МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ, МОЛОДІ ТА СПОРТУ УКРАЇНИ
ДЕРЖАВНИЙ ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД
«ДОНЕЦЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ»
КАФЕДРА ПРИКЛАДНОЇ МАТЕМАТИКИ ТА ІНФОРМАТИКИ

І.А. Назарова

ДИСКРЕТНИЙ АНАЛІЗ

НАВЧАЛЬНО-МЕТОДИЧНИЙ ПОСІБНИК

**Донецьк
ДВНЗ «ДонНТУ»
2012**

УДК 517.62(075.8)
Н 19

Рекомендовано до друку Вченою Радою ДВНЗ «Донецький національний технічний університет» (протокол № 6 від 14 червня 2012 року)

Рецензенти: *А.О. Каргін*, доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри комп'ютерних технологій, декан фізичного факультету Донецького національного університету;

В.А. Святний, доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри комп'ютерної інженерії Донецького національного технічного університету.

Відповідальний за випуск: *Є.О. Башков*, доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри прикладної математики та інформатики, проректор із наукової роботи Донецького національного технічного університету.

Назарова І.А.

Н 19 Дискретний аналіз: навчально-методичний посібник / І.А.Назарова. – Донецьк: ДВНЗ «ДонНТУ», 2012. – 277 с.

ISBN 978-966-377-146-5

У навчально-методичному посібнику розкрито основні теоретичні положення дискретного аналізу та подано необхідні методичні матеріали для вивчення дисципліни. Цей курс сформований як сукупність таких розділів дискретної математики, як: теорія множини та відношень, булева алгебра, комбінаторний аналіз, теорія графів. У кінці кожного розділу подано перелік запитань та завдання, необхідні для самоконтролю та закріплення теоретичного матеріалу.

Для студентів вищих навчальних закладів, що отримують освіту за напрямами підготовки «Економічна кібернетика», «Комп'ютерні науки», «Програмна інженерія», «Комп'ютерна інженерія».

УДК 517.62(075.8)

ISBN 968-966-377-146-5

ВСТУП

Дискретний аналіз – це частина сучасної абстрактної математики, предметом дослідження якої є дискретні об'єкти. Метою дисципліни є ознайомлення з основними поняттями, результатами і методами досліджень дискретної математики, навчити ефективно застосовувати зазначений математичний апарат для розв'язання різноманітних практичних завдань.

Перший розділ навчально-методичного посібника присвячено викладенню основ теорії множини. У другому розділі розглянута теорія відношень, у більшій частині бінарних. Докладно розглядаються властивості бінарних відношень, вводяться відношення порядку та еквівалентності, визначаються поняття функції, відображення, сюр'єкції, ін'єкції та біекції.

Третій розділ містить матеріал по комбінаторному аналізу, приведено всі типи комбінаторних з'єднань із повторенням елементів та без, розв'язані для кожного з них задачі перерахунку, а також викладено принцип включення-виключення. Четвертий розділ посвячено теорії, за рахунок якої дискретна математика ще називається комп'ютерною, а саме теорії функції алгебри логіки. В цьому розділі введені основні булеві функції від одного та двох аргументів, приведено табличний, графічний способи завдання, канонічні аналітичні представлення функцій алгебри логіки у вигляді диз'юнктивної та кон'юнктивної нормальних та досконалих форм, графічні та таблично-аналітичні способи мінімізації, теорія повноти систем булевих функцій.

Розділи із п'ятого по десятий містять теоретичні та практичні матеріали із теорії графів: екстремальні графи, операції над графами, типи підграфів, ізоморфізм та ізоморфна вкладеність, маршрути та зв'язність у неорграфах, теорія дерев та кістяків, ейлереві та гамільтонові графи, планарність та розфарбування графів, особливості теорії орієнтованих графів.

В основу навчально-методичного посібника покладено курс лекцій, що читається автором упродовж десятків років на кафедрі прикладної математики та інформатики факультету комп'ютерних наук та технологій ДВНЗ «Донецький національний технічний університет».

РОЗДІЛ 1
ТЕОРІЯ МНОЖИНИ

1.1 Основні поняття теорії множини

Поняття «множини» відноситься до категорії найбільш загальних, основоположних понять математики, тому замість строгого визначення зазвичай приймається деяке основне положення про множину та її елементи. Засновником теорії множини, як математичної теорії, вважається німецький математик Георг Кантор (кінець 19 століття). Визначення множини, яке дав Кантор: «**Множина** – це багато чого, що мислиться нами, як єдине ціле».

У якості робочого визначення приймається наступне.

Множина – це сукупність визначених об'єктів таких, що обов'язково розрізняються між собою та для будь-якого об'єкта можна встановити, належить він даній сукупності чи ні.

Той факт, що множина $\mathbf{A}$ складається з об'єктів $\mathbf{a_1, a_2, ..., a_n}$ й тільки з них умовно записується таким чином: $\mathbf{A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}}$.

Об'єкти $\mathbf{a_1, a_2, ..., a_n}$ називаються **елементами** множини $\mathbf{A}$.

Для позначення множин використовуються великі латинські літери, а для позначення їх елементів – малі літери. У разі необхідності при позначенні використовуються індекси.

Наприклад:

1) для множин: $\mathbf{A, D, ..., X, Y, A_1, A_2, ..}$

2) для елементів: $\mathbf{a, b, ..., x, y, z, a_1, a_2, ...}$

Позначення відомих математичних множин: **N** – множина натуральних чисел; $\mathbf{N_k = \{1,2,3,...,k\}}$ – відрізок натурального ряду чисел від $\mathbf{1}$ до $\mathbf{k}$; **Z** – множина цілих чисел; **Q** – множина раціональних чисел; **R** – множина дійсних чисел; **C** – множина комплексних чисел.

Скінченна множина – множина, що складається із скінченної кількості елементів, у протилежному випадку – **нескінченна множина**.

1.2 Способи завдання множини

1) Перерахування елементів (підходить для скінченної множини із невеликою кількістю елементів).

Наприклад.

$\mathbf{N_6 = \{1,2,3,4,5,6\}}$, $\mathbf{A = \{1,3,5,6,9,\text{-}10\}.}$

2) Завдання визначальної властивості: $\mathbf{X = \{x \mid P(x)\}}$, множина $\mathbf{X}$ складається з таких елементів $\mathbf{x}$, що володіють властивістю $\mathbf{P(x)}$.

Наприклад.

$\mathbf{X = \{x \mid 1 > x > 5, x \in Z\}}$, $\mathbf{A = \{a^2 \mid a \bmod 2 = 0, a \in N\}}$.

Порожня множина – множина, що не містить жодного елементу. Порожня множина позначається $\varnothing$ або $\mathbf{\{\}}$.

Універсальна множина – множина, що містить усі можливі елементи у заданому класі задач. Універсальна множина позначається **U.**

Потужність множини – позначається як $|\mathbf{A}|$. Потужність скінченої множини – кількість її елементів.

Твердження «**a** є елементом множини **A**» записується у вигляді **a**$\in$**A** (**a** **<u>належить</u>** множині **A**).

Твердження «**a** не є елементом множини **A**» записується у вигляді **a**$\notin$**A** (**a** **<u>не належить</u>** множині **A**).

1.3 Відношення між множинами

Множини **A** і **B** називаються **рівними** або **тотожно рівними** (позначається відповідно $\mathbf{A = B, A \equiv B}$), якщо вони складаються з однакових елементів.

Якщо кожен елемент множини **A** є також елементом множини **B**, то кажуть, що **A міститься** або **включається** у **B**. У цьому випадку пишуть $\mathbf{A \subseteq B}$.

Множина **A** називається **підмножиною** множини **B**, якщо $\mathbf{A \subseteq B}$.

У тих випадках, коли одночасно мають місце співвідношення $\mathbf{A \subseteq B}$ і $\mathbf{A \neq B}$, кажуть, що **A** **строго включається** у **B**, та використовують запис $\mathbf{A \subset B}$.

Наприклад.

$\mathbf{A=\{a,b,c,d\}}$, $\mathbf{B=\{b,c\}}$, $\mathbf{C=\{c,d,a,b\}}$. $\mathbf{A=C,\ B\subset A,\ A\subseteq C.}$

Вірні співвідношення: $\mathbf{a\in\{a,b\}}$, $\varnothing\subseteq\mathbf{\{a,b\}}$, $\mathbf{\{a\}\subseteq\{a,b\}}$.

Невірні співвідношення: $\varnothing\in\mathbf{\{a,b\}}$, $\mathbf{a\subseteq\{a,b\}}$, $\mathbf{\{a\}\in\{a,b\}}$.

1.4 Властивості підмножини та булеан

1) Порожня множина є підмножиною будь-якої множини: $\varnothing\subseteq\mathbf{A}$.

2) Сама множина є своєю підмножиною: $\mathbf{A\subseteq A}$.

3) Будь-яка множина є підмножиною відповідної універсальної множини: $\mathbf{A\subseteq U}$.

4) Для будь-якої множини $\mathbf{A}$ порожню множину $\varnothing$ та саму множину $\mathbf{A}$ прийнято називати **невласними** підмножинами множини $\mathbf{A}$, а всі відмінні від них підмножини – **власними**.

Булеан P(A) – множина, елементами якої являються всі підмножини множини **A.**

Наприклад.

Визначити булеан множини $\mathbf{A}$.

1) $\mathbf{A=\{1,2,3\}}$,

$\mathbf{|A|=3}$, $\mathbf{|P(A)|=2^3=8.}$

$\mathbf{P(A)=\{\varnothing,\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{1,2,3\}\}}$.

2) $\mathbf{A=\{1,\{1\},\{1,2\}\}}$,

$\mathbf{|A|=3}$, $\mathbf{|P(A)|=8}$.

$\mathbf{P(A)=\{\varnothing,\{1\},\{\{1\}\},\{\{1,2\}\},\{1,\{1\}\},\{1,\{1,2\}\},\{\{1\},\{1,2\}\},A\}}$.

3) $\mathbf{A=\{a,b,c,d\}}$,

$\mathbf{|A|=4}$, $\mathbf{|P(A)|=2^4=16.}$

$\mathbf{P(A)=\{\varnothing,\{a\},\{b\},\{c\},\{d\},\{a,b\},\{a,c\},\{a,d\},\ \{b,c\},\{b,d\},\{c,d\},}$

$\mathbf{\{a,b,c\},\{a,b,d\},\{a,c,d\},\{b,c,d\},\{a,b,c,d\}\}}$.

4) $\mathbf{A=\{\{\varnothing\},\varnothing\}}$, $\mathbf{|A|=2}$, $\mathbf{|P(A)|=4}$. $\mathbf{P(A)=\{\varnothing,\{\{\varnothing\}\},\{\varnothing\},A\}}$.

Теорема про потужність булеану

Для довільної множини $\mathbf{A}$ потужності $\mathbf{n}$ існує $\mathbf{2^n}$ усіх, різних підмножин, тобто потужність булеану множини, що складається з $\mathbf{n}$ елементів, дорівнює: $|\mathbf{P(A)}| = \mathbf{2^n}$.

Доведення.

Нехай $\mathbf{A}$ є множина, що складається з елементів: $\mathbf{A} = \{\mathbf{a_1, a_2, ..., a_n}\}$, а $\mathbf{B}$ – деяка довільна підмножина множини $\mathbf{A}$, тобто $\mathbf{B} \subseteq \mathbf{A}$. Множині $\mathbf{B}$ поставимо у відповідність вектор $\mathbf{C}$, що складається з нулів та одиниць: якщо $\mathbf{a_i} \in \mathbf{B}$, то **i**-й елемент вектора $\mathbf{C}$ дорівнює **1**, якщо $\mathbf{a_i} \notin \mathbf{B}$, то і-й елемент вектора $\mathbf{C}$ дорівнює **0**. Наприклад, нехай $\mathbf{n = 4}$, $\mathbf{A} = \{\mathbf{a_1, a_2, a_3, a_4}\}$:

$$\mathbf{B} = \{\mathbf{a_1, a_2}\} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{C = (1100);}$$

$$\mathbf{B} = \{\mathbf{a_1, a_2, a_4}\} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{C = (1110);}$$

$$\mathbf{B} = \{\mathbf{a_1, a_2, a_3, a_4}\} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{C = (1111).}$$

Таким чином, кожній підмножині множини $\mathbf{A}$ відповідає певний єдиний вектор $\mathbf{C}$ та навпаки, та різним підмножинам множини $\mathbf{A}$ відповідають різні вектори $\mathbf{C}$. Тоді підмножин множини $\mathbf{A}$ рівно стільки, скільки існує векторів $\mathbf{C}$. Загальна ж кількість таких векторів – це кількість різних двійкових векторів довжини $\mathbf{n}$ і дорівнює $\mathbf{2^n}$.

1.5 Операції над множинами

Об'єднанням множин $\mathbf{A}$ та $\mathbf{B}$ (позначається $\mathbf{A \cup B}$) називається така множина $\mathbf{X}$, що складається з усіх елементів, що належать хоча б до одної з цих множин, тобто

$$\mathbf{A \cup B = X = \{x \mid x \in A \text{ або } x \in B\}}.$$

Перетином множин $\mathbf{A}$ та $\mathbf{B}$ (позначається $\mathbf{A \cap B}$) називається множина $\mathbf{X}$, що складається з всіх елементів, що належать кожній з цих множин, тобто

$$\mathbf{A \cap B = X = \{x \mid x \in A \text{ і } x \in B\}}.$$

Різницею множин $\mathbf{A}$ та $\mathbf{B}$ (позначається $\mathbf{A \setminus B}$) називається така множина $\mathbf{X}$, що складається з усіх елементів множини $\mathbf{A}$, що не належать множині $\mathbf{B}$, тобто

$$\mathbf{A \setminus B = X = \{ x \mid x \in A \;\; і \;\; x \notin B \}}.$$

Доповненням множини $\mathbf{A}$ до універсальної множини $\mathbf{U}$ (позначається $\overline{\mathbf{A}}$, $\neg\mathbf{A}$) називається множина $\mathbf{X}$, що складається з усіх елементів універсальної множини $\mathbf{U}$, що не належать множині $\mathbf{A}$, тобто

$$\mathbf{X = \overline{A} = \neg A = U \setminus A}.$$

Операцію доповнення ще називають **абсолютною різницею**.

Симетричною різницею множин $\mathbf{A}$ і $\mathbf{B}$ (позначається $\mathbf{A \oplus B}$ чи $\mathbf{A \Delta B}$) називається множина $\mathbf{X}$, що складається з усіх елементів, що належать точно одній із цих множин, тобто

$$\mathbf{A \oplus B = X = \{x \mid \text{або } x \in A \text{ та } x \notin B, \text{ або } x \notin A \text{ та } x \in B\}}.$$

$$\mathbf{A \oplus B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)}.$$

Наприклад.

1) Нехай множини $\mathbf{A}$ та $\mathbf{B}$ задано на універсумі $\mathbf{N_7}$ **:**

$\mathbf{A = \{1,2,3,4\}}$, $\mathbf{B = \{3,4,5,6\}}$.

Тоді, $\mathbf{A \cap B = \{3,4\}}$, $\mathbf{A \cup B = \{1,2,3,4,5,6\}}$, $\mathbf{A \setminus B = \{1,2\}}$, $\mathbf{B \setminus A = \{5,6\}}$, $\mathbf{A \oplus B = \{1,2,5,6\}}$, $\mathbf{\overline{A} = \{5,6,7\}}$, $\mathbf{\overline{B} = \{1,2,7\}}$.

2) Нехай $\mathbf{U = \{a,b,c,d,e,f,g,h,q\}}$, $\mathbf{X = \{a,b,c,d,e\}}$, $\mathbf{Y = \{e,d,f,g\}}$.

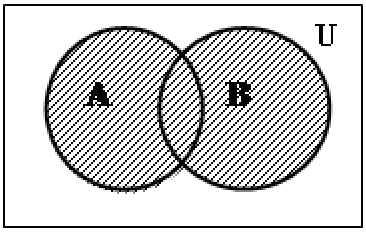
Тоді, $\mathbf{X \cap Y = \{d,e\}}$, $\mathbf{X \cup Y = \{a,b,c,d,e,f,g\}}$, $\mathbf{X \setminus Y = \{a,b,c\}}$, $\mathbf{Y \setminus X = \{f,g\}}$, $\mathbf{X \oplus Y = \{a,b,c,f,g\}}$, $\mathbf{\overline{X} = \{f,g,h,q\}}$, $\mathbf{\overline{Y} = \{a,b,c,h,q\}}$.

1.6 Графічне зображення множини

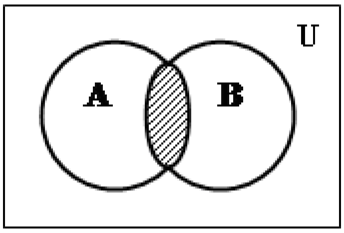
Операції над множинами можна проілюструвати графічно за допомогою **діаграм** або **кіл Ейлера (Вейча)**. У цьому випадку вхідні множини зображують у вигляді точок площини, обмежених колом або будь-якою іншою замкнутою лінією, а множина-результат виділяється штрихуванням.

Штрихування може мати різний колір, нахил та щільність.

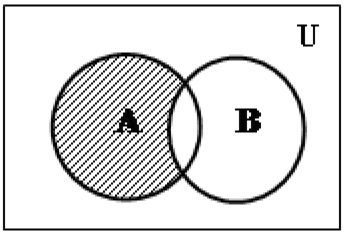
Універсальна множина зображується множиною точок площини, обмежених прямокутником. У якості прикладу, наведено графічну ілюстрацію основних операцій над множинами: об'єднання, перетину, різниці, доповнення та симетричної різниці.



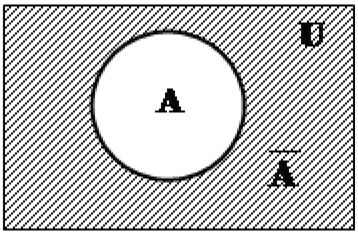
$\mathbf{A \cup B}$



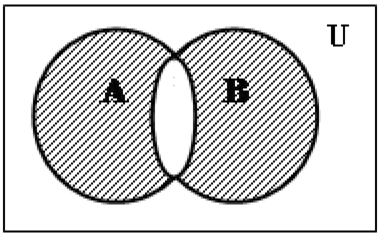
$\mathbf{A \cap B}$



$\mathbf{A \setminus B}$



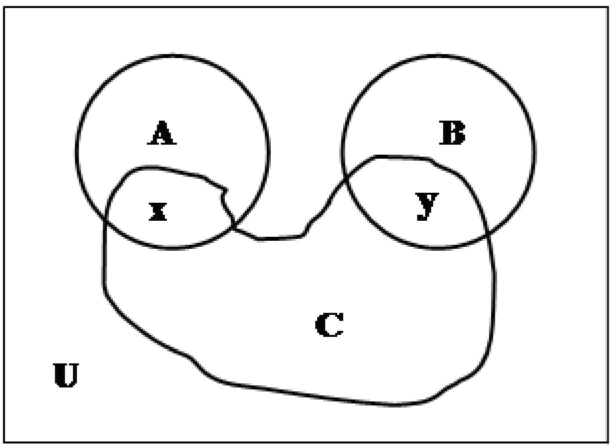
$\overline{\mathbf{A}}$



$\mathbf{A \oplus B}$

Наприклад.

Нехай універсум це множина букв латинського алфавіту. $\mathbf{A = \{x, z, q\}}$, $\mathbf{B = \{y, f, g\}}$, $\mathbf{C = \{x, y, k, l\}}$. Привести графічне зображення множини: $\mathbf{A \cap B \cap C}$. $\mathbf{A \cap C = \{x\}}$, $\mathbf{B \cap C = \{y\}}$, але $\mathbf{A \cap B = A \cap B \cap C = \varnothing}$, тому результат цієї операції штриховкой відмітити не можна.



1.7 Основні закони алгебри множин

1) Комутативні закони

$$\mathbf{A} \cup \mathbf{B} = \mathbf{B} \cup \mathbf{A}$$

$$\mathbf{A} \cap \mathbf{B} = \mathbf{B} \cap \mathbf{A}$$

$$\mathbf{A}\ \Delta\ \mathbf{B} = \mathrm{B}\ \Delta\ \mathbf{A}$$

2) Асоціативні закони

$$\mathbf{A} \cup (\mathbf{B} \cup \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) \cup \mathbf{C}$$

$$\mathbf{A} \cap (\mathbf{B} \cap \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cap \mathbf{B}) \cap \mathbf{C}$$

3) Дистрибутивні закони

$$\mathbf{A} \cup (\mathbf{B} \cap \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) \cap (\mathbf{A} \cup \mathbf{C})$$

$$\mathbf{A} \cap (\mathbf{B} \cup \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cap \mathbf{B}) \cup (\mathbf{A} \cap \mathbf{C})$$

4) Закони з $\varnothing$ і **U**

$$\mathbf{A} \cup \varnothing = \mathbf{A} \qquad \mathbf{A} \cap \mathbf{U} = \mathbf{A} \qquad \mathbf{A} \cup \overline{\mathbf{A}} = \mathbf{U}$$

$$\mathbf{A} \cap \varnothing = \varnothing \qquad \mathbf{A} \cup \mathbf{U} = \mathbf{U} \qquad \mathbf{A} \cap \overline{\mathbf{A}} = \varnothing$$

$$\overline{\mathbf{U}} = \varnothing \qquad \overline{\varnothing} = \mathbf{U}$$

6) Закони ідемпотентності

$$\mathbf{A} \cap \mathbf{A} = \mathbf{A} \qquad \mathbf{A} \cup \mathbf{A} = \mathbf{A} \qquad \overline{\overline{\mathbf{A}}} = \mathbf{A}$$

7) Закони поглинання

$$\mathbf{A} \cup (\mathbf{A} \cap \mathbf{B}) = \mathbf{A}$$

$$\mathbf{A} \cap (\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) = \mathbf{A}$$

8) Закони де Моргана

$$\overline{\mathbf{A} \cap \mathbf{B}} = \overline{\mathbf{A}} \cup \overline{\mathbf{B}}$$

$$\overline{\mathbf{A} \cup \mathbf{B}} = \overline{\mathbf{A}} \cap \overline{\mathbf{B}}$$

9) Закони склеювання

$$(\mathbf{A} \cap \mathbf{B}) \cup (\overline{\mathbf{A}} \cap \mathbf{B}) = \mathbf{B}$$

$$(\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) \cap (\overline{\mathbf{A}} \cup \mathbf{B}) = \mathbf{B}$$

Із властивості асоціативності операції об’єднання множин випливає, що об’єднання кількох множин можна виконати, послідовно об’єднуючи їх, причому порядок входження множин не впливає на результат:

$$\mathbf{A} \cup (\mathbf{B} \cup \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) \cup \mathbf{C} = \mathbf{A} \cup \mathbf{B} \cup \mathbf{C}.$$

Отже, об’єднання сукупності множин можна подати співвідношенням:

$$\mathbf{A_1} \cup \mathbf{A_2} \cup \ldots \cup \mathbf{A_n} = \bigcup_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{n}} \mathbf{A_i}\ .$$

Аналогічно на **n** множин узагальнюється операція перетину:

$$\mathbf{A_1} \cap \mathbf{A_2} \cap \ldots \cap \mathbf{A_n} = \bigcap_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{n}} \mathbf{A_i}\ .$$

Використовуючи узагальнення операцій об’єднання та перетину на **n** множин, можна узагальнити також інші співвідношення, наприклад закон де Моргана, який в узагальненому вигляді записується так:

$$\overline{\bigcup_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{n}} \mathbf{A_i}} = \bigcap_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{n}} \overline{\mathbf{A_i}} \text{ і } \overline{\bigcap_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{n}} \mathbf{A_i}} = \bigcup_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{n}} \overline{\mathbf{A_i}}\ .$$

Справедливість законів алгебри множин доводиться на основі визначення рівності: $\mathbf{X} = \mathbf{Y}$, якщо

1) $\mathbf{X} \subseteq \mathbf{Y}$: $\forall\ \mathbf{x} \in \mathbf{X} \Rightarrow \mathbf{x} \in \mathbf{Y}$;

2) $\mathbf{Y} \subseteq \mathbf{X}$: $\forall\ \mathbf{y} \in \mathbf{Y} \Rightarrow \mathbf{y} \in \mathbf{X}$.

