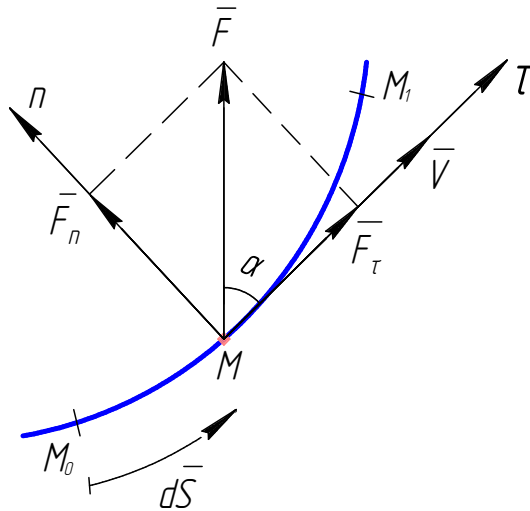


## Лекция 7

### Работа силы. Мощность.

Для характеристики действия силы на тело, при некотором его перемещении, введем понятие о работе силы. Сначала введем понятие о элементарной работе.

$$dA = F \tau \cdot ds \text{ — элементарная работа} \quad (7.1)$$



Пусть точка движется из пол  $M_0$  в пол.  $M_1$  под действием силы  $\vec{F}$ , со скоростью  $\vec{V}$ . Через т.М проведем касательную  $\tau$  и нормаль  $n$ . Спроецируем силу  $\vec{F}$  на эти оси ( $\vec{F}_n$  и  $\vec{F}_\tau$ ).

Составляющая  $\vec{F}_\tau$  изменяет модуль скорости, так как  $\vec{F}_\tau = ma_\tau = m \frac{dV}{dt}$ .

Составляющая  $\vec{F}_n$  изменяет или направление вектора скорости  $\vec{V}$ , или силу давления на связь.

Так как  $\vec{F}_\tau = F \cdot \cos \alpha$ , следовательно (7.1) примет вид:

$$dA = F \cdot \cos \alpha \, ds \text{ — элементарная работа} \quad (7.2)$$

Если  $0 < \alpha < 90^\circ$  - работа положительная по знаку;

Если  $\alpha = 0^\circ$  -  $dA = Fds$ ;

Если  $\alpha > 90^\circ$  - работа отрицательная по знаку;

Если  $\alpha = 180^\circ$  -  $dA = -Fds$ ;

Если  $\alpha = 90^\circ$  -  $dA = 0$ , так как  $\cos 90^\circ = 0$ .

Полная работа на конечном перемещении  $M_0 M_1$ :

$$A = \int_{i_0}^{i_1} F \cdot \cos \alpha \, ds \quad \text{- полная работа на конечном перемещении} \quad (7.3)$$

Работа силы на каком-либо перемещении  $M_0 M_1$  равняется взятому вдоль этого перемещения интегралу от элементарной работы.

В векторном виде элементарная работа имеет вид:

$$dA = \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad (7.4)$$

Запишем элементарную работу в аналитической форме.

Обозначим проекции силы  $\vec{F}(x; y; z)$ , а проекции радиус-вектора  $d\vec{r}(dx; dy; dz)$ , тогда (7.4) принимает вид:

$$dA = x \, dx + y \, dy + z \, dz \quad \text{- аналитическая форма элементарной работы} \quad (7.5)$$

### Пример №1.

Дано:  $F = 3S^2$ ,  $S = 2$  м.

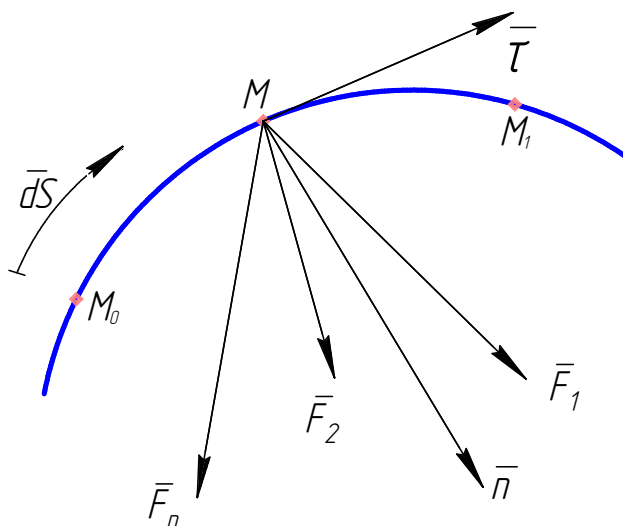
Определить:  $A$  - ?

$$A = \int_0^S F \, ds = \int_0^2 3S^2 \, ds = \frac{3}{3} \cdot S^3 \Big|_0^2 = S^3 \Big|_0^2 = 2^3 = 8 \, (\text{Дж}).$$

Единицы измерения работы  $[A] = [\text{Дж}] = [\text{Н} \cdot \text{м}] = \left[ \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{с}^2} \right]$ .

