пряма - пряма, паралельна профільній площини проекцій Π_3. Профільна пряма має профільну проекцію, рівну натуральній величині прямої. Кути між профільною прямою, горизонтальною і фронтальною площинами на профільну площину проекцій проекціюються в натуральну величину.

Лінія, паралельним двом площинам проекцій, буде перпендикулярною третій площини проекцій. Її проекція на цю площину буде точкою. Така лінія називається проектуючою до відповідної площини (Рис. 1.13).

Тут лінія ***AB*** – горизонтально проектуюча.

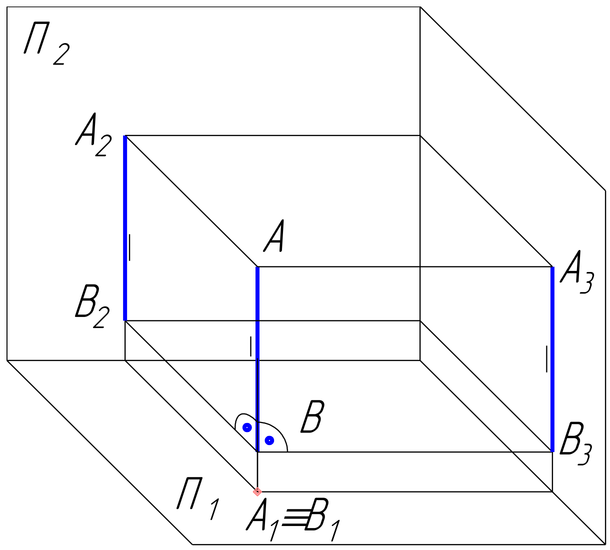


Рис. 1.13 горизонтально проектуюча пряма

Якщо є дві проекції лінії, що представляють собою відрізки, які збігаються з лінією зв'язку, (тобто ⊥ осі) і третьої проекції немає, вихідна лінія не визначена і може бути будь-якої форми (Рис. 1.14).

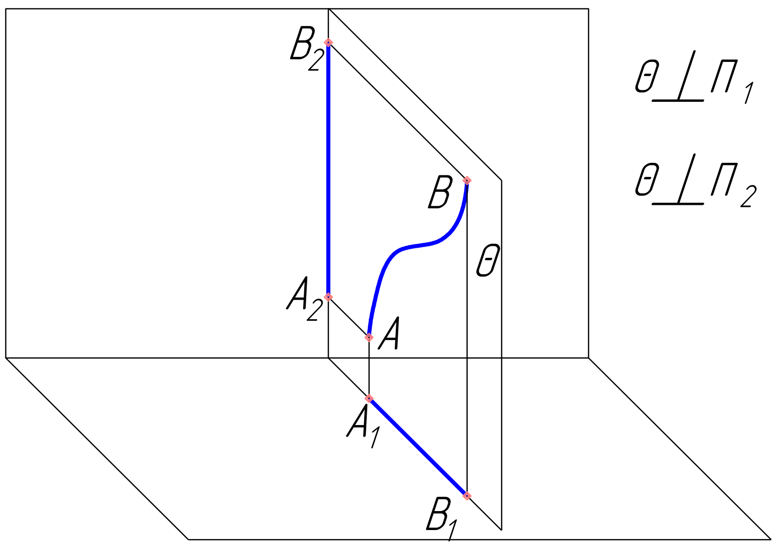


Рис. 1.14

1.10 Довжина відрізка загального положення. Кути нахилу прямої до площин проекцій

Визначення натуральної величини відрізка за його проекціями на площини координат засновано на побудові прямокутного трикутника, у якому гіпотенуза, це шукана натуральна довжина відрізка, а катети, один - це одна із проекцій відрізка на площину проекцій, інший катет – різниця висот кінців відрізка на іншій площині проекцій (Рис. 1.15).

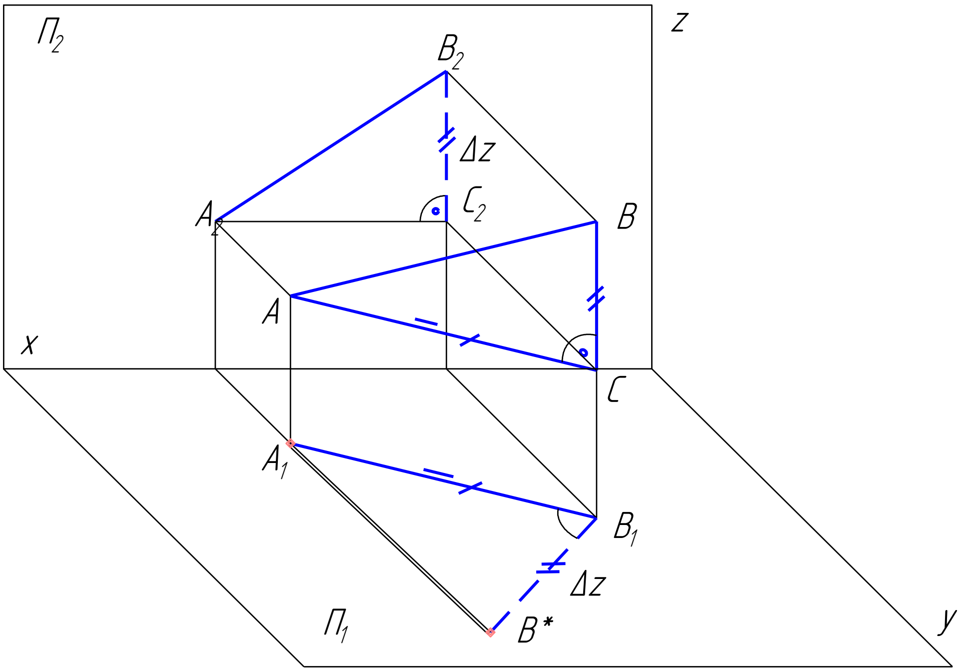


Рис. 1.15 Визначення натуральної довжини відрізка прямій

На проекційному рисунку ці елементи дадуть необхідні побудови (Рис. 1.16):

$BC = B_2C_2 \qquad т.к.$

$CC_2 \perp П_2; \qquad BB_2 \perp \Pi_{2;}$

$BC \perp \Pi_1; \qquad B_2C_2 \perp \Pi_1$

$B_2B \; II \; C_2C; \qquad B_2C_2 \; II \; BC$

Аналогічно - $AC = A_1B_1$

AB – гіпотенуза ***ΔABC***, де ***AC*** і ***BC*** – катети. $\boldsymbol{B_1 B^* = BC = B_2C_2}$

$A_1B^* = AB$

$B_2A^* = AB$

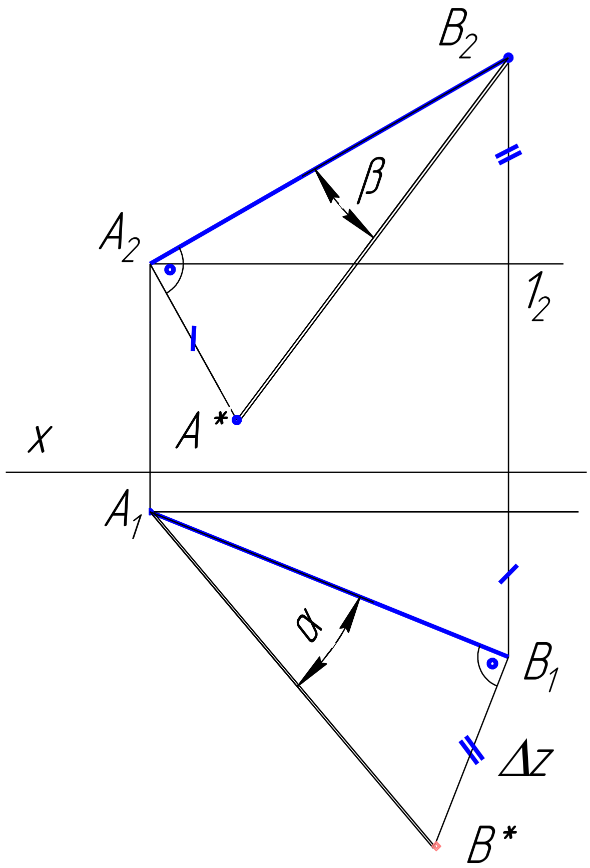


Рис. 1.16 Побудова, що дає натуральну довжину відрізка прямій

1.11 Кути між прямою і площинами проекцій

Кут між прямою загального положення й площиною проекцій може бути не більше 90^0 , тобто гострий або прямій (Рис. 1.17).

Сума кутів між прямою і двома будь-якими площинами проекцій не більше 90^0.

$\alpha + \beta \le 90°$

Для ліній окремого положення сума кутів:

горизонталі $\beta + \gamma = 90°$

фронталі $\alpha + \gamma = 90°$

профільної $\alpha + \beta = 90°$

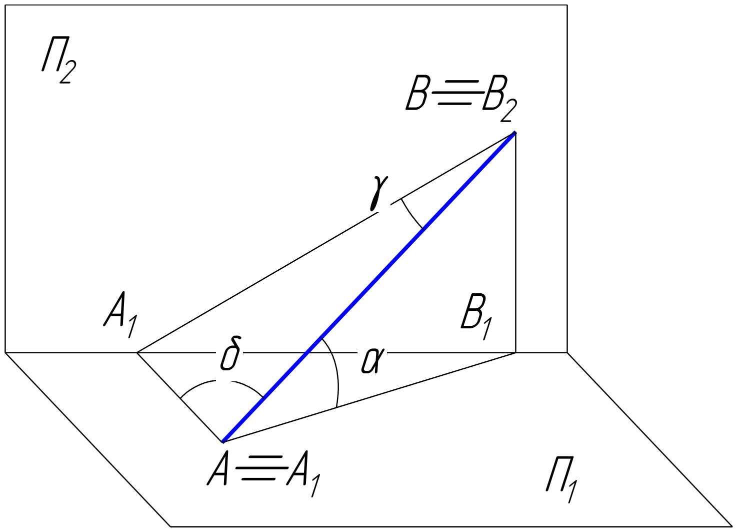


Рис. 1.17 Кути між прямою і площинами проекцій

1.12 Взаємне положення точки і прямої

Якщо точка лежить на прямій, її однойменні проекції належать однойменним проекціям прямої. Якщо дві будь-які проекції точки лежать на двох таких же проекціях прямої, тоді точка належить прямій. На рисунку 1.18 С належить прямій ***AB***.

У загальному випадку, якщо точка належить будь-якій фігурі - лінії або поверхні, тоді проекції точки лежать на відповідних проекціях фігури.

Одна проекція точки може виявитися такою, що належить тій же проекції прямої, однак, якщо будь-яка інша проекція точки не лежить на аналогічній проекції прямої, тоді точка не належить прямій (Рис. 1.18, 1.19).

Приклади:

На фронтальній площині проекцій (Рис. 1.18, 1.19) ***D*** лежить на фронтальній проекції лінії ***AB*** ($D_2 \in A_2B_2$), але на горизонтальній площині проекцій $D_1 \notin A_1B_1$. Звідси, точка ***D*** не належить лінії ***AB.*** На лінії ***AB*** лежить (Рис. 1.18, 1.19) точка ***C*** і її фронтальна проекція C_2 збігається із фронтальною проекцією D_2 точки ***D***. Однак, горизонтальні проекції C_1 й D_1 не збігаються, отже, ці точки не збігаються в просторі. ***D***, дивлячись у напрямку фронтальної площини проекцій, лежить перед ***C.***

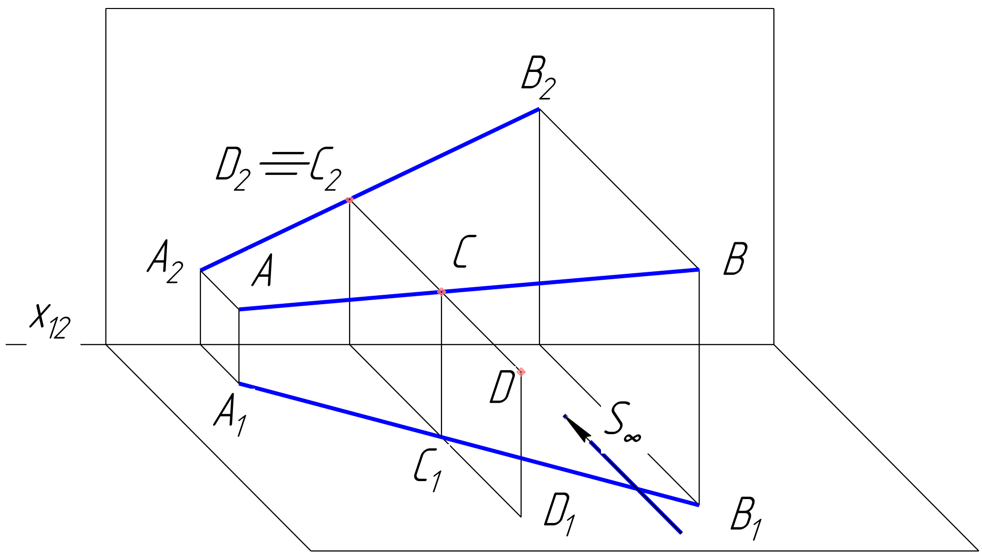


Рис. 1. 18 Точка перед прямою

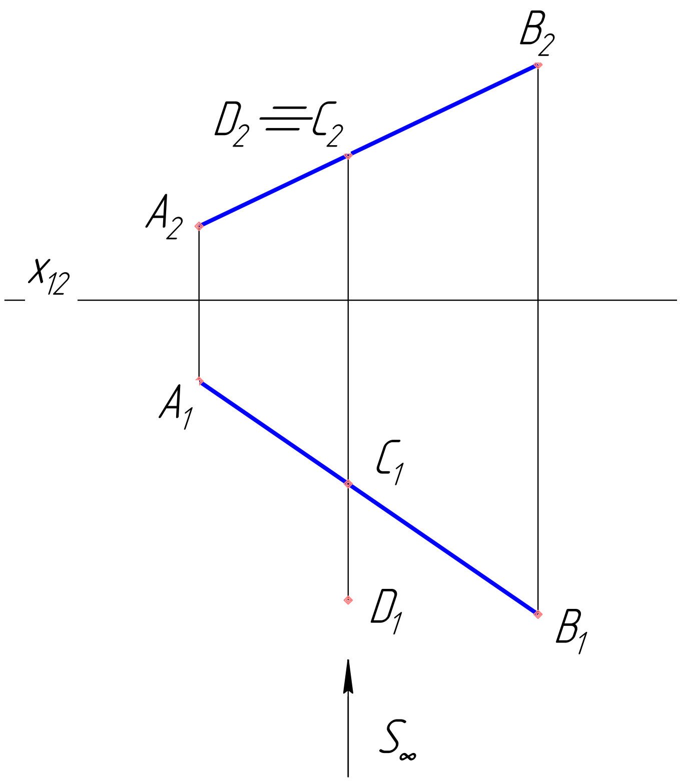


Рис. 1.19 Точка перед прямою на комплексному рисунку

Точки, проекції яких збігаються на одній площині проекцій і не збігаються на іншій площині, називаються конкуруючими.