Сформульований принцип називають **інтуїтивним принципом об'ємності**.

Для доказів будемо використовувати наступні позначення (**{** - і ; **[** - або) і співвідношення :

$$\mathbf{x} \in \mathbf{A} \cap \mathbf{B} \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{x} \in \mathbf{A} \\ \mathbf{x} \in \mathbf{B} \end{cases} \qquad \mathbf{x} \in \mathbf{A} \cup \mathbf{B} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \mathbf{x} \in \mathbf{A} \\ \mathbf{x} \in \mathbf{B} \end{array} \right.$$

$$\mathbf{x} \notin \mathbf{A} \cap \mathbf{B} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \mathbf{x} \notin \mathbf{A} \\ \mathbf{x} \notin \mathbf{B} \end{array} \right. \qquad \mathbf{x} \notin \mathbf{A} \cup \mathbf{B} \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{x} \notin \mathbf{A} \\ \mathbf{x} \notin \mathbf{B} \end{cases}$$

$$\mathbf{x} \in \mathbf{A} \setminus \mathbf{B} \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{x} \in \mathbf{A} \\ \mathbf{x} \notin \mathbf{B} \end{cases} \qquad \mathbf{x} \notin \mathbf{A} \setminus \mathbf{B} \Rightarrow \mathbf{x} \notin \mathbf{A} \cap \overline{\mathbf{B}} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \mathbf{x} \notin \mathbf{A} \\ \mathbf{x} \in \mathbf{B} \end{array} \right.$$

Наприклад.

Використовуючи відношення належності, довести тотожність

$$(\mathbf{A} \,\Delta\, \mathbf{B}) \setminus \mathbf{C} = (\mathbf{A} \setminus \mathbf{C}) \,\Delta\, (\mathbf{B} \setminus \mathbf{C}).$$

Доведення.

Нехай $\mathbf{X = (A \Delta B) \setminus C, \; Y = (A \setminus C) \Delta (B \setminus C).}$

Якщо $\mathbf{x \in X \Rightarrow x \in (A \Delta B) \setminus C \Rightarrow}$

$$\begin{cases} \mathbf{x \in A \Delta B} \\ \mathbf{x \notin C} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{x \in (A \setminus B) \cup (B \setminus A)} \\ \mathbf{x \notin C} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \mathbf{x \in A} \\ \mathbf{x \notin B} \end{cases} \\ \begin{cases} \mathbf{x \in B} \\ \mathbf{x \notin A} \end{cases} \end{array} \right. \\ \mathbf{x \notin C} \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \mathbf{x \in A} \\ \mathbf{x \notin B} \\ \mathbf{x \notin C} \end{cases} \\ \begin{cases} \mathbf{x \notin A} \\ \mathbf{x \in B} \\ \mathbf{x \notin C} \end{cases} \end{array} \right. \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \mathbf{x \in A} \\ \mathbf{x \notin B} \\ \mathbf{x \notin C} \end{cases} \text{ або } \begin{cases} \mathbf{x \notin A} \\ \mathbf{x \in B} \\ \mathbf{x \notin C} \end{cases}.$$

Якщо $\mathbf{y \in Y \Rightarrow y \in (A \setminus C) \Delta (B \setminus C) \Rightarrow}$

$\mathbf{y \in [(A \setminus C) \setminus (B \setminus C)] \cup [(B \setminus C) \setminus (A \setminus C)] \Rightarrow}$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \mathbf{y \in A \setminus C} \\ \mathbf{y \notin B \setminus C} \end{cases} \\ \\ \begin{cases} \mathbf{y \in B \setminus C} \\ \mathbf{y \notin A \setminus C} \end{cases} \end{array} \right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \mathbf{y \in A} \\ \mathbf{y \notin C} \end{cases} \text{ з } \left[\begin{array}{l} \mathbf{y \notin B} \\ \mathbf{y \in C} \end{array} \right. \\ \\ \begin{cases} \mathbf{y \in B} \\ \mathbf{y \notin C} \end{cases} \text{ з } \left[\begin{array}{l} \mathbf{y \notin A} \\ \mathbf{y \in C} \end{array} \right. \end{array} \right. \Rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \mathbf{y \in A} \\ \mathbf{y \notin C} \\ \mathbf{y \notin B} \end{cases} \\ \begin{cases} \mathbf{y \in B} \\ \mathbf{y \notin C} \\ \mathbf{y \notin A} \end{cases} \end{array} \right. \text{ або } \begin{cases} \xcancel{\begin{array}{l} \mathbf{y \in A} \\ \mathbf{y \in C} \\ \mathbf{y \notin C} \end{array}} \end{cases} \text{ або } \begin{cases} \xcancel{\begin{array}{l} \mathbf{y \in B} \\ \mathbf{y \in C} \\ \mathbf{y \notin C} \end{array}} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \mathbf{y \in A} \\ \mathbf{y \notin B} \\ \mathbf{y \notin C} \end{cases} \text{ або } \begin{cases} \mathbf{y \notin A} \\ \mathbf{y \in B} \\ \mathbf{y \notin C} \end{cases}.$$

Таким чином, множина $\mathbf{X}$ задовольняє наступним співвідношенням:

$$\begin{cases} \mathbf{x \in A} \\ \mathbf{x \notin B} \\ \mathbf{x \notin C} \end{cases} \text{або} \begin{cases} \mathbf{x \notin A} \\ \mathbf{x \in B} \\ \mathbf{x \notin C} \end{cases}.$$

Множина $\mathbf{Y}$ задовольняє аналогічним співвідношенням:

$$\begin{cases} \mathbf{y \in A} \\ \mathbf{y \notin B} \\ \mathbf{y \notin C} \end{cases} \text{або} \begin{cases} \mathbf{y \notin A} \\ \mathbf{y \in B} \\ \mathbf{y \notin C} \end{cases}.$$

Множини $\mathbf{X}$ та $\mathbf{Y}$ складаються з одних й тих же елементів, отже за визначенням, вони рівні. Отже доведено, що тотожність є вірною.

1.8 Покриття та розбиття множини

Покриттям непустої множини $\mathbf{A}$ називають сукупність підмножин $\mathbf{\Pi(A) = \{A_1, A_2, ..., A_n\}}$ таких, що:

$$\bigcup_{i=1}^{n} \mathbf{A_i = A,\ n \in N},$$
$$\forall \mathbf{i} = \overline{\mathbf{1,n}}\ \ \mathbf{A_i} \neq \varnothing,$$
$$\forall \mathbf{i} = \overline{\mathbf{1,n}}\ \ \mathbf{A_i \subseteq A}.$$

Розбиттям непустої множини $\mathbf{A}$ називають сукупність підмножин $\mathbf{P(A) = \{A_1, A_2, ..., A_n\}}$ таких, що:

$$\bigcup_{i=1}^{n} \mathbf{A_i = A, n \in N},$$
$$\forall \mathbf{i} = \overline{\mathbf{1,n}}\ \ \mathbf{A_i} \neq \varnothing,$$
$$\forall \mathbf{i} = \overline{\mathbf{1,n}}\ \ \mathbf{A_i \subseteq A},$$
$$\forall \mathbf{i, j} = \overline{\mathbf{1,n}}, \mathbf{i \neq j},\ \mathbf{A_i \cap A_j} = \varnothing.$$

Наприклад.

Нехай задана множина $\mathbf{A = N_4 = \{1,2,3,4\}}$.

Приклад покриття множини $\mathbf{A}$: $\mathbf{\Pi(A) = \{\{1\}, \{1,2\}, \{1,2,3,4\}\}}$.

Приклади розбиття цієї множини $\mathbf{A}$:

$\mathbf{P(A) = \{\{1,2\}, \{3,4\}\}}$, $\mathbf{P(A) = \{\{1\}, \{2\}, \{3,4\}\}}$.

1.9 Завдання для самостійної роботи

1. Задано множини $\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}, \mathbf{U}$.

$\mathbf{X}$ – множина букв, що має ім'я студента;

$\mathbf{Y}$ – множина букв по батькові студента;

$\mathbf{Z}$ – множина букв прізвища студента;

$\mathbf{U}$ – універсальна множина $\mathbf{U} = \mathbf{X} \cup \mathbf{Y} \cup \mathbf{Z} \cup \{$голосні, що відсутні в множинах **X, Y, Z**$\}$.

1.1 Обчислити множини:

– $\mathbf{X} \cap \mathbf{Y}, \mathbf{X} \cap \mathbf{Z}, \mathbf{Y} \cap \mathbf{Z}, \mathbf{X} \cap \mathbf{Y} \cap \mathbf{Z}$;

– $\mathbf{Y} \cup \mathbf{Z}, \mathbf{X} \cup \mathbf{Y} \cup \mathbf{Z}, \mathbf{X} \setminus \mathbf{Z}, \mathbf{Z} \setminus \mathbf{X}, \mathbf{X} \cup \overline{\mathbf{Z}}, \mathbf{X} \oplus \mathbf{Z}$;

– $\mathbf{X} \cap \overline{\mathbf{Y}}, \mathbf{X} \cup (\mathbf{Y} \cap \mathbf{Z}), (\mathbf{X} \setminus \mathbf{Z}) \cup (\mathbf{Z} \setminus \mathbf{X})$;

1.2 Намалювати діаграми Ейлера для множин:

– $\mathbf{X} \cap \mathbf{Y} \cap \mathbf{Z}$;

– $(\mathbf{X} \cap \mathbf{Y}) \cup \overline{\mathbf{Z}}$;

– $(\mathbf{X} \setminus \mathbf{Z}) \cup (\mathbf{Y} \setminus \mathbf{Z})$.

1.3 Перевірити експериментально на множинах **X, Y, Z** справедливість наступних тверджень:

– $\overline{(\mathbf{X} \cap \mathbf{Y})} = \overline{\mathbf{X}} \cup \overline{\mathbf{Y}}$;

– $\overline{(\mathbf{X} \cup \mathbf{Y})} = \overline{\mathbf{X}} \cap \overline{\mathbf{Y}}$;

– $\mathbf{X} \setminus (\mathbf{Y} \cup \mathbf{Z}) = (\mathbf{X} \setminus \mathbf{Y}) \cap (\mathbf{X} \setminus \mathbf{Z})$;

– $\mathbf{X} \setminus (\mathbf{Y} \cap \mathbf{Z}) = (\mathbf{X} \setminus \mathbf{Y}) \cup (\mathbf{X} \setminus \mathbf{Z})$.

1.4 Для довільної підмножини множини **Z** потужності 4 скласти булеан, навести три приклади покриття та перелічити усі розбиття.

2. Довести наступні тотожності, використовуючи відношення належності. Продемонструвати на колах Ейлера:

– $\mathbf{A} \cap (\mathbf{B} \cup \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cap \mathbf{B}) \cup (\mathbf{A} \cap \mathbf{C})$;

– $\mathbf{A} \cup (\mathbf{B} \cap \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) \cap (\mathbf{A} \cup \mathbf{C})$;

– $\mathbf{A} \setminus (\mathbf{B} \cup \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \setminus \mathbf{B}) \cap (\mathbf{A} \setminus \mathbf{C})$;

– $\mathbf{A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)}$;

– $\mathbf{A \setminus (A \setminus B) = A \cap B}$;

– $\mathbf{A \setminus B = A \setminus (A \cap B)}$;

– $\mathbf{A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C) = (A \cap B) \setminus C}$;

– $\mathbf{(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus (B \setminus C)}$;

– $\mathbf{(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) = (A \cup B) \cap (A \cup \overline{B}) = A}$;

– $\mathbf{(\overline{A} \cup B) \cap A = A \cap B}$;

– $\mathbf{(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)}$;

– $\mathbf{A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)}$;

– $\mathbf{A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \setminus C}$;

– $\mathbf{A \oplus (B \oplus C) = (A \oplus B) \oplus C}$.

3. Визначте істинність або хибність кожного з наступних тверджень: $\varnothing \subseteq \varnothing$; $\varnothing \subset \varnothing$; $\varnothing \in \varnothing$; $\varnothing \subseteq \mathbf{A}$; $\varnothing \in \mathbf{A}$, де $\mathbf{A}$ - довільна множина.

4. Визначте істинність або хибність кожного з наступних тверджень:

а) $\mathbf{\{9\} \in \{1, \{3, 5\}, 7, \{9\}\}}$;

б) $\mathbf{\{5\} \in \{1, 3, 5, \{7\}, 9\}}$;

в) $\mathbf{\{1, 3, 5\} \in \{1, 2, \{3\}, 4, 5\}}$;

г) $\mathbf{\{1, 3, 5\} \subset \{1, 2, 3, 4, 5\}}$;

д) $\mathbf{\{1, 4, 5\} \subseteq \{1, 2, \{3\}, 4, 5\}}$.

5. Визначте потужність та запишіть булеан для кожної наступної множини:

а) $\mathbf{\{\varnothing, 1, 2, 3, 4, 5\}}$;

б) $\mathbf{\{1, \{2\}, 3, \{4, 5, 6, 7\}\}}$;

в) $\mathbf{\{1, 2, 3, \{4, \{5, 6, 7\}\}\}}$;

г) $\mathbf{\{\{1, 2\}, \{\{3, 4\}, 5\}, 6, 7\}}$.

6. Для кожної з наведених нижче множин використайте діаграми Ейлера і заштрихуйте та її частини, які зображують задані множини:

а) $\overline{(\mathbf{A} \cap \mathbf{B})} \cup \mathbf{C}$; б) $\overline{(\mathbf{A} \oplus \mathbf{B})}$;

в) $\mathbf{B} \setminus \overline{\mathbf{A}}$; г) $(\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) \setminus (\mathbf{A} \cap \mathbf{B})$;

д) $\mathbf{B} \setminus (\mathbf{A} \cap \mathbf{B})$; е) $\overline{(\mathbf{A} \cap \mathbf{B} \cap \mathbf{C})}$;

ж) $\mathbf{A} \setminus (\mathbf{B} \cap \mathbf{C})$; з) $(\mathbf{A} \cap \mathbf{B}) \oplus \mathbf{C}$;

і) $\mathbf{A} \oplus \mathbf{B} \oplus \mathbf{C}$; к) $(\mathbf{A} \cap \mathbf{B}) \oplus (\mathbf{A} \cap \mathbf{C})$.

7. Для аналізу попиту населення на кондитерську продукцію було проведено опитування серед населення. Із 1000 респондентів 560 купують продукцію вітчизняного виробництва, 390 - імпортного, 100 - як вітчизняного, так і імпортного виробництва.

За допомогою діаграм Ейлера визначити кількість опитуваних, що купують продукцію:

1) тільки вітчизняного виробництва;

2) тільки імпортного виробництва;

3) взагалі не купують кондитерські вироби.

1.10 Контрольні питання

1. Дати визначення множини.
2. Способи завдання множини.
3. Привести приклади скінченних та нескінченних множин.
4. Дати визначення порожньої й універсальної множин.
5. Дати визначення тотожно рівних множин.
6. Що називають підмножиною множини?
7. Чим відрізняються поняття включення й строге включення?
8. Визначити поняття булеану.
9. Сформулювати теорему про потужність булеану.
10. Визначити основні операції над множинами.
11. Графічний метод завдання множини. Кола Ейлера.
12. Записати основні закони алгебри множини.
13. Що таке розбиття та покриття множини. Навести приклади.

РОЗДІЛ 2
ТЕОРІЯ ВІДНОШЕНЬ

2.1 Основні визначення теорії відношень

Кортеж, набір, вектор – упорядкована послідовність елементів, у якій кожен елемент займає певне місце.

Елементи, що утворюють кортеж, називаються **координатами** або **компонентами** кортежу (вектора). Кількість координат кортежу називається **довжиною** або **розмірністю кортежу**.

$\mathbf{(\,)}$ – порожній кортеж, $\mathbf{(x)}$ – одноелементний кортеж, $\mathbf{(x, y)}$ – пара, двоелементний кортеж, $\mathbf{(x_1, x_2, ..., x_n)}$ – кортеж довжини **n** або **n**-ка ("енка").

Прямий (декартовий) добуток множин X та Y – множина усіх упорядкованих пар елементів $\mathbf{(x,y)}$ таких, що перший елемент належить першій множині, тобто $\mathbf{X}$, а другий елемент належить другій множині, $\mathbf{Y}$:

$$\mathbf{X \times Y = \{(x,y) \mid x \in X,\ y \in Y\}}.$$

Прямий (декартовий) добуток n множин $\mathbf{X_1, X_2, ..., X_n}$ – множина усіх упорядкованих наборів $\mathbf{(x_1, x_2, ..., x_n)}$ таких, що перший елемент належить множині $\mathbf{X_1}$, другий – множині $\mathbf{X_2}$, …, $\mathbf{n}$-й – множині $\mathbf{X_n}$:

$$\mathbf{X_1 \times X_2 \times ... \times X_n = \left\{ (x_1, x_2, ..., x_n) \,\middle|\, x_1 \in X_1,\ x_2 \in X_2, ..., x_n \in X_n \right\}.}$$

Декартовий добуток $\mathbf{X \times X}$ називається **декартовим квадратом** множини **X** та позначається $\mathbf{X^2}$**.**

Декартовий добуток $\underbrace{\mathbf{X \times X \times ... \times X}}_{\mathbf{n}}$, у якому одна й та ж множина **X** перемножується **n** разів сама на себе називається **декартовим степенем** множини $\mathbf{X}$: $\mathbf{X^n}$.

Наприклад.

Нехай $\mathbf{X = \{ x, y \}}$, $\mathbf{Y = \{ 1,2 \}}$, тоді

$\mathbf{X \times Y = \{ (x,1), (x,2), (y,1), (y,2) \}}$, а $\mathbf{Y \times X = \{ (1, x), (1, y), (2, x), (2, y) \}}$.

$\mathbf{R} \times \mathbf{R} = \mathbf{R}^2$ – множина точок декартової площини;

$\mathbf{R} \times \mathbf{R} \times ... \times \mathbf{R} = \mathbf{R}^n$ – множина точок $\mathbf{n}$-мірного простору.

Шахматна дошка:

$\mathbf{X} = \{\mathbf{a, b, c, d, e, f, g, h}\}$, $\mathbf{Y} = \{\mathbf{1,2,3,4,5,6,7,8}\}$, $\mathbf{X \times Y} = \{\mathbf{(a,1),...,(h,8)}\}$.

Властивості декартова добутку множин:

1) $\mathbf{X \times Y \neq Y \times X}$;

2) $|\mathbf{X \times Y}| = |\mathbf{X}| \cdot |\mathbf{Y}|$;

3) $\mathbf{X \times (Y \cap Z) = (X \times Y) \cap (X \times Z)}$;

4) $\mathbf{X \times (Y \cup Z) = (X \times Y) \cup (X \times Z)}$.

$\mathbf{n}$- арне або $\mathbf{n}$-місне **відношення** $\mathbf{R}$ на множинах $\mathbf{X_1, X_2, ..., X_n}$ – це всяка, довільна підмножина декартова добутку цих множин:

$\mathbf{R \subseteq X_1 \times X_2 \times ... \times X_n}$.

Якщо набір елементів $\mathbf{(x_1, x_2, ..., x_n)}$ належить відношенню $\mathbf{R}$, то кажуть, що елементи $\mathbf{(x_1, x_2, ..., x_n)}$ **знаходяться у відношенні** $\mathbf{R}$ або **пов'язані відношенням** $\mathbf{R}$.

$\mathbf{n}$-арне або $\mathbf{n}$-місне відношення $\mathbf{R}$ на множині $\mathbf{X}$ – це всяка, довільна підмножина $\mathbf{n}$-го декартова степеня цієї множини: $\mathbf{R \subseteq X^n}$.

При $\mathbf{n = 1}$ маємо унарні або одномісні відношення.

При $\mathbf{n = 2}$ маємо бінарні або двомісні відношення, які використовуються найбільш часто, і тому позначаються малими грецькими літерами на відміну від $\mathbf{n}$-арних відношень, що позначаються великими латинськими літерами (як множини).

Бінарне відношення на множинах $\mathbf{X}$ і $\mathbf{Y}$ – це всяка, довільна підмножина декартова добутку цих множин:

$$\rho \subseteq \mathbf{X \times Y = \{(x, y) \mid x \in X, y \in Y\}}.$$

Якщо $\rho \subseteq \mathbf{X}^2$, то кажуть, що відношення ρ задане на множині $\mathbf{X}$.

Якщо елемент $\mathbf{(x, y)}$ належить відношенню ρ, то кажуть, що пара $\mathbf{(x, y)}$ **знаходиться у відношенні** ρ чи **зв'язана відношенням** ρ: $\mathbf{(x, y)} \in \rho$ чи $\mathbf{x}\rho\mathbf{y}$.

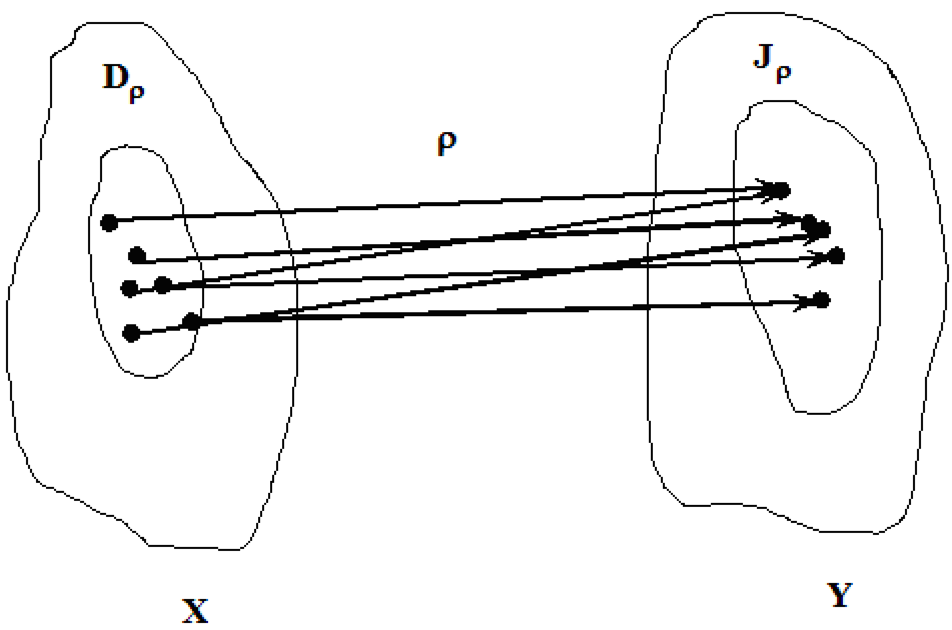
Область визначення $\mathbf{D}_\rho$ бінарного відношення – множина перших координат кожної впорядкованої пари, що належить відношенню ρ:

$$\mathbf{D}_\rho = \{\mathbf{x} | (\mathbf{x},\mathbf{y}) \in \rho\}.$$

Область значень $\mathbf{J}_\rho$ бінарного відношення – множина других координат кожної впорядкованої пари, що належить відношенню ρ:

$$\mathbf{J}_\rho = \{\mathbf{y} | (\mathbf{x},\mathbf{y}) \in \rho\}.$$

У загальному випадку область визначення відношення ρ не співпадає з множиною $\mathbf{X} : \mathbf{D}_\rho \neq \mathbf{X}$ та область значення відношення ρ не співпадає з множиною $\mathbf{Y} : \mathbf{J}_\rho \neq \mathbf{Y}$.