### **Теорема о работе равнодействующей.**

Работа равнодействующей силы на каком-либо перемещении, равняется алгебраической сумме работ от каждой силы на том же самом перемещении.



Пусть т.М движется из положения  $M_0$  в положение  $M_1$ , под действием сил  $\vec{F}_1; \vec{F}_2 \dots \vec{F}_n$ .

Требуется доказать:  $A(\vec{R}) = \sum A(\vec{F}_k)$ .

Через т.М проведем естественные оси координат, покажем элементарные перемещения  $d\vec{S}$ .

Спроецируем все действующие силы на касательную. Запишем элементарную работу от каждой силы на этом перемещении:

$$\begin{cases} dA_1 = F_{1\tau} \cdot dS; \\ dA_2 = F_{2\tau} \cdot dS; \\ + \dots \dots \dots \\ dA_n = F_{n\tau} \cdot dS. \end{cases}$$

$$dA_1 + dA_2 + \dots + dA_n = F_{1\tau} \cdot dS + F_{2\tau} \cdot dS + \dots + F_{n\tau} \cdot dS$$

$\Downarrow$

$\Downarrow$

$$\sum dA_k$$

$$\sum F_{k\tau} \cdot dS$$

$$\text{Имеем: } \sum dA_k = \sum F_{k\tau} \cdot dS \quad (*)$$

Если  $\sum \vec{F}_k = \vec{R}$ , тогда ее проекция на касательную будет:  $R_\tau = \sum F_{k\tau}$ .

Домножим левую и правую части на  $dS$ :

$$R_\tau dS = \sum F_{k\tau} dS \quad (**)$$

Подставим (\*\*) в (\*):

$$\sum dA_k = R_\tau dS \Rightarrow \text{проинтегрируем вдоль перемещения } M_0 M_1.$$

$$\int_{i_0}^{i_1} \sum dA_k = \int_{i_0}^{i_1} R_\tau dS \Rightarrow$$

$$\sum_{i_0}^{i_1} \int dA_k = \int_{i_0}^{i_1} R_\tau dS$$

$\Downarrow$

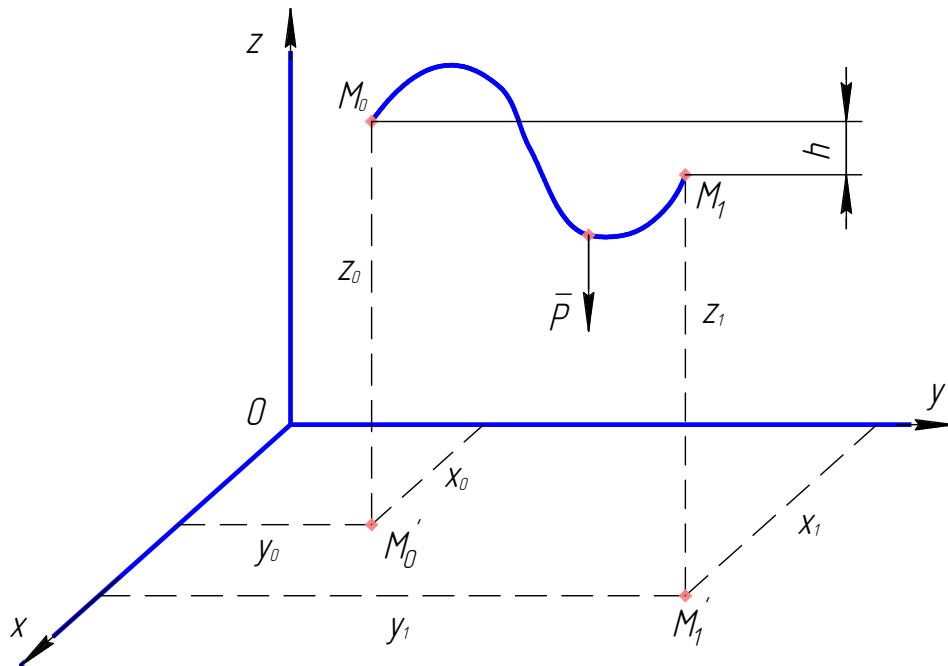
$\Downarrow$

$$\sum A(\vec{F}_k) = A(\vec{R}) \Rightarrow A(\vec{R}) = \sum A(\vec{F}_k) - \text{работа равнодействующей} \quad (7.6)$$

## Пример вычисления работы.

### 1. Работа силы тяжести.

Пусть т.М, на которую действует вес  $\bar{D}$ , перемещается т.М<sub>0</sub> (x<sub>0</sub>; y<sub>0</sub>; z<sub>0</sub>) в т.М<sub>1</sub> (x<sub>1</sub>; y<sub>1</sub>; z<sub>1</sub>).