1.13 Взаємне положення двох прямих

У випадку загального положення двох прямих друг стосовно друга, кути між проекціями цих прямих можуть приймати будь-яке значення від 0^0 до 90^0.

Існують і мають корисні властивості для розв'язання задач нарисної геометрії окремі взаємні положення прямих.

Взаємно паралельні прямі. Якщо дві будь-які проекції двох прямих паралельні, тоді прямі паралельні в просторі.

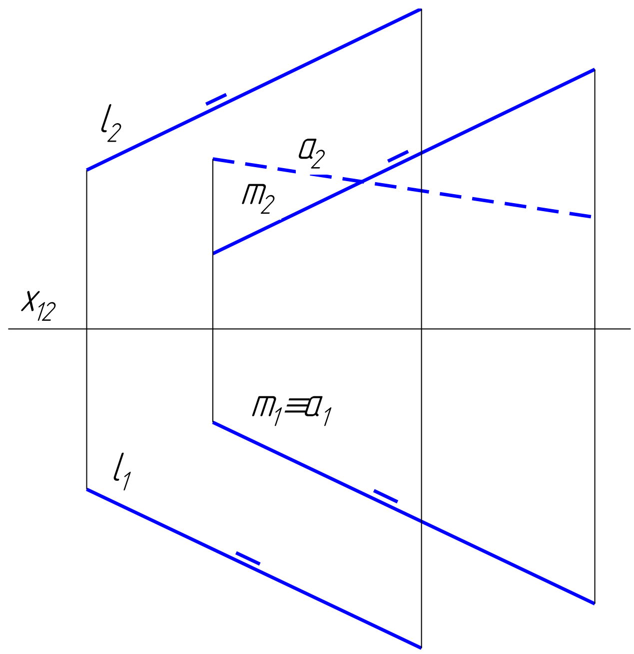


Рис. 1.20 Паралельні прямі

Прямі ***l*** і ***m*** паралельні ($\boldsymbol{l} \parallel \boldsymbol{m}$) (Рис.1.20).

Прямі ***l*** й ***a*** не паралельні, тобто схрещуються ($\boldsymbol{l} \dot{-} \boldsymbol{a}$), незважаючи на те, що горизонтальні проекції ліній ***l*** й ***a*** паралельні. Лінії ***l*** і ***a*** не паралельні, тому що проекції цих лінії на фронтальну площину не паралельні.

Прямі, які перетинаються. Якщо лінії[1] перетинаються в просторі, тоді проекції точок перетину ліній є точками перетину проекцій ліній на площинах проекцій. Інакше, лінії перетинаються в просторі, якщо на двох будь-яких площинах перетинаються проекції цих ліній (Рис.1.21).

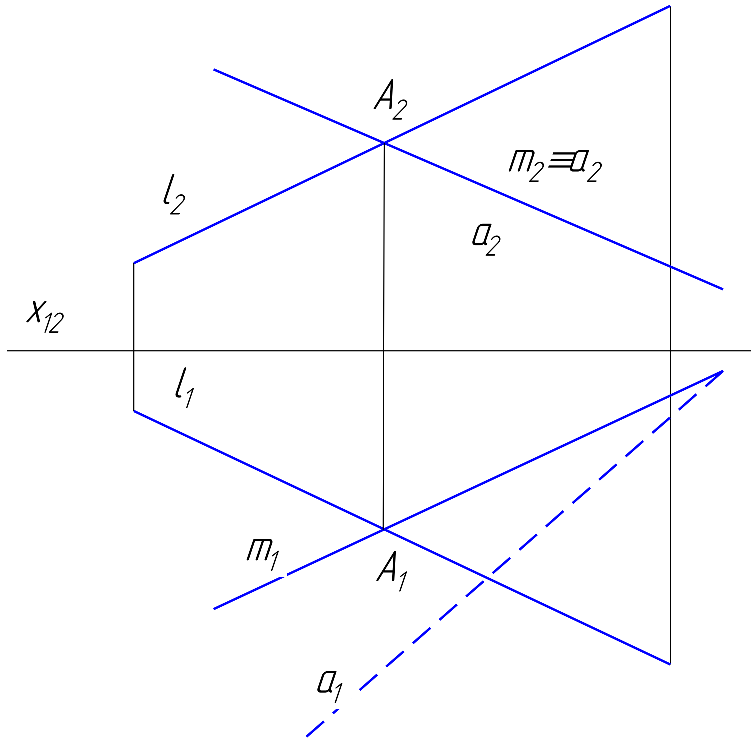


Рис. 1.21 Прямі, які перетинаються і мимобіжні прямі

Прямі l і m перетинаються ($l \cap m$) в точці А.

Прямі l і а не перетинаються. Ці прямі перехресні.

Для проекційного рисунка умовою перетину двох ліній є знаходження точок перетину проекцій цих ліній на двох будь-яких площинах проекцій на одній лінії зв'язку.

Мимобіжні прямі. Мимобіжні прямі не перетинаються і не паралельні одна одній в просторі. Точки перетину проекцій двох мимобіжних прямих на двох будь-яких площинах проекцій не лежать на одній лінії зв'язку.

[1] - строго кажучи, це відноситься до будь-яких прямих або кривих линій

Тема 2 Аксонометричні проекції

2.1 Основні поняття та визначення

Аксонометрія – вимірювання по осях.

Комплексні ортогональні проекції мають ту перевагу, що в них два виміри, паралельні відповідній площині проекцій, проектуються на цю площину без скорочення, а третій, перпендикулярний до цієї площини, проектується в точку. Зважаючи на це, досить просто побудувати комплексний рисунок, за яким легко визначити розміри предмета і виготовляти деталі на виробництві.

Проте комплексні рисунки не мають достатньої наочності, бо в них просторові форми предмета набувають умовного зображення у вигляді комплексу окремих ортогональних проекцій. Треба мати досить розвинуте просторове уявлення, щоб за цими проекціями відтворити в уяві справжню форму предмета.

Аксонометричні проекції порівняно з комплексними мають істотну перевагу – наочність. Тому ці проекції досить широко застосовуються в науці, техніці, в побуті.

Суть аксонометричного проекціювання полягає в тому, що предмет відносять до системи координатних осей і проектують його разом з цими осями на вибрану площину аксонометричних проекцій.

На рис. 2.1 точку A віднесено до координатних осей $Oxyz$ і разом з ними спроектовано на площину Π'. На площині Π' маємо осі $O'x', O'y', O'z'$, що є зображеннями координатних осей, і точку A', яка є аксонометричним зображенням точки A. Запам'ятаємо деякі нові терміни, що стосуються аксонометричного проекціювання.

Площина Π', на якій будують аксонометричну проекцію, називається *площиною аксонометричних проекцій*. Осі $O'x', O'y', O'z'$, які утворилися внаслідок проекціювання координатних осей, називаються *аксонометричними осями.* Точка $O'-$ *початок аксонометричних осей,* $s-$ *напрям аксонометричного* *проекціювання.* Точка A'– аксонометрична проекція точки A, а точка A_1' – *вторинна проекція точки* A.

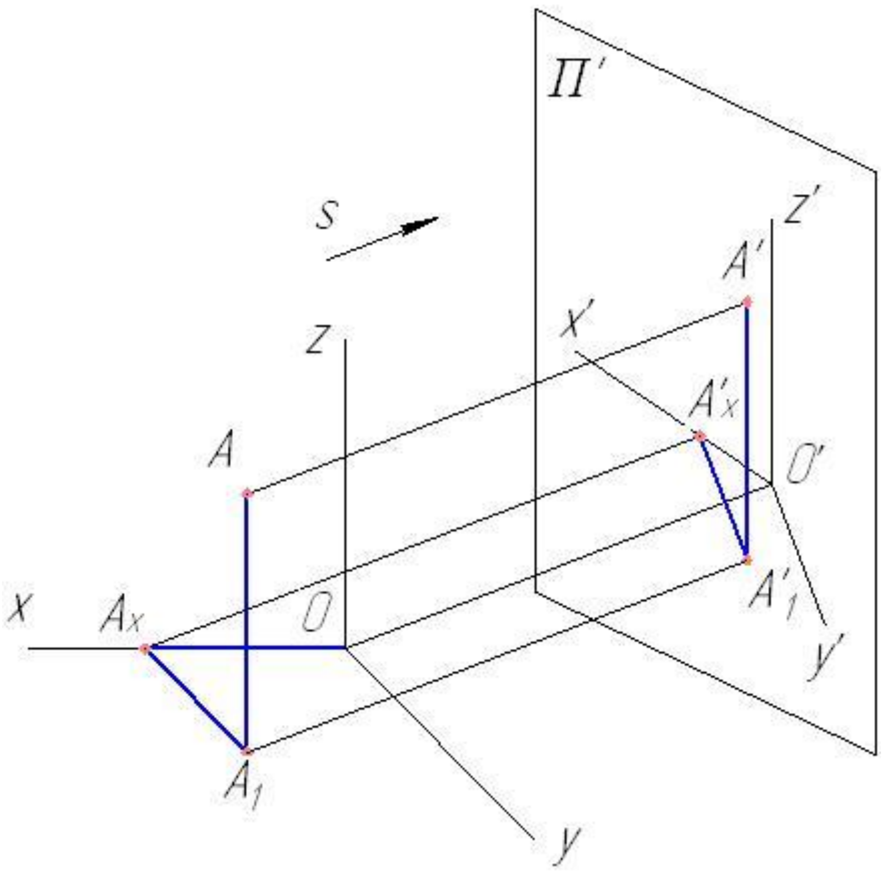


Рис. 2.1 Схема отримання аксонометричної проекції

Вторинною проекцією називається аксонометричне зображення не самої точки, а однієї з її проекцій (у розглянутому випадку – горизонтальної).

Для того, щоб положення точки (або якогось іншого геометричного елемента) було визначеним на аксонометричному рисунку, треба, крім зображення самої точки, показати одну з її вторинних проекцій.

Залежно від напряму променів проекціювання і положення площини проекцій Π' аксонометричне зображення буде дещо спотворене, тобто кожний з його трьох основних вимірів буде або менший, або більший від натурального. ***Відношення довжини аксонометричної проекції відрізка координатної осі до довжини самого відрізка цієї осі в натурі називається коефіцієнтом***

(показником) спотворення. Коефіцієнти спотворення, які визначають величину спотворення відрізків по осях $O'x', O'y', O'z'$ і напрямках, паралельних їм, дорівнюють

$p = \frac{x'}{x} = \frac{O'A'_x}{OA_x}$; $q = \frac{y'}{y} = \frac{A'_x A'_1}{A_x A_1}$; $r = \frac{z'}{z} = \frac{A'_1 A'}{A_1 A}$. Отже, коефіцієнти спотворення показують, як змінюються координати точки при проекціюванні на площину аксонометричних проекцій.

При побудові аксонометричних проекцій проекціюючі промені можуть розміщатися у просторі або перпендикулярно, або з нахилом до площини аксонометричних проекцій. У першому випадку ці проекції називають прямокутними, а в другому – косокутними.

Якщо всі три коефіцієнти спотворення рівні між собою, то така аксонометрія називається *ізометричною*, або *ізометрією*. Аксонометрія при двох рівних коефіцієнтах спотворення і третьому, що не дорівнює їм, називається *диметричною*, або *диметрією*. Нарешті, коли всі три показники спотворення не дорівнюють один одному, це буде *триметрія*.

Ми будемо вивчати такі види аксонометричних проекцій: прямокутну ізометрію, прямокутну диметрію, косокутну фронтальну диметрію (ГОСТ 2.317-68).

2.2 Різновиди аксонометричних проекцій

Прямокутна ізометрія. Прямокутну ізометрію, або, скорочено, ізометрію, широко використовують у практиці креслення. В ізометричній прямокутній проекції (рис. 2.2) аксонометричні осі $O'x', O'y', O'z'$ утворюють одна з одною кути 120^0, а коефіцієнти спотворення по всіх трьох осях однакові і дорівнюють 0,82. Звичайно вісь $O'z'$ розміщують вертикально, а осі $O'x'$ і $O'y'$ – під кутом 30^0 до горизонтального напряму.

Щоб побудувати предмет в ізометрії, треба його лінійні розміри, паралельні координатним осям, помножити на коефіцієнт спотворення 0,82, тобто зменшити їх

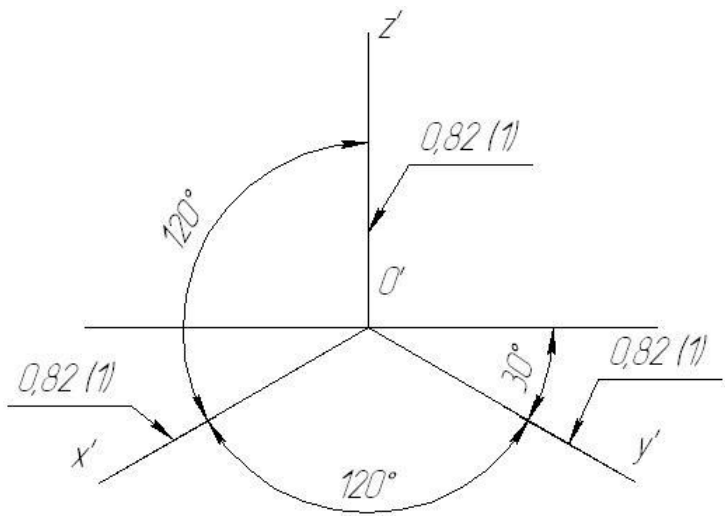


Рис. 2.2 Осі прямокутної ізометрії

відносно справжніх розмірів, а потім відкласти на аксонометричному рисунку. Таке зображення називається *нормальним*, або *точним*. Але на практиці побудову ізометрії спрощують: відкладають по осях x', y', z' і паралельно їм натуральні розміри предмета. Утворюється дещо збільшене зображення без порушення пропорційності його елементів, що не псує наочності. Таке зображення називається *збільшеним*. Це збільшення становить $\frac{1}{0,82} \approx 1,22$ рази.