2.2 Способи завдання бінарних відношень

1) Перелік пар або завдання характеристичної властивості

Довільне бінарне відношення (як множину) задають у вигляді переліку усіх упорядкованих пар, із яких складається відношення, або з використанням характеристичної чи визначальної властивості.

Наприклад.

$\rho, \gamma \subseteq \mathbf{X}^2, \mathbf{X} = \{1,2,3,4\}$.

$$\rho = \{(x,y) \mid x,y \in X,\ x = y\} = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4)\}.$$

$$\gamma = \{(x,y) \mid x,y \in X,\ x \le y\} =$$
$$= \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,2),(2,3),(2,4),(3,3),(3,4),(4,4)\}$$

2) Матриця відношення

У **матриці відношення** рядки відповідають елементам множини **X**, стовбці елементам множини **Y**, елемент матриці дорівнює:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, (x_i, y_j) \in \rho; \\ 0, (x_i, y_j) \notin \rho. \end{cases}$$

Якщо $|X| = n, |Y| = m$, тоді матриця відношення має розмір: $n \times m.$

Наприклад.

Матриця відношення ρ має вигляд A_ρ :

x/y	**1**	**2**	**3**	**4**
1	1	0	0	0
2	0	1	0	0
3	0	0	1	0
4	0	0	0	1

Матриця відношення γ має вигляд A_γ :

x/y	**1**	**2**	**3**	**4**
1	1	1	1	1
2	0	1	1	1
3	0	0	1	1
4	0	0	0	1

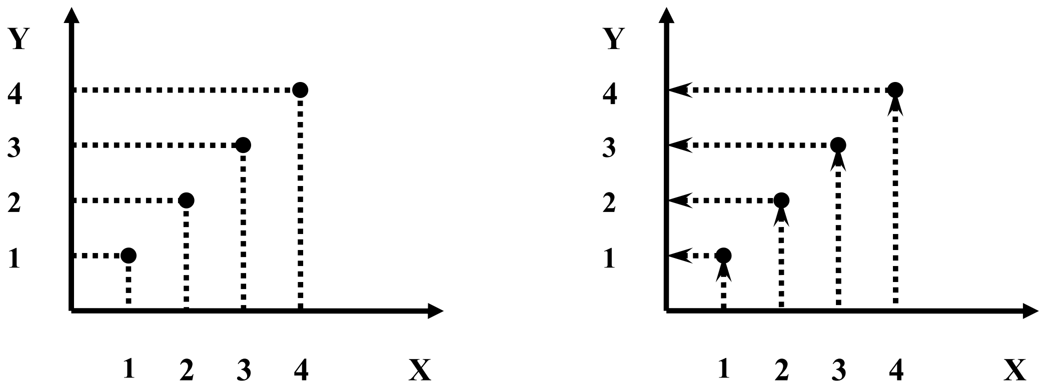
3) Графічне зображення відношень

Існує декілька варіантів графічного зображення відношень.

По-перше, відношення може бути зображено у декартовій системі координат. На кожній осі відкладаються елементи множин $\mathbf{X}$ і $\mathbf{Y}$, наприклад, вісь $\mathbf{Ox}$ – елементи множини $\mathbf{X}$, вісь $\mathbf{Oy}$ – елементи множини $\mathbf{Y}$. Якщо пара $(\mathbf{x},\mathbf{y}) \in \rho$, на площині буде зображено точку із координатами $(\mathbf{x},\mathbf{y})$.

Наприклад.

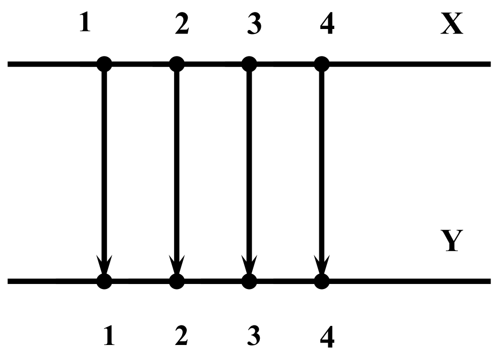
Графічне зображення відношення ρ у декартовій системі координат.



По-друге, відношення може бути зображено із використанням двох паралельних, вертикальних або горизонтальних відрізків прямих.

Наприклад.

Графічне зображення відношення ρ у такий спосіб.



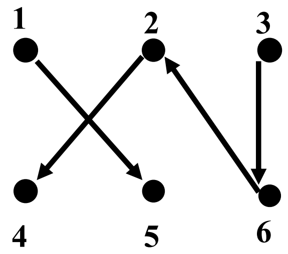
По-третє, відношення може бути зображено у вигляді орієнтованого графу. На площині зображуються точками елементи множин $\mathbf{X}$ і $\mathbf{Y}$.

Якщо пара $(\mathbf{x_i},\mathbf{y_j})$ належить відношенню, то дугою з'єднуються точки, які відповідають парі $(\mathbf{x_i},\mathbf{y_j})$, причому дуга направлена від першого елемента до другого.

Позначаючи таким чином усі пари, що належать відношенню, отримаємо фігуру, яка називається **графом відношення**.

Графічне зображення відношення:

$\rho = \{(1,5),(2,4),(3,6),(6,2)\}$ на **X**, $\rho \subseteq X^2$, $X = \{1,2,3,4,5,6\}$.



2.3 Екстремальні відношення

Для довільної множини X:

$I_x = \{(x,x) \mid \forall x \in X\}$ – тотожне відношення;

$U_x = X^2$ – універсальне відношення;

$\varnothing \subseteq X^2$ – порожнє відношення.

Наприклад.

Нехай $X = \{1,2,3\}$, тоді $I_x = \{(1,1),(2,2),(3,3)\}$; $\varnothing_x = \{\ \}$;

$U_x = \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3)\}$.

2.4 Операції над відношеннями

Оскільки бінарні відношення є множинами над ними визначені усі операції, які були введені для множин, тобто перетин, об'єднання та інші. Але для бінарних відношень існують й специфічні операції, це обернення та композиція.

Нехай ρ – деяке бінарне відношення.

Обернене відношення ρ^{-1} до відношення ρ визначається як:

$$\rho^{-1} = \{(y,x) \mid (x,y) \in \rho\}.$$

Обернене відношення утворюється за рахунок перестановки значень у кожній упорядкованій парі прямого відношення ρ.

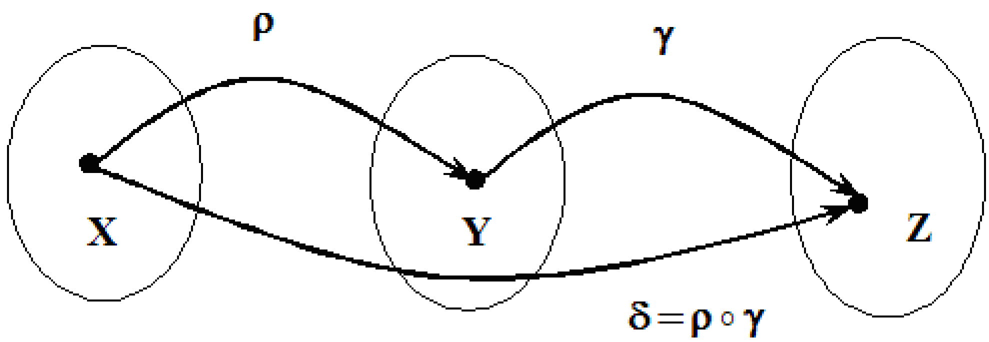
Нехай ρ і γ – довільні бінарні відношення такі, що $\rho \subseteq \mathbf{X} \times \mathbf{Y}$, $\gamma \subseteq \mathbf{Y} \times \mathbf{Z}$, де X, Y, Z – деякі множини.

Композиція відношень ρ і γ – це таке бінарне відношення $\delta \subseteq \mathbf{X} \times \mathbf{Z}$, яке складається з упорядкованих пар $(\mathbf{x},\mathbf{z})$, $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$, $\mathbf{z} \in \mathbf{Z}$ для яких існує елемент $\mathbf{y} \in \mathbf{Y}$ такий, що виконуються умови:

$$(\mathbf{x},\mathbf{y}) \in \rho,\ (\mathbf{y},\mathbf{z}) \in \gamma :$$

$$\delta = \rho \circ \gamma = \{(\mathbf{x},\mathbf{z}) \mid \text{õ}\, \rho\, \text{ó},\ \mathbf{y}\, \gamma\, \mathbf{z}\}.$$

Операція композиція відношень не комутативна: $\rho \circ \gamma \neq \gamma \circ \rho$, але асоціативна: $(\rho \circ \gamma) \circ \varphi = \rho \circ (\gamma \circ \varphi)$.



Наприклад.

$\rho \subseteq \mathbf{N}_4^2, \rho = \{(1,2),(1,4),(2,3),(3,1)\}.$

$\rho^{-1} \subseteq \mathbf{N}_4^2, \rho^{-1} = \{(2,1),(4,1),(3,2),(1,3)\}.$

$\gamma \subseteq \mathbf{N}_4^2, \gamma = \{(2,1),(4,1),(3,2)\}.$

$\rho \circ \gamma = \{(1,1),(2,2)\},$

$\gamma \circ \rho = \{(2,2),(2,4),(4,2),(4,4),(3,3)\}.$

2.5 Властивості бінарних відношень

Нехай ρ задано на множині $\mathbf{X}$, $\rho \subseteq \mathbf{X}^2$.

1. **Рефлексивність відношення:** $\forall \mathbf{x} \in \mathbf{X}\ \ \mathbf{x}\rho\mathbf{x}$.

Відношення ρ на множині $\mathbf{X}$ називається **рефлексивним,** якщо для довільного $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$ виконується $\mathbf{x}\rho\mathbf{x}$, тобто кожний елемент із множини на який задано відношення, знаходиться у цьому відношенні ρ до самого себе.

Матриця рефлексивного відношення має одиничну головну діагональ, а граф – петлю для кожного свого елементу.

Наприклад.

$\rho = \{(\mathbf{x},\mathbf{y}) \,|\, \mathbf{x} = \mathbf{y},\ \mathbf{x},\mathbf{y} \in \mathbf{N}\}$,

$\rho = \{(\mathbf{x},\mathbf{y}) \,|\, \mathbf{x} \le \mathbf{y},\ \mathbf{x},\mathbf{y} \in \mathbf{N}\}$,

$\rho = \{(\mathbf{x},\mathbf{y}) \,|\, \mathbf{x} \ge \mathbf{y},\ \mathbf{x},\mathbf{y} \in \mathbf{N}\}$.

На множині людей: “бути родичем”, ”навчатися у одній студентській групі”.

На множині множин: $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{B}$, $\mathbf{A} = \mathbf{B}$.

2. **Антирефлексивність відношення**: $\nexists\, \mathbf{x} \in \mathbf{X}\ \ \mathbf{x}\rho\mathbf{x}$.

Відношення ρ на множині $\mathbf{X}$ називається **антирефлексивним**, якщо не існує $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$ такого, що має місце $\mathbf{x}\rho\mathbf{x}$, тобто не має жодного елементу у множині $\mathbf{X}$, що находиться у відношенні ρ до самого себе.

Матриця антирефлексивного відношення має нульову головну діагональ, а граф – не має жодної петлі.

Наприклад.

$\rho = \{(\mathbf{x},\mathbf{y}) \,|\, \mathbf{x} \ne \mathbf{y},\ \mathbf{x},\mathbf{y} \in \mathbf{N}\}$,

$\rho = \{(\mathbf{x},\mathbf{y}) \,|\, \mathbf{x} > \mathbf{y},\ \mathbf{x},\mathbf{y} \in \mathbf{N}\}$,

$\rho = \{(\mathbf{x},\mathbf{y}) \,|\, \mathbf{x} < \mathbf{y},\ \mathbf{x},\mathbf{y} \in \mathbf{N}\}$.

На множині людей: “бути родичем”, ”бути дитиною”.

На множині множин: $\mathbf{A} \subset \mathbf{B}$, $\mathbf{A} \ne \mathbf{B}$.

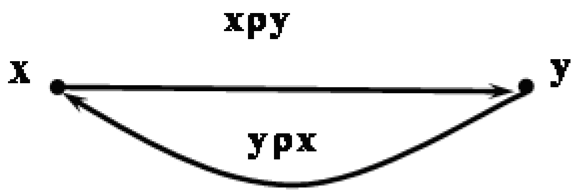
3. **Нерефлексивність відношення:** $\exists\, \mathbf{x} \in \mathbf{X}\ \ (\mathbf{x},\mathbf{x}) \notin \rho$.

Наприклад.

$\rho = \{(\mathbf{x},\mathbf{y}) \,|\, \mathbf{x} = \mathbf{y},\ \mathbf{x} \bmod 2 = 0,\ \mathbf{x},\mathbf{y} \in \mathbf{N}_4\} = \{(2,2),(4,4)\}$.

4. **Симетричність відношення:** $\forall\ \mathbf{x},\mathbf{y} \in \mathbf{X}\ \mathbf{x}\rho\mathbf{y} \Rightarrow \mathbf{y}\rho\mathbf{x}$ **.**

Відношення ρ на множині $\mathbf{X}$ називається **симетричним,** якщо для довільних $\mathbf{x}$ та $\mathbf{y}$ множини $\mathbf{X}$ із належності $(\mathbf{x},\mathbf{y})$ відношенню ρ випливає, що й $(\mathbf{y},\mathbf{x})$ належить відношенню ρ.



Матриця симетричного відношення симетрична відносно головної діагоналі, а у графі відношення для кожної дуги (x,y) існує обернена дуга (y,x).

Наприклад.

$\rho = \{(x,y) \,|\, x = y,\ x,y \in N\}$

$\rho = \{(x,y) \,|\, x \neq y,\ x,y \in N\}$,

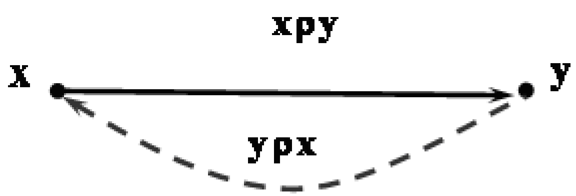
$\rho = \{(x,y) \,|\, x = y \pmod{m},\ x,y,m \in N\}$.

На множині людей: "бути родичем", "навчатись в одній студентській групі".

На множині множин: $A = B$, $A \neq B$.

5. **Антисиметричність відношення**: $\forall\ x,y \in X\ x\rho y, y\rho x\ \Leftrightarrow\ y\rho x$

Відношення ρ на множині X називається **антисиметричним**, якщо для довільних x і y множини X, із належності (x,y) та (y,x) відношенню ρ випливає, що $x = y$.



Матриця антисиметричного відношення не має жодної симетричної одиниці відносно головної діагоналі, а граф – для кожної прямої дуги (x,y) не існує обернена дуга (y,x) і навпаки.

Наприклад:

$\rho = \{(x,y) \,|\, x = y,\ x,y \in N\}$,

$\rho = \{(x,y) \,|\, x > y,\ x,y \in N\}$,

$\rho = \{(x,y) \,|\, x < y,\ x,y \in N\}$,

$\rho = \{(x,y) \,|\, x \leq y,\ x,y \in N\}$,

$\rho = \{(x,y) \,|\, x \geq y,\ x,y \in N\}$.

На множині людей: “бути вище”, ”бути рівним”.

На множині множин: $\mathbf{A = B}$, $\mathbf{A \subset B}$, $\mathbf{A \subseteq B}$.

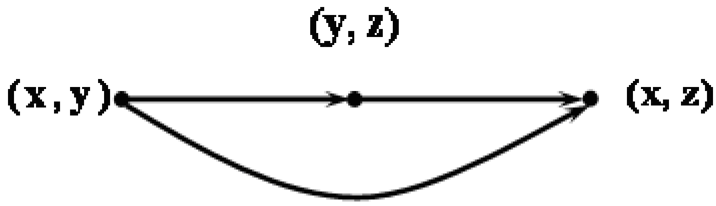
Властивості бінарних відношень <u>симетричність</u> та <u>антисиметричність</u> не є взаємовиключними.

Наприклад: відношення рівності на множині натуральних чисел, тотожна рівність множин.

Антисиметричне відношення може бути рефлексивним ($\leq, \geq$), антирефлексивним ($<, >$) та нерефлексивним.

6. Транзитивність відношення: $\forall\ \mathbf{x,y,z \in X}\ \ \mathbf{x\rho y, y\rho z \Rightarrow x\rho z}$.

Відношення ρ на множині $\mathbf{X}$ називається **транзитивним**, якщо для довільних **x,y,z** множини **X** із належності **(x,y)** та **(y,z)** відношенню ρ випливає, що **(x,z)** також належить ρ.



Наприклад:

$\rho = \{(\mathbf{x,y}) \mid \mathbf{x = y,\ x,y \in N}\}$,

$\rho = \{(\mathbf{x,y}) \mid \mathbf{x > y,\ x,y \in N}\}$,

$\rho = \{(\mathbf{x,y}) \mid \mathbf{x < y,\ x,y \in N}\}$,

$\rho = \{(\mathbf{x,y}) \mid \mathbf{x \leq y,\ x,y \in N}\}$,

$\rho = \{(\mathbf{x,y}) \mid \mathbf{x \geq y,\ x,y \in N}\}$.

На множині людей: “бути вище”, ”навчатись у одній студентській групі”. На множині множин: “$\mathbf{A = B}$”,“$\mathbf{A \subset B}$”, “$\mathbf{A \subseteq B}$”.

Відношення ρ на множині $\mathbf{X}$ не є транзитивним, якщо існує хоча б один приклад, що для довільних **x,y,z** множини **X** із належності **(x,y)** та **(y,z)** відношенню ρ не випливає, що **(x,z)** також належить ρ.

Наприклад.

1) $\rho \subseteq \mathbf{N}_6^2, \rho = \{(1,1),(1,3),(2,4),(3,6)\}$.

Відношення ρ не є транзитивним, бо із належності цьому відношенню пар $(1,3)$ та $(3,6)$ не випливає, що й пара $(1,6)$ належить відношенню ρ.

2) $\rho_i \subseteq \mathbf{A}^2, \mathbf{i} = \overline{1,16},\ \mathbf{A} = \{a,b\}, \rho_i \subseteq \{(a,a),(a,b),(b,a),(b,b)\}$.

Позначення:

а) рефлексивність – Р;

б) антирефлексивність – АР;

в) симетричність – С;

г) антисиметричність – АС;

д) транзитивність – Т.

№	ρ	**Р**	**АР**	**С**	**АС**	**Т**
1	$\rho = \{\}$	-	+	+	+	+
2	$\rho = \{(a,a)\}$	-	-	+	+	+
3	$\rho = \{(a,b)\}$	-	+	-	+	+
4	$\rho = \{(b,a)\}$	-	+	-	+	+
5	$\rho = \{(b,b)\}$	-	-	+	+	+
6	$\rho = \{(a,a),(a,b)\}$	-	-	-	+	+
7	$\rho = \{(a,a),(b,a)\}$	-	-	-	+	+
8	$\rho = \{(a,a),(b,b)\}$	+	-	+	+	+
9	$\rho = \{(a,b),(b,a)\}$	-	+	+	-	-
10	$\rho = \{(a,b),(b,b)\}$	-	-	-	+	+
11	$\rho = \{(b,a),(b,b)\}$	-	-	-	+	+
12	$\rho = \{(a,a),(a,b),(b,a)\}$	-	-	+	-	-
13	$\rho = \{(a,a),(a,b),(b,b)\}$	+	-	-	+	+
14	$\rho = \{(a,a),(b,a),(b,b)\}$	+	-	-	+	+
15	$\rho = \{((a,b),(b,a),(b,b)\}$	-	-	+	-	-
16	$\rho = \{(a,a),(a,b),(b,a),(b,b)\}$	+	-	+	-	+

2.6 Відношення порядку та еквівалентності

Відношення порядку – антисиметричне, транзитивне.

Відношення нестрогого порядку $\preceq$ – рефлексивне,

антисиметричне,

транзитивне.

$\rho = \{(x,y) \,|\, x \geq y,\ x,y \in N\},\ \rho = \{(x,y) \,|\, x \geq y,\ x,y \in N\}.$

На множині множин: $A \subset B$, $A = B$.

Відношення строгого порядку $\prec$ – антирефлексивне,

антисиметричне,

транзитивне.

$\rho = \{(x,y) \,|\, x > y,\ x,y \in N\},\ \rho = \{(x,y) \,|\, x < y,\ x,y \in N\}.$

На множині множин: $A \subset B$.

Нехай маємо подеяке відношення порядку ρ задане на множині X. Множина X при цьому зветься **упорядкованою** множиною.

Якщо у відношенні порядку є упорядкована пара $(x,y): x\rho y$, то кажуть, що "**x передує y** у розумінні відношення порядку ρ".

Два елементи x та y упорядкованої множини X **порівнянні** поміж собою, якщо x передує $y: x\rho y$ або/та y передує $x: y\rho x$ у розумінні відношення порядку.

Якщо для довільної пари (x,y) упорядкованої множини X ні одне з співвідношень: $x\rho y$ та $y\rho x$ не є вірним, то кажуть, що елементи x та y є **непорівнянними** поміж собою у розумінні цього відношення порядку чи просто **непорівнянні.**

Наприклад.

Нехай $\delta \subseteq N_4^2,\ \delta = \{(1,2),(2,2),(3,3),(4,4)\}$.

Відношення δ антисиметричне, транзитивне, відношення порядку.

Елементи 1 та 1, 1 та 3, 1 та 4, 2 та 3, 2 та 4 й так далі є непорівнянними між собою у розумінні відношення δ. Елементи 1 та 2, 2 та 2, 3 та 3, 4 та 4 є порівняними (елементи 2,3,4 є порівнянними самі із собою).

У **відношеннях повного порядку** усі елементи множини, на якій задане відношення, є порівнянними між собою, а у **відношеннях часткового порядку** не усі елементи порівнянні між собою. Відношення повного порядку називають **лінійним порядком** або **ланцюгом**.

Приклади відношень повного порядку:

$\rho = \{(\mathbf{x},\mathbf{y}) \mid \mathbf{x} \ge \mathbf{y},\ \mathbf{x},\mathbf{y} \in \mathbf{N}\}$,

$\rho = \{(\mathbf{x},\mathbf{y}) \mid \mathbf{x} \ge \mathbf{y},\ \mathbf{x},\mathbf{y} \in \mathbf{N}\}$.

Приклади відношень часткового порядку:

$\rho = \{(\mathbf{x},\mathbf{y}) \mid \mathbf{x} > \mathbf{y},\ \mathbf{x},\mathbf{y} \in \mathbf{N}\}$,

$\rho = \{(\mathbf{x},\mathbf{y}) \mid \mathbf{x} < \mathbf{y},\ \mathbf{x},\mathbf{y} \in \mathbf{N}\}$,

на множині множин: “$\mathbf{A} \subseteq \mathbf{B}$”, “$\mathbf{A} \subset \mathbf{B}$”.

Для графічного зображення упорядкованих множин використовують спеціальний графічний засіб зображення, **діаграми Гессе (Хассе**).

Діаграми Гессе – спеціальні графи відношень;

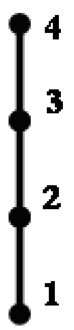
якщо $\mathbf{x} \prec \mathbf{y}$ та не існує **z** такого, що $\mathbf{x} \prec \mathbf{y} \prec \mathbf{z}$,

тоді вершини, які відповідають елементам **x** та **y**, з'єднують відрізками прямої, а вершину **x** розташовують нижче вершини **y**.