Спроецируем силу  $\bar{D}$  на координатные оси:

$$x: \quad x = 0;$$

$$y: \quad y = 0;$$

$$z: \quad z = -P.$$

Подставим проекции в (7.5):

$$dA = x \, dx + y \, dy + z \, dz = 0 \cdot dx + 0 \cdot dy + (-P) \, dz = -P \, dz.$$

$$dA = -P \, dz \Rightarrow \text{найдем полную работу}$$

$$A = \int_{M_0 M_1} (-P \, dz) = - \int_{z_0}^{z_1} P \, dz = -Pz \Big|_{z_0}^{z_1} = -P(z_1 - z_0);$$

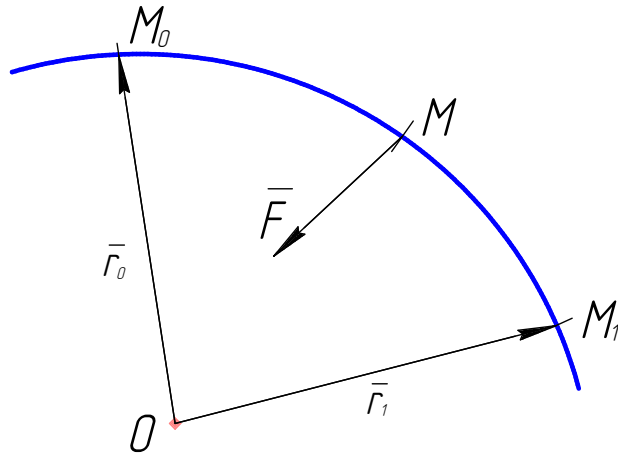
$$A = P(z_1 - z_0), \text{ т.к. } z_1 - z_0 = h \Rightarrow A = \pm P \cdot h - \text{ работа силы тяжести} \quad (7.7)$$

$$\text{Так как } P = mg \Rightarrow A = \pm mgh \quad (7.8)$$

*Работа силы тяжести равняется, взятому со знаком плюс или минус, произведению силы на вертикальное перемещение точки ее приложения (h).*

### 2. Работа упругой силы.

Пусть точка движется из положения М<sub>0</sub> в положение М<sub>1</sub>, под действием силы  $\bar{F} = -c \cdot \bar{r}$ .



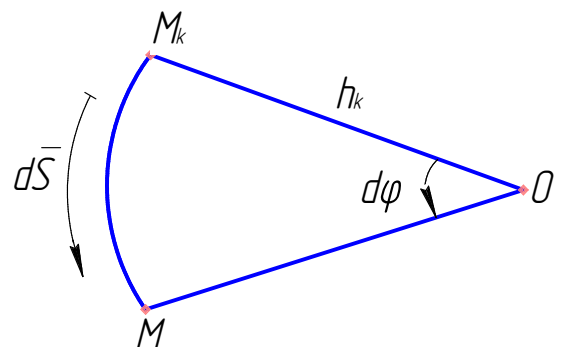
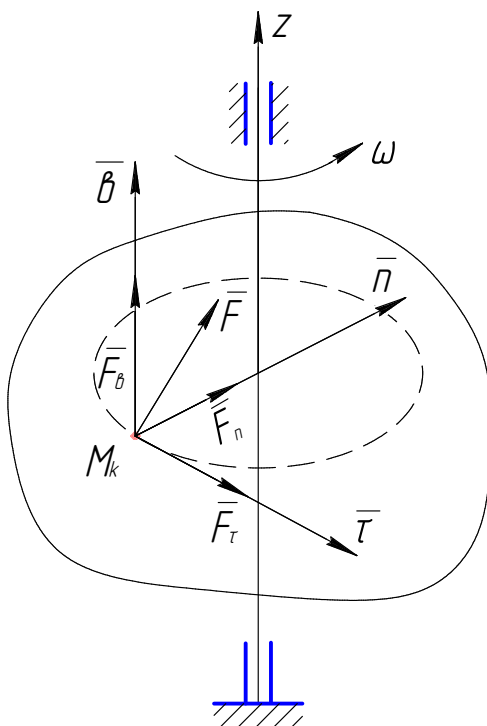
Запишем элементарную работу:  $dA = \vec{F} \cdot d\vec{r} = -c\vec{r} \cdot d\vec{r}$ ; внесем радиус-вектор  $\vec{r}$  под дифференциал:  $dA = -\frac{c}{2} \cdot d(r^2)$ .