Побудова ізометричної проекції многокутників. Оскільки плоска фігура має два виміри, то в побудові її аксонометричної проекції використовують дві осі залежно від того, якій площині проекцій фігура паралельна.

Будуючи аксонометричну проекцію квадрата або прямокутника, доцільно осі координат сумістити із сторонами цих фігур, при побудові правильного многокутника, доцільно сумістити центр симетрії фігури з центром аксонометричних проекцій.

На рис. 2.3 показано побудування ізометрії плоскої фігури, яка належить горизонтальній, фронтальній та профільний площині проекцій.

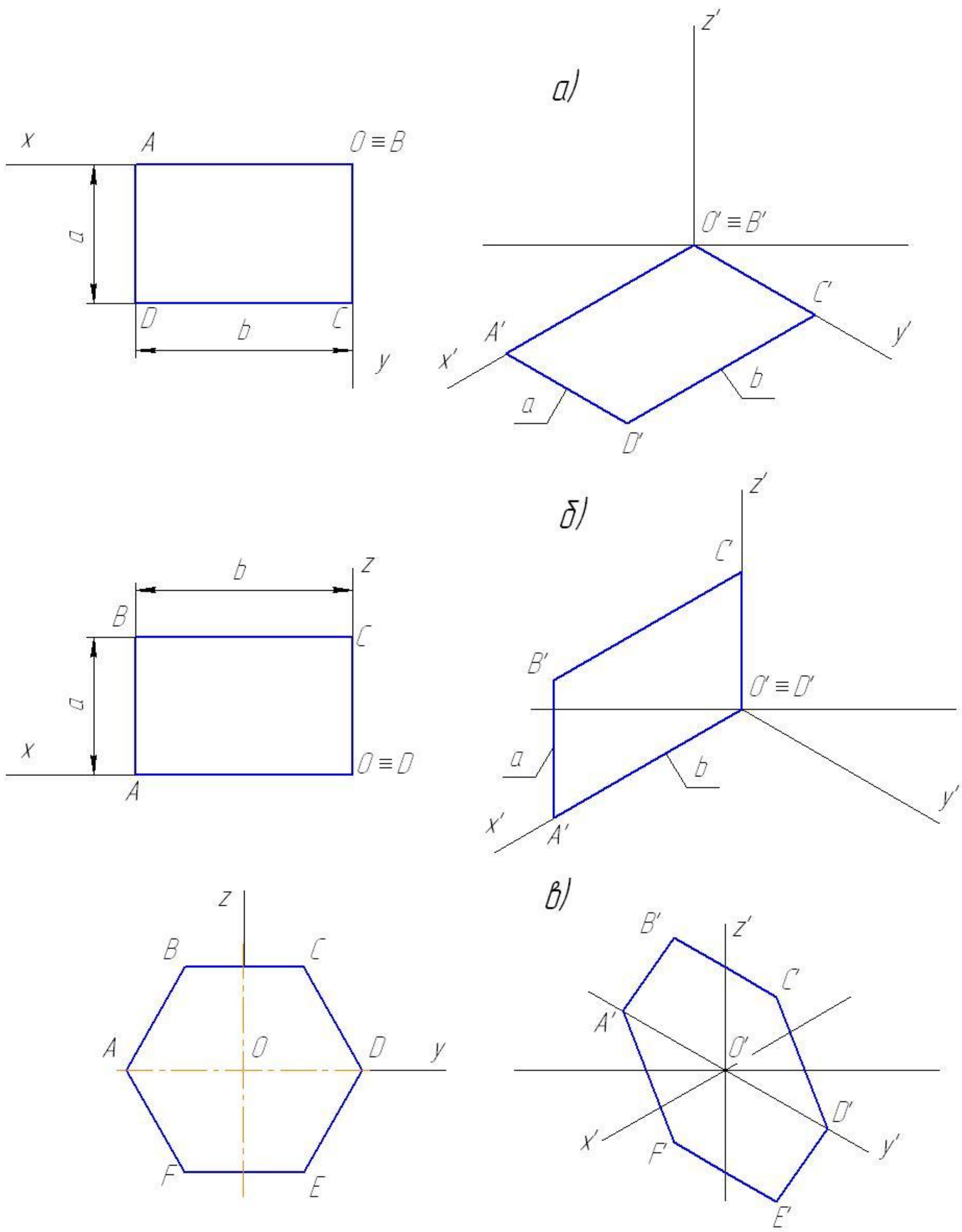


Рис. 2.3 Ізометрія плоскої фігури:

а) прямокутник належить горизонтальній площині проекцій;

б) прямокутник належить фронтальній площині проекцій;

в) правильний шестикутник належить профільній площині проекцій

Побудова ізометричної проекції кола. Ізометричними проекціями кіл, розташованих у площинах проекцій або площинах, паралельних їм, є еліпси з однаковим співвідношенням осей (рис. 2.4). Великі осі цих еліпсів дорівнюють $1,22d$, а малі – $0,71d$, де $d-$ діаметр зображуваного кола. Напрям осей еліпсів залежить від положення кола, яке проекціюється. Є таке правило: *велика вісь еліпса завжди перпендикулярна до тієї аксонометричної осі, якої немає в площині кола, а мала – збігається з цією віссю або паралельна їй.*

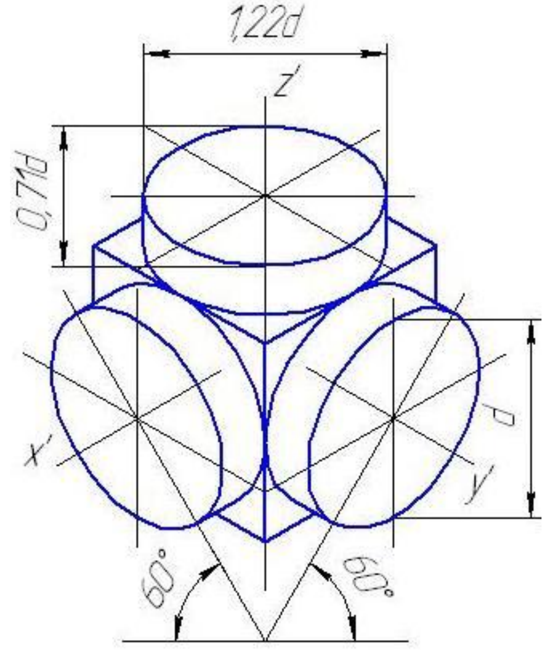


Рис. 2.4

Прямокутна диметрія. Прямокутною диметрією називається аксонометрична проекція з однаковими показниками спотворення по двох осях. За ГОСТом у кресленні застосовують прямокутну диметрію, в якої вісь $O'z'$ розміщена вертикально, вісь $O'x'$ нахилена під кутом $7^0 10'$, а вісь $O'y' -$ під кутом $41^0 25'$ до горизонтального напряму (рис. 2.5). Коефіцієнт спотворення по осях x' і z' дорівнює 0,94, а по осі $y' -$0,47. Але на практиці застосовують так звану збільшену диметрію з коефіцієнтами $p = r = 1$ і $q = 0,5,$ тобто по осях x' і z' або по напрямках їм паралельним, відкладають справжні розміри, а по осі $y' -$ розміри скорочують вдвічі. Техніка побудови симетричних проекцій аналогічна побудові ізометрій.

Косокутна фронтальна диметрія. Косокутна фронтальна диметрія (скорочено – фронтальна диметрія) характеризується вертикальним розміщенням

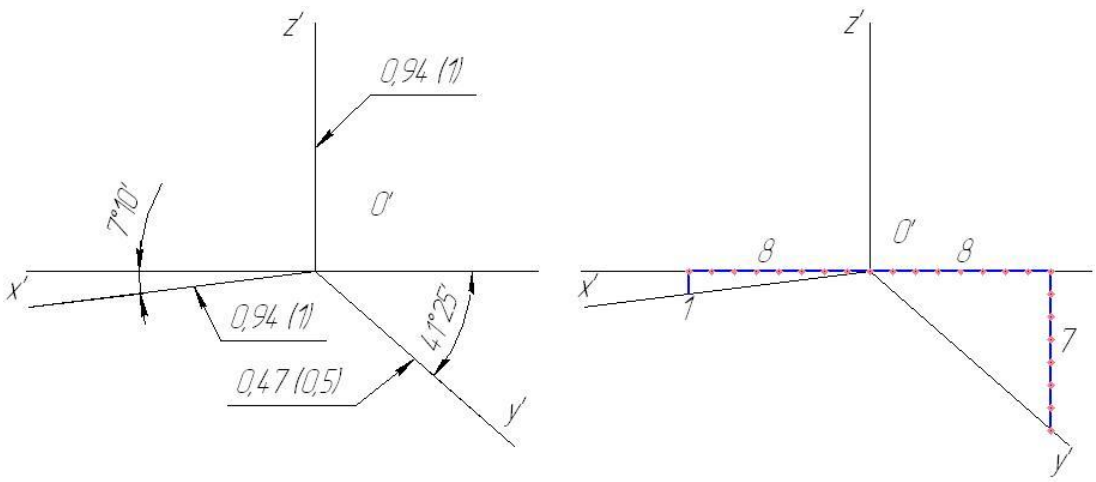


Рис. 2.5 Осі прямокутної диметрії

осі $O'z'$ і горизонтальним – осі $O'x'$. Вісь $O'y'$ у фронтальній аксонометрії нахилена до горизонтального напрямку під кутом 45^0 (рис. 2.6).

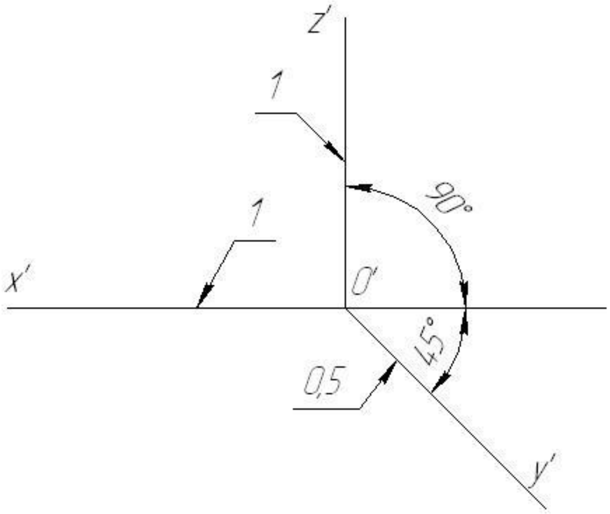


Рис. 2.6 Осі косокутної фронтальної диметрії

Коефіцієнти спотворення по осях $O'x'$ і $O'z'$ дорівнює одиниці ($p = r = 1$), а по осі $O'y' - q = 0,5$. Отже, всі фігури, розміщені паралельно фронтальній площині проекцій, зображуються у фронтальній диметрії без спотворення розмірів і кутів.

Тема 3 Площина

3.1 Способи завдання площини на комплексному кресленні

Площина, це поверхня, що задається рівнянням

$$Ax + By + Cz + d = 0$$

Це поверхня першого порядку, тому що змінні ***x, y, z*** присутні в рівнянні поверхні в першому ступені.

Положення площини може бути задано:

1. трьома точками (Рис. 3.1);

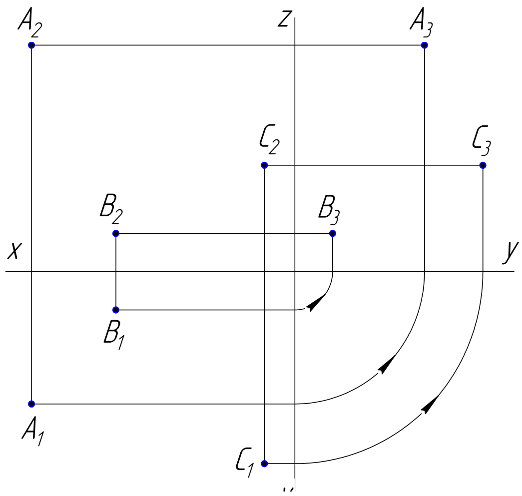


Рис. 3.1 Завдання площини трьома точками

2. прямою і точкою, яка не належить цій прямій (Рис. 3.2);

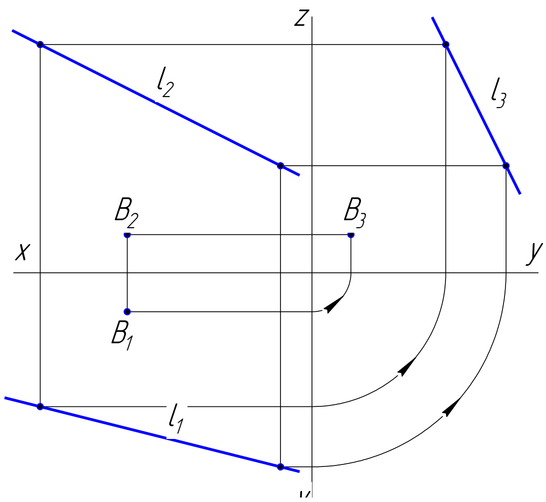


Рис. 3.2 Завдання площини точкою і прямою

3. двома прямими, які перетинаються (Рис. 3.3);

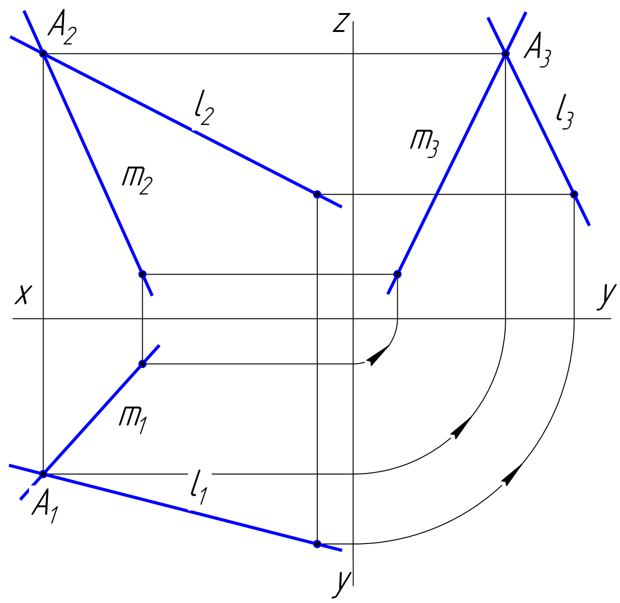


Рис. 3.3 Завдання площини двома прямими, які перетинаються

4. двома паралельними прямими (Рис. 3.);

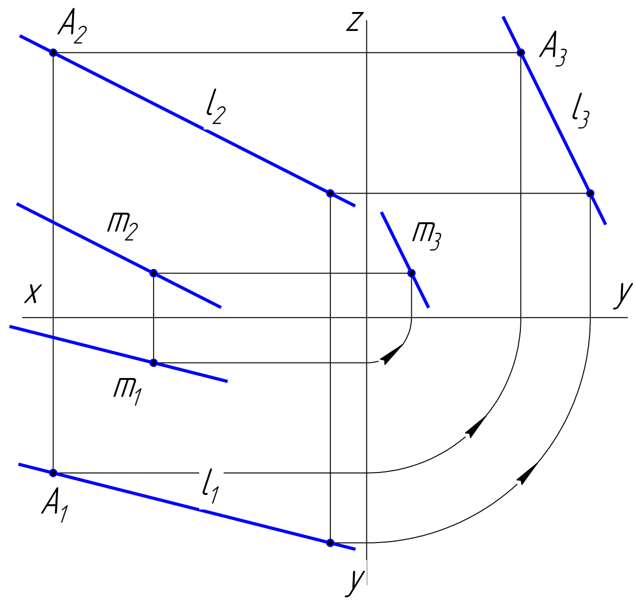


Рис. 3.4 Завдання площини двома паралельними прямими

5. відсіком площини (будь-яким многокутником) (Рис. 3.).

