

Лекция № 8

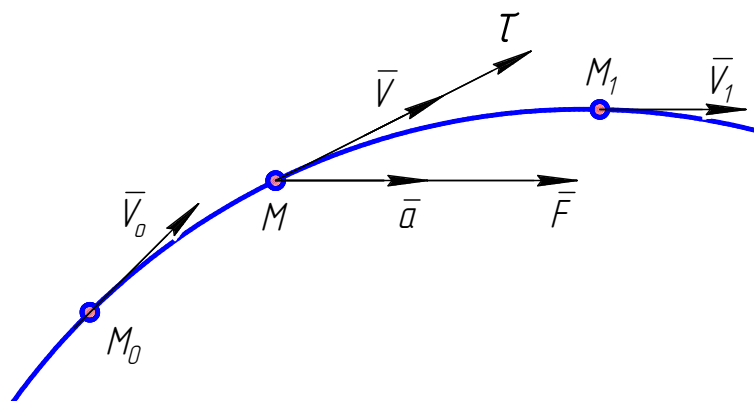
Кинетическая энергия точки и системы материальных точек.

Половина произведения массы материальной точки на квадрат ее скорости называется кинетической энергией материальной точки.

$$T = \frac{mv^2}{2} \quad (8.1)$$

- кинетическая энергия точки.

Теорема об изменении кинетической энергии материальной точки.



Пусть точка движется по криволинейной траектории из положения $M_0 \rightarrow \bar{V}_0$; в положение $M_1 \rightarrow \bar{V}_1$. Рассмотрим положение $M \rightarrow \bar{V}$ под действием силы \bar{F} .

Запишем II закон динамики:

$m\bar{a} = \bar{F}$; где \bar{F} - одна сила или равнодействующая системы сил.

Через точку M проведем касательную и спроецируем на нее силу \bar{F} , тогда:

$$ma_\tau = F_\tau; \quad \text{т.к.} \quad a_\tau = \frac{dv}{dt}; \quad \Rightarrow \quad m \cdot \frac{dv}{dt} = F_\tau. \quad (*)$$

Умножим на ds выражение (*):

$$m \cdot \frac{dv}{dt} \cdot ds = F_\tau \cdot ds; \quad \Rightarrow \quad (mv) \cdot dv = F_\tau ds; \quad \Rightarrow \quad \text{внесем } (mv) \text{ под дифференциал:}$$

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = F_\tau ds; \quad \text{т.к.} \quad F_\tau ds = dA; \quad \Rightarrow$$

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = dA \quad (8.2)$$

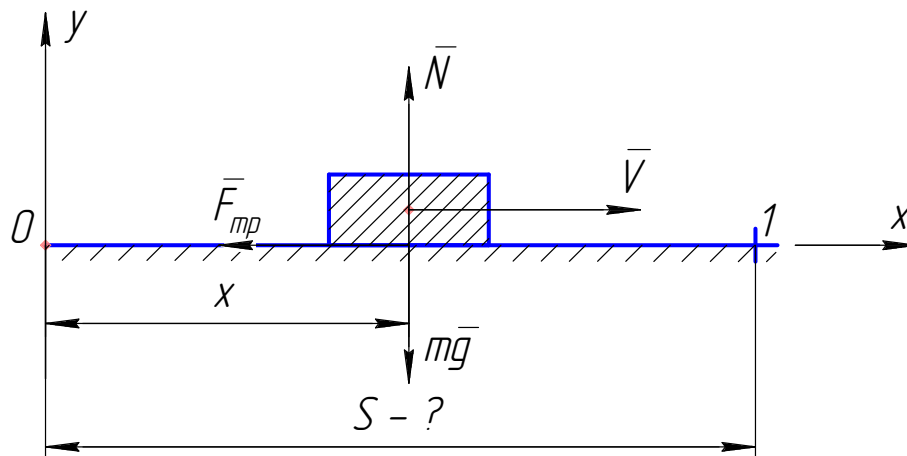
- теорема в дифференциальной форме.

Интегрируем выражение (8.2):

$$\int_{v_0}^{v_1} d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = \int_{M_0 M_1} dA; \Rightarrow \frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = A_{0-1} \quad (8.3)$$

- теорема в интегральной форме.

Пример № 1. Тело массой m поместили на горизонтальную шероховатую поверхность с коэффициентом $f = 0,1$ и сообщили скорость $v_0 = 5$ м/с. Определить расстояние, пройденное телом до остановки.



Решение.