Діаграми Гессе

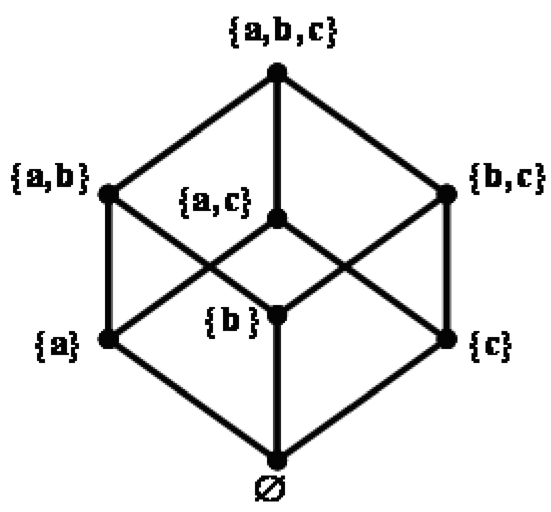
Лінійний порядок

$\le$ на **{1,2,3,4}**



Частковий порядок

$\subseteq$ на **{a,b,c}**



Відношення еквівалентності $\sim$ – рефлексивне,
симетричне,
транзитивне.

$\rho = \{(x,y) \mid x = y,\ x,y \in N\}$,

$\rho = \{(x,y) \mid x = y \pmod m,\ x,y,m \in N\}$.

На множині людей: "мати одне ім'я", "навчатись у одній студентській групі ". На множині множин: "$A = B$".

Клас еквівалентності для x:

$$[x] = \{y \in X \mid x \sim y\}.$$

Відношення еквівалентності розбиває X – множину, на якій задано відношення на класи, що не перетинаються – класи еквівалентності.

Елементи, що належать одному класу знаходяться між собой у відношенні еквівалентності, елементи з різних класів у відношенні еквівалентності не знаходяться

Приклад 1.

Відношення ρ і γ задані на множині $X = \{1,2,3,4,5,6\}$.

$\rho = \{(1,4),(2,5),(3,6),(4,1),(6,3)\}$,

$\gamma = \{(1,1),(2,3),(3,4),(4,5),(5,6),(6,6)\}$.

Область визначення відношення $\rho : D_\rho = \{1,2,3,4,6\}$.

Область значень відношення $\rho : J_\rho = \{1,3,4,5,6\}$.

Обернене відношення $\rho^{-1} = \{(4,1),(5,2),(6,3),(1,4),(3,6)\}$.

Відношення ρ – антирефлексивне, бо у переліку пар для відношення ρ нема ні однієї пари однакових елементів.

Відношення ρ не є симетричним тому, що, наприклад, із належності пари $(2,5)$ відношенню ρ не виходить, що симетрична пара $(5,2)$ теж належить відношенню ρ.

Відношення ρ не є антисиметричним, бо для пари $(3,6)$ є симетрична пара $(6,3)$.

Відношення ρ не є транзитивним, бо із існування двох пар $(3,6)$ та $(6,3)$ не виходить, що є пара $(3,3)$.

Область визначення відношення $\gamma : D_\gamma = \{1,2,3,4,5,6\}$.

Область значень відношення $\gamma : J_\gamma = \{1,3,4,5,6\}$.

Відношення γ – нерефлексивне, бо у відношенні γ є пари $(1,1)$ і $(6,6)$, але немає пар $(2,2),...,(5,5)$.

Відношення γ – антисиметричне, бо для різних елементів нема жодної симетричної пари; не є транзитивним, бо є пари $(3,4)$ та $(4,5)$ та нема пари $(3,5)$.

Композиція $\rho \circ \gamma = \{(1,5),(2,6),(3,6),(4,1),(6,4)\}$.

Приклад 2.

Відношення $\rho = \{(x, y) \mid$ порівняння за модулем $m, x, y, m \in N\}$.

Відношення порівняння за модулем m на множині натуральних чисел: позначається, як $x = y(\mathrm{mod}\, m)$, означає, що **x** і **y** мають однаковий залишок при діленні на **m** (цілочисельне ділення).

Нехай δ задано на $N_4 = \{1,2,3,4\}$.

Відношення порівняння за модулем **2** на N_4:

$\delta = \{(1,1),(1,3),(2,2),(2,4),(3,1),(3,3),(4,2),(4,4)\}$.

Область визначення $D_\delta = N_4 = \{1,2,3,4\}$.

Область значень $J_\delta = N_4 = \{1,2,3,4\}$.

Відношення δ – рефлексивне, бо у відношенні δ є всі пари однакових елементів із множини N_4, на якій воно задано.

Відношення δ – симетричне, бо для кожної пари елементів із δ у цьому відношенні є симетрична пара: $(1,3) \in \delta \Rightarrow (3,1) \in \delta$, $(2,4) \in \delta \Rightarrow (4,2) \in \delta$.

Відношення δ – не є антисиметричним, бо є симетричні пари для різних елементів, наприклад, елементи **1** та **3** не є рівними, а у відношенні є пара $(1,3)$ і симетрична пара $(3,1)$, аналогічно для елементів **2** та **4.**

Відношення δ – транзитивне, тому що для довільних трьох елементів $\mathbf{x,y,z} \in \mathbf{N_4}$, якщо $\mathbf{x}$ та $\mathbf{y}$ мають однаковий залишок при діленні на 2, $\mathbf{y}$ та $\mathbf{z}$ мають у свою чергу між собою однаковий залишок при діленні на 2, то вочевидь, що й $\mathbf{x}$ та $\mathbf{z}$ будуть мати однаковий залишок при діленні на 2, бо натуральне число $\mathbf{y}$ не може мати двох різних залишків при діленні на 2.

Відношення δ – відношення еквівалентності.

Класи еквівалентності:

$\mathbf{[1] = \{1,3\} = [3]; [2] = \{2,4\} = [4]}$.

Відношення φ і ν задані на множині $\mathbf{N_4}$.

$\varphi = \mathbf{\{(1,2),(2,3),(1,3),(3,4),(2,4),(1,4)\}}$,

$\nu = \mathbf{\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4)\}}$.

Область визначення $\mathbf{D_\varphi = \{1,2,3\}}$.

Область значень $\mathbf{J_\varphi = \{2,3,4\}}$.

Відношення φ – антирефлексивне, антисиметричне, транзитивне.

Відношення φ – відношення строгого порядку.

Область визначення $\mathbf{D_\nu = \{1,2,3,4\} = N_4}$.

Область значень $\mathbf{J_\nu = \{1,2,3,4\} = N_4}$.

Відношення ν – рефлексивне, симетричне, антисиметричне, транзитивне.

Відношення ν – відношення нестрогого часткового порядку. Відношення ν – відношення еквівалентності.

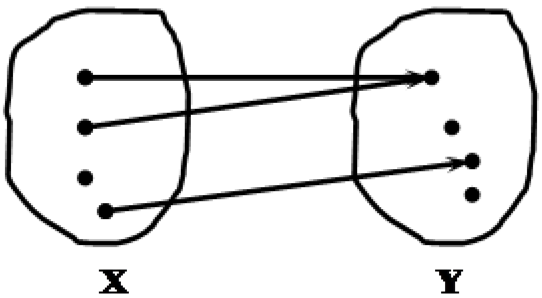
Класи еквівалентності: $\mathbf{[1] = \{1\}, [2] = \{2\}, [3] = \{3\}, [4] = \{4\}}$.

2.7 Функціональні відношення

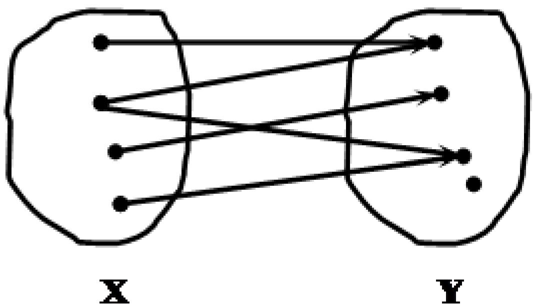
Нехай $\rho \subseteq \mathbf{X \times Y}$.

Функціональне відношення – це таке бінарне відношення ρ, для якого кожному елементу $\mathbf{x \in X}$ відповідає рівно один $\mathbf{y \in Y}$ такий , що пара $\mathbf{(x,y)}$ належить відношенню ρ або такого $\mathbf{y}$ не існує зовсім: $\forall \mathbf{x \in X} \;\; \exists! \mathbf{y \in Y : x\rho y}$ або $\forall \mathbf{x \in X} \;\; \nexists \mathbf{y \in Y : x\rho y}$.

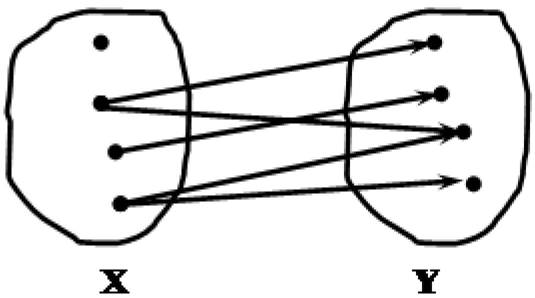
Функціональне відношення – це таке бінарне відношення ρ, для якого виконується: $\forall \mathbf{x} \in \mathbf{D}_\rho \quad \exists ! \mathbf{y} \in \mathbf{Y} : \mathbf{x} \rho \mathbf{y}$.



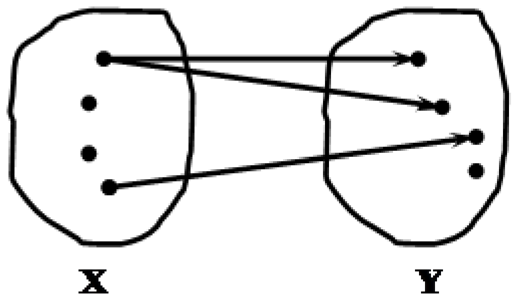
Усюди визначене відношення – відношення, для якого $\mathbf{D}_\rho = \mathbf{X}$ ("немає самотніх $\mathbf{x}$").



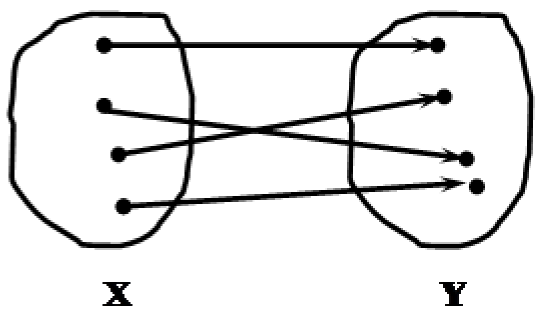
Сюр'єктивне відношення – відношення, для якого $\mathbf{J}_\rho = \mathbf{Y}$ ("немає самотніх $\mathbf{y}$").



Ін'єктивне відношення (**ін'єкція**)– відношення, у якому різним **x** відповідають різні **y**.

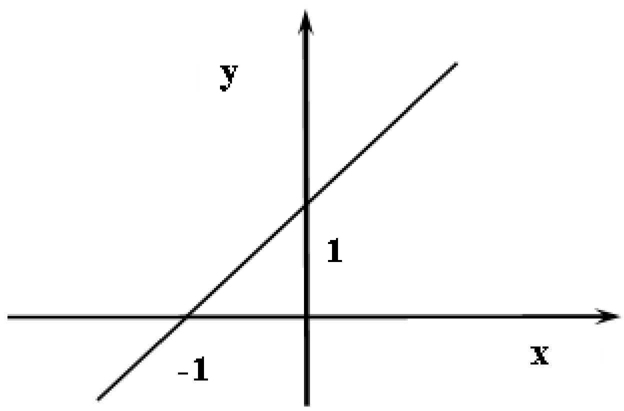


Бієкція – функціональне, усюди визначене, ін'єктивне, сюр'єктивне відношення. Воно задає взаємно однозначну відповідність множин.



Наприклад.

1) Нехай $\gamma = \{(\mathbf{x},\mathbf{y}) \in \mathbf{R}^2 \,|\mathbf{y} = \mathbf{x} + \mathbf{1}\}$. $\mathbf{D}_\gamma = \mathbf{J}_\gamma = \mathbf{R}$, $\mathbf{R}$ – множина дійсних чисел, $\mathbf{R}^2$ – декартова площина.

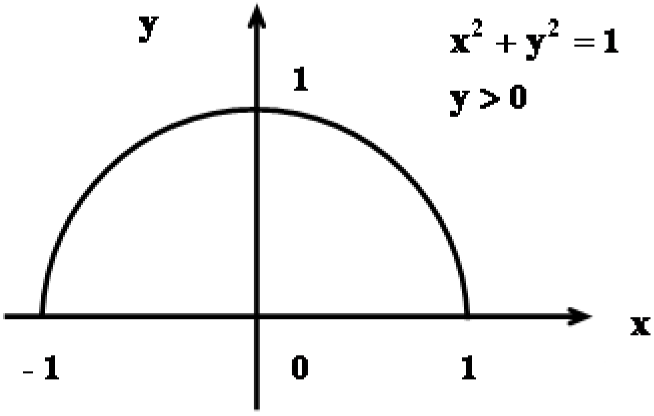


Відношення γ – функціональне (кожному **x** відповідає рівно один **y**), усюди визначене (не має **x,** що значення **y** не визначено), ін'єктивне (немає різних **x,** яким відповідають однакові **y**), сюр'єктивне (не має **y,** якому не відповідає ні один **x**), тоді відношення є бієктивним, тобто задає взаємно однозначну відповідність.

2) Нехай $\rho = \{(\mathbf{x},\mathbf{y}) \in \mathbf{R}^2 \mid \mathbf{x}^2 + \mathbf{y}^2 = \mathbf{1}, \mathbf{y} > \mathbf{0}\}$.

$\mathbf{X} = \mathbf{Y} = \mathbf{R}$.

$\mathbf{D}_\rho = [-1,1], \mathbf{J}_\rho = [0,1]$.



Відношення ρ – функціональне: кожному елементу $\mathbf{x}$ із відрізку $-1 \le \mathbf{x} \le 1$ відповідає рівно один $\mathbf{y} \in \mathbf{Y}$ такий, що пара $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ належить відношенню ρ, для кожного елементу $\mathbf{x} > 1,\ \mathbf{x} < -1$ такого $\mathbf{y}$ не існує зовсім.

ρ – не всюди визначене: $\mathbf{D}_\rho \ne \mathbf{X}$, є "самотні" **x:** для $\mathbf{x} > 1,\ \mathbf{x} < -1$ значення **y** не може бути обчислено.

ρ – не є ін'єктивним, бо є різні **x,** яким відповідають однакові **y:** $(-1,0),(1,0)$.

ρ – не сюр'єктивне: $\mathbf{J}_\rho \ne \mathbf{Y}$, є "самотні" $\mathbf{y}: -\infty < \mathbf{y} < 0,\ \ \mathbf{y} > 1$, тоді відношення ρ – не є бієкцією.

3) Нехай $\varphi = \{(1,2),(1,3),(1,4),(2,3),(2,4),(3,4)\}$ задано на множині $\mathbf{N}_4$.

Відношення φ – не є функціональним, бо елементу $\mathbf{x} = 1$ у відношенні відповідає три $\mathbf{y} : (1,2),(1,3),(1,4)$.

φ – не всюди визначене: $\mathbf{D}_\varphi = \{1,2,3\} \ne \mathbf{N}_4$. φ – не сюр'єктивне: $\mathbf{J}_\varphi = \{2,3,4\} \ne \mathbf{N}_4$. φ – не ін'єктивне, бо різним **x** відповідають однакові **y**, наприклад $(2,3)$ і $(1,3)$. Відношення φ – не є бієкцією.

3) Відношення ν задано на множині $\mathbf{N}_4$:

$\nu = \{(1,1)(2,2),(3,3),(4,4)\}$.

Відношення ν – функціональне та ін'єктивне, бо кожному елементу $\mathbf{x} \in \mathbf{N}_4$ відповідає рівно один $\mathbf{y} \in \mathbf{N}_4$ та навпаки; всюди визначене та сюр'єктивне: $\mathbf{D}_\nu = \mathbf{J}_\nu = \{1,2,3,4\} = \mathbf{N}_4$, тоді відношення ν є бієкцією.

2.8 Завдання для самостійної роботи

1. Задано множини **N1** і **N2**. Обчислити множини:

$(\mathbf{N1}\times\mathbf{N2})\cap(\mathbf{N2}\times\mathbf{N1})$, $(\mathbf{N1}\times\mathbf{N2})\cup(\mathbf{N2}\times\mathbf{N1})$,

$(\mathbf{N1}\cap\mathbf{N2})\times(\mathbf{N2}\cap\mathbf{N1})$, $(\mathbf{N1}\cup\mathbf{N2})\times(\mathbf{N2}\cup\mathbf{N1})$,

де $\mathbf{N1} =$ **{ 3** останні цифри номера залікової книжки**};**

$\mathbf{N2} =$ **{**цифри дати й номера місяця народження**}.**

2. Відношення ρ і γ задані на множині $\mathbf{N_6 = \{1,2,3,4,5,6\}}$.

Описати відношення $\rho, \gamma, \rho^{-1}, \rho\circ\gamma, \rho^{-1}\circ\gamma$ списком пар.

Знайти матриці відношень ρ і γ. Для кожного відношення визначити область визначення й область значень.

Визначити властивості відношень. Виділити відношення еквівалентності й побудувати класи еквівалентності. Виділити відношення порядку й класифікувати їх.

1) $\rho = \{(\mathbf{m},\mathbf{n}) \mid \mathbf{m} = \mathbf{n}\}$;

$\gamma = \{(\mathbf{m},\mathbf{n}) \mid \mathbf{m} > \mathbf{n}\}$;

2) $\rho = \{(\mathbf{m},\mathbf{n}) \mid \mathbf{m}+\mathbf{n}$ – є парним числом**};**

$\gamma = \{(\mathbf{m},\mathbf{n}) \mid \mathbf{m}$ дільник $\mathbf{n}\}$;

3) $\rho = \{(\mathbf{m},\mathbf{n}) \mid \mathbf{m} < \mathbf{n}\}$;

$\gamma = \{(\mathbf{m},\mathbf{n}) \mid \mathbf{m} = \mathbf{n}(\mathbf{mod}\,2)\}$ – порівняння за модулем 2;

4) $\rho = \{(\mathbf{m},\mathbf{n}) \mid \mathbf{m} \le \mathbf{n}\}$;

$\gamma = \{(\mathbf{m},\mathbf{n}) \mid \mathbf{m} = \mathbf{n}(\mathbf{mod}\,3)\}$;

5) $\rho = \{(\mathbf{m},\mathbf{n}) \mid (\mathbf{m} * \mathbf{n}) \vdots 2\}$;

$\gamma = \{(\mathbf{m},\mathbf{n}) \mid \mathbf{m} = \mathbf{n}(\mathbf{mod}\,4)\}$;

6) $\rho = \{(\mathbf{m},\mathbf{n}) \mid \mathbf{m} \ge \mathbf{n}\}$;

$\gamma = \{(\mathbf{m},\mathbf{n}) \mid \mathbf{m}^2 = \mathbf{n}\}$;

7) $\rho = \{(\mathbf{m},\mathbf{n}) \mid \mathbf{m} \ne \mathbf{n}\}$;

$\gamma = \{(\mathbf{m},\mathbf{n}) \mid \mathbf{m} = \mathbf{n}(\mathbf{mod}\,5)\}$;

8) $\rho = \{(m,n) \mid m = n + 1\}$;

$\gamma = \{(m,n) \mid m = n(\mathrm{mod}\,6)\}$;

9) $\rho = \{(m,n) \mid n = m + 1\}$ };

$\gamma = \{(m,n) \mid m \wedge n \vdots 2\}$;

10) $\rho = \{(m,n) \mid m$ – парно, n – парно$\}$;

$\gamma = \{(m,n) \mid m$ – дільник n $\}$.

3. Визначити чи є задане відношення **f** – функціональним, усюди визначеним, ін'єктивним, сюр'єктивним, бієкцією. Побудувати графік відношення, визначити область визначення й область значень.

Виконати це ж завдання для відношень ρ і γ з пункту 2 лабораторної роботи (**R** – множина дійсних чисел).

1) $f = \{(x,y) \in R^2 \mid y = 2x + 1\}$;

2) $f = \{(x,y) \in R^2 \mid y \le x\}$;

3) $f = \{(x,y) \in R^2 \mid y \ge x, x > 0\}$;

4) $f = \{(x,y) \in R^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$;

5) $f = \{(x,y) \in R^2 \mid y = 2|x| + 1\}$;

6) $f = \{(x,y) \in R^2 \mid |x| + |y| = 1\}$;

7) $f = \{(x,y) \in R^2 \mid x + y \le 1\}$;

8) $f = \{(x,y) \in R^2 \mid y = x^2\}$;

9) $f = \{(x,y) \in R^2 \mid y = x^3\}$;

10) $f = \{(x,y) \in R^2 \mid x = y^2\}$;

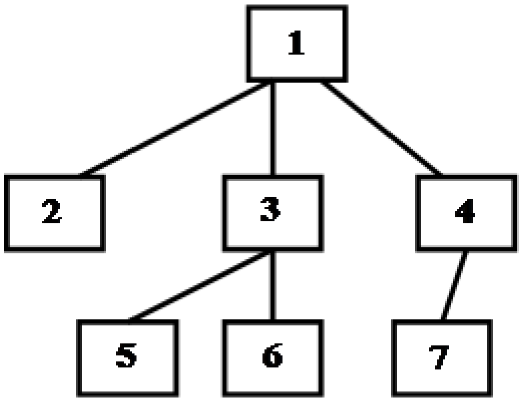
11) $f = \{(x,y) \in R^2 \mid y = x^2\}$.

4. Назвати відношення: $\overline{\rho}$, ρ^{-1}, $\rho \circ \rho$, якщо відношення ρ - це:

а) “бути сестрою”; б) “бути мамою”;

в) “бути начальником”; г) “бути колегою”.

5. Нехай структура деякого малого підприємства може бути представлена схемою наступного рисунку:



Виходячи із представленої схеми, задати матрицями відношення ρ - “бути в підлеглості у...” і γ - *“*бути підлеглим*”*. Визначити властивості відношень.

6. Нехай $\mathbf{A} = \{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{e}\}$.

Опишіть відношення на $\mathbf{A}$:

а) рефлексивне, але не симетричне, не транзитивне;

б) симетричне, але не рефлексивне, не транзитивне;

в) транзитивне, але не симетричне, не рефлексивне;

г) рефлексивне і симетричне, але не транзитивне;

д) симетричне і транзитивне, але не рефлексивне.

7. Нехай відношення еквівалентності задане на множині $\mathbf{X = \{1,2,3,4,5,6\}}$ класами еквівалентності.

Виписати список пар для цього відношення та довести, що це відношення є відношенням еквівалентності.

а) $\mathbf{[1] = \{1\}; [2] = \{2\}; [3] = \{3,4,5\} = [3] = [4]; [6] = \{6\};}$

б) $\mathbf{[1] = \{1\}; [2] = \{2\}; [3] = \{3\}; [4] = [4]; [5] = \{5,6\} = [6];}$

в) $\mathbf{[1] = \{1,2\} = [2]; [3] = \{3,4,5\} = [3] = [4]; [6] = \{6\};}$

г) $\mathbf{[1] = \{1,2,3\} = [2] = [3]; \{4,5\} = [4] = [5]; [6] = \{6\};}$

д) $\mathbf{[1] = \{1\}; [2] = \{2\}; [3] = \{3,4\} = [4]; [5] = [6] = \{5,6\}}$.