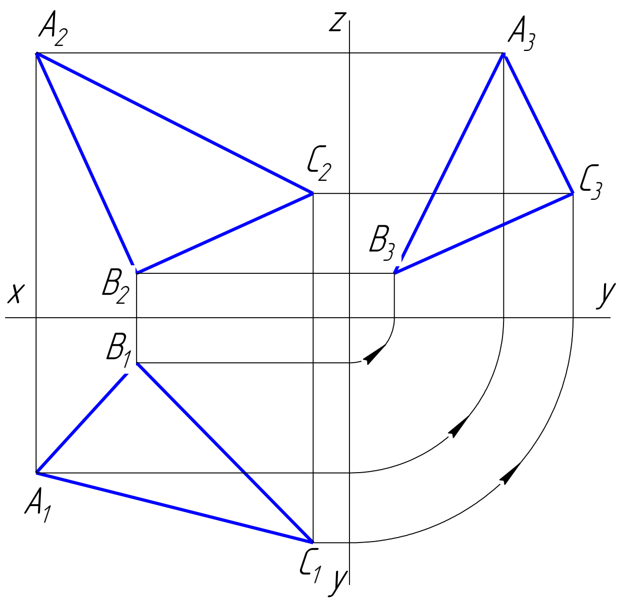


Рис. 3.5 Завдання площини відсіком (трикутником)

Базовий спосіб завдання площини – трьома точками. Інші – похідні, тому що можуть бути побудовані за заданими трьома точками.

У нарисній геометрії для багатьох задач зручним є завдання площини слідами її перетину із площинами проекцій. ***Сліди площини***, це лінії перетину площини із площинами проекцій (Рис. 3.6).

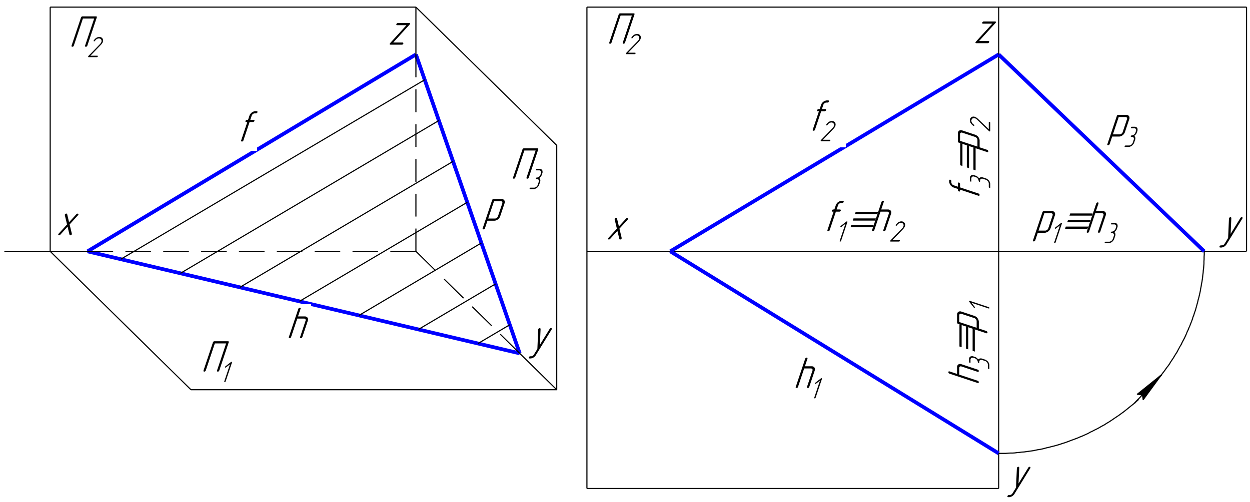


Рис. 3.6 Завдання площини слідами

Площина загального положення має три сліди: на горизонтальній, на фронтальній і на профільній площині проекцій. Два будь-яких сліди площини однозначно визначають її в заданій системі проекціювання. За заданими двома слідами площини може бути побудований третій слід.

3.2 Площини окремого положення

Проектуючі площини. Площина, перпендикулярна площині проекцій, у проекції на цю площину вироджується в пряму. У цю лінію вироджуються разом із площиною і всі фігури, що належать цій площині. Така площина називається проектуючою (Рис. 3.7).

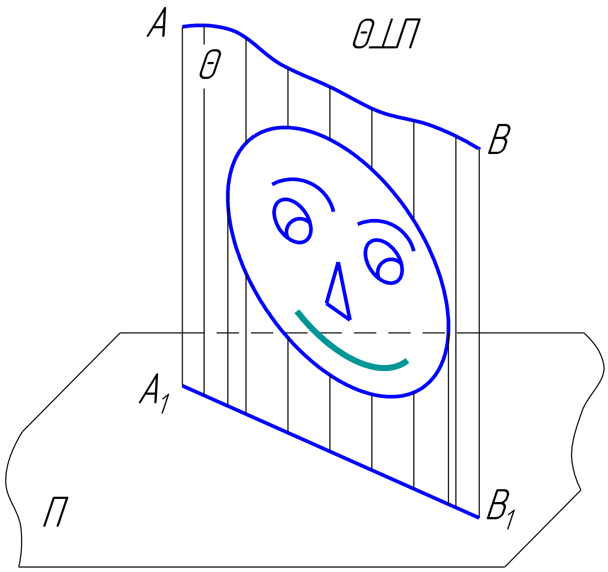


Рис. 3.7 Проектуюча площина

Властивість проектуючої площини збирати у свій слід всі належні їй фігури називається збиральною властивістю.

Линия, у яку вироджується проектуюча площина, є слідом площини на площину проекцій.

Горизонтально проектуюча площина – це площина, перпендикулярна горизонтальній площині проекцій (Рис. 3.8).

Тут ***h*** – горизонтальний слід площини, заданої прямими ***AB*** і ***AC***, які перетинаються. Інакше ця площина також може бути задана своїми слідами ***h*** і ***f***.

NB[2] **!** – фронтальний і профільний сліди горизонтально проектуючої площини перпендикулярні ***осі*** х і у відповідно.

Фронтально проектуюча площина – площина, перпендикулярна фронтальній площині проекцій

Профільно проектуюча площина – площина, перпендикулярна профільній площині проекцій.

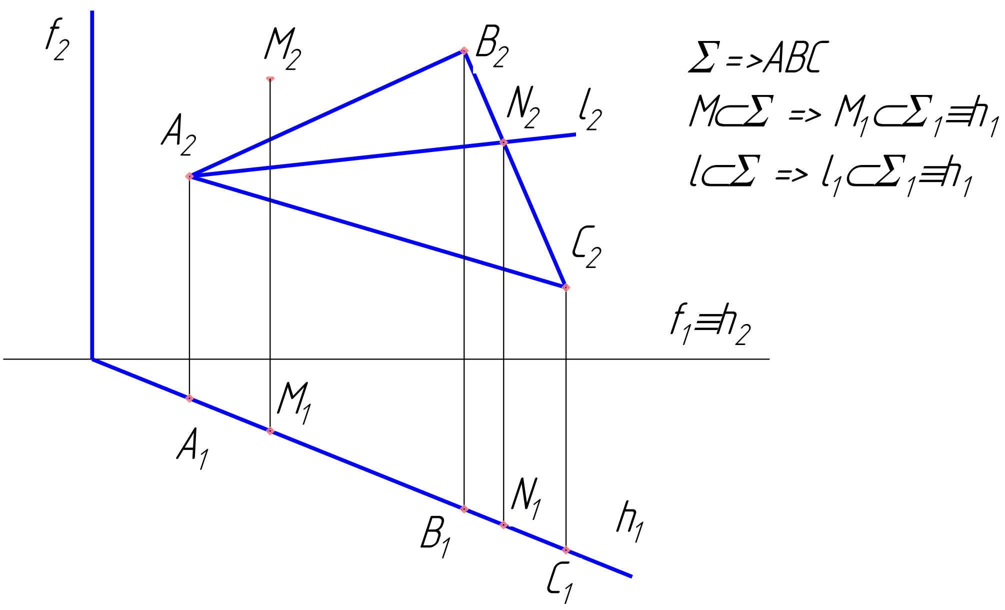


Рис. 3.8 Горизонтально проектуюча площина на комплексному рисунку

Всі точки і лінії на проектуючій площині належать сліду площини на площині проекції.

Площини рівня. Площини, $\perp$ до двох ПП називаються площинами рівня. Площини рівня паралельні своїм ПП.

Горизонтальна площина рівня $\boldsymbol{\Gamma} \| \boldsymbol{\Pi_1}$ (Рис. 3.9);

Фронтальна площина $\boldsymbol{\Phi} \| \boldsymbol{\Pi_2}$;

Профільна площина $\boldsymbol{\Psi} \| \boldsymbol{\Pi_3}$

---

[2] - NB – nota bene (лат.) – зверни увагу.

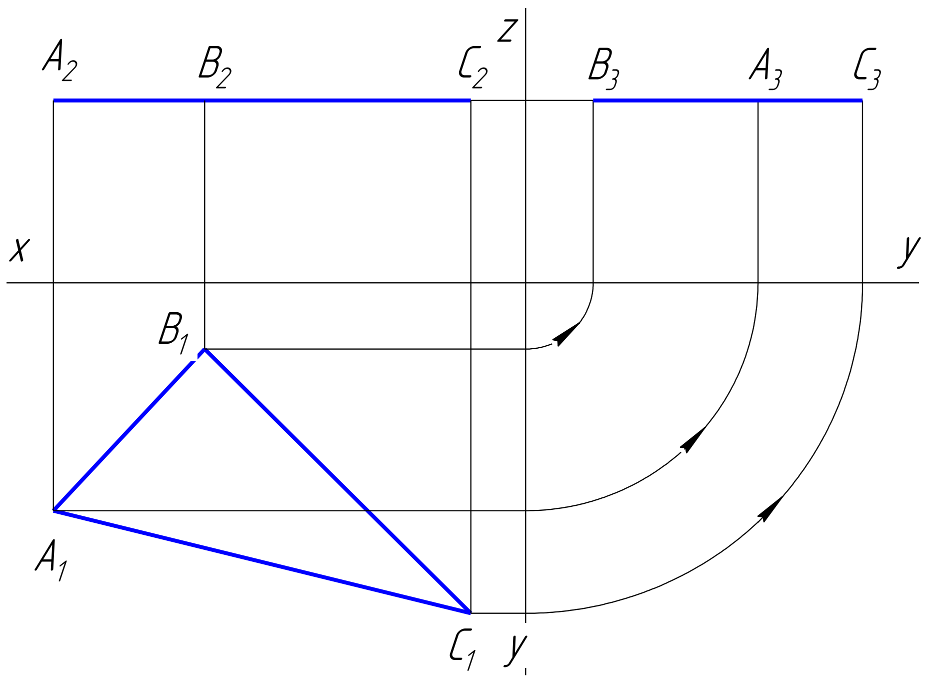


Рис. 3.9 Горизонтальна площина

3.3 Пряма на площині

Пряма належить площини, якщо вона:

- проходить через дві точки, що належать площини (Рис. 3.10);

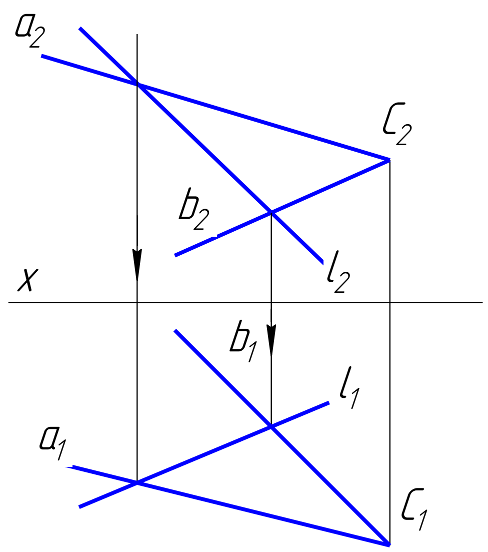


Рис. 3.10 Належність прямої площині

- проходить через одну точку на площині паралельно прямій, яка належить площині (Рис. 3.11);

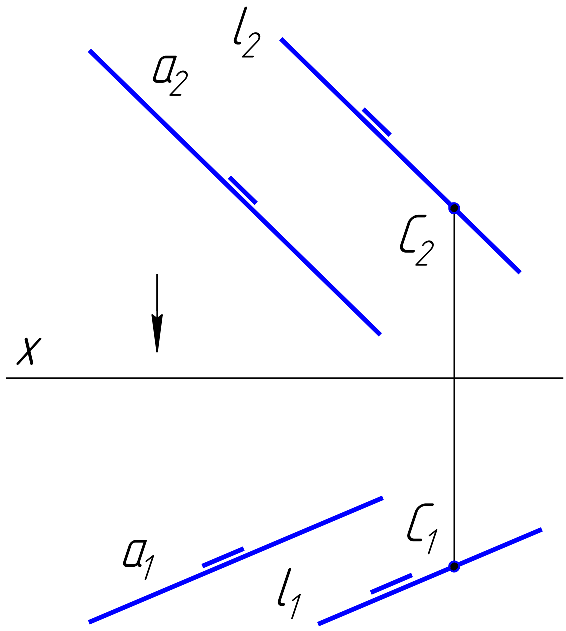


Рис. 3.11 Належність прямої площині

- проходить через одну точку на площині паралельно прямій, яка паралельна цій площині.