Применим для решения теорему в интегральной форме, т.е. (8.3):

$$\frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = A_{0-1} \quad (*)$$

В момент остановки скорость $v_1 = 0$. Работу совершает только сила трения $F_{\text{тр}} = f \cdot N = mgf$. Работа по перемещению из положения 0 в положение 1 будет равна $A_{0-1} = -F_{\text{тр}} \cdot S$. Подставляем в выражение (*):

$$-\frac{mv_0^2}{2} = -F_{\text{тр}} \cdot S; \Rightarrow S = \frac{mv_0^2}{2F_{\text{тр}}} = \frac{mv_0^2}{2mgf} = \frac{v_0^2}{2gf} = \frac{5^2}{2 \cdot 9,8 \cdot 0,1} \cong 12,7 \text{ м}$$

Ответ: $S = 12,7$ м

Кинетическая энергия системы равняется арифметической сумме кинетических энергий всех точек системы:

$$T = \sum \frac{(m_k v_k^2)}{2} \quad (8.4)$$

- кинетическая энергия системы.

Формулы для вычисления кинетической энергии в некоторых случаях движения механической системы и твердого тела.

1. Поступательное движение твердого тела.

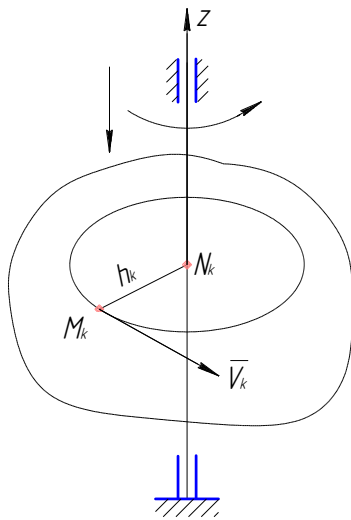
В этом случае все точки тела двигаются с одинаковыми скоростями, равными скорости центра масс, т.к. формула (8.4) примет вид:

$$T = \frac{\sum (m_k v_k^2)}{2} = \frac{\sum m_k v_c^2}{2} = \frac{v_c^2}{2} \cdot \sum m_k = M \frac{v_c^2}{2}.$$

$$T = \frac{M v_c^2}{2} \quad (8.5)$$

- кинетическая энергия при поступательном движении.

2. Вращательное движение твердого тела вокруг неподвижной оси.



Если $w = \text{const}$, тогда

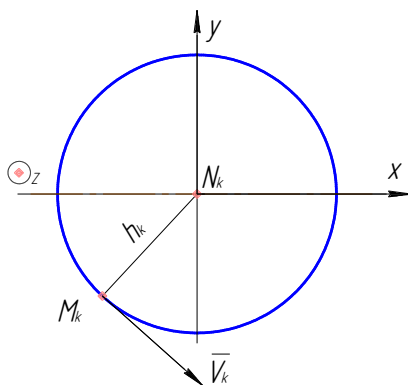
$$v_k = w \cdot h_k; \Rightarrow T = \frac{\sum (m_k v_k^2)}{2} = \frac{\sum m_k (w \cdot h_k)^2}{2} =$$

$$= \frac{\sum m_k w^2 \cdot h_k^2}{2} = \frac{w^2}{2} \cdot \sum m_k \cdot h_k^2 =$$

$$= I_z \cdot \frac{w^2}{2}$$

$$\text{Итак: } T = \frac{I_z}{2} \cdot w^2 \quad (8.6)$$

- кинетическая энергия вращающегося тела



Кинетическая энергия тела, которое вращается вокруг неподвижной оси, равна половине произведения момента инерции тела относительно оси вращения на квадрат его угловой скорости.

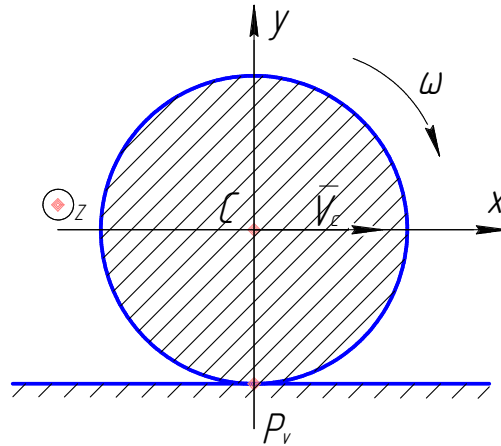
3. Плоскопараллельное (плоское) движение твердого тела.