8. Доповнити, якщо це можливо, бінарне відношення $\rho \subseteq \mathbf{N}_3^2$ до:

а) рефлексивного відношення, якщо $\rho = \{(1,2),(3,3)\}$;

б) антирефлексивного відношення, якщо $\rho = \{(1,2),(1,3),(3,3)\}$;

в) симетричного, якщо $\rho = \{(1,2),(1,3),(3,3)\}$;

г) антисиметричного, якщо $\rho = \{(1,2),(2,1),(3,3)\}$;

д) транзитивного, якщо $\rho = \{(1,1),(1,3),(3,2)\}$.

9. Знайти число бінарних відношень між елементами множини $\mathbf{N}_3$ та $\mathbf{N}_4$, що мають властивості:

а) рефлексивність;

б) антирефлексивність;

в) симетричність;

г) антисиметричність;

д) транзитивність;

е) рефлексивних, симетричних та транзитивних;

ж) рефлексивних та одночасно симетричних;

з) рефлексивних та одночасно антисиметричних;

і) симетричних та одночасно антисиметричних;

к) рефлексивних, антисиметричних та транзитивних.

2.9 Контрольні питання

1. Декартовий або прямий добуток множин.
2. Декартовий ступінь.
3. Визначення та способи опису бінарного відношення.
4. Область визначення й область значень.
5. Властивості бінарних відношень.
6. Відношення еквівалентності й класи еквівалентності.
7. Відношення порядку: строгого й нестрогого, повного й часткового.
8. Функціональні та усюди визначені відношення.
9. Ін'єкція, сюр'єкція, бієкція.

РОЗДІЛ 3
КОМБІНАТОРИКА

Комбінаторика – розділ математики, що вивчає різні співвідношення між елементами, як правило, скінченних множин.

Основні типи задач комбінаторики

1) Задачі переліку (скільки?):

визначення кількості елементів множини, що володіють заданими властивостями.

2) Задачі генерації або перелічення (які?):

формування списків елементів множини, що володіють заданими властивостями.

3) Задачі комбінаторної оптимізації:

визначення підмножини деякої множини елементів, на якому задана функція приймає мінімальне або максимальне значення.

3.1 Правила суми та добутку

Важливу роль при розв’язанні багатьох найбільш простих комбінаторних задач грають правила **суми** та **добутку**. Сформулюємо ці правила з точки зору комбінаторики для двомірного випадку.

3.1.1 Правило суми

Якщо об'єкт $\mathbf{a}$ може бути вибраний $\mathbf{m}$ способами, а об'єкт $\mathbf{b}$ – $\mathbf{n}$ іншими способами, то вибір "$\mathbf{a}$ або $\mathbf{b}$" може бути здійснено $\mathbf{m}+\mathbf{n}$ способами.

Вибір $\mathbf{a}$ і $\mathbf{b}$ – є взаємовиключним: вибір об'єкта $\mathbf{a}$ виключає вибір об'єкта $\mathbf{b}$; жоден спосіб вибору об'єкта $\mathbf{a}$ не збігається із жодним способом вибору об'єкта $\mathbf{b}$.

Наприклад.

З Києва до Донецька протягом доби відправляється три потяга та один літак. Скільки існує способів виїхати із Києва до Донецька?

Розв'язання.

З Києва до Донецька можна доїхати або потягом, або літаком. Ніякий спосіб їхати потягом не співпадає ні з яким способом, якщо вибрано літак. Якщо летимо, то не їдемо потягом, якщо їдемо потягом, то не летимо, тобто вибір є взаємовиключним. Маємо змогу застосувати правило суми.

За правилом суми: $\mathbf{N=3+1=4}$.

3.1.2 Правило добутку

Якщо об'єкт $\mathbf{a}$ може бути вибраний $\mathbf{m}$ способами, і після цього, і незалежно від цього об'єкт $\mathbf{b}$ може бути вибраний $\mathbf{n}$ способами, то вибір "$\mathbf{a}$ та $\mathbf{b}$" може бути здійснено $\mathbf{m \times n}$ способами.

Вибір "$\mathbf{a}$ та $\mathbf{b}$" – <u>незалежний:</u> вибір об'єкта $\mathbf{a}$ не впливає на кількість способів вибору об'єкта $\mathbf{b}$.

Зауваження: правила суми та добутку можуть бути поширені на $\mathbf{n}$ - мірний випадок.

Наприклад.

Скільки різних танцюючих пар можна скласти із трьох дівчат та двох юнаків?

Розв'язання.

Для танцюючою пари необхідно вибрати і хлопця, і дівчину. Причому кількість способів вибрати дівчину не залежить від того, якого хлопця вже було обрано.

За правилом добутку маємо $\mathbf{N = 3 \times 2 = 6}$ пар.

3.1.3 Складний вибір об'єктів

Часто у комбінаторних задачах вибір об'єктів здійснюється в кілька етапів, на деяких працює правило суми, на інших – правило добутку. При складному виборі об'єктів важливо забезпечити повний і систематичний перебір усіх можливих випадків, причому жоден із варіантів не повинен бути врахований кілька разів.

Наприклад.

Нехай є три прапори різних кольорів. На флагштоці піднімається сигнал, що складається не менше, ніж із двох прапорів. Скільки різних сигналів можна підняти на флагштоці, якщо порядок прапорів у сигналі враховується?

Розв'язання.

Сигнал можна скласти або із 2-х прапорів, або із 3-х. Позначимо через $\mathbf{N_2}$ – кількість способів скласти сигнал із 2-х прапорів, а через $\mathbf{N_3}$ – із 3-х відповідно. Одночасне виконання цих двох дій неможливо. Тоді, загальна кількість способів скласти сигнал за правилом суми дорівнює: $\mathbf{N = N_2 + N_3}$.

Розрахуємо $\mathbf{N_2}$. Кількість способів вибрати перший прапор для сигналу, що складається із 2 прапорів, дорівнює 3. Кількість способів вибрати другий прапор для сигналу, що складається із 2 прапорів, дорівнює 2, бо один з 3 прапорів вже був використаний. Треба підняти і перший, і другий прапори, але кількість способів вибрати другий прапор для сигналу не залежить від того, який конкретно прапор був обраний на першому етапі. Тоді, за правилом добутку знаходимо: $\mathbf{N_2 = 3 \times 2 = 6}$.

Аналогічно, отримуємо, $\mathbf{N_3 = 3 \times 2 \times 1 = 6}$, тоді $\mathbf{N = N_2 + N_3 = 6 + 6 = 12}$.

3.2 З'єднання без повторень (без елементів, що повторюються)

З'єднання – прості комбінаторні об'єкти, до яких відносять:

– перестановки,

– сполучення,

– розміщення.

3.2.1 Перестановки

Перестановкою із n елементів або n-перестановкою називають упорядковану послідовність (кортеж, вектор) елементів множини.

Дві перестановки вважаються різними, якщо вони відрізняються порядком розташування елементів в них.

Наприклад.

Нехай є множина $\mathbf{A = \{1,2,3\}}$. Згенерувати усі перестановки елементів цієї множини.

Перестановки: $\mathbf{\{123, 132, 213, 231, 312, 321\}.}$

Перестановки генеровані у порядку зростання натуральних чисел, поставлених у відповідність кожній з них.

Теорема 1

Кількість перестановок із $\mathbf{n}$ різних елементів дорівнює:

$$\mathbf{P_n = n!}$$

Примітка: визначимо 0! = 1.

Доведення.

Нехай є $\mathbf{n}$ різних об'єктів (наприклад. куль з різними номерами) і їх необхідно розташувати на $\mathbf{n}$ різних місць (комірок з різними номерами).

На перше місце (або у першу комірку) можна розмістити будь-який із наявних $\mathbf{n}$ елементів. Після цього, на друге місце можна розмістити будь-який із $\mathbf{(n-1)}$ елемента, що лишилися. Зауважимо, що число претендентів на друге місце не залежить від того, який конкретно елемент був обраний на перше місце. Далі на 3 місце – $\mathbf{(n-2)}$ претендента і так далі. На останнє місце залишиться один претендент.

За правилом добутку маємо:

$$\mathbf{P_n = n \times (n-1) \times (n-2) \times ... \times 1 = n!}.$$

Наприклад.

1) Скільки різних перестановок можна згенерувати із елементів множини $\mathbf{A = \{1,2,3\}.}$

Розв'язання.

Кількість усіх перестановок у множині, що має 3 різні елементи дорівнює:

$$\mathbf{P_3 = 3! = 6}.$$

2) Скільки різних слів можна утворити, переставляючи букви в слові "домбра"?

Розв'язання.

Оскільки усі літери у слові "домбра" різні та нас цікавить тільки порядок розташування цих літер, то:

$$\mathbf{P_6 = 6! = 720.}$$

3) Трійка дівчат водять хоровод. Скількома способами вони можуть стати у коло?

Розв'язання.

Якщо дівчата стояли б на місці (кожне місце мало б номер), то вийшло б $\mathbf{P_3 = 3!}$ способів стати в коло. Але так, як дівчата водять хоровод, то їх розташування відносно оточення неважливе, а важливо, як вони розташовані одна відносно іншої. Тобто існують перестановки, що переходять одна в іншу. Наприклад, якщо взяти усі перестановки із 3 цифр, то їх можна розбити на 2 групи, причому у кожній із цих груп перестановки не відрізняються:

$$\mathbf{123 \longrightarrow 231 \longrightarrow 312}$$

$$\mathbf{132 \longrightarrow 321 \longrightarrow 213.}$$

Тоді, кількість різних перестановок дівчат у хороводі дорівнює:

$$\mathbf{P_3 \,/\, 3 = P_2 = 2!.}$$

3.2.2 Розміщення ($\mathbf{m}$- перестановки)

Розміщення із $\mathbf{n}$ по $\mathbf{m}$ – упорядкована послідовність із $\mathbf{m}$ елементів множини, що містить всього $\mathbf{n}$ елементів.

<u>Два розміщення</u> вважаються <u>різними</u>, якщо вони відрізняються:

– складом елементів;

– порядком розташування елементів;

– і тим, і другим.

Наприклад.

Нехай є множина $\mathbf{A = \{1, 2, 3\}}$. Згенерувати усі розміщення із 3 по 2.

Розміщення із 3 по 2 для $\mathbf{A}$: $\{\mathbf{12, 13, 21, 23, 31, 32}\}$.

Два розміщення $\mathbf{12}$ та $\mathbf{21}$ – відрізняються порядком розташування елементів; $\mathbf{12}$ та $\mathbf{32}$ – відрізняються складом елементів; а $\mathbf{12}$ та $\mathbf{23}$ – і складом, і порядком розташування елементів.

Теорема 2

Кількість розміщень із $\mathbf{n}$ різних елементів по $\mathbf{m}$ дорівнює:

$$\mathbf{A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!} = P_n^m; \quad m \le n.}$$

Примітка: при $\mathbf{m = n}$: $\mathbf{A_n^n = \frac{n!}{0!} = P_n}$.

Доведення.

Нехай є $\mathbf{n}$ різних об'єктів і їх необхідно розмістити на $\mathbf{m}$ різних місць. На 1-е місце є $\mathbf{n}$ претендентів, на 2-е – $\mathbf{(n-1)}$ претендент, на третє – $\mathbf{(n-2)}$, ..., на $\mathbf{m}$-е місце – $\mathbf{n-(m-1)=n-m+1}$ претендентів.

За правилом добутку отримаємо, що кількість різних розміщень із $\mathbf{n}$ по $\mathbf{m}$ складає:

$$\mathbf{n \times (n-1) \times (n-2) \times ... \times (n-m+1) \times \frac{(n-m)!}{(n-m)!} = \frac{n!}{(n-m)!}; \; A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}.}$$

Наприклад.

1) Скількома способами можна розставити на полиці 5 книг із 7?

Розв'язання.

Оскільки усі книжки різні, то нас цікавить і які книжки будуть розставлені на полиці, і у якому порядку:

$$\mathbf{A_7^5 = \frac{7!}{(7-5)!} = \frac{7!}{2!} = 2520}.$$

2) Скільки різних чотирьох літерних ідентифікаторів можна отримати, використовуючи літери алфавіту $\mathbf{L = \{A, B, C, D, E\}}$, якщо ні одна із літер не повторюється?

Розв'язання.

У алфавіті $\mathbf{L}$ всього 5 літер, 4 із них вони повинні бути використані для генерування ідентифікатору:

$$\mathbf{A_5^4 = \frac{5!}{(5-4)!} = 5! = 120.}$$

3.2.3 Сполучення та їх властивості

Сполучення із $\mathbf{n}$ по $\mathbf{m}$ – набір з $\mathbf{m}$ елементів множини, що містить $\mathbf{n}$ різних елементів, без урахування порядку елементів у наборі.

Різні сполучення відрізняються один від одного тільки складом елементів, але не їх порядком.

Наприклад.

Нехай є множина $\mathbf{A = \{1, 2, 3\}}$.

Згенерувати усі сполучення із 3 по 2.

Сполучення із 3 по 2 для $\mathbf{A}$: $\mathbf{\{12, 13, 23\}}$.

Теорема 3

Кількість різних сполучень із $\mathbf{n}$ елементів по $\mathbf{m}$ дорівнює:

$$\mathbf{C_n^m = \frac{n!}{m! \times (n-m)!}; \; m \le n}.$$

Доведення.

Кожне сполучення із $\mathbf{m}$ елементів можна упорядкувати $\mathbf{m!}$ способами, тобто з нього виходить $\mathbf{m!}$ перестановок.

Для усіх $\mathbf{C_n^m}$ сполучень маємо $\mathbf{C_n^m \times m!}$ перестановок, але це число дорівнює кількості різних розміщень із $\mathbf{n}$ елементів по $\mathbf{m}$, а отже, $\mathbf{C_n^m \times m! = A_n^m}$. Тоді, використовуючи теорему 2 маємо:

$$\mathbf{C_n^m = \frac{A_n^m}{m!} = \frac{n!}{m!(n-m)!}}.$$

Властивості числа сполучень

1. $\mathbf{A_n^m = C_n^m \cdot m! \Rightarrow C_n^m = \frac{A_n^m}{m!} = \frac{n!}{m! \cdot (n-m)!}}$,

$\mathbf{C_n^n = 1,\ C_n^1 = n,\quad C_n^0 = 1, C_n^m = 0,\ m \le 0, m \ge n.}$

2. **Симетричність числа сполучень**: $\mathbf{C_n^m = C_n^{n-m}}$.

3. **Правило Паскаля**

Для числа сполучень із $\mathbf{n}$ по $\mathbf{m}$ справедливе наступне рекурентне співвідношення:

$$\mathbf{C_n^m = C_{n-1}^{m-1} + C_{n-1}^m}.$$

4. **Біном Ньютона**:

$$\mathbf{(a + x)^n = C_n^0 a^n x^0 + C_n^1 a^{n-1} x^1 + \ldots + C_n^n a^0 x^n = \sum_{i=0}^{n} C_n^i a^{n-i} x^i},$$

$\mathbf{C_n^i, i = \overline{0,n}}$ – **біноміальні коефіцієнти**.

При $\mathbf{a = x = 1}$ сума біноміальних коефіцієнтів дорівнює:

$$\mathbf{\sum_{i=0}^{n} C_n^i = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n = 2^n}.$$

Наприклад.

1) Скількома способами із 25 членів наукового товариства можна обрати президію в кількості 3 осіб?

Розв’язання.

Оскільки треба обрати 3 осіб для роботи у президії наукового товариства, то порядок вибору значення не має, а має значення тільки, які особи із 25 наявних увійдуть у склад президії. Тоді, число способів обрати президію у складі із 3 осіб дорівнює:

$$\mathbf{C_{25}^3 = \frac{25!}{3!22!} = 2300}.$$

2) Скількома способами із 25 осіб наукового товариства можна обрати президента, віцепрезидента та вченого секретаря?

Розв’язання.

У даному випадку має значення і склад обраних осіб, і порядок їх обрання, бо вони будуть мати різні повноваження. Перший із обраних буде президентом наукового товариства, другий – віцепрезидентом, а третій секретарем:

$$\mathbf{N = A_{25}^{3} = \frac{25!}{(25-3)!} = 25 \times 24 \times 23 = 13800.}$$

З другого боку, спочатку можна вибрати трьох осіб $\mathbf{C_{25}^{3}}$ способами, а потім обчислити кількість способів роздати їм повноваження: $\mathbf{P_3}$. Оскільки мають значення і які особи обрані, і які повноваження кожен з них отримав, то за правилом добутку маємо:

$$\mathbf{N = C_{25}^{3} \times P_3 = A_{25}^{3} = \frac{25!}{(25-3)!} = \frac{25!}{22!} = 25 \cdot 24 \cdot 23 = 13800.}$$

Третій варіант міркувань полягає у застосуванні тільки правила добутку. Президент наукового товариства може бути обраний $\mathbf{C_{25}^{1} = 25}$ способами. Після цього, і незалежно від цього, віцепрезидент може бути обраний вже $\mathbf{C_{24}^{1} = 24}$ способами. Відповідно, секретар, $\mathbf{C_{23}^{1} = 23}$ способами.

За правилом добутку маємо:

$$\mathbf{N = 25 \times 24 \times 23 = A_{25}^{3} = 13800}.$$

2. На книжковій полиці розміщується $\mathbf{30}$ томів книг. Скількома способами можна розставити їх так, щоб $\mathbf{1}$ і $\mathbf{2}$ томи не стояли поруч?

Розв'язання.

Задача легше розв'язується через зворотну задачу. $\mathbf{30}$ томів книг можна розставити на полиці без будь-яких обмежень $\mathbf{P_{30} = 30!}$ способами.

Обчислимо число способів розставити книжки, якщо $\mathbf{1}$ і $\mathbf{2}$ том будуть стояти поруч. Перший та другий том можна поставити поряд $\mathbf{P_2 = 2!}$ способами ($\mathbf{12}$ або $\mathbf{21}$). Далі маємо розставити на полиці $\mathbf{28}$ окремих томів та один складний об'єкт, що складається із $\mathbf{1}$ та $\mathbf{2}$ томів: $\mathbf{P_{29}}$.

За правилом добутку маємо рішення зворотної задачі: $\mathbf{P_{29} \times P_2}$.

Тоді, пряма задача має наступний розв'язок:

$$\mathbf{P_{30} - P_{29} \times P_2 = 30! - 29! \times 2! = 28 \times 29!}.$$

3. Чотири стрілка повинні вразити 8 мішеней (кожен по 2). Скількома способами вони можуть розподілити мішені між собою?

Розв'язання.

Для кожного стрілка має значення, які мішені йому будуть розподілені, але не має значення у якому порядку він буде в них стріляти. Тому, число варіантів вибору двох мішеней із 8 для першого стрілка дорівнює $\mathbf{C_8^2}$, для другого – $\mathbf{C_6^2}$, для третього відповідно –$\mathbf{C_4^2}$, для останнього –$\mathbf{C_2^2 = 1}$.

За правилом добутку: $\mathbf{N = C_8^2 C_6^2 C_4^2}$.

4. Колода у $\mathbf{4n}$ карт містить 4 масті по $\mathbf{n}$ карт у кожній.

Скількома способами можна вибрати:

1) 5 карт, 4 з яких з однаковими номерами?

2) три карти з одними номерами та 2 з іншими однаковими номерами?

Розв'язання.

1) Для того, щоб вибрати 4 карти із одним номером достатньо із $\mathbf{n}$ номерів вибрати один, це можна зробити: $\mathbf{C_n^1}$ способами, а останню, 5 карту, вибрати із колоди без 4 карт із цим, вже обраним, номером: $\mathbf{C_{4n-4}^1}$ способами.

П'ята карта вибирається одночасно із першими чотирма і незалежно від того, який конкретно номер було обрано для 4 карт, число способів обрати п'яту карту складає: $\mathbf{C_{4n-4}^1}$. Тоді, за правилом добутку, маємо: $\mathbf{N = C_n^1 \cdot C_{4n-4}^1}$.

2) Для того, щоб вибрати 3 карти із одним й тим же номером, треба спочатку вибрати один номер із $\mathbf{n}$ існуючих $\mathbf{C_n^1}$ способами, а потім, із 4 карт із таким номером, вибрати три карти: $\mathbf{C_n^1 C_4^3}$.

Аналогічно вибираємо дві карти з однаковими номерами: $\mathbf{C_{n-1}^1 C_4^2}$, але номер вибираємо із $\mathbf{n - 1}$ варіанту.

Тоді, $\mathbf{N = C_n^1 C_4^3 C_{n-1}^1 C_4^2}$ за правилом добутку.

3.3 З'єднання із повторенням елементів

До цих пір розглядали підмножини із скінченних множин, що складаються з різних елементів. Часто на практиці мають місце випадки, коли серед розглянутих елементів є однакові. Тому вводять три типа аналогічних комбінаторних з'єднань, але з елементами, що поможуть повторюватися:

1) перестановки із повторенням елементів;

2) розміщення із повторенням елементів;

3) сполучення із повторенням елементів.

3.3.1 Перестановки із повторенням елементів

Дана множина $\mathbf{A}$, що складається із $\mathbf{n}$ елементів, у якій:

– $\mathbf{n_1}$ елемент належить першому типу;

– $\mathbf{n2}$ елементів належить другого типу елементів;

... ;

– $\mathbf{n_k}$ елементів належить $\mathbf{k}$-тому типу елементів.

Елементи одного й того ж типу не розрізняються між собою.

Специфікацією множини A називається набір $\mathbf{(n;n_1,n_2,...,n_k)}$, $\mathbf{n=\sum_{i=1}^{k} n_i}$.

Теорема 1

Кількість перестановок із повтореннями в $\mathbf{n}$-елементній множині із заданою специфікацією $\mathbf{(n;n_1,n_2,...,n_k)}$. дорівнює: $$\mathbf{P(n;n_1,n_2,...,n_k)=\frac{n!}{n_1!\cdot n_2!\cdot ...\cdot n_k!}},\text{ де } \mathbf{\sum_{i=1}^{k} n_i = n.}$$

Доведення.

Нехай $\mathbf{P(n;n_1,n_2,...,n_k)}$ – число різних перестановок з повтореннями у множині $\mathbf{A}$. Якщо б усі елементи множини $\mathbf{A}$ були різні, то їх можна було б переставити $\mathbf{P_n = n!}$ способами.

Число $\mathbf{P(n;n_1,n_2,...,n_k)}$ менше за $\mathbf{P_n = n!}$ у $\mathbf{n_1!}$ разів саме за рахунок перестановок елементів першого типу, у $\mathbf{n_2!}$ – за рахунок елементів 2 типу, та, ..., у $\mathbf{n_k!}$ – за рахунок елементів $\mathbf{k}$ -того типу.

Слідство

Якщо множина $\mathbf{A}$, $|\mathbf{A}| = \mathbf{n}$, складається з об'єктів двох типів: $\mathbf{m}$ – одного типу, $\mathbf{(n-m)}$ – іншого, то:

$$\mathbf{P(m,n-m) = \frac{n!}{m!\cdot(n-m)!} = C_n^m}.$$

У загальному випадку:

$$\mathbf{P(n;n_1,n_2,...,n_k) = C_n^{n_1}\cdot C_{n-n_1}^{n_2}\cdot ...\cdot C_{n_k}^{n_k}}.$$

Наприклад.

1) Скількома способами можна переставити букви у слові "каша"?

Розв'язання.

Усього в слові "каша" чотири літери, серед яких дві однакові:

$$\mathbf{Đ(4;2,1,1) = \frac{4!}{2!1!1!} = 12}.$$

2) Скільки різних чисел можна отримати, переставляючи цифри числа 12341234?

Розв'язання.

У числі 8 цифр: дві – "1", дві – "2", дві – "3", дві – "4".

$$\mathbf{P(8;2,2,2,2) = \frac{8!}{(2!)^4}}.$$

3) Скільки різних перестановок можна утворити з усіх літер слова «Міссісіпі»?

Розв'язання.