Приклад побудови прямої на площині (Рис. 3.12):

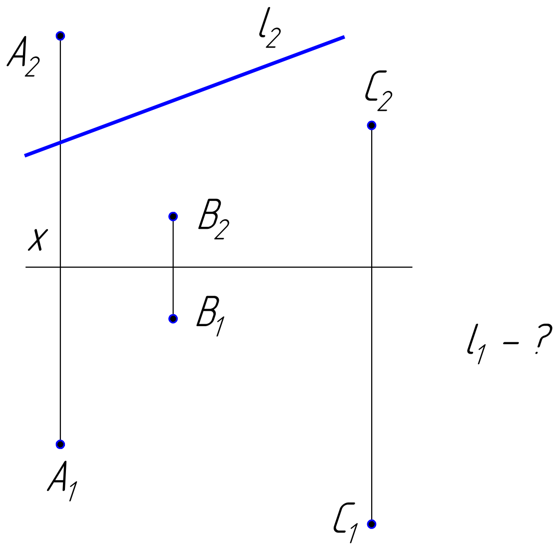


Рис. 3.12 Задача: побудувати на площині ***ABC*** пряму, задану фронтальною проекцією

3.4 Точка на площині

Точка лежить на площині, якщо вона належить будь-якій прямій на цій площині. Таким чином, для побудови точки на площині необхідно спочатку побудувати допоміжну пряму на площині таку, щоб вона проходила через задану проекцію шуканої точки, потім знайти точку на побудованій допоміжній лінії уздовж лінії зв'язку.

Приклади побудови точки на площині (Рис. 3.1):

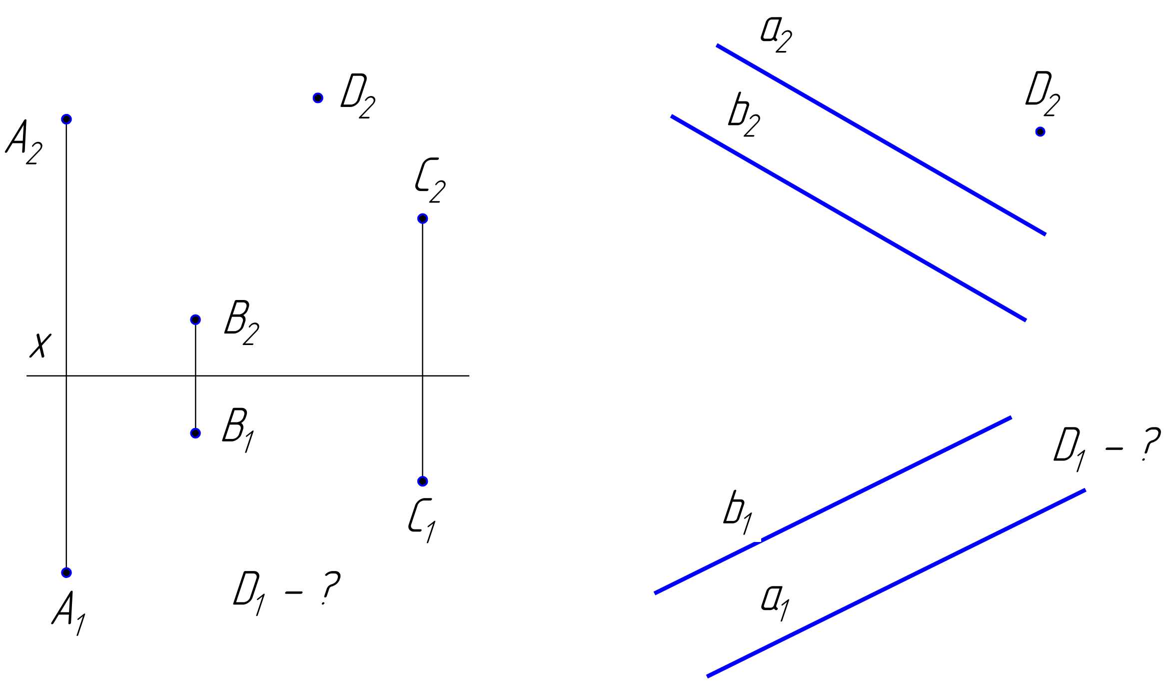


Рис. 3.13 Точка на площині

Побудова точки на площині, заданої слідами. Якщо площина задана слідами, як лініями, що належить площини, за допомогою яких перевіряється приналежність точки площині, використовуються лінії рівня, які легко будувати, проводячи паралельно заданим слідам (Рис. 3.1). При цьому варто пам'ятати, що проекція точки, що належить сліду площини, на іншій площині проекцій виявиться на осі, що розділяє площини проекцій (Рис. 3.14 – точка 1).

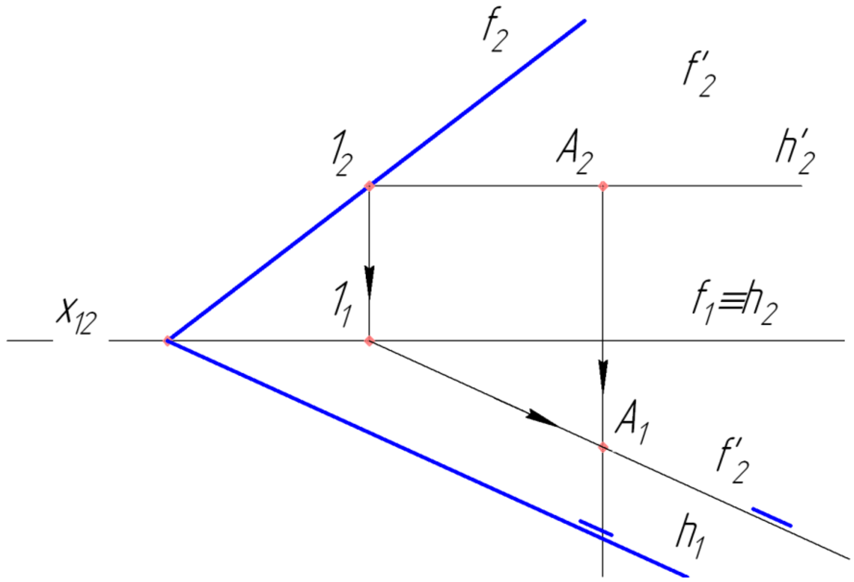


Рис. 3.14 Використання ліній рівня для побудови точки на площині, заданої слідами

3.5 Взаємне положення геометричних фігур

Пряма і площина, а також дві площини можуть бути:

- паралельні одна одній,
- перетинатися,
- перпендикулярні одна одній.

Паралельність фігур.

Паралельність прямої і площини. *Приклад 1* (Рис. 3.1). Є площина $\boldsymbol{\Sigma(a \frown b)}$.

Задана ***(.)А*** і фронтальна проекція $\boldsymbol{l_2}$ прямої.

Провести через ***(.)А*** пряму, паралельну площині ***Σ***

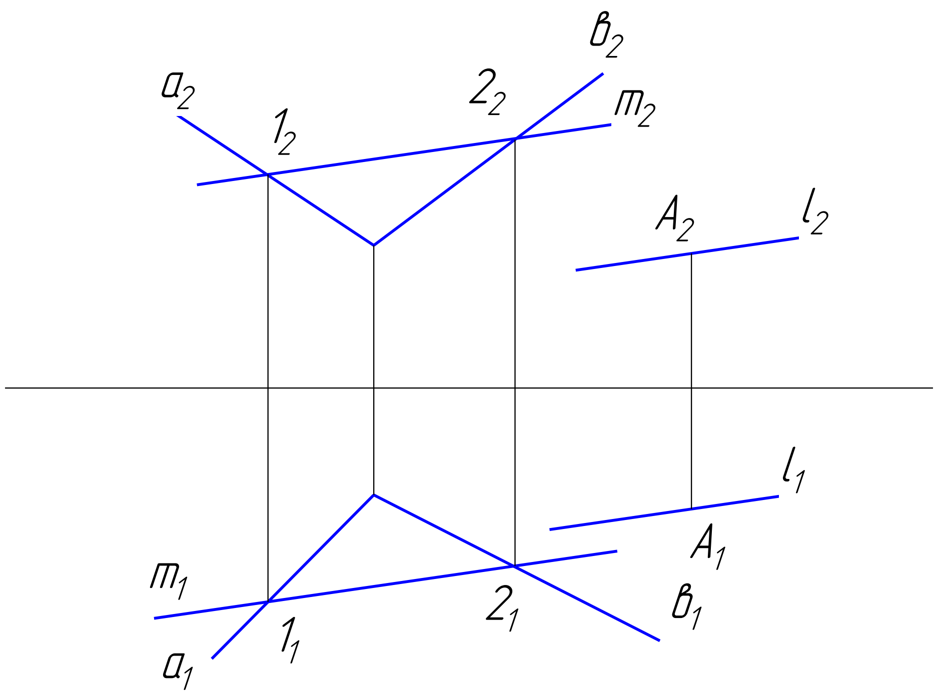


Рис. 3.15 Побудова прямої, паралельної площині

Приклад 2. Через ***(.)A*** провести горизонтальну пряму, паралельну площині ***Σ(ABC)*** (Рис. 3.).

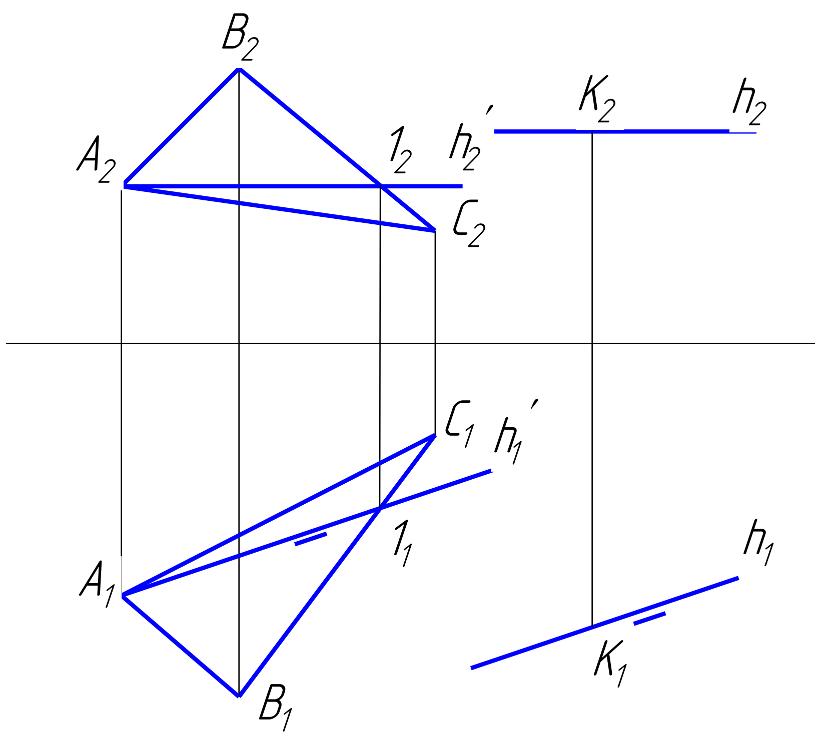
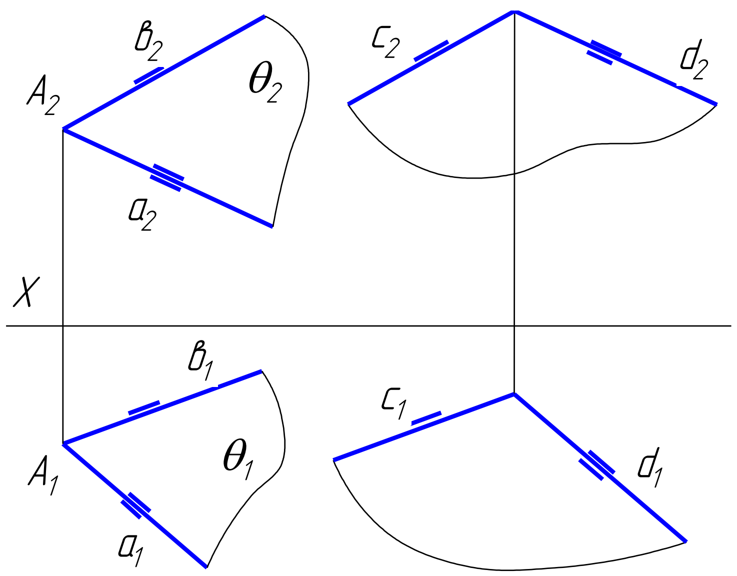


Рис. 3.16 Горизонтальна пряма, паралельна площині

Взаємно паралельні площини. Дві площини взаємно паралельні, якщо дві прямі, які перетинаються однієї площини паралельні двом прямим, які перетинаються другої площини (Рис. 3.



$$\left.\begin{matrix} a_1 // d_1 \\ a_2 // d_2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow a // d$$