При плоском движении тела кинетическая энергия складывается из кинетической энергии поступательного движения тела со скоростью центра масс \bar{V}_c и кинетической энергии вращательного движения вокруг оси, проходящей через центр масс.

$$T = \frac{mv_c^2}{2} + \frac{I_{zc} \cdot \omega^2}{2} \quad (8.7)$$

- кинетическая энергия при плоском движении.

Пример № 2. Вычислить кинетическую энергию однородного сплошного диска массы $m=10$ кг, катящегося без скольжения со скоростью $v_c = 5$ м/с.



Решение.

Диск совершает плоское движение.

По формуле (8.7):

$$T = \frac{mv_c^2}{2} + \frac{I_{zc} \cdot \omega^2}{2} = \left| \begin{array}{l} I_{zc} = \frac{mR^2}{2}; \\ \omega = \frac{v_c}{R}; \end{array} \right| = \frac{mv_c^2}{2} + \frac{mR^2}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{v_c^2}{R^2} \Rightarrow T = \frac{mv_c^2}{2} + \frac{mv_c^2}{4} =$$

$$= \frac{2mv_c^2 + mv_c^2}{4} = \frac{3}{4}mv_c^2 = \frac{3}{4} \cdot 10 \cdot 5^2 = 18,75 \left(\frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{с}^2} \right).$$

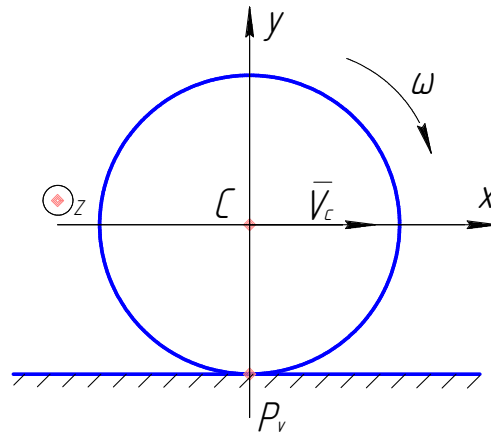
Ответ: $T = 18,75 \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{с}^2}.$

Для круглого сплошного однородного диска кинетическая энергия определяется по формуле:

$$T = \frac{3}{4}mv_c^2 \quad (8.8)$$

- см. пример № 2.

Кинетическая энергия кольца.



Кольцо – это твердое тело, масса которого сосредоточена по ободу. Т. к. $I_z = mR^2$; тогда (8.7) примет вид:

$$T = \frac{mv_c^2}{2} + \frac{1}{2} I_z \cdot \omega^2 = \frac{mv_c^2}{2} + \frac{1}{2} \cdot mR^2 \cdot \left(\frac{v_c}{R} \right)^2 = \frac{mv_c^2}{2} + \frac{mv_c^2}{2} = mv_c^2; \quad (8.9)$$

$$T = mv_c^2$$

- кинетическая энергия кольца.

IV общая теорема динамики. Теорема об изменении кинетической энергии материальной точки.

Рассмотрим систему материальных точек, на которые действуют внешние силы. Для каждой точки системы запишем теорему об изменении кинетической энергии материальной точки.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{m_1 v_{11}^2}{2} - \frac{m_1 v_{01}^2}{2} = A_1^e; \\ \frac{m_2 v_{12}^2}{2} - \frac{m_2 v_{02}^2}{2} = A_2^e; \\ \dots \dots \dots \\ \frac{m_n v_{1n}^2}{2} - \frac{m_n v_{0n}^2}{2} = A_n^e \end{array} \right. +$$

$$\sum \frac{m_k v_{1k}^2}{2} - \sum \frac{m_k v_{0k}^2}{2} = \sum A_k^e \quad (**)$$

Обозначим через $T_1 = \sum \frac{m_k v_{1k}^2}{2}; \quad T_0 = \sum \frac{m_k v_{0k}^2}{2};$

Тогда (**) примет вид:

$$T_1 - T_0 = \sum A_k^e \quad (8.10)$$

- теорема об изменении кинетической энергии системы.

