

Лекция №3

Масса системы. Центр масс системы.

Движение механической системы зависит не только от действующих на нее сил, а и от ее совокупности масс и расположения масс.

Арифметическая сумма масс всех точек или тел, которые образуют механическую систему, называется массой системы.

$$M = \sum m_k \text{ - масса системы} \quad (3.1)$$

Центр масс (центром инерции) материальной системы называется геометрическая точка \underline{C} , положение которой определяется формулой:

$$\begin{aligned} \bar{r}_c &= \frac{\sum (m_k \cdot \bar{r}_k)}{\sum m_k} = \frac{\sum (m_k \cdot \bar{r}_k)}{M}; \\ \bar{r}_c &= \frac{\sum (m_k \cdot \bar{r}_k)}{M} \text{ - центр масс системы} \end{aligned} \quad (3.2)$$

где: \bar{r}_c - радиус – вектор центра масс;

\bar{r}_k - радиус – вектор k -ой точки системы;

m_k - масса k -ой точки системы;

M – масса системы.

Момент инерции. Радиус инерции.

Моментом инерции точки относительно оси называется произведение массы этой точки на квадрат расстояния до этой оси.

$$I_z = m \cdot h^2 \text{ - момент инерции точки.} \quad (3.3)$$

Для системы материальных точек

$$I_z = \sum m_k \cdot h_k^2 \text{ - момент инерции системы.} \quad (3.4)$$

где: m_k - масса k -ой точки системы;

h_k - расстояние от k -ой точки системы до данной оси.

Единицы измерения $[I] = \text{кг} \cdot \text{м}^2$

В практических расчетах часто используют понятие радиуса инерции (i),

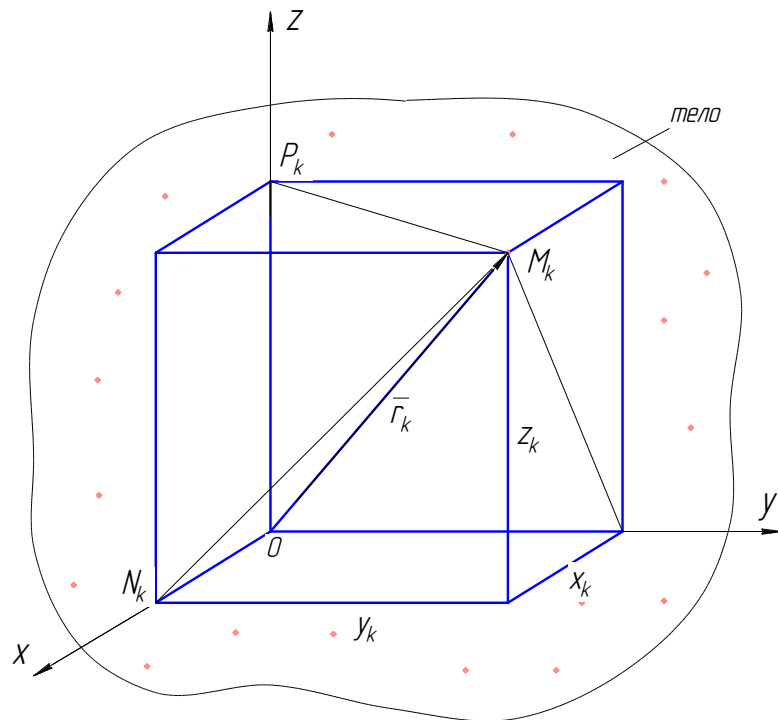
тогда момент инерции относительно оси равен:

$$I_z = M \cdot i_z^2 \text{ - момент инерции через радиус инерции.} \quad (3.5)$$

где: $M = \sum m_k$ - масса всего тела.

$$i_z = \sqrt{\frac{I_z}{M}} \text{ - радиус инерции.} \quad (3.6)$$

Момент инерции тела относительно плоскости, оси, полюса.



На теле возьмем произвольную т. M_k с координатами $(x_k; y_k; z_k)$.