Всього в слові 9 букв, з них – 4 літери "і", три літери "с", одна літера "м" та одна літера "п".

$$\mathbf{P(9;4,3,1,1) = \frac{9!}{4!\cdot 3!\cdot 1!\cdot 1!}}$$

4) Тридцять осіб розбиті на 3 групи по 10 чоловік у кожній. Скільки різних складів груп можна скласти?

Розв'язання.

Задача може бути розв'язана двома способами, що випливає із слідства до теореми про перестановки із повтореннями.

Порядок входження людей до груп не має значення. Тоді, спочатку, вибираємо десять чоловік із тридцяти, що увійдуть у першу групу. Це можна зробити $\mathbf{C_{30}^{10}}$ способами. Потім, із двадцяти тих, що лишилися, вибираємо десять чоловік для другої групи, й останні десять складуть третю групу. За правилом добутку, маємо:

$$\mathbf{\tilde{N}_{30}^{10} \times \tilde{N}_{20}^{10} \times C_{10}^{10} = \tilde{N}_{30}^{10} \times \tilde{N}_{20}^{10} \times 1 = \frac{30!}{20!10!} \times \frac{20!}{10!10!} = \frac{30!}{(10!)^3}}.$$

Другий спосіб слідкує із безпосереднього застосування логіки теореми про перестановки із повтореннями. Розбиття тридцяти чоловік на три групи можна отримати наступним чином.

Взяти усі перестановки тридцяти чоловік: $\mathbf{P_{30}}$ та виключити з них перестановки перших десяти: $\mathbf{P_{10}}$, бо вони усі увійдуть у першу групу і перестановки їх між собою враховувати не треба (тобто вони в цьому сенсі вважаються однаковими). Потім аналогічно, виключити перестановки другої десятки та третьої. Тоді, кількість перестановок із повтореннями із специфікацією $\mathbf{(30;10,10,10)}$ дорівнює:

$$\mathbf{P(30;10,10,10) = \frac{30!}{10!10!10!}}.$$

5) Знайти кількість різних способів, якими можна виписати в один ряд 6 плюсів та 4 мінуса?

Розв'язання.

Усього маємо десять символів, серед яких шість однакових плюсів та чотири однакові мінуси. Тому за теоремою про перестановки із повтореннями маємо: $\mathbf{P(10;6,4) = \frac{10!}{6!4!}}$.

З другого боку, маємо десять місць, на які потрібно розташувати описані символи. Спочатку вибираємо шість місць для розташування плюсів, це C_{10}^{6} способів, а потім на ті місця, що осталися, а їх чотири. Розміщуємо мінуси. Оскільки усі плюси та мінуси між собою не відрізняються, то маємо:

$$C_{10}^{6} \times C_{4}^{4} = C_{10}^{6} = \frac{10!}{6!4!};\ C_{10}^{6} = \frac{10!}{6!4!}.$$

6) Скількома способами можна переставити букви в слові "каракулі", щоб ніякі дві голосні не стояли поруч?

Розв'язання.

У слові "каракулі" 4 голосні букви, серед яких дві букви "а" повторюються, та 4 приголосні, серед яких дві "к" повторюються. Тому число способів переставити голосні, як і приголосні букви слова "каракулі", обчислюється за теоремою про перестановки із повтореннями і дорівнює: $P(2,1,1) = \frac{4!}{2!} = 12$. Для того, щоб ніякі дві голосні букви не стояли поряд, спочатку випишемо в ряд 4 приголосні букви. Голосні можна розмістити по одній між приголосними, перед ними та після них також по одній (мінус у схемі означає місце, куди можна було б розмістити одну із голосних букв слова):

$$-\ П\ -\ П\ -\ П\ -\ П\ -.$$

Всього місць куди можна було розмістити голосні дорівнює 5, а голосних 4, тому число способів розмістити голосні дорівнює: $\tilde{N}_5^4 = 5$. Тоді за правилом добутку маємо:

$$N = \tilde{N}_5^4 \cdot P(2,1,1) \cdot P(2,1,1) = 5 \cdot \frac{4!}{2!} \cdot \frac{4!}{2!} = 720.$$

3.3.2 Розміщення із повторенням елементів (m-перестановки із необмеженими повтореннями)

Нехай $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ – множина типів елементів, a_1 – "представник" першого типу елементів, a_2 – другого типу, ..., a_n – n-того типу елементів.

Елементів кожного типу є в необмеженій кількості, елементи одного типу нерозрізнені між собою.

Розміщення із повтореннями із n по m – це <u>упорядкована</u> послідовність довжиною **m** така, що:

– кожен елемент послідовності одного із **n** типів;

– не усі елементи послідовності обов'язково різні.

Наприклад.

Згенерувати усі розміщення із повтореннями елементів з **3** по **5** у множині $\mathbf{A = \{1,2,3\}}$.

Розміщення розташовані у порядку зростання натурального числа поставленого у відповідність кожному розміщенню.

$$
\begin{array}{ccccc}
\mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{4} & \mathbf{5} \\
\mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\
\mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{2} \\
\hline
\mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{3} \\
\mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \\
\hline
\mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{2} \\
\mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \\
. & . & . & . & . \\
\mathbf{3} & \mathbf{3} & \mathbf{3} & \mathbf{3} & \mathbf{3}
\end{array}
\qquad \neq
$$

Теорема 2

Кількість різних **розміщень із повтореннями із n по m** дорівнює

$$\mathbf{\tilde{A}_n^m = n^m}.$$

Доведення.

Розглянемо наступну схему вибору упорядкованої послідовності довжиною у **m** елементів: нехай маємо нескінченну кількість елементів кожного із **n** типів (наприклад, кулі із наклеєними номерами) та **m** різних, перенумерованих, місць або комірок, які треба заповнити цими елементами.

Вибираємо елемент на перше місце, є $\mathbf{n}$ варіантів вибору. На друге місце після цього і незалежно від того, елемент якого типу вже був обраний, є також $\mathbf{n}$ претендентів. І так далі, відповідно, на $\mathbf{m}$ місце є, як і раніше, $\mathbf{n}$ претендентів.

За правилом добутку маємо:

$$\tilde{\mathbf{A}}_{\mathbf{n}}^{\mathbf{m}} = \underbrace{\mathbf{n} \cdot \mathbf{n} \cdot \ldots \cdot \mathbf{n}}_{\mathbf{m}} = \mathbf{n}^{\mathbf{m}}.$$

Зауваження: у цьому випадку може бути $\mathbf{m} > \mathbf{n}$.

Наприклад.

Скільки різних наборів сигналів можуть дати чотири світлофора одночасно?

Розв’язання.

Кожен із світлофорів незалежно від інших може давати 3 варіанти сигналів: зелений, жовтий та червоний, тобто число типів елементів, що повторюються, дорівнює трійці. Довжина упорядкованої послідовності – це кількість світлофорів. Світлофори різні (розташовані у різних місцях) тому має значення, на якому світлофорі горить який сигнал, тобто послідовність повинна бути упорядкована. Тоді маємо:

$$\tilde{\mathbf{A}}_{3}^{4} = \mathbf{3}^{4}.$$

3.3.3 Сполучення із повторенням елементів (з необмеженими повтореннями)

Нехай $\mathbf{A} = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n\}$ – множина типів елементів, $\mathbf{a}_1$ – "представник" першого типу елементів, $\mathbf{a}_2$ – другого типу, ..., $\mathbf{a}_n$ – $\mathbf{n}$-того типу елементів.

Елементів кожного типу є в необмеженій кількості, елементи одного типу нерозрізнені між собою.

Сполучення із повтореннями із $\mathbf{n}$ по $\mathbf{m}$ – неупорядкована послідовність довжиною $\mathbf{m}$ така, що:

– кожен елемент послідовності одного з $\mathbf{n}$ типів;

– не усі елементи послідовності обов'язково різні.

Наприклад.

Згенерувати усі сполучення із повтореннями елементів з $\mathbf{3}$ по $\mathbf{5}$ у множині $\mathbf{A = \{1,2,3\}}$. Сполучення розташовані у порядку зростання натурального числа поставленого у відповідність кожному сполученню.

1	2	3	4	5
1	1	1	1	1
1	1	1	1	2
1	1	1	1	3
1	1	1	2	2
1	1	1	2	3
1	1	1	3	3
.	.	.	.	.
3	3	3	3	3

Сполучення із повтореннями відрізняються один від одного складом елементів, що входять до сполучення, порядок елементів не має значення. Має значення, скільки елементів кожного типу увійшло до сполучення.

Теорема 3

Кількість різних сполучень із повтореннями із $\mathbf{n}$ по $\mathbf{m}$ дорівнює:

$$\widetilde{\mathbf{C}}_{\mathbf{n}}^{\mathbf{m}} = \mathbf{P(n+m-1; n-1, m)} = \frac{\mathbf{(n+m-1)!}}{\mathbf{m! \cdot (n-1)!}} = \mathbf{C}_{\mathbf{n+m-1}}^{\mathbf{m}} = \mathbf{C}_{\mathbf{n+m-1}}^{\mathbf{n-1}}$$

Доведення.

Розглянемо певне сполучення. Нехай у нього входять $\mathbf{r_1}$ об'єкт першого типу, $\mathbf{r_2}$ об'єктів другого типу, $\mathbf{r_n}$ об'єктів $\mathbf{n}$-го типу, причому $\sum\limits_{i=1}^{n} \mathbf{r_i} = \mathbf{m}$.

Деякі $\mathbf{r_i}$ можуть бути рівними нулю. Кожному сполученню можна поставити у взаємно-однозначну відповідність наступну схему:

$$\underbrace{\mathbf{00...0}}_{r_1} | \underbrace{\mathbf{00...0}}_{r_2} | \mathbf{...} | \underbrace{\mathbf{00...0}}_{r_n}.$$

Елементи, що становлять сполучення, кодуються нулями, їх всього $\mathbf{m}$.

Вертикальні риски відокремлюють елементи одного типу від елементів іншого типу. Якщо елементи будь-якого виду немає, дві риски будуть стояти поспіль. Кількість рисок дорівнює $\mathbf{(n-1)}$. Кожному сполученню із повтореннями відповідає схема і навпаки, кожна подібна схема відповідає деякому сполученню із повтореннями, тобто між ними існує взаємно - однозначна відповідність або бієкція. Тоді, кількість сполучень із повтореннями з $\mathbf{n}$ по $\mathbf{m}$ дорівнює числу таких схем. Підрахуємо кількість різних таких схем. Усього в схемі $\mathbf{(n-1)+m}$ об'єктів: $\mathbf{(n-1)}$ риска та $\mathbf{m}$ нулів. Число схем дорівнює кількості різних перестановок з $\mathbf{(n+m-1)}$ елементів, серед яких $\mathbf{(n-1)}$ однакових "|" та $\mathbf{m}$ однакових "0". За теоремою про перестановки із повтореннями для множини елементів із специфікацією $\mathbf{(n+m-1;n-1,m)}$ маємо, що число таких схем, а відповідно й число сполучень із повтореннями із $\mathbf{n}$ по $\mathbf{m}$ складає:

$$\mathbf{\widetilde{C}_n^m = P(n+m-1;n-1,m) = \frac{(n+m-1)!}{(n-1)!m!}}.$$

З другого боку, права частина цієї рівності може бути записана як кількість звичайних сполучень без повторень елементів із $\mathbf{(n+m-1)}$ елементів по $\mathbf{m}$: $\mathbf{\frac{(n+m-1)!}{(n-1)!m!} = C_{n+m-1}^m}$, або із урахуванням властивості симетричність для сполучень: $\mathbf{\frac{(n+m-1)!}{(n-1)!m!} = C_{n+m-1}^m = C_{n+m-1}^{n-1}}$.

Таким чином доведено, що справедливі співвідношення:

$$\mathbf{\widetilde{C}_n^m = P(n+m-1;n-1,m) = \frac{(n+m-1)!}{m!\cdot(n-1)!} = C_{n+m-1}^m = C_{n+m-1}^{n-1}}.$$

Наприклад.

1) У кондитерській продають **4** типи тістечок. Скількома способами одна людина може купити **8** тістечок?

Розв'язання.

Оскільки тістечка купує одна людина, то не має значення у якому порядку вона їх вибирає, а враховується тільки склад купівлі, тобто скільки тістечок якого типу було вибрано. Кількість типів тістечок дорівнює 4, кількість тістечок, що куплено в свою чергу дорівнює 8. Вважається, що кожного типу тістечок мається стільки, скільки потрібно. Тоді, за теоремою про сполучення із повтореннями маємо:

$$\widetilde{C}_4^8 = C_{4-1+8}^{4-1} = C_{11}^3 = C_{11}^8.$$

2) У кондитерській продають 4 типи тістечок. Скількома способами 8 різних людей можуть купити по одному тістечку?

Розв'язання.

Для даної задачі, має значення не тільки склад, а й порядок здійснення купівлі, бо тістечка отримують різні люди. Перше куплене тістечко отримає перша людина, друге – друга і так далі. Кількість типів тістечок дорівнює 4, кількість тістечок, що куплено 8. Кожного типу тістечок мається стільки, скільки потрібно. Тому за теоремою про розміщення із повтореннями маємо:

$$\widetilde{A}_4^8 = 4^8.$$

5) 30 чоловік голосують по 5 кандидатам на пост голови наукового товариства. Скількома способами можуть розподілитися голоси, якщо враховується тільки кількість голосів поданих за кожного кандидата? При тому ж питанні врахувати вимогу, що за кожного поданий хоча б один голос?

Розв'язання.

Перша задача є стандартна задача про сполучення із повтореннями, бо за постановкою задачі не має значення, хто за кого проголосував, а враховується тільки кількість голосів, поданих за кожного кандидата:

$$\widetilde{C}_5^{30} = C_{34}^4 = C_{34}^{30} = \frac{34!}{4!30!}.$$

Друга задача може бути розв'язана двома способами. По-перше, відомо, що за кожного кандидата був поданий один голос, тобто п'ять чоловіків вже проголосували. Зосталося врахувати, як розподілилися голоси 25 чоловік, що осталися. У такій постановці задача зводиться до стандартної задачі про сполучення із повтореннями для 25 чоловік:

$$\tilde{C}_5^{25} = C_{25+5-1}^{25} = C_{29}^{25} = C_{29}^{4} = \frac{29!}{4!\,25!}.$$

По-друге, задача може бути вирішена за допомогою схеми, що використовувалась при доведенні теореми про сполучення із повтореннями. Усі **30** чоловік кодуємо нулями, а для того, щоб відділити скільки чоловік проголосувало за якого кандидата, ставимо риски. Але тепер риска не може стояти до послідовності нулів (за першого кандидата ніхто не проголосував), після неї (за останнього кандидата ніхто не проголосував) та дві риски не можуть йти поспіль (за якогось кандидата не буде подано ні одного голосу). Тоді, щоб розставити риски існує **29** місць, по одному між кожними двома із **30** нулів. Всього треба поставити чотири риски, тому маємо:

$$C_{29}^{4} = \frac{29!}{4!25!}.$$

8) Знайти число способів виписати в один ряд 9 трійок та 6 п'ятірок так, щоб ніякі дві п'ятірки не стояли поруч?

Розв'язання.

Задача має розв'язання аналогічне попередній задачі (спочатку треба розставити трійки, а поміж ними, перед ними і після них по одній 5):

$$C_{10}^{6} = \frac{10!}{6!4!}.$$

Формули перерахунку для основних типів комбінаторних з'єднань

З'єднання	**Без повторень елементів**	**З повторенням елементів**
Перестановки	$P_n = n!$	$P(n; n_1, n_2, ..., n_k) = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot ... \cdot n_k!}$
Розміщення	$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$	$\tilde{A}_n^m = n^m$
Сполучення	$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$	$\tilde{C}_n^m = C_{n-1+m}^{n-1} = C_{n-1+m}^{m}$

3.4 Формула (принцип) включення-виключення

Нехай є деяка скінченна множина $\mathbf{A}$, що має потужність у $\mathbf{N}$ об'єктів та множина властивостей $\mathbf{H}=\{\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n\}$. Кожний об'єкт множини $\mathbf{A}$ може володіти або не володіти однією або одночасно декількома (всіма) властивостями із множини $\mathbf{H}$.

Введемо ряд позначень.

$\mathbf{N}(\alpha_i)$ – кількість об'єктів множини $\mathbf{A}$, які володіють властивістю α_i;

$\mathbf{N}(\overline{\alpha}_i)$ – кількість об'єктів, що не володіють властивістю α_i;

$\mathbf{N}(\alpha_i,\alpha_j)$ – кількість об'єктів, що володіють двома властивостями α_i,α_j одночасно;

$\mathbf{N}(\alpha_i,\alpha_j,\alpha_k)$ – кількість об'єктів, що володіють трьома властивостями $\alpha_i,\alpha_j,\alpha_k$ одночасно;

$\mathbf{N}(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)$ – кількість об'єктів, що володіють усіма $\mathbf{n}$ властивостями множини $\mathbf{H}$ одночасно;

$\mathbf{N}(\overline{\alpha}_1,\overline{\alpha}_2,...,\overline{\alpha}_n)$ – кількість об'єктів, що не володіють ні одним з $\mathbf{n}$ властивостей множини $\mathbf{H}$.

Теорема 4

При довільному $\mathbf{n}$ справедлива формула включення-виключення:

$$\mathbf{N}(\overline{\alpha}_1,\overline{\alpha}_2,...,\overline{\alpha}_n)=\mathbf{N}-\sum_{i=1}^{n}\mathbf{N}(\alpha_i)+\sum_{1\le i<j\le n}\mathbf{N}(\alpha_i,\alpha_j)-$$

$$-\sum_{1\le i<j<k\le n}\mathbf{N}(\alpha_i,\alpha_j,\alpha_k)+\ldots+(-1)^n\mathbf{N}(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)$$

Формула включення-виключення визначає кількість об'єктів, що не володіють ні однією з властивостей, заданих множиною $\mathbf{H}$.

Наприклад:

На фірмі працює 67 співробітників. З них 47 володіють англійською мовою, 35 – німецькою, 20 – французькою; одночасно англійською та німецькою володіють – 23 співробітника, англійською та французькою – 12, німецькою та французькою – 11, трьома мовами володіють 5 співробітників.

Скільки співробітників не володіють ні однією із перерахованих мов?

Розв'язання.

Визначимо наступні властивості:

α_1 – "володіти англійською мовою";

α_2 – "володіти німецькою мовою;

α_3 – "володіти французькою мовою".

За формулою включення-виключення маємо:

$$\mathbf{N(\overline{\alpha}_1, \overline{\alpha}_2, \overline{\alpha}_3) = N - \sum_{i=1}^{3} N(\alpha_i) + \sum_{1 \le i < j \le 3} N(\alpha_i, \alpha_j)}$$
$$\mathbf{- N(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = N - N(\alpha_1) - N(\alpha_2) - N(\alpha_3) +}$$
$$\mathbf{+ N(\alpha_1\alpha_2) + N(\alpha_1\alpha_3) + N(\alpha_2\alpha_3) - N(\alpha_1\alpha_2\alpha_3) =}$$
$$\mathbf{= 67 - 47 - 35 - 20 + 23 + 12 + 11 - 5 = 6\,.}$$

3.4.1 Окремі випадки формули включення-виключення

Якщо всі властивості $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ попарно несумісні, тобто

$$\mathbf{N(\alpha_i, \alpha_j) = 0, \forall i, j = 1, ..., n; i \ne j,}$$

то формула включення-виключення має вигляд:

$$\mathbf{N(\overline{\alpha}_1, \overline{\alpha}_2, ..., \overline{\alpha}_n) = N - \sum_{i=1}^{n} N(\alpha_i).}$$

1. Якщо кожне число $\mathbf{N(\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, ..., \alpha_{i_k})}$ залежить не від характеру властивостей, а лише від їх кількості, то формула має вигляд:

$$\mathbf{N(\overline{\alpha}_1, \overline{\alpha}_2, ..., \overline{\alpha}_n) = N - C_n^1 \cdot N^{(1)} + C_n^2 \cdot N^{(2)} + ... + (-1)^k \cdot C_n^k \cdot N^{(k)} +}$$
$$\mathbf{+ ... + (-1)^n \cdot C_n^n \cdot N^{(n)},}$$

де $\mathbf{N^{(k)} = N(\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, ..., \alpha_{ik})}$ – кількість об'єктів, що володіють рівно **k** властивостями.

3.4.2 Задача про безлад

Нехай є множина $\mathbf{A} = \{\mathbf{1},\ \mathbf{2},\ \mathbf{3}, ..., \mathbf{n}\}$.

Розглянемо перестановки елементів множини $\mathbf{A}$.

Елемент перестановки називається **нерухомим**, якщо $\mathbf{a_i = i}$, тобто елемент стоїть на своєму місці.

Наприклад.

При $\mathbf{n = 5}$ у перестановці **5 2 4 3 1** – елемент **2** – нерухомий, а у перестановці **1 2 3 4 5** – усі елементи нерухомі.

Безладом називається перестановка, яка не має нерухомих елементів, тобто $\forall \mathbf{i} = \overline{\mathbf{1,n}};\ \mathbf{a_i \neq i}$.

Постановка задачі

Визначити $\mathbf{D_n}$ – кількість безладів у $\mathbf{n}$-елементній множині, або кількість перестановок чисел $\mathbf{1,2,...,n}$ таких, що $\forall \mathbf{i} = \overline{\mathbf{1,n}};\ \mathbf{a_i \neq i}$.

Розв'язання.

Загальне число перестановок у $\mathbf{n}$-елементній множині дорівнює $\mathbf{N = n!}$. Позначимо через $\alpha_\mathbf{i}$ таку властивість перестановки, що $\mathbf{i}$-й елемент стоїть на своєму місці, тобто $\mathbf{a_i = i}$. Тоді ліва частина формули включення-виключення $\mathbf{N(\overline{\alpha}_1, \overline{\alpha}_2, ..., \overline{\alpha}_n)}$ і є розв'язком задачі про безлад. За позначенням $\mathbf{N(\alpha_i)}$ є кількість перестановок в $\mathbf{n}$-елементній множині, у яких один $\mathbf{i}$-тий елемент стоїть на своєму місці і дорівнює $\mathbf{N(\alpha_i) = (n-1)!}$, бо один елемент не можна переставляти, а останні елементи можуть бути переставлені $\mathbf{(n-1)!}$ способами. Так як число перестановок не залежить від того, який саме елемент знаходиться на своєму місці, то: $\mathbf{N^{(1)} = N(\alpha_1) = N(\alpha_2) = ... = N(\alpha_n) = (n-1)!}$.

Аналогічно, визначимо $\mathbf{N^{(2)}}$ – кількість перестановок, у яких рівно два елементи знаходяться на своїх місцях: $\mathbf{N^{(2)} = (n-2)!}$, та, відповідно, $\mathbf{N^{(k)}}$ – кількість перестановок, у яких тільки $\mathbf{k}$ елементів знаходяться на своїх місцях: $\mathbf{N^{(k)} = (n-k)!}$.

За формулою включень-виключень маємо:

$$\mathbf{D_n = n! + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k C_n^k (n-k)! = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k (n-k)!}$$

Розпишемо формулу

$$\mathbf{D_n = n! - C_n^1 \cdot (n-1)! + C_n^2 \cdot (n-2)! + \ldots + (-1)^n \cdot C_n^n \cdot 0! =}$$

$$\mathbf{= n! \cdot \left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + (-1)^n \cdot \frac{1}{n!}\right).}$$

$\mathbf{D_n}$ – ще називають **субфакторіалом**.

3.4.3 Задача про зустріч

Визначити кількість таких перестановок чисел $\mathbf{1,2,\ldots,n}$, що точно $\mathbf{k}$ елементів із $\mathbf{n}$ знаходяться на своїх місцях (тобто $\mathbf{a_i = i}$), а інші $\mathbf{n-k}$, перебувають у безладі. Інакше: нас цікавлять перестановки, в яких рівно $\mathbf{k}$ елементів нерухомі.