Полная работа:  $A = - \int_{r_0}^{r_1} \frac{c}{2} \cdot d(r^2) = -\frac{c}{2} \int_{r_0}^{r_1} d(r^2) = \frac{c}{2} \cdot r^2 \Big|_{r_0}^{r_1} = -\frac{c}{2} (r_1^2 - r_0^2) = \frac{c}{2} (r_1^2 - r_0^2)$

$$A = \frac{c}{2} (r_1^2 - r_0^2) - \text{работа упругой силы} \quad (7.9)$$

Работа упругой силы равняется половине произведения коэффициента жесткости пружины на разность квадратов радиус-векторов начального и конечного положения точки.

3. Работа силы, приложенной к абсолютно твердому телу, которое вращается вокруг неподвижной оси.



Пусть твердое тело вращается вокруг оси  $z$  под действием силы  $\vec{F}$  приложенной в т.  $M_k$ . Через эту точку проведем естественные оси  $впн$ . Сила  $\vec{F}$  приложена на расстоянии  $M_kO = h_k$  от оси  $z$ . Разложим силу на составляющие:

1. Сила  $\vec{F}_a$  параллельна оси  $z$  – вызывает сдвиг тела вдоль этой оси;
2. Сила  $\vec{F}_n$  перпендикулярна оси  $z$  – не перемещает тело;
3. Сила  $\vec{F}_\tau$  – поворачивает тело на угол  $d\varphi$ , при этом точка перемещается на  $d\vec{S}$  вдоль траектории.

Элементарная работа силы  $\vec{F}_\tau$  будет равна:  $dA = F_\tau dS$ ;

где  $dS = h \cdot d\varphi$ ;  $d\varphi$  - элементарный угол поворота твердого тела.

$$dA = F_\tau \cdot h \cdot d\varphi, \text{ т.к. } F_\tau \cdot h = \dot{I}_z^{\dot{\alpha}\delta} \Rightarrow$$

$$dA = \dot{I}_z^{\dot{\alpha}\delta} \cdot d\varphi - \text{элементарная работа момента} \quad (7.10)$$

Полная работа:

$$A = \int_{\varphi_0}^{\varphi} M_z^{\dot{\alpha}\delta} \cdot d\varphi - \text{полная работа момента} \quad (7.11)$$

$$\text{Если } \dot{I}_z^{\dot{\alpha}\delta} = \text{const} \Rightarrow A = M_{\dot{\alpha}\delta}(\varphi - \varphi_0) \quad (7.12)$$

### Мощность.

*Мощностью называется величина, которая определяет работу, выполненную силой за единицу времени.*

Мощность, в данный момент времени, вычисляют отношением элементарной работы к элементарному времени.

$$N = \frac{dA}{dt} \quad (7.13)$$

$$\text{Т.к. } dA = F_\tau dS \Rightarrow N = \frac{F_\tau dS}{dt} = F_\tau \cdot V = F \cdot \cos \alpha \cdot V, \text{ тогда}$$

$$N = \vec{F} \cdot \vec{V} \quad (7.14)$$

Из равенства  $N = F_\tau \cdot V$  видно, что у двигателя, который имеет данную мощность, сила тяги  $\vec{F}_\tau$  будет тем больше, чем меньше скорость  $\vec{V}$ . Поэтому,

например, на подъеме, или плохой дороге у автомобиля переходят к пониженности скорости.

Так как при вращательном движении  $dA = \dot{I}_z^{\hat{a}\delta} \cdot d\varphi$ , следовательно:

$$N = \frac{dA}{dt} = \frac{\dot{I}_z^{\hat{a}\delta} \cdot d\varphi}{dt} = \dot{I}_z^{\hat{a}\delta} \cdot \omega;$$

$$N = \dot{I}_z^{\hat{a}\delta} \cdot \omega \text{ - этой формулой пользуются при подборе двигателя} \quad (7.15)$$

$$\text{Единицы измерения: } [N] = [\hat{A}\delta] = \left[ \frac{\ddot{A}\varepsilon}{\ddot{n}} \right].$$