Найдем моменты инерции относительно плоскостей.

$$\begin{aligned} \text{пл. } XOY : & \begin{cases} I_{xoy} = \sum m_k \cdot z_k^2; \\ \text{пл. } ZOX : & \begin{cases} I_{zox} = \sum m_k \cdot y_k^2; \\ \text{пл. } ZOY : & \begin{cases} I_{zoy} = \sum m_k \cdot x_k^2; \end{cases} \end{cases} \end{cases} \end{aligned} \quad (3.7)$$

Формула (3.7) – момент инерции относительно плоскостей.

Момент инерции тела относительно плоскости равняется сумме произведений точек тела на квадрат координаты, которая не входит в индекс плоскости.

Опустим \perp из т. M_k на оси: на ось: \underline{x} - $M_k N_k$;

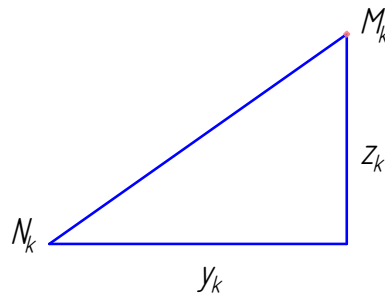
на ось: \underline{y} - $M_k L_k$;

на ось: \underline{z} - $M_k P_k$.

Найдем моменты инерции относительно осей (осевые моменты инерции).

$$I_x = \sum m_k \cdot (M_k N_k)^2;$$

Из треугольника имеем:



$$(M_k N_k)^2 = z_k^2 + y_k^2;$$

тогда

$$\begin{cases} I_x = \sum m_k (z_k^2 + y_k^2); \\ I_y = \sum m_k (x_k^2 + z_k^2); \\ I_z = \sum m_k (x_k^2 + y_k^2). \end{cases} \quad (3.8)$$

Момент инерции относительно оси равен сумме произведений масс точек тела на сумму квадратов координат, которые не входят в индекс оси.

Соединим т.О – полюс с т. M_k – радиус – вектором \vec{r}_k . Определим момент инерции относительно полюса (полярный момент инерции).

$$I_i = \sum m_k \cdot r_k^2 \text{ - полярный момент инерции} \quad (3.9)$$

$$\text{Т.к. } r_k^2 = x_k^2 + y_k^2 + z_k^2 \Rightarrow$$

$$I_i = \sum m_k \cdot (x_k^2 + y_k^2 + z_k^2) \quad (3.9')$$

Сложим осевые моменты инерции:

$$\begin{cases} I_x = \sum m_k (y_k^2 + z_k^2); \\ I_y = \sum m_k (x_k^2 + z_k^2); \\ I_z = \sum m_k (x_k^2 + y_k^2). \end{cases}$$

$$I_x + I_y + I_z = \sum m_k (y_k^2 + z_k^2 + x_k^2 + z_k^2 + x_k^2 + y_k^2) = 2 \sum m_k (x_k^2 + y_k^2 + z_k^2).$$

На основе формулы (3.9') будем иметь:

$$I_x + I_y + I_z = 2I_o;$$

$$I_o = \frac{I_x + I_y + I_z}{2} \text{ - полярный момент инерции} \quad (3.10)$$

Центробежный момент инерции

Центробежный момент инерции равняется сумме произведений масс точек тела на координаты, которые входят в индекс момента.

$$\begin{cases} I_{xy} = \sum m_k \cdot x_k \cdot y_k ; \\ I_{xz} = \sum m_k \cdot x_k \cdot z_k ; \\ I_{zy} = \sum m_k \cdot z_k \cdot y_k . \end{cases} \text{ - центробежные моменты инерции тела} \quad (3.11)$$

Единицы измерения $[I_{xy}] = \text{êä} \cdot \text{ì}^2$.

Главные оси инерции

Ось инерции называется главной, если два центробежных момента инерции, которые в индексе имеют одну и ту же ось равняются нулю:

$$I_{xy} = 0 ; \quad I_{xz} = 0 \text{ - ось } \underline{x} \text{— главная ось инерции.}$$

Если все центробежные моменты инерции равны нулю – все оси $(x; y; z)$ – являются главными осями инерции.