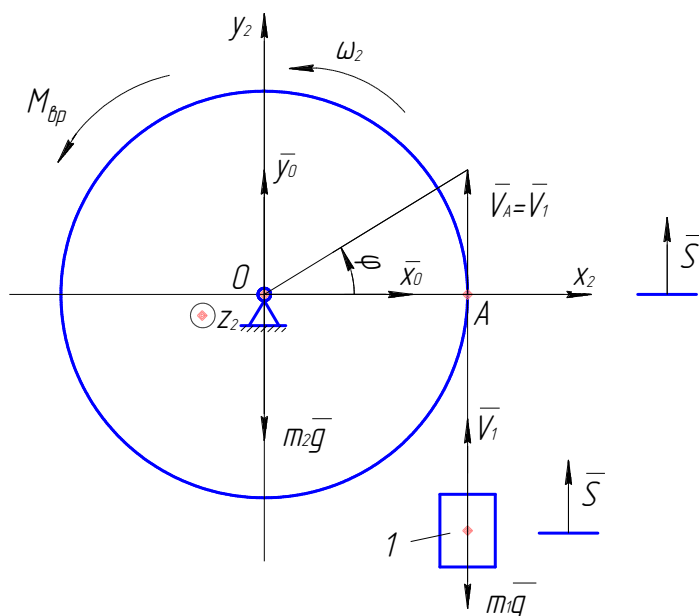
По этой теме выполняется задача № 3 ДКР.

Смотри задание в методическом указании 10/3 пример № 2.

Пример № 3. Пример выполнения задачи № 3.

Дано: $m_1 = 2 \text{ т}$; $m_2 = 4 \text{ т}$; $M_{\text{вп}}$; R ; $V_0 = 0$

Определить: a_1 - ?



Решение.

Для решения задачи используем теорему об изменении кинетической энергии системы.

$$T_1 - T_0 = \sum A_k^e; T_0 = 0, \text{ т.к. из состояния покоя.}$$

Получим: $T = \sum A_k^e$, где $T = T_1 + T_2$ - кинетическая энергия системы.

Тело 1 совершает поступательное движение:

$$T_1 = \frac{m_1 v_1^2}{2} = \frac{2m v_1^2}{2} = m v_1^2.$$

Тело 2 совершает вращательное движение:

$$T_2 = \frac{1}{2} I_{z2} \cdot \omega_2^2; \text{ т.к. } I_{z2} = \frac{m_2 R^2}{2} = \frac{4m R^2}{2} = 2m R^2;$$

$$\omega_2 = \frac{v_A}{R_2} = \frac{v_1}{R_2};$$

$$\text{Тогда } T_2 = \frac{1}{2} \cdot 2mR_2^2 \cdot \left(\frac{v_1}{R_2} \right)^2 = mR_2^2 \cdot \frac{v_1^2}{R_2^2} = mv_1^2.$$

Кинетическая энергия системы:

$$T = T_1 + T_2 = mv_1^2 + mv_1^2 = 2mv_1^2.$$

Определяем работу внешних сил:

$$\sum A_k^e = A^e(m_1 \bar{g}) + A^e(m_2 \bar{g}) + A^e(M_{\text{вр}}).$$

$$A^e(m_1 \bar{g}) = -m_1 g S_1 = -2mg S_1;$$

$$A^e(m_2 \bar{g}) = 0, \text{ т.к. центр масс тела закреплен } S_2 = 0.$$

$$A^e(M_{\text{вр}}) = M_{\text{вр}} \cdot \varphi, \text{ т.к. } \varphi = \frac{S_1}{R} \Rightarrow A^e(M_{\text{вр}}) = M_{\text{вр}} \cdot \frac{S_1}{R};$$

$$\text{Итак, } \sum A_k^e = -2mg S_1 + 0 + M_{\text{вр}} \cdot \frac{S_1}{R} = S_1 \left(M_{\text{вр}} \cdot \frac{1}{R} - 2mg \right);$$

$$\text{Вынесем из скобок } \frac{1}{R} \Rightarrow \sum A_k^e = \frac{S_1}{R} (M_{\text{вр}} - 2mgR).$$

Подставляем значения T и $\sum A_k^e$ в теорему:

$$2mv_1^2 = \frac{S_1}{R} \cdot (M_{\text{вр}} - 2mgR) \Rightarrow \text{продифференцируем по времени}$$

$$2 \cdot 2m \frac{dv_1}{dt} \cdot v_1 = \frac{dS_1}{dt} \cdot \frac{1}{R} \cdot (M_{\text{вр}} - 2mgR);$$

$$4m \cdot a_1 \cdot v_1 = v_1 \cdot \frac{1}{R} \cdot (M_{\text{вр}} - 2mgR);$$

$$4ma_1 = \frac{1}{R} \cdot (M_{\text{вр}} - 2mgR);$$

$$a_1 = \frac{M_{\text{вр}} - 2mgR}{4mR} \quad (\text{м/с}^2).$$

$$\text{Ответ: } a_1 = \frac{M_{\text{вр}} - 2mgR}{4mR} (\text{м/с}^2).$$