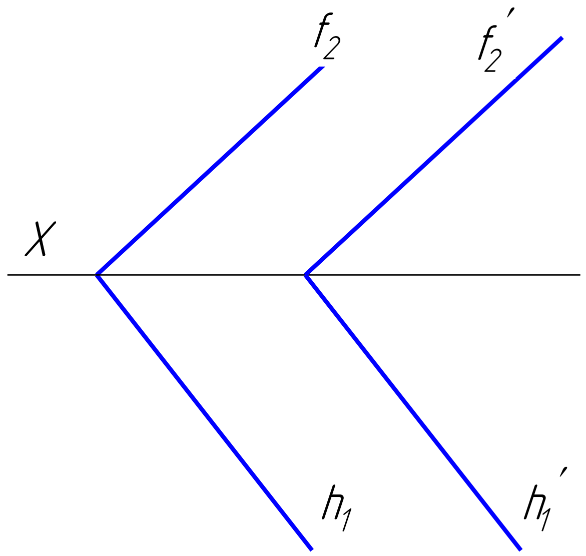
$$\left.\begin{matrix} b_1 // c_1 \\ b_2 // c_2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow b // c$$

$$пл.\Theta(a \cap b) // пл.\Delta(c // в)$$

Рис. 3.17 Взаємно паралельні площини

У якості прямих, які перетинаються можуть бути обрані прямі окремого положення. Звідси:

Якщо одноіменні сліди двох площин паралельні, то паралельні самі площини.



$$пл.\Sigma(f \cap h) // пл.\mathrm{T}(f' \cap h')$$

Рис. 3.18 Паралельні площини, задані слідами

Приклад 3: Через (.)***A*** провести площину ***Θ*** паралельно площині ***Г***, заданої двома паралельними прямими

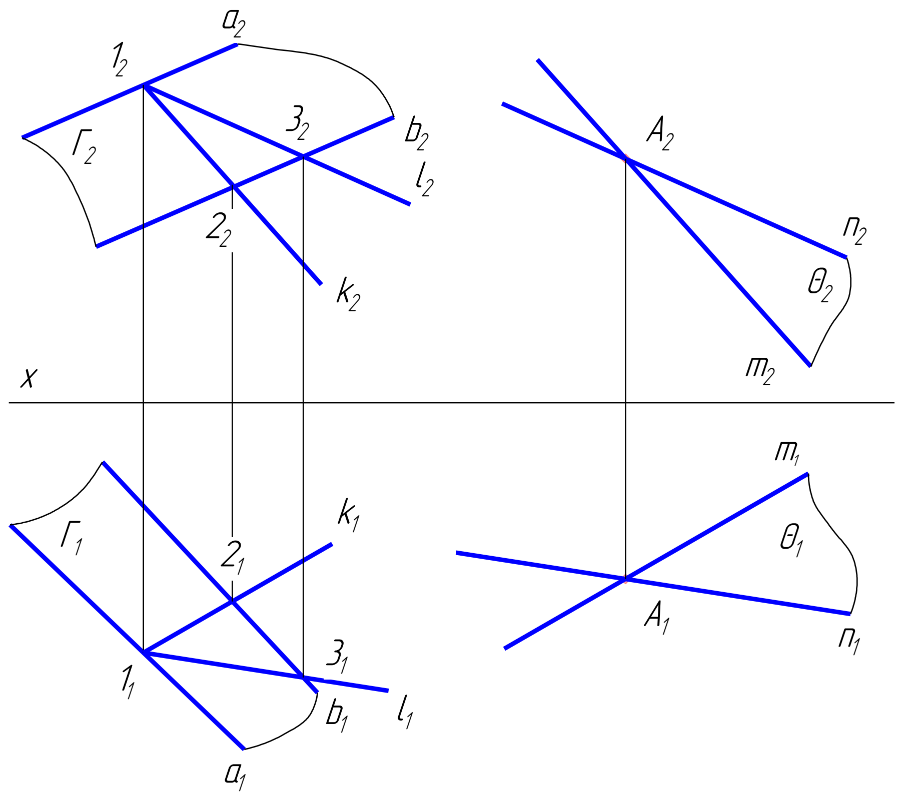


Рис. 3.19 Площина паралельна заданій, проведена через зовнішню точку

Алгоритм побудови:

На площині ***Г,*** використовуючи пряму ***a*** вибирається довільна допоміжна точка ***1***.

Через (.)***1*** проводяться дві довільні прямі ***l*** і ***k*** так, щоб вони перетнули іншу пряму, що задає площину – лінію ***b***.

Через задану точку ***A*** проводять дві прямі ***m*** і ***n***, паралельні відповідно до допоміжних прямих ***l*** і ***k***. Ці дві прямі ***l*** і ***k***, які перетинаються зададуть шукану площину θ, паралельну заданій площині ***Г.***

Приклад 4: Через (.)***A*** провести площину ***Δ*** параллельно фронтально проектуючій площині ***Σ*** (***m***||***n***) (Рис. 3.).

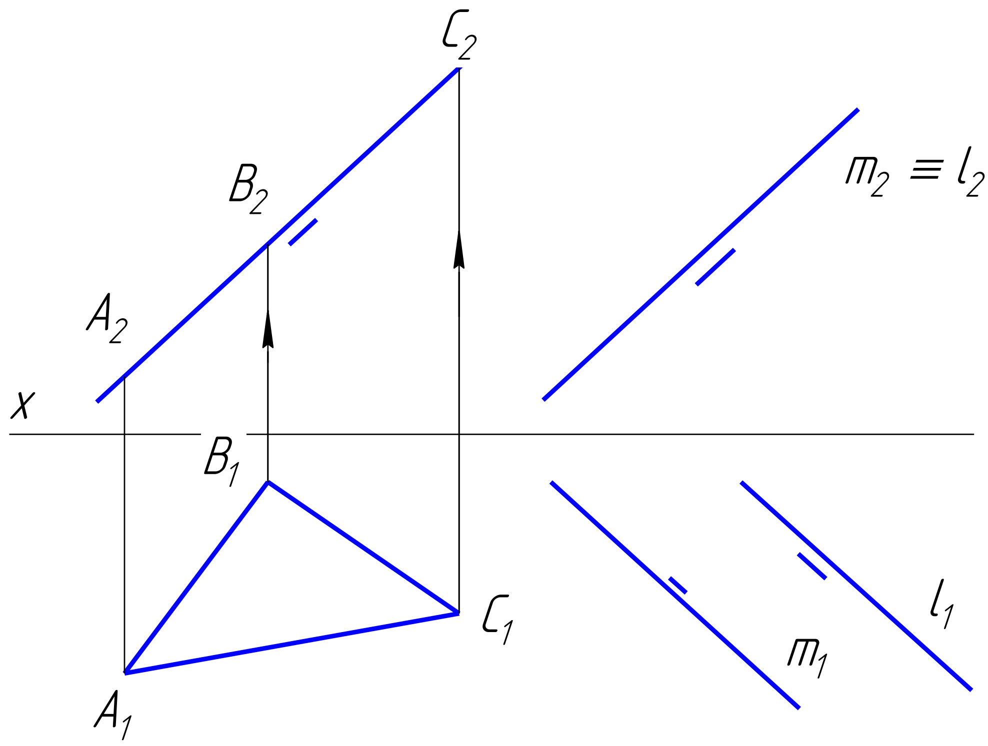


Рис. 3.20 Паралельні площини

Алгоритм побудови:

На фронтальній ПП через фронтальну проекцію A_2 заданої точки A проводиться пряма $A_2C_2 \parallel m_2 \equiv n_2$. Ця пряма буде фронтальним слідом шуканої площини Δ. Площина, паралельна фронтально проектуючій площині повинна бути сама фронтально проектуючою площиною.

На горизонтальній ПП вибираються довільно дві точки B_1 і C_1.

Фронтальні проекції B_2 і C_2 точок B и C шукаються уздовж ліній зв'язку на побудованому сліді шуканої площини Δ.

NB! Незважаючи на те, що точки B и C були обрані на горизонтальній ПП довільно, площина, що задається точками ABC буде паралельна заданій фронтально проектуючій площині тому, що на фронтальній ПП точки АВС розташовуються на одній лінії, паралельній фронтальному сліду заданої площини.

Тема 4 Методи перетворення площин проекцій.

4.1 Мета і суть метода перетворення площин проекцій.

У реальності геометричні фігури можуть займати різне положення, частіше загальне, що утрудняє розв’язання метричних і позиційних задач. Ціль методу перетворення проекцій - так змінити систему проекціювання фігури, щоб фігура в новій системі зайняла окреме положення таке, при якому простим вимірюванням можуть бути отримані метричні параметри фігур, або можна відразу зрозуміти взаємне положення фігур.

Зміна системи проекціювання може бути реалізовано двома основними способами:

1. Заміна площин проекцій. При цьому способі положення об'єкта проекціювання залишається незмінним; змінюється положення площин проекцій.

2. Обертання, сполучення або плоскопаралельне переміщення фігур. При реалізації цієї групи способів система площин проекцій залишається незмінної, змінюється положення фігур щодо її.

4.2 Метод заміни площин проекцій.

Розглянемо в системі площин проекцій $\boldsymbol{\Pi_1/\Pi_2}$ точку $\boldsymbol{A}$. Її проекції в цій системі $\boldsymbol{A_1}$ і $\boldsymbol{A_2}$. Уведемо нову площину проекцій $\boldsymbol{\Pi_4} \perp \boldsymbol{\Pi_1}$. Точка $\boldsymbol{A}$ буде в цій площині мати проекцію $\boldsymbol{A_4}$ (Рис. 4.1).

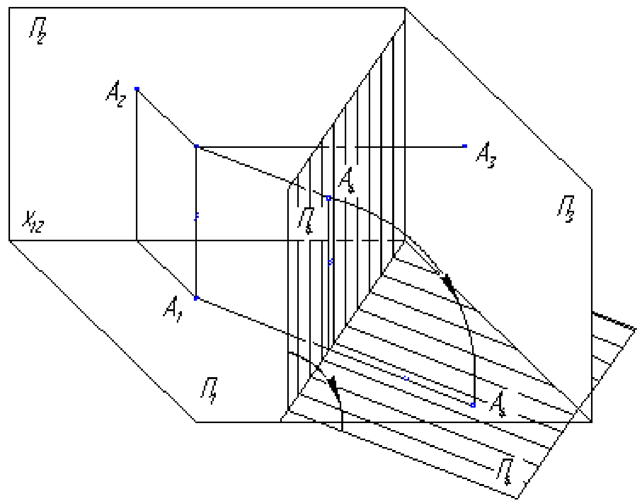


Рис. 4.1 Заміна $\boldsymbol{\Pi_2}$ на $\boldsymbol{\Pi_4}$

Тому що висота точки не змінилась, відстань проекції $\boldsymbol{A_4}$ точки $\boldsymbol{A}$ на $\boldsymbol{\Pi_4}$ від площини $\boldsymbol{\Pi_1}$ буде таке ж, як на площині $\boldsymbol{\Pi_2}$.

Якщо розгорнути площину $\boldsymbol{\Pi_4}$ на 90^0 до сполучення із площиною $\boldsymbol{\Pi_1}$, лінія перетину площин проекцій $\boldsymbol{\Pi_1}$ і $\boldsymbol{\Pi_4}$ буде віссю $\boldsymbol{x_{14}}$. Лінії проекціювання точки $\boldsymbol{A}$ на $\boldsymbol{\Pi_1}$ і $\boldsymbol{\Pi_4}$ утворять лінію зв'язку між проекціями точки $\boldsymbol{A_1}$ і $\boldsymbol{A_4}$ у новій системі проекціювання $\boldsymbol{\Pi_1}/\boldsymbol{\Pi_4}$ (Рис. 4.2).

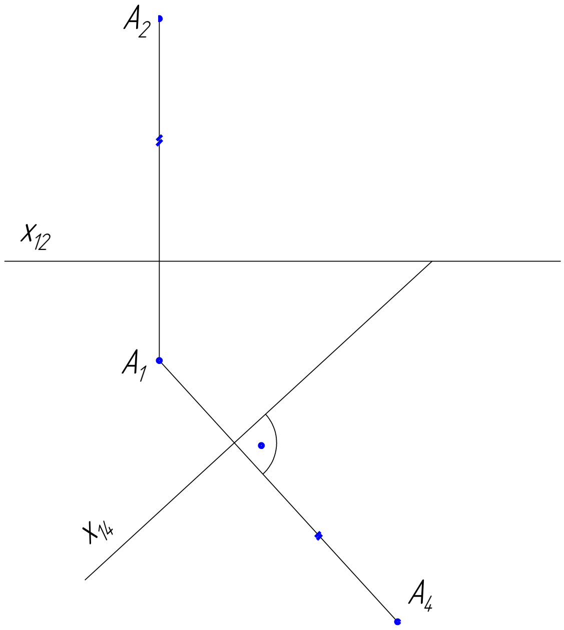


Рис. 4.2 Точка на новій площині проекцій на комплексному рисунку

Аналогічно можна зробити заміну площини $\boldsymbol{\Pi_2}$ на $\boldsymbol{\Pi_5}$ або $\boldsymbol{\Pi_3}$ на $\boldsymbol{\Pi_6}$.

Більше того, можна зробити послідовно кілька замін площин проекцій, дотримуючи правила рівності координат точки в замінної і у новій площині проекцій.

Метричні задачі, які розв'язуються способом заміни площин проекцій, можуть бути зведені до чотирьох основних задач:

Задача 1. Перетворити рисунок так, щоб пряма загального положення стала паралельною новій площині проекцій (лінією рівня) (Рис. 4.3).