Розв'язання.

Із загального числа елементів вибирається $\mathbf{k}$, які залишаються на своїх місцях. Оскільки вибір елементу визначає й його місце розташування, то кількість варіантів дорівнює: $\mathbf{C_n^k}$. Для інших $\mathbf{n-k}$ елементів розв'язується задача про безлад: $\mathbf{D_{n-k}}$. Тоді, за правилом добутку кількість способів, якими можна переставити $\mathbf{n}$ елементів при таких умовах, дорівнює:

$$\mathbf{D_{n,k} = C_n^k \cdot D_{n-k}}.$$

3.4.4 Перестановки без фіксованих пар

Позначимо через $\mathbf{E_n}$ число таких перестановок чисел $\mathbf{1,2,\ldots,n}$, що жодна з цих перестановок не містить жодної з упорядкованих фіксованих пар:

$$\mathbf{\{(1,2),\ (2,3),\ldots,(n-1,n)\}.}$$

Розв'язання.

Для обчислення $\mathbf{E_n}$ використовуємо принцип включення і виключення.

Позначимо через α_i властивість перестановки містити $\mathbf{i}$-ту впорядковану пару $(\mathbf{i},\mathbf{i}+\mathbf{1})$. Для обчислення скористаємося другим окремим випадком для формули включень-виключень. Число усіх перестановок $\mathbf{N}=\mathbf{n!}$. Перестановки, що володіють властивістю α_i, виходять як перестановки елементів $\mathbf{1, 2, ..., i-1, i+2, ..., n}$ та пари $(\mathbf{i},\mathbf{i}+\mathbf{1})$, що розглядається, як один елемент. Отже, незалежно від α_i маємо: $\mathbf{N}^{(1)}=(\mathbf{n}-\mathbf{1})!$.

Для перестановок, що володіють двома властивостями, тобто мають дві впорядковані пари, наприклад $(\mathbf{i},\mathbf{i}+\mathbf{1})$ та $(\mathbf{k},\mathbf{k}+\mathbf{1})$, розглянемо два випадки:

1) $\mathbf{k}>\mathbf{i}+\mathbf{1}$, пари йдуть не поспіль;

2) $\mathbf{k}=\mathbf{i}+\mathbf{1}$, пари розташовані одна за одною.

1) Якщо $\mathbf{k}>\mathbf{i}+\mathbf{1}$, то пари йдуть не поспіль.

У цьому випадку маємо перестановки двох пар, як окремих, складних елементів: $(\mathbf{i},\mathbf{i}+\mathbf{1})$ та $(\mathbf{k},\mathbf{k}+\mathbf{1})$ і $(\mathbf{n}-\mathbf{4})$ елемента, що лишилися. Тобто всього переставляються $(\mathbf{n}-\mathbf{4})+\mathbf{2}=(\mathbf{n}-\mathbf{2})$ елемента.

2) Якщо $\mathbf{k}=\mathbf{i}+\mathbf{1}$, то перестановки складаємо з однієї впорядкованої трійки елементів: $(\mathbf{i},\mathbf{i}+\mathbf{1},\mathbf{i}+\mathbf{2})$ та $(\mathbf{n}-\mathbf{3})$ інших елементів, тобто теж із $(\mathbf{n}-\mathbf{3}+\mathbf{1})=(\mathbf{n}-\mathbf{2})$ елементів.

Таким чином, число перестановок, що володіють двома властивостями, так само: $\mathbf{N}^{(2)}=(\mathbf{n}-\mathbf{2})!$. Аналогічно, число перестановок, що володіють $\mathbf{k}$ властивостями, залежить тільки від $\mathbf{k}$ і дорівнює: $\mathbf{N}^{(k)}=(\mathbf{n}-\mathbf{k})!$.

Тоді, загальне число перестановок без фіксованих пар дорівнює:

$$\mathbf{E_n}=\mathbf{N}(\overline{\alpha}_1,\overline{\alpha}_2,...,\overline{\alpha}_{n-1})=\mathbf{n!}-\mathbf{C}_{n-1}^{1}(\mathbf{n}-\mathbf{1})!+\mathbf{C}_{n-1}^{2}(\mathbf{n}-\mathbf{2})!+...+(-\mathbf{1})^{n-1}\mathbf{C}_{n-1}^{n-1}\mathbf{0!}.$$

Наприклад.

1. Скільки різних слів можна згенерувати із букв слова "тік-так", щоб ніякі однакові букви не йшли одна за одною?

Розв’язання.

Усього слові "тік-так": 6 букв серед яких дві букви "к" і дві букви "т".

Нехай α_1 – дві букви "т" йдуть одна за одною;

α_2 – дві букви "к" ідуть одна за одною.

Тоді , маємо:

$$\mathbf{N(\overline{\alpha}_1,\overline{\alpha}_2) = N - N(\alpha_1) - N(\alpha_2) + N(\alpha_1\alpha_2) =}$$

$$\mathbf{= P(6;2,2,1) - P(5;2,1,1) + P_4 = \frac{6!}{2!2!} - \frac{5!}{2!} - \frac{5!}{2!} + 4! = 84.}$$

2. Скількома способами можна переставити цифри у числі 123123 так, щоб ніякі дві однакові цифри не знаходилися поруч?

Розв'язання.

$$\mathbf{N(\overline{\alpha}_1\overline{\alpha}_2\overline{\alpha}_3) = N - C_3^1 \cdot N^{(1)} + C_3^2 \cdot N^{(2)} - C_3^3 \cdot N^{(3)} =}$$

$$\mathbf{= \frac{6!}{2!2!2!} - 3 \cdot \frac{5!}{2!2!} + 3 \cdot \frac{4!}{2!} - 3! = 30.}$$

3. Пустелею йде караван із 5 верблюдів. Подорож триває багато днів і нарешті, усім набридає бачити попереду себе одного й того ж верблюда. Скількома способами можна переставити верблюдів так, щоб попереду кожного верблюда йшов інший, ніж раніше?

Розв'язання.

Постановка задачі співпадає із математичною постановкою задачі про перестановки без фіксованих пар.

Тоді , маємо:

$$\mathbf{N(\overline{\alpha}_1,\overline{\alpha}_2,\overline{\alpha}_3,\overline{\alpha}_4) = P_5 - C_4^1 \cdot P_4 + C_4^2 \cdot P_3 - C_4^3 \cdot P_2 + C_4^4 \cdot P_1 =}$$

$$\mathbf{= 5! - 4 \cdot 4! + 6 \cdot 3! - 4 \cdot 2! + 1 = 53.}$$

3.5 Завдання для самостійної роботи

Відповідно до заданого варіанту розв'язати задачі перерахунку.

Варіант №1.

1. Чоловік має 6 друзів, і протягом 20 днів запрошує до себе 3 з них так, що компанія жодного разу не повторюється. Скількома способами це можна зробити?

2. Скількома способами із колоди у 36 карт можна витягнути 5 карт, серед яких 2 з однаковими номерами та 2 з однаковими, але іншими номерами?

3. Із двох спортивних суспільств, в яких тренується по 100 фехтувальників, треба виділити по одному фехтувальникові для участі в змаганні. Скількома способами може бути зроблений цей вибір?

4. У святах беруть участь 12 дітей. У діда Мороза є 15 однакових подарунків. Скільки існує способів роздати дітям подарунки, якщо кожна дитина має отримати, хоча б по одному подарунку?

5. Скількома способами можна посадити поруч 3 англійців, 3 французів та 3 турок так, щоб жодні три співвітчизники не сиділи поруч?

Варіант №2.

1.Скільки можна зробити перестановок із $\mathbf{n}$ елементів, в яких задані два елементи $\mathbf{a}$ і $\mathbf{b}$ не стоять поряд? Задані три елементи $\mathbf{a,b,c}$ не стоять поряд?

2. Десять крісел поставлено в ряд. Скількома способами на них можуть сісти два чоловіка? Скількома способами ці два чоловіки можуть сісти поруч? Скількома способами вони можуть сісти в ряд так, щоб між ними було, принаймні, одне крісло?

3. У селищі проживає 2000 мешканців. Довести, що, принаймні, два з них мають однакові ініціали?

4. Скількома способами 12 полтинників можна розкласти по 5 різним пакетам, якщо жоден з пакетів не може бути порожнім?

5. На екскурсії були учні сьомих та восьмих класів. Всі вони були або з комсомольськими значками, або в піонерських галстуках. Хлопчиків було 16, а комсомольців – 24. Піонерок було рівно стільки, скільки хлопчиків-комсомольців. Скільки учнів було на екскурсії?

Варіант №3.

1. У автомашині сім місць. Скількома способами можуть 7 чоловік всістися в машину, якщо місце водія можуть зайняти тільки троє з них?

2. Скільки різних 10-значних чисел можна отримати, використовуючи в їх написанні цифри 2233344455?

3. Четверо студентів складають іспит. Скількома способами їм можуть бути поставлені відмітки, якщо відомо, що ніхто з них не отримав не задовільної оцінки?

4. У англійців прийнято давати дітям декілька імен. Скількома способами можна назвати дитя, якщо загальне число імен дорівнює 300, та ім'я складається не більше, як із 3 імен? Імена можуть повторюватися.

5. На заміську прогулянку поїхало 92 чоловіка. Бутерброди з ковбасою узяли 47 чоловік, з сиром – 38 чоловік, з шинкою – 42 людини, з сиром і з ковбасою – 28 чоловік, з ковбасою і з шинкою – 31 людина, і з сиром і з шинкою – 26 чоловік. Всі три види бутербродів узяли 25 чоловік, а декілька чоловік замість бутербродів захопили з собою пиріжки. Скільки чоловік узяли з собою пиріжки?

Варіант №4.

1. Скільки різних перестановок можна утворити зі всіх букв слова «добрива», якщо всі голосні повинні йти одна за одною в наступному порядку «о, и, а»?

2. Вісім чоловік повинні розташуватися в двох кімнатах, причому, в кожній повинно бути, принаймні, 3 людини. Скількома способами вони можуть це зробити?

3. Скількома способами можна розкласти в дві кишені дев'ять монет різної гідності?

4. Троє хлопців зібрали з яблуні 40 яблук. Скількома способами вони можуть їх розділити, якщо всі яблука вважаються однаковими?

5. Дівчина квапиться на побачення. Вона написала 5 листів, кожний із них адресовано одному з п'яти різних адресатів. Скількома способами можна здійснити розсилку листів так, що жоден із листів не потрапить за призначенням?

Варіант №5.

1. У батька є 5 різних апельсинів, які він видає восьми своїм синам так, що кожен отримує або 1 апельсин, або нічого. Скількома способами можна це зробити?

2. З групи в 20 солдатів щоночі виділяються чергові із 3 чоловік. Скільки ночей підряд командир може виділяти таку трійку чергових, що не співпадає ні з однією із попередніх? Скільки разів при цьому буде чергувати певний солдат?

3. Скільки існує п'ятизначних чисел? У скількох з них всі цифри парні? У скільки не входять цифри, менші, ніж 6?

4. Скількома способами можна розставити 12 книжок в шафі з 5 полицями, якщо кожна полиця може вміщати усі 12 книжок?

5. На каруселі катаються 5 хлопців. Вони вирішили пересісти так, щоб попереду кожного опинився інший, ніж був раніше. Скількома способами вони можуть це зробити?

Варіант №6.

1. Скількома способами можна розподілити 15 різних предметів між трьома особами, якщо перший повинен отримати 2 предмети, другий – 3 предмети і третій – 10 предметів?

2. Скільки способів розкласти в один ряд 5 червоних м'ячів, 4 чорних, 5 білих так, щоб м'ячі, що лежать на краях були одного кольору?

3. Скільки можна побудувати різних прямокутних паралелепіпедів, довжина кожного ребра яких є цілим числом від 1 до 100?

4. Скількома способами можна розділити 20 різних букв на 5 слів, якщо ніяке слово не може бути порожнім. Розгледіти два випадки, якщо порядок слів має та не має значення.

5. До обіду за круглим столом запрошені $\mathbf{n}$ пар ворогуючих лицарів ($\mathbf{n} \geq \mathbf{2}$). Скільки існує способів розсадити їх так, щоб жодні вороги не сиділи поруч?

Варіант №7.

1. У залізничному вагоні 10 місць розташовано по ходу поїзда і 10 місць проти ходу поїзда. Скількома способами можна посадити у вагон 8 пасажирів, якщо два відмовляються сидіти по ходу поїзда, а три проти ходу поїзда?

2. Знайти число всіх можливих перестановок букв слова «зоологія». Скільки серед них таких, в яких 3 букви «о» стоять поряд? Скільки серед них таких, в яких у точності 2 букви «о» стоять поряд?

3. Кидають 7 гральних кісток. Скільки може вийти різних результатів, якщо на кожній кості нанесені 1,2,3,4,5,6 очок і результати, що відрізняються лише порядком очок, вважаються однаковими?

4. Скільки чотиризначних чисел можна скласти з цифр від 0 до 5, якщо кожна цифра може повторюватися?

5. Палітурник повинен переплести 12 різних книг в червону, зелену і коричневу палітурки. Скількома способами він може це зробити, якщо в кожен колір має бути переплетена, хоч би одна книга?

Варіант №8.

1. У філателіста 8 різних канадських марок і 10 американських. Скількома способами він може відібрати 3 канадських і 3 американських марки і наклеїти їх в альбом на 6 пронумерованих місць?

2. Симфонія записана на 4 пластинках, причому для запису використовувалися обидві сторони кожної пластинки. Скільки існує способів програти цю симфонію так, щоб, принаймні, одна її частина потрапила не на своє місце?

3. Скількома способами можна розподілити 6 різних ящиків на 8 поверхів, щоб на восьмому поверсі були не менше двох ящиків?

4. Скількома способами 3 людини можуть розподілити між собою 6 однакових яблук, 1 апельсин, 1 сливу, 1 фінік, 1 лимон, 1 айву і 1 грушу?

5. Вісім чоловік стоять в черзі до театральної каси. Скількома способами їх можна переставити так, щоб попереду кожного з них йшов інший, ніж раніше?

Варіант №9.

1. Хтось має 8 різних пар рукавичок. Скількома способами він може відібрати одну рукавичку для правої руки і одну рукавичку для лівої, щоб вони не належали одній парі?

2. Протягом 10 тижнів студенти складають 10 іспитів, у тому числі 2 по математиці. Скількома способами можна розподілити іспити так, щоб екзамени з математики не слідували один за іншим?

3. Десять пасажирів їдуть в поїзді, який проходить через 5 населених пунктів. Скількома способами можуть розподілитися пасажири по зупинках, якщо кожен може вийти на будь-якій зупинці?

4. У перукарні 6 майстрів, скількома способами можуть обслужити 11 клієнтів, якщо кожен з майстрів повинен обслужити, хоч би одного клієнта?

5. У черзі за морозивом стоять 5 хлопців. Скількома способами можна переставити хлопців так, щоб попереду кожного із них опинився інший, ніж був раніше?

Варіант №10.

1. Скількома способами можна розставити на полиці сім книжок, якщо дві певні книги повинні стояти поряд; ці дві книги не повинні стояти поряд?

2. Пасажирський поїзд складається з двох багажних вагонів, чотирьох плацкартних і трьох купейних. Скількома способами можна сформувати поїзд, якщо багажні вагони повинні знаходитися спочатку, а купейні – в кінці? Якщо вагони можуть слідувати у будь-якому порядку?

3. У деякій державі не було двох жителів з однаковим набором зубів. Яка може бути найбільша чисельність населення держави, якщо найбільше число зубів дорівнює 32?

4. Вступні іспити складають 20 чоловік, скількома способами вони можуть розподілитися по 4 аудиторіям, якщо місткість аудиторій не менше 4 чоловік?

5. Кожен учень класу або дівчинка, або має світле волосся, або любить математику. У класі 20 дівчаток, з них 12 блондинок, і одна блондинка любить

математику. Всього в класі 24 учня є блондинами, математику з них люблять 12, а всього учнів, які люблять математику, 17; із них 6 дівчаток. Скільки учнів в даному класі?

Варіант №11.

1. Довести, що число трьохбуквених слів, які можна утворити з букв слова «гіпотенуза», дорівнює числу всіх можливих перестановок букв, які входять у слово «призма».

2. Скількома способами можна переставити букви в слові «кавоварка», щоб голосні букви стояли на своїх місцях?

3. Скільки існує п'ятизначних чисел? Скільки серед них таких, які починаються цифрою 4? Які не містять цифри 5? Які діляться на 5?

4. Скількома способами можуть розподілитися 5 екзаменаторів між 40 абітурієнтами, якщо кожен з них повинен прийняти не менше 5 чоловік?

5. Беруться перестановки 5 чисел 1,2,3,4,5. У скількох з них жодне число не стоїть на своєму місці?

3.6 Контрольні питання

1. Визначити правила суми та добутку.
2. З’єднання без повторень та із повтореннями елементів.
3. Перестановки без повторень та з повтореннями елементів. Задачі перерахунку.
4. Сполучення без повторень та з повтореннями елементів. Задачі перерахунку.
5. Розміщення без повторень та з повтореннями елементів. Задачі перерахунку.
6. Формула включення-виключення. Окремі випадки.
7. Задачі про безлад та зустріч.
8. Задача про перестановки без фіксованих пар.

РОЗДІЛ 4
ФУНКЦІЇ АЛГЕБРИ ЛОГІКИ. БУЛЕВА АЛГЕБРА

4.1 Визначення двійкового набору та його номеру

Нехай множина $\mathbf{X}$ складається із двох елементів $\mathbf{0}$ і $\mathbf{1}$, $\mathbf{X} = \{0,1\}$, тоді множина $\mathbf{X^n = \{(x_1, x_2, ..., x_n) \mid \forall i = \overline{1,n}, x_i \in X\}}$ є множина всіляких двійкових векторів, наборів довжини $\mathbf{n}$.

Двійковий набір – сукупність координат деякого фіксованого вектора $\mathbf{(x_1, x_2, ..., x_n) \in X^n}$.

Кожному двійковому набору можна поставити у відповідність деякий **номер**, що дорівнює двійковому числу відповідному даному набору. Нехай $\mathbf{(x_1, x_2, ..., x_n)}$ – логічний набір, тоді $\mathbf{x_1 \cdot 2^{n-1} + x_2 \cdot 2^{n-2} + ... + x_n \cdot 2^0}$ – номер набору.

Позначається таким чином: $\mathbf{\#(x_1, x_2, ..., x_n)}$.

Наприклад.

$\mathbf{\#(0,1,1) = 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 3}$.

$\mathbf{\#(0,0,1,1) = 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 3}$.

$\mathbf{\#(0,1,1,1) = 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 7}$.

Зауваження: щоб однозначно відновити набір за номером – потрібно знати довжину двійкового вектору.

Теорема

Кількість всіляких, різних двійкових наборів довжиною $\mathbf{n}$ дорівнює $\mathbf{2^n}$

Доведення.

Двійковий набір (вектор) довжини $\mathbf{n}$ – це упорядкована послідовність, у якій кожен із $\mathbf{n}$ елементів, приймає одно із двох значень, або $\mathbf{0}$, або $\mathbf{1}$. Для того, щоб вибрати першу координату двійкового вектора, існує $\mathbf{2}$ варіанти.

Після цього і незалежно від того, яке конкретно значення було вибрано для першої координати, число варіантів вибрати другу координату також дорівнює $\mathbf{2}$ і так далі. Відповідно, й для $\mathbf{n}$- тої координати число варіантів складає $\mathbf{2}$. Тоді, за комбінаторним правилом добутку маємо: $\underbrace{\mathbf{2 \times 2 \times ... \times 2}}_{\mathbf{n}} = \mathbf{2^n}$.

Наприклад.

Побудуємо всілякі двійкові набори довжиною $\mathbf{n = 3}$.

За доведеною теоремою їхня кількість дорівнює $\mathbf{2^3 = 8}$.

Номер двійкового набору	Двійковий набір		
	$\mathbf{x_1}$	$\mathbf{x_2}$	$\mathbf{x_3}$
0	0	0	0
1	0	0	1
2	0	1	0
3	0	1	1
4	1	0	0
5	1	0	1
6	1	1	0
7	1	1	1

4.2 Визначення та способи завдання функції алгебри логіки

Логічна змінна – це змінна, що може приймати тільки два значення: істина або хибність (TRUE/FALSE, 1/0).

Функція алгебри логіки (**булева функція**, ФАЛ) $\mathbf{f(x_1, x_2, ..., x_n)}$ – це функція, у якої всі аргументи є логічні змінні, і сама функція приймає тільки логічні значення.

Існують наступні способи опису ФАЛ:

– табличний;

– графічний;

– аналітичний.

4.2.1Табличний спосіб завдання ФАЛ. Таблиця істинності

Функцію алгебри логіки можна представити таблицею, що має $\mathbf{2^n}$ рядків. Така таблиця називається **таблицею істинності.** У лівій частині таблиці перераховуються всілякі двійкові набори значень аргументів, а в правій частині – значення деякої булевої функції, $\alpha_i \in \{0,1\}, i = \overline{1,2^n}$.

№	x_1	x_2	…	x_n	$f(x_1, x_2, ..., x_n)$
0	0	0	…	0	α_1
1	0	0	…	1	α_2
…	…	…	…	…	…
$\mathbf{2^n - 1}$	1	1	…	1	α_{2^n}

Теорема

Кількість різних функцій алгебри логіки, що залежать від $\mathbf{n}$ аргументів, дорівнює $\mathbf{2^{2^n}}$

Доведення.

Число строк у таблиці істинності співпадає із числом усіх двійкових векторів довжини $\mathbf{n}$ і дорівнює $\mathbf{m = 2^n}$. На кожному такому наборі булева функція приймає одно із двох значень, або $\mathbf{0}$, або $\mathbf{1}$. Тобто для першої стрічки таблиці істинності маємо два варіанти вибору значення ФАЛ. Після цього і незалежно від того, яке дійсно значення було обрано для першої стрічки, для другої стрічки буде також 2 варіанти вибору і так далі, й відповідно для останньої $\mathbf{m}$ - тої стрічки також два варіанти.

Тоді, за правилом добутку, число різних варіантів сформувати таблицю істинності, а відповідно й задати ФАЛ від $\mathbf{n}$ аргументів дорівнює: $\underbrace{\mathbf{2 \times 2 \times ... \times 2}}_{\mathbf{m}} = \mathbf{2^m}$, а оскільки $\mathbf{m = 2^n}$, то $\mathbf{2^m = 2^{2^n}}$.

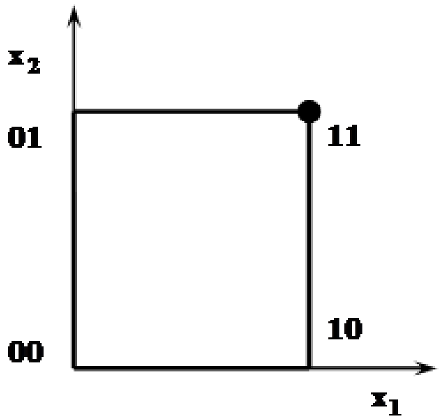
4.2.2 Графічне подання ФАЛ

ФАЛ можна представити у вигляді $\mathbf{n}$- вимірного одиничного куба: якщо наборам значень аргументів зіставити крапки $\mathbf{n}$- мірного простору, то множина $\mathbf{2^n}$ наборів визначає множину вершин $\mathbf{n}$- вимірного куба.