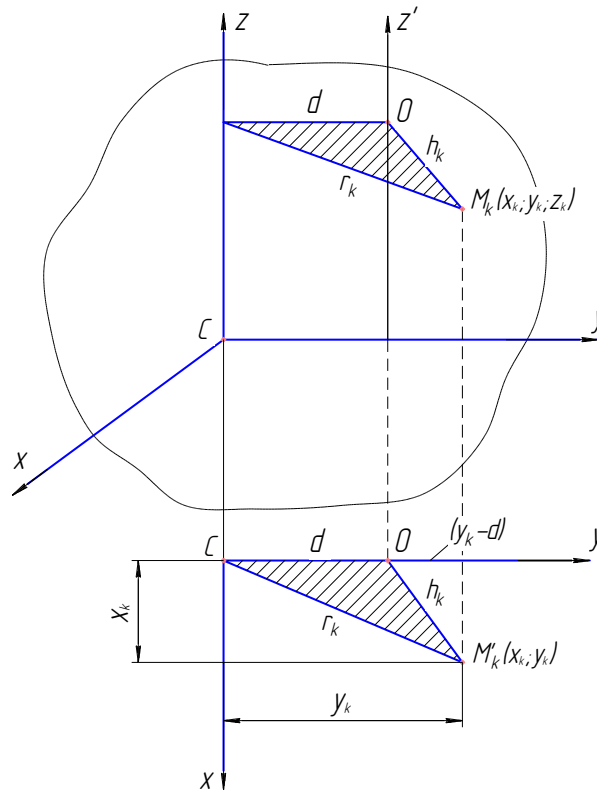
Теорема о моменте инерции твердого тела относительно параллельных осей.

(Теорема Штейнера - Гюйгенса)

Теорема.

Момент инерции твердого тела относительно некоторой оси \underline{z} равен сумме момента инерции тела относительно параллельной оси, проходящей через центр масс тела (I_{zc}), и произведения массы тела на квадрат расстояния (d) между этими осями.

Доказательство.



Выберем в центре масс \underline{C} тела начало координат осей x, y, z . Возьмем в теле т. $M_k(x_k; y_k; z_k)$ массы m_k . Проведем на расстоянии d оси z и z_1 . Тогда момент инерции относительно этой оси (z_1):

$$I_{z_1} = \sum m_k \cdot h_k^2 = \sum m_k \cdot [x_k^2 + (y_k - d)^2] = \sum m_k \cdot x_k^2 + \sum m_k \cdot y_k^2 - 2 \sum m_k \cdot y_k \cdot d + \sum m_k \cdot d^2;$$

где: $\sum m_k \cdot x_k^2 + \sum m_k \cdot y_k^2 = \sum m_k \cdot (x_k^2 + y_k^2) = \sum m_k \cdot r_k^2 = I_{zc}$ - момент инерции тела,

относительно оси проходящей через центра масс.

$$\sum m_k \cdot d^2 = d^2 \cdot \sum m_k = M \cdot d^2;$$

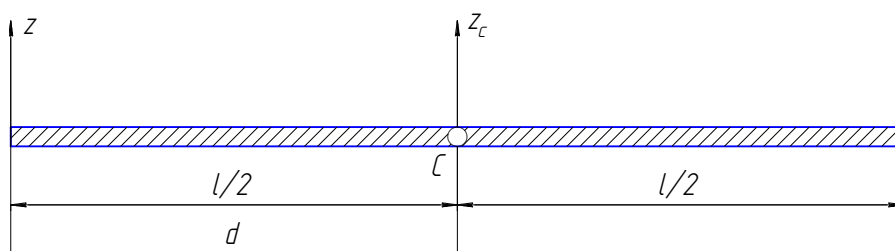
$$2 \sum m_k \cdot y_k \cdot d = 2d \cdot \sum m_k \cdot y_k = 2d \cdot M \cdot y_c = 0$$

Т.к. $y_c = 0$ (начало координат взято в центре масс), тогда

$$I_{z_1} = I_{z\tilde{n}} + M \cdot d^2 \quad (3.12)$$

Момент инерции некоторых тел.