Розв'язання:

AB – пряма загального положення

$$x_{14} // A_1B_1; \qquad \Pi_4 \perp \Pi_1;$$
$$\Pi_4 // AB \quad \Rightarrow \quad A_4B_4 = AB;$$
$$\alpha = (AB)\hat{\ } \Pi_1$$

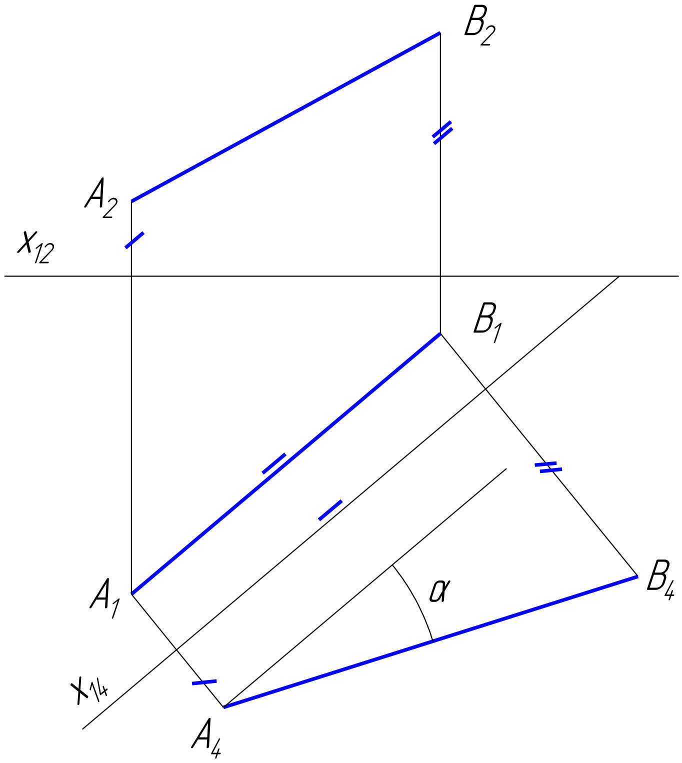


Рис. 4.3 Перетворення загального положення прямої у окреме (пряма рівня) заміною площини проекцій

Задача 2. Перетворити рисунок так, щоб площина, задана трикутником ***ABC*** стала в новій системі проекціювання проектуючою (Рис. 4.4).

Розв'язання:

Для того, щоб площина ***ABC*** стала проектуючою, нова площина проекцій Π_4 у системі Π_1/Π_4 повинна бути ⊥ площини ***ABC***. Ця умова виконується, якщо Π_4 буде ⊥ лінії рівня, паралельної Π_1, тобто горизонталі.

Заодно отримане значення кута α нахилу площини ABC до горизонтальної площини проекцій. У розв'язанні використовується властивість збереження прямого кута з лінією рівня.

Таке перетворення використовується для визначення:

1. Кутів нахилу площини до площин проекцій;
2. Відстані від точки до площини;
3. Відстані між паралельними площинами.

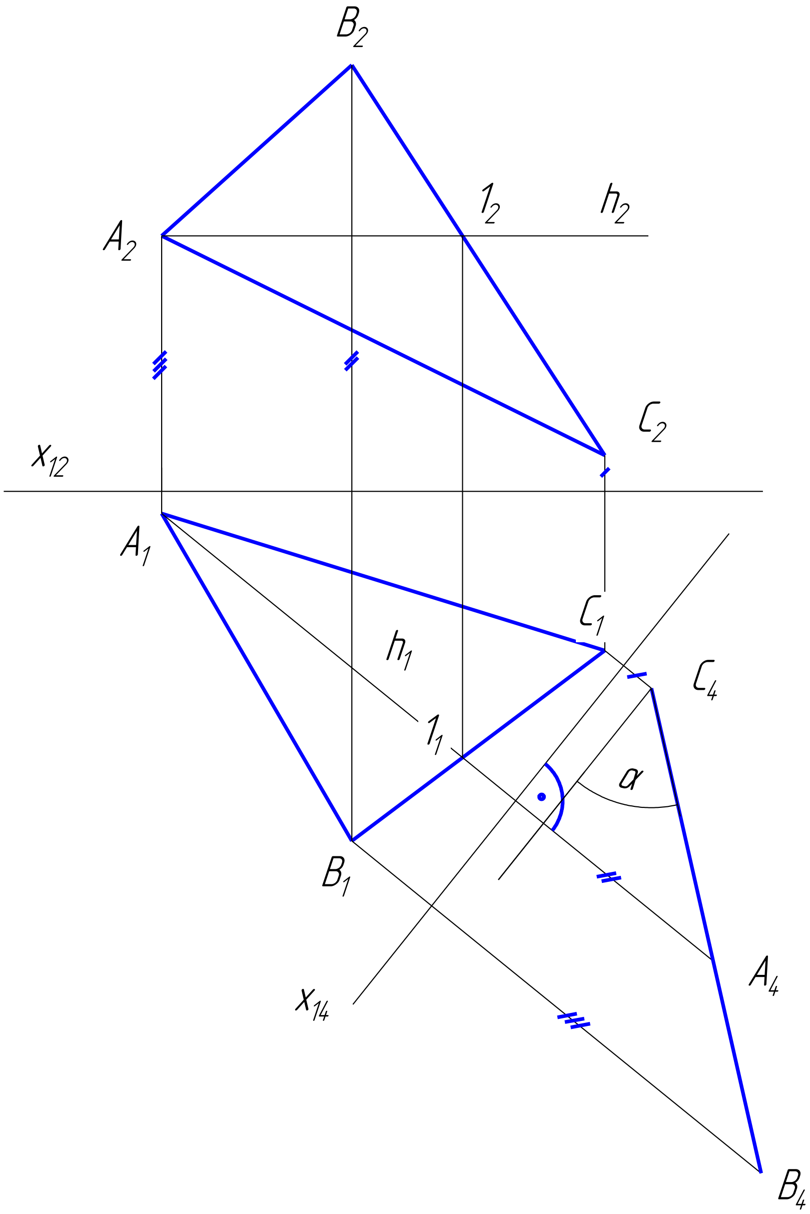


Рис. 4.4 Перетворення загального положення плоскої фігури в окреме (проектуюча площина) заміною площини проекцій

Задача 3. Перетворити площини проекцій так, щоб пряма загального положення стала проектуючою (Рис. 4.5).

Розв'язання:

У загальному випадку розв'язання вимагає виконання послідовно двох замін площин проекцій. Перша, для того, щоб лінія стала лінією рівня, тобто, паралельною площині проекцій. Друга заміна робиться на площину $\boldsymbol{\Pi_5}$ у системі $\boldsymbol{\Pi_4/\Pi_5}$, $\perp$ отриманої лінії рівня.

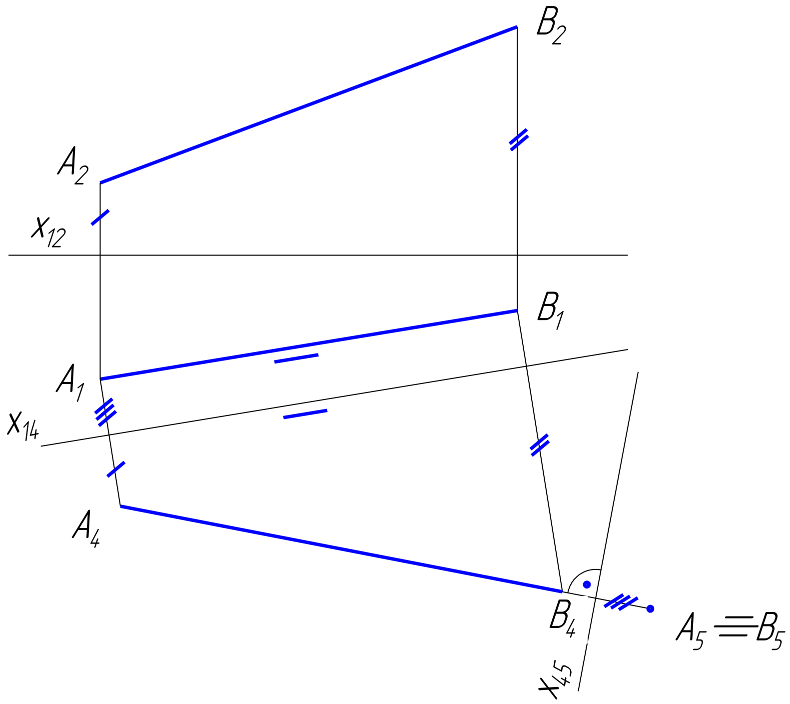


Рис. 4.5 Перетворення загального положення прямій у окреме (пряма рівня) двома замінами площин проекцій

Таке перетворення використовується для визначення, наприклад:

- відстані між точкою і прямою;
- відстані між двома мимобіжними прямими (одна із прямих робиться проектуючою і шукана відстань буде перпендикуляром, проведеним із точки, у яку спроекціювалась перша пряма, до проекції другої прямої);
- величини двогранного кута (проектуючою робиться лінія перетину двох площин і шуканий кут буде лінійним кутом між слідами площин, які стають проектуючими відносно нової площини проекцій).

Задача 4. Замінити площини проекцій так, щоб площина загального положення ***Θ(ABC)*** виявилася паралельної одній із площин проекцій. Це дасть натуральну величину фігур, розташованих у площині ***Θ*** (Рис. 4.6).

Розв'язання:

Для цього потрібно зробити дві заміни площин проекцій.

Перша так, щоб площина ***Θ*** стала проектуючою,

Друга так, щоб площина проекцій стала паралельна площині ***Θ***.

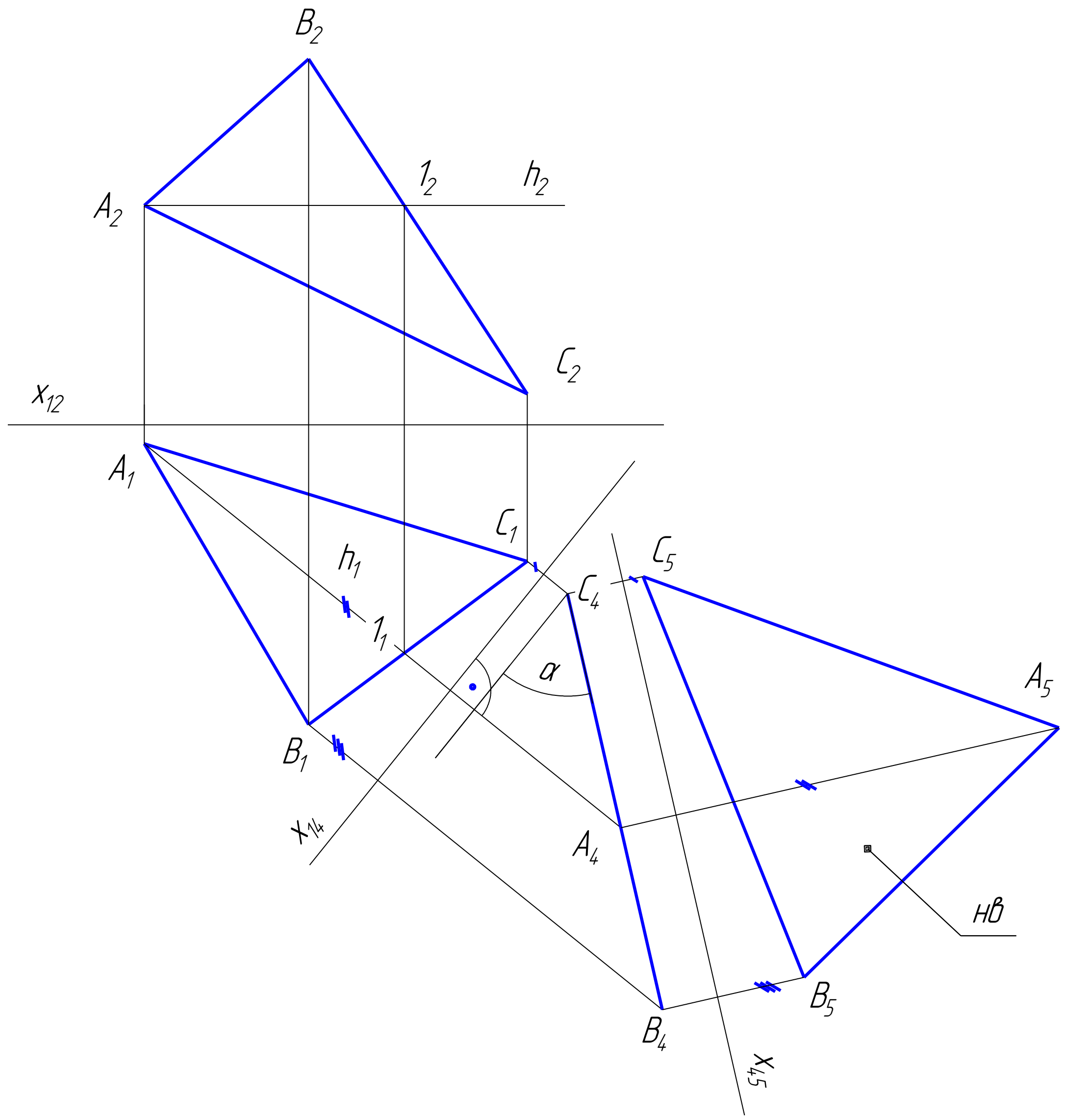


Рис. 4.6 Перетворення загального положення плоскої фігури в положення площини рівня двома замінами площин проекцій

4.3 Метод обертання.

Обертання навколо осі, перпендикулярної площині проекцій (проектуючої осі).

Основи обертання. ***Властивості:***

- Траєкторія точки при обертанні навколо осі - коло;
- Площина цієї окружності ⊥ осі обертання;
- Радіус кола є відстань між точкою і віссю обертання;
- Центр кола лежить на осі обертання;
- Точки, що лежать на осі обертання - нерухомі;
- При обертанні прямої і площині навколо осі кут їх нахилу до осі залишається незмінним.

Висновки:

1. Якщо вісь $\boldsymbol{i}$ обертання ⊥ площині проекцій, проекція траєкторії обертання точки на цій площині буде коло із центром у точці перетину осі із площиною проекцій. На іншій площині проекцій траєкторія точки буде відрізком прямої, паралельним осі, що розділяє площини проекцій.
2. При обертанні будь-якої фігури відносно осі, перпендикулярної площині проекцій, форма й розміри проекції фігури на цю ПП залишаються незмінними. Змінюється тільки її положення відносно осі, що розділяє площини проекцій.

Приклади обертання фігур.

Приклад 1: Точку ***A*** повернути навколо осі $\boldsymbol{i}$ ⊥ $\boldsymbol{\Pi_2}$ на кут 90^0 за годинниковою стрілкою (Рис. 4.7).