1. Стержень

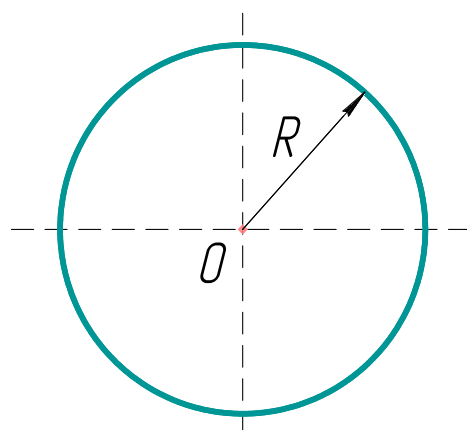


$$I_{z_l} = \frac{ml^2}{12} \quad (3.13)$$

$$I_z = I_{z_l} + M \cdot d^2 = \frac{ml^2}{12} + m \cdot d^2 = \frac{ml^2}{12} + m \left(\frac{l}{2} \right)^2 = \frac{ml^2}{12} + \frac{ml^2}{4} = \frac{ml^2 + 3ml^2}{12} = \frac{4ml^2}{12} = \frac{ml^2}{3};$$

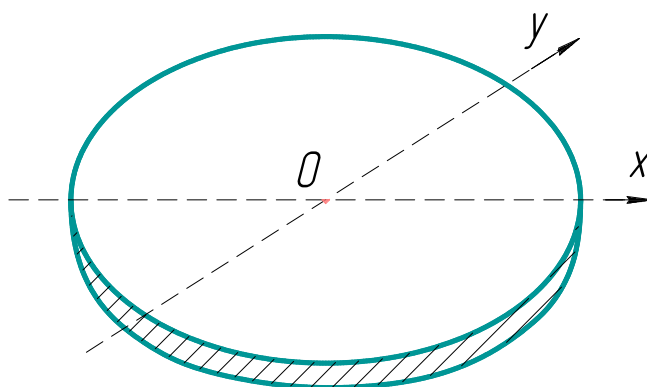
$$I_z = \frac{ml^2}{3} \quad (3.14)$$

2. Кольцо радиусом R



$$I_o = m \cdot R^2 \quad (3.15)$$

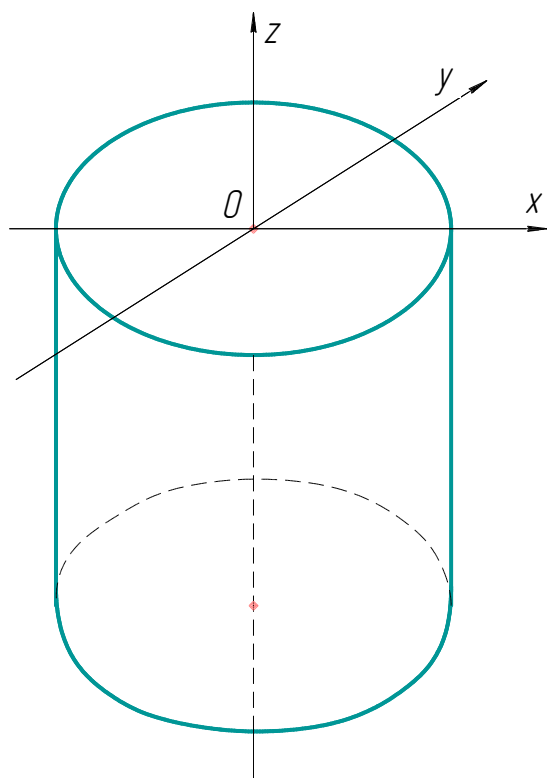
3. Диск однородный или однородная пластина радиусом R



$$I_o = \frac{mR^2}{2} \quad (3.16)$$

$$I_x = I_y = \frac{mR^2}{4} \quad (3.17)$$

4. Однородный цилиндр



$$I_z = \frac{mR^2}{2}$$

(3.18)