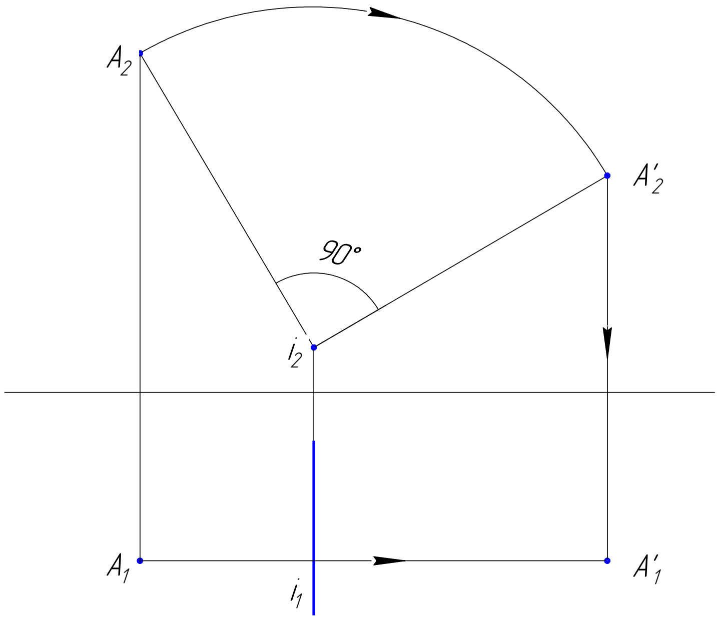


Рис. 4.7 Обертання точки навколо проектуючої осі

Приклад 2: Точку ***A*** повернути навколо осі $\boldsymbol{i} \perp \boldsymbol{\Pi_1}$ до сполучення із горизонтально проектуючою площиною (Рис. 4.8).

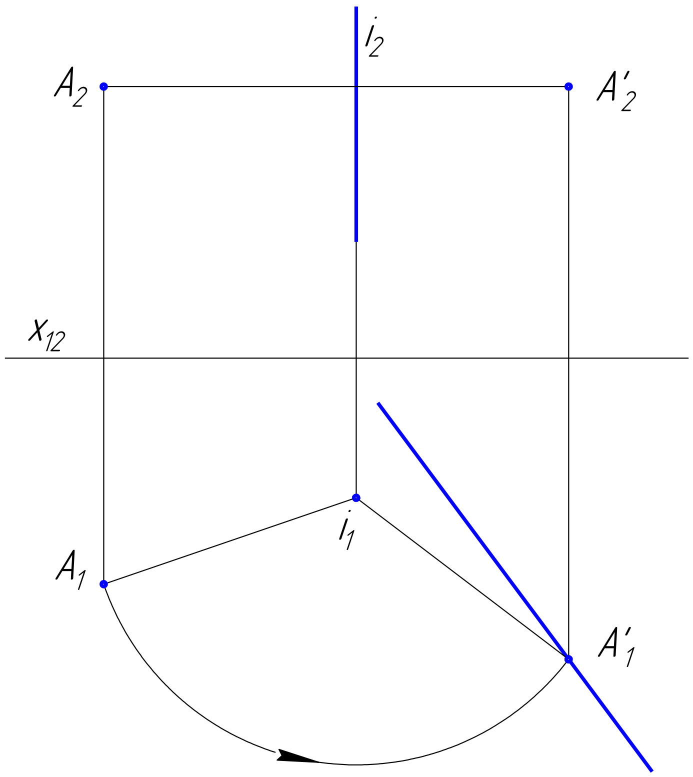


Рис. 4.8 Обертання прямої навколо горизонтально проектуючої осі

Приклад 3: Повернути (.)$\boldsymbol{A}$ до сполучення із площиною загального положення, заданої слідами (Рис. 4.9).

Розв'язання:

при обертанні точки навколо вертикальної осі вона виявиться на горизонталі заданої площини, що лежить разом із заданою точкою в одній горизонтальній площині. Ця горизонталь $\boldsymbol{h'}$ повинна бути заздалегідь побудована.

Далі, з горизонтальної проекції $\boldsymbol{i_1}$ осі обертання проводиться дуга $\boldsymbol{A_1 i_1}$ кола, що є горизонтальною проекцією траєкторії (.)$\boldsymbol{A}$ при обертанні навколо осі $\boldsymbol{i}$, до перетину з горизонтальною проекцією горизонталі $\boldsymbol{h'}$. Отримана точка є горизонтальною проекцією шуканого положення точки на площині.

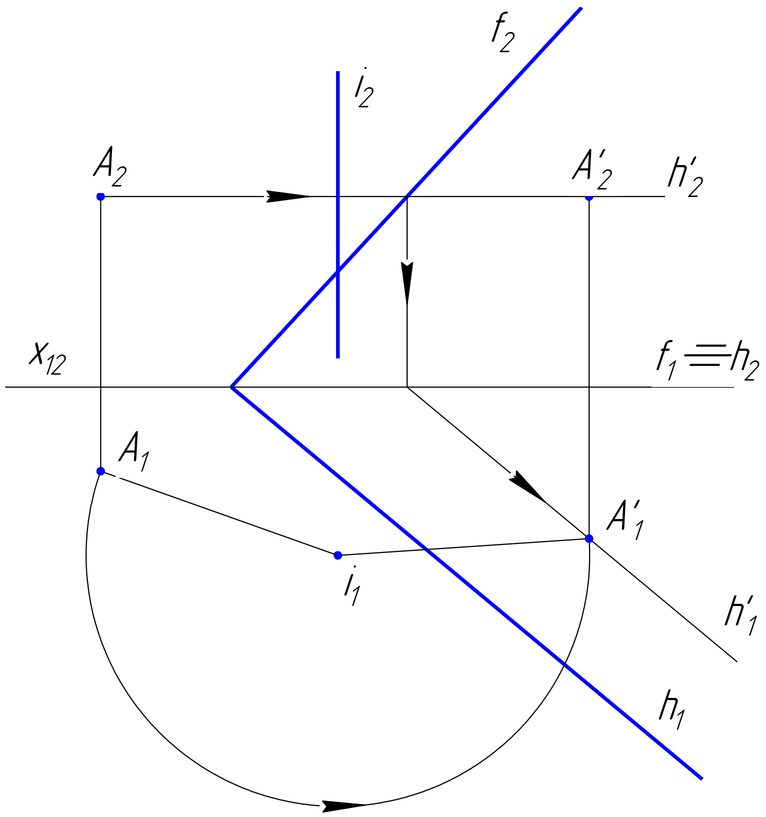


Рис. 4.9 Сполучення точки із площиною обертанням навколо проектуючої осі

Приклад 4: Визначити натуральну величину відрізка $\boldsymbol{AB}$ і кут його нахилу до $\boldsymbol{\Pi_2}$ (Рис. 4.10).

Розв'язання: відрізок ***AB*** потрібно обертати навколо осі $\boldsymbol{i}\perp\boldsymbol{\Pi_2}$, яка проходить через один з кінців відрізка до положення, коли відрізок стане лінією рівня (горизонталлю).

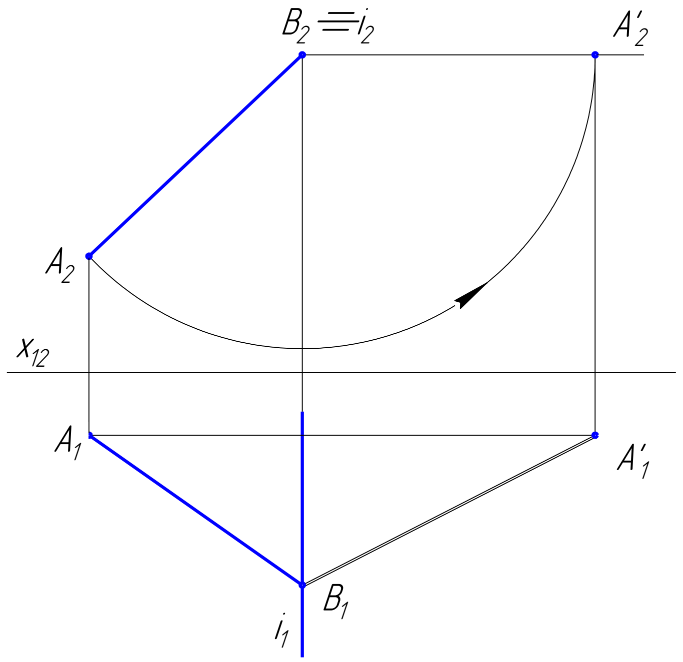


Рис. 4.10 Визначення натуральної величини відрізка обертанням навколо проектуючої осі

Обертання площини. Обертання площини навколо осі ⊥ площині проекцій відбувається для кожної її точки на той самий кут і в одному напрямку (Рис. 4.11).

Приклад 5: Повернути Δ***ABC*** у положення фронтально проектуючої.

Розв'язання:

всі горизонталі фронтально проектуючої площини є фронтально проектуючими лініями, тобто ⊥ $\boldsymbol{\Pi_2}$. Для розв'язання задачі побудуємо в ***ABC*** горизонталь і повернемо трикутник так, щоб ця горизонталь стала ⊥ осі $\boldsymbol{X_{12}}$. При цьому горизонталь на $\boldsymbol{\Pi_2}$ вироджується в точку.

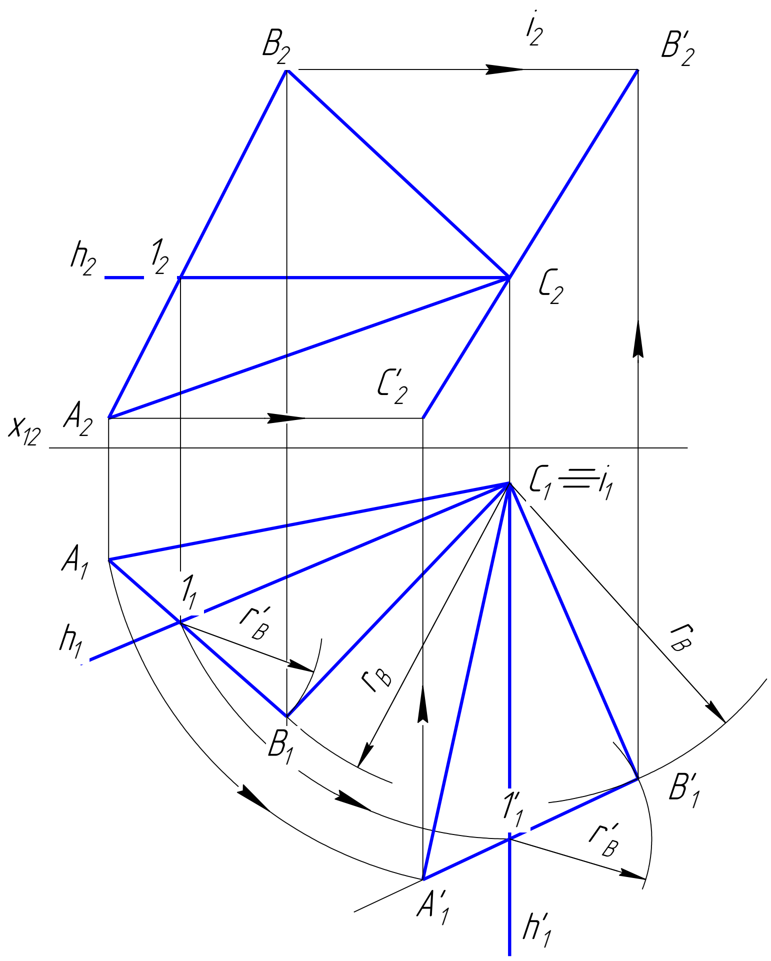


Рис. 4.11 Обертання площини навколо проектуючої осі

Горизонтальна проекція $\boldsymbol{A_1B_1C_1}$ трикутника, залишаючись незмінної, повернеться разом зі своєю горизонталлю на той же кут, що і горизонталь. Техніка побудови ясна з малюнка.

Приклад 6: Повернути площина загального положення, задану слідами, навколо вертикальної осі так, щоб вона стала фронтально проектуючою (Рис. 4.12).

Розв'язання:

раніше було встановлено, що у фронтально проектуючій площини, горизонтальний слід повинен бути перпендикулярним осі. При обертанні навколо вертикальної осі горизонтальний слід буде залишатися дотичним до кола, проведеного з горизонтальної проекції $\boldsymbol{i_1}$ заданої осі $\boldsymbol{i}$. Лінія ската ***12*** заданої площини, що проходить через вісь обертання, на горизонтальній площині збереже

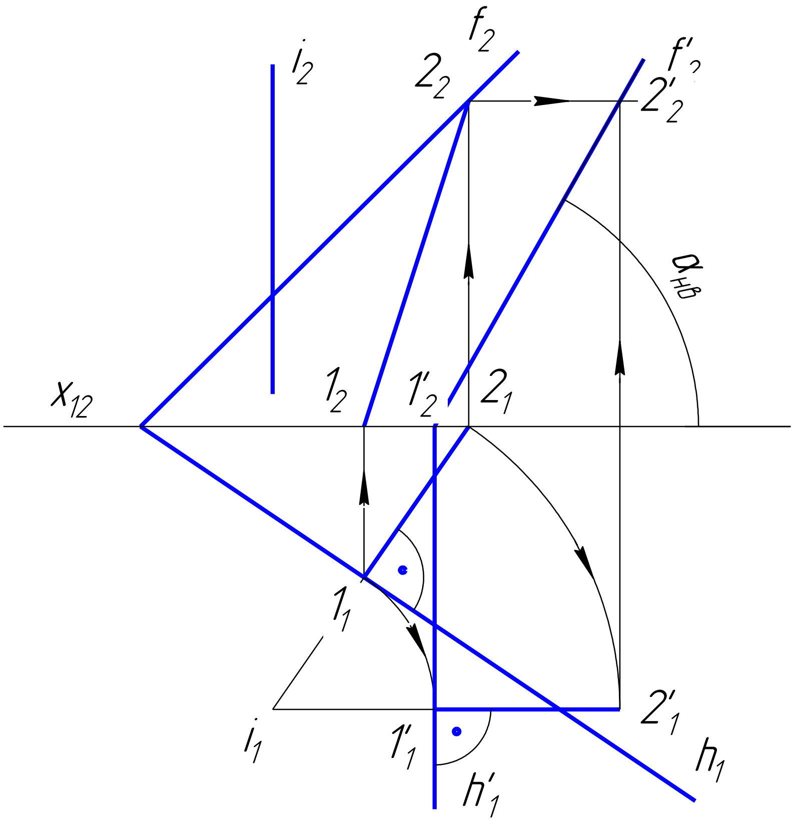


Рис. 4.12 Обертання площини, заданої слідами, навколо проектуючої осі

свою довжину і перпендикулярність горизонтальному сліду. На фронтальній ПП лінія ската збереже свою висоту.