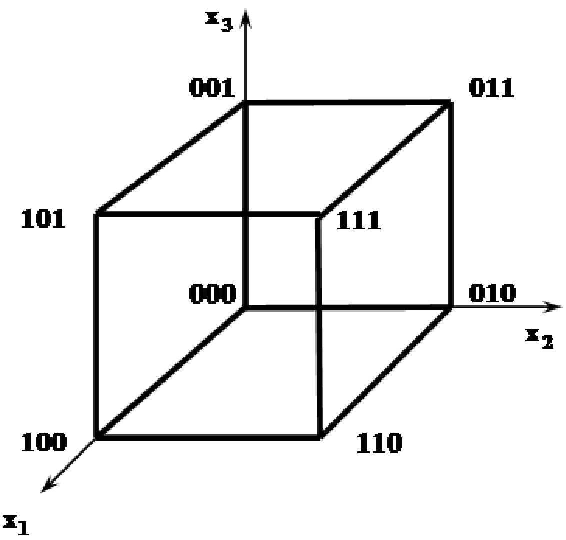
Одновимірний одиничний куб ($\mathbf{n = 1}$)

Функція алгебри логіки приймає значення або 0, або 1. При графічному представленні, якщо $\mathbf{f(x_1) = 0}$, на рисунку зображується порожнє коло, якщо $\mathbf{f(x_1) = 1}$ – зафарбоване коло. Нижче зображено функцію алгебри логіки від одного аргументу, що дорівнює одиниці на двох наборах аргументів.

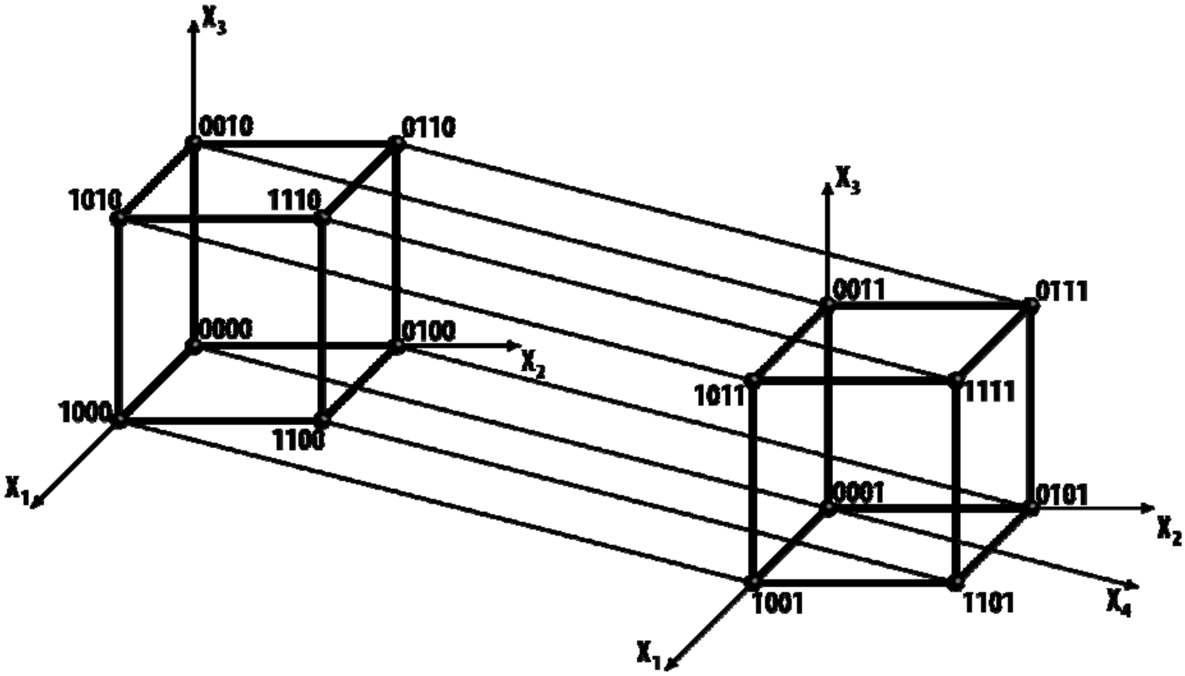
Двовимірний одиничний куб ($\mathbf{n = 2}$)



Тривимірний одиничний куб ($\mathbf{n = 3}$)



Чотиривимірний одиничний куб (n = 4)



4.3 Функції алгебри логіки одного аргументу

Кількість функцій алгебри логіки від одного аргументу за теоремою дорівнює $\mathbf{2^{2^1} = 4}$.

Функції алгебри логіки одного аргументу

$\mathbf{x}$	$\mathbf{f_0(x)}$	$\mathbf{f_1(x)}$	$\mathbf{f_2(x)}$	$\mathbf{f_3(x)}$
0	0	1	0	1
1	0	1	1	0

$\mathbf{f_0(x) \equiv 0}$ – константа нуль, тотожній нуль («хибність»);

$\mathbf{f_1(x) \equiv 1}$ – константа одиниця, тотожна одиниця («істина»);

$\mathbf{f_2(x) = x}$ – змінна $\mathbf{x}$;

$\mathbf{f_3(x) = \overline{x}}$ – заперечення аргументу $\mathbf{x}$ (інверсія $\mathbf{x}$).

4.4 Функції алгебри логіки двох аргументів

Кількість різних ФАЛ від двох аргументів дорівнює $\mathbf{2^{2^{2=16}}}$.

Елементарні функції алгебри логіки від 2 аргументів

x_1x_2	**00**	**01**	**10**	**11**	**Позначення ФАЛ**
$\mathbf{f_0}$	0	0	0	0	тотожній $\mathbf{0}$, константа $\mathbf{0}$.
$\mathbf{f_1}$	0	0	0	1	$\mathbf{x_1}$ і $\mathbf{x_2}$, $\mathbf{x_1 \cdot x_2}$, $\mathbf{x_1 \& x_2}$ $\mathbf{x_1 \wedge x_2}$ – кон'юнкція, логічне «і», логічне множення
$\mathbf{f_2}$	0	0	1	0	$\mathbf{x_1 \Delta x_2}$ – заборона $\mathbf{x_2}$; $\mathbf{x_1}$, але не $\mathbf{x_2}$
$\mathbf{f_3}$	0	0	1	1	$\mathbf{x_1}$ повторення першого аргументу
$\mathbf{f_4}$				0	$\mathbf{x_2 \Delta x_1}$ – заборона $\mathbf{x_1}$; не $\mathbf{x_1}$, але $\mathbf{x_2}$
$\mathbf{f_5}$	0	1	0	1	$\mathbf{x_2}$ – повторення другого аргументу
$\mathbf{f_6}$	0	1	1	0	$\mathbf{x_1 \oplus x_2}, \mathbf{x_1 \Delta\, x_2}$ – додавання за модулем 2, нерівнозначність
$\mathbf{f_7}$	0	1	1	1	$\mathbf{x_1 \vee x_2}$ – диз'юнкція, логічне «або», логічне додавання
$\mathbf{f_8}$	1	0	0	0	$\mathbf{x_1 \downarrow x_2}$ – стрілка Пірса, функція Вебба, $\overline{\vee}$; логічне «або-не»
$\mathbf{f_9}$	1	0	0	1	$\mathbf{x_1 \equiv x_2}$, $\mathbf{x_1 \sim x_2}$ – еквівалентність, рівнозначність, тотожність
$\mathbf{f_{10}}$	1	0	1	0	$\mathbf{\bar{x}_2}$ – заперечення, інверсія другого аргументу
$\mathbf{f_{11}}$	1	0	1	1	$\mathbf{x_2 \leftarrow x_1}$ – обернена імплікація
$\mathbf{f_{12}}$	1	1	0	0	$\mathbf{\bar{x}_1}$ – заперечення першого аргументу
$\mathbf{f_{13}}$	1	1	0	1	$\mathbf{x_1 \rightarrow x_2}$ – імплікація від $\mathbf{x_1}$ до $\mathbf{x_2}$
$\mathbf{f_{14}}$	1	1	1	0	$\mathbf{x_1 \mid x_2}$ – штрих Шеффера, логічне «і-не», $\overline{\&}$
$\mathbf{f_{15}}$	1	1	1	1	тотожна $\mathbf{1}$, константа $\mathbf{1}$

4.5 Умовні пріоритети булевих функцій

Кожна булева функція має свій пріоритет при виконанні елементарних функцій.

1. **(...)**
2. **заперечення** $(\overline{....})$
3. $\&, \mid, \downarrow$
4. $\vee, \oplus, \rightarrow, \equiv$

Зауваження. У межах одного пріоритету операції у виразі виконуються ліворуч праворуч.

Наприклад.

Дано функцію $\mathbf{F(x,y,z) = x \equiv y \downarrow z \oplus y \,\&\, (\overline{z \rightarrow x})}$. Скласти таблицю істинності функції 3-х змінних. Зобразити функцію графічно.

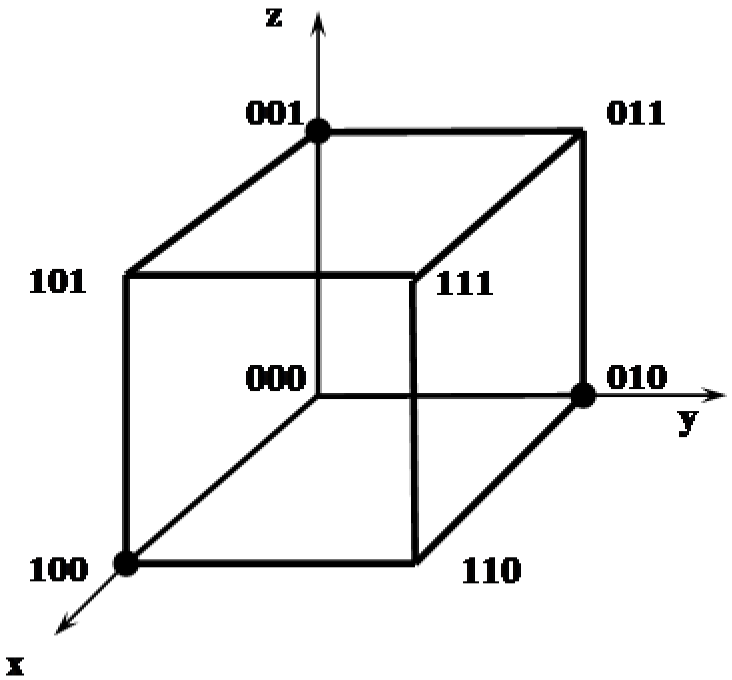
Розв'язання.

Розставимо порядок виконання дій, дотримуючи пріоритетів та сформуємо таблицю істинності функції $\mathbf{F(x,y,z)}$.

$$\mathbf{F(x,y,z) = x \underbrace{\equiv}_{5} y \underbrace{\downarrow}_{3} z \underbrace{\oplus}_{6} y \underbrace{\&}_{4} (\overbrace{\overline{\underbrace{z \rightarrow x}_{1}}}^{2})}$$

№	x	y	z	1 $z \rightarrow x$	2 $\overline{z \rightarrow x}$	3 $y \downarrow z$	4 $y \cdot 2$	5 $x \equiv 3$	F(x,y,z) $5 \oplus 4$
0	0	0	0	1	0	1	0	0	0
1	0	0	1	0	1	0	0	1	1
2	0	1	0	1	0	0	0	1	1
3	0	1	1	0	1	0	1	1	0
4	1	0	0	1	0	1	0	1	1
5	1	0	1	1	0	0	0	0	0
6	1	1	0	1	0	0	0	0	0
7	1	1	1	1	0	0	0	0	0

Зображення функції на кубі:



4.6 Фіктивні аргументи ФАЛ

Дві ФАЛ $\mathbf{f_1(x_1, x_2, ..., x_n)}$ і $\mathbf{f_2(x_1, x_2, ..., x_n)}$ називаються **рівними**, якщо вони приймають однакові значення на всіх можливих наборах аргументів.

ФАЛ називається **істотно залежної від аргументу** $\mathbf{x_i}$, якщо має місце нерівність:

$$\mathbf{f(x_1, x_2, ..., x_{i-1}, 0, x_{i+1}, ..., x_n) \neq}$$
$$\mathbf{\neq f(x_1, x_2, ..., x_{i-1}, 1, x_{i+1}, ..., x_n)}.$$

У протилежному випадку кажуть, що функція **не суттєво** залежить від $\mathbf{x_i}$, тоді $\mathbf{x_i}$ є її **фіктивним аргументом**.

Алгоритм знаходження фіктивних аргументів

Для знаходження фіктивних аргументів ФАЛ задають таблично:

1) розбити множину наборів аргументів ФАЛ на 2 підмножини: $\mathbf{T_0}$ – підмножина наборів аргументів, де ФАЛ приймає значення $\mathbf{0}$, $\mathbf{T_1}$ – підмножина наборів аргументів, де функція приймає значення $\mathbf{1}$.

2) для перевірки фіктивності аргументу $\mathbf{x_i}$ викреслюємо стовпець, що йому відповідає, і перевіряємо, чи не з'явилися у двох підмножинах однакові набори. Якщо такі набори не з'явилися, то $\mathbf{x_i}$ є фіктивним.

Наприклад.

Чи має функція $\mathbf{F(x,y,z) = x \equiv y \downarrow z \oplus y \& (\overline{z \to x})}$ фіктивні аргументи?

Розв'язання.

Таблиця істинності для функції $\mathbf{F(x,y,z)}$ має вигляд.

x	**y**	**z**	**F(x,y,z)**
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	0

Множина $\mathbf{T_0}$:

x	**y**	**z**	**F(x,y,z)**
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	0

Множина $\mathbf{T_1}$:

x	**y**	**z**	**F(x,y,z)**
0	0	1	1
0	1	0	1
1	0	0	1

Якщо викреслити аргумент $\mathbf{x}$ у множині $\mathbf{T_0}$ і $\mathbf{T_1}$, то з'являться однакові набори. Отже, $\mathbf{x}$ не є фіктивним аргументом функції $\mathbf{F(x,y,z)}$. Аналогічно, для аргументів $\mathbf{y}$ і $\mathbf{z}$. У результаті, функція $\mathbf{F(x,y,z)}$ не має фіктивних аргументів.

4.7 Основні закони булевої алгебри для $\{\&,\vee,\neg\}$

Комутативність $x_1 \vee x_2 = x_2 \vee x_1$ $x_1 \,\&\, x_2 = x_2 \,\&\, x_1$	**Властивості констант** $x \vee 1 = 1$ $x \vee 0 = x$ $x \,\&\, 1 = x$ $x \,\&\, 0 = 0$
Асоціативність $x_1 \,\&\, (x_2 \,\&\, x_3) = (x_1 \,\&\, x_2) \,\&\, x_3$ $x_1 \vee (x_2 \vee x_3) = (x_1 \vee x_2) \vee x_3$	**Закони де Моргана** $\overline{x_1 \,\&\, x_2} = \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2$ $\overline{x_1 \vee x_2} = \bar{x}_1 \,\&\, \bar{x}_2$
Дистрибутивність $x_1 \,\&(x_2 \vee x_3) = x_1 \,\& x_2 \vee x_1 \,\& x_3$ $x_1 \vee (x_2 \,\& x_3) = (x_1 \vee x_2) \& (x_1 \vee x_3)$	**Закони поглинання** $x_1 \vee x_1 x_2 = x_1$ $x_1 (x_1 \vee x_2) = x_1$
Закони ідемпотентності $x \vee x = x$ $x \,\&\, x = x$	**Закони склеювання** $x_1 x_2 \vee x_1 \bar{x}_2 = x_1$ $(x_1 \vee x_2) \,\&\, (x_1 \vee \bar{x}_2) = x_1$
Закон заперечення заперечення $\bar{\bar{x}} = x$	**Узагальнене склеювання** $x_1 x_3 \vee x_2 \bar{x}_3 \vee x_1 x_2 = x_1 x_3 \vee x_2 \bar{x}_3$
Закон вилучающого третього $x \vee \bar{x} = 1$	
Закон протиріччя $x \,\&\, \bar{x} = 0$	**Правило викреслювання** $\bar{x}_1 \vee x_1 x_2 = \bar{x}_1 \vee x_2$

4.8 Властивості операцій $\downarrow, \mid, \oplus, \rightarrow$

Властивості імплікації

$x \rightarrow x = 1$
$x \rightarrow \bar{x} = \bar{x}$
$x \rightarrow 1 = 1$
$x \rightarrow 0 = \bar{x}$
$0 \rightarrow x = 1$
$1 \rightarrow x = x$

$x_1 \rightarrow x_2 = \bar{x}_2 \rightarrow \bar{x}_1$
$x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow x_1 = x_1$
$x_1 \vee x_2 = \bar{x}_1 \rightarrow x_2$
$x_1 \& x_2 = \overline{x_1 \rightarrow \bar{x}_2}$

$x_1 \rightarrow x_2 \neq x_2 \rightarrow x_1$
$x_1 \rightarrow (x_2 \rightarrow x_3) \neq (x_1 \rightarrow x_2) \rightarrow x_3$

Властивості додавання за модулем два

$x_1 \oplus x_2 = x_2 \oplus x_1$
$x_1 \oplus (x_2 \oplus x_3) = (x_1 \oplus x_2) \oplus x_3$
$x \oplus x = 0$
$x \oplus 0 = x$
$x \oplus 1 = \bar{x}$
$x \oplus \bar{x} = 1$
$x_1 \vee x_2 = x_1 \oplus x_2 \oplus x_1 x_2$

Властивості функцій Шеффера й стрілки Пірса

$x_1 \mid x_2 = x_2 \mid x_1$
$x_1 \downarrow x_2 = x_2 \downarrow x_1$

$(x_1 \mid x_2) \mid x_3 \neq x_1 \mid (x_2 \mid x_3)$
$(x_1 \downarrow x_2) \downarrow x_3 \neq x_1 \downarrow (x_2 \downarrow x_3)$

$x \mid x = \bar{x}$
$x \mid 1 = \bar{x}$
$x \mid \bar{x} = 1$
$x \mid 0 = 1$

$x \downarrow x = \bar{x}$
$x \downarrow 0 = \bar{x}$
$x \downarrow \bar{x} = 0$
$x \downarrow 1 = 0$

Функції штрих Шеффера і стрілка Пірса зв'язані співвідношеннями аналогічними формулам де Моргана

$x_1 \mid x_2 = \overline{\bar{x}_1 \downarrow \bar{x}_2}$
$x_1 \downarrow x_2 = \overline{\bar{x}_1 \mid \bar{x}_2}$

4.9 Вираз одних елементарних ФАЛ через інші

$$x_1 \to x_2 = \bar{x}_1 \vee x_2$$
$$x_1 \oplus x_2 = \overline{x_1 \equiv x_2} = x_1 \cdot \bar{x}_2 \vee \bar{x}_1 \cdot x_2 = (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2) \cdot (x_1 \vee x_2)$$
$$x_1 \equiv x_2 = x_1 \cdot x_2 \vee \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 = \overline{x_1 \oplus x_2} = (\bar{x}_1 \vee x_2) \cdot (x_1 \vee \bar{x}_2)$$
$$x_1 \cdot x_2 = \overline{\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2}$$
$$x_1 \vee x_2 = \overline{\bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2}$$
$$x_1 \mid x_2 = \overline{x_1 \cdot x_2} = \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2$$
$$x_1 \downarrow x_2 = \overline{x_1 \vee x_2} = \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2$$

4.10 Канонічні способи аналітичного завдання булевих функцій

Розглянемо методи переходу від табличного способу завдання функцій алгебри логіки до канонічних аналітичних способів опису.

4.10.1 Диз'юнктивна та кон'юнктивна нормальні форми

Елементарна кон'юнкція – кон'юнкція, у якій кожна змінна зустрічається не більш одного разу.

Елементарна диз'юнкція – диз'юнкція, у якій кожна змінна зустрічається не більш одного разу.

Диз'юнктивна нормальна форма (ДНФ) – диз'юнкція елементарних кон'юнкцій.

Кон'юнктивна нормальна форма (КНФ) – кон'юнкція елементарних диз'юнкцій.

Наприклад.

Використовуючи закони алгебри логіки перетворити по кроках функцію $\mathbf{F(x,y,z)}$ у ДНФ. Для отриманого результату скласти таблицю істинності.

Розв'язання.

Виконаємо перетворення у ДНФ по кроках.

1. $z \to x = \bar{z} \vee x$.

2. $\overline{\bar{z} \vee x} = \bar{x}z$.

3. $y \downarrow z = \overline{y \vee z} = \bar{y} \cdot \bar{z}$.

4. $\bar{x}z \cdot y = \bar{x}yz$.

5. $x \equiv \bar{y} \cdot \bar{z} = x \cdot \bar{y}\bar{z} \vee \bar{x} \cdot \overline{\bar{y} \cdot \bar{z}} = x\bar{y}\bar{z} \vee \bar{x} \cdot (y \vee z) = x\bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}y \vee \bar{x}z$.

6. $(x\bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}y \vee \bar{x}z) \oplus \bar{x}yz =$

$$= (x\bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}y \vee \bar{x}z) \cdot \overline{\bar{x}yz} \vee \overline{x\bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}y \vee \bar{x}z} \cdot \bar{x}yz =$$

$$= (x\bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}y \vee \bar{x}z) \cdot (x \vee \bar{y} \vee \bar{z}) \vee (\overline{x\bar{y}\bar{z}} \cdot \overline{\bar{x}y} \cdot \overline{\bar{x}z}) \cdot \bar{x}yz =$$

$$= (x \cdot x\bar{y}\bar{z} \vee x \cdot \bar{x}y \vee x \cdot \bar{x}z \vee \bar{y} \cdot x\bar{y}\bar{z} \vee \bar{y} \cdot \bar{x}y \vee \bar{y} \cdot \bar{x}z \vee \bar{z} \cdot x\bar{y}\bar{z} \vee \bar{z} \cdot \bar{x}y \vee \bar{z} \cdot \bar{x}z) \vee$$

$$\vee (\overline{x\bar{y}\bar{z}} \cdot \overline{\bar{x}y} \cdot \overline{\bar{x}z}) \cdot \bar{x}yz = (x\bar{y}\bar{z} \vee x\bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y}z \vee x\bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}y\bar{z}) \vee (\overline{x\bar{y}\bar{z}} \cdot \overline{\bar{x}y} \cdot \overline{\bar{x}z}) \cdot \bar{x}yz =$$

$$= (x\bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y}z \vee \bar{x}y\bar{z}) \vee (\bar{x} \vee y \vee z) \cdot (x \vee \bar{y}) \cdot (x \vee \bar{z}) \cdot \bar{x}yz =$$

$$= (x\bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y}z \vee \bar{x}y\bar{z}) \vee (\bar{x} \vee y \vee z) \cdot (x \vee \bar{y}) \cdot (x \cdot \bar{x}yz \vee \bar{z} \cdot \bar{x}yz) =$$

$$= (x\bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y}z \vee \bar{x}y\bar{z}) \vee (\bar{x} \vee y \vee z) \cdot (x \vee \bar{y}) \cdot 0 = x\bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y}z \vee \bar{x}y\bar{z}.$$

Складемо таблицю істинності для отриманого результату.

Таблиця істинності для **F(x,y,z)**

№	x	y	z	$\bar{x}$	$\bar{y}$	$\bar{z}$	$x\bar{y}\bar{z}$	$\bar{x}\bar{y}z$	$\bar{x}y\bar{z}$	F(x,y,z)
0	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0
1	0	0	1	1	1	0	0	1	0	1
2	0	1	0	1	0	1	0	0	1	1
3	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0
4	1	0	0	0	1	1	1	0	0	1
5	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0
6	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0
7	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0

Останній стовпець цієї таблиці збігається зі стовпцем завдання функції **F(x,y,z)**, отже, переклад у ДНФ вірний.

4.10.2 Диз'юнктивна досконала нормальна форма (ДДНФ)

Нехай $(\mathbf{x_1, x_2, ..., x_n})$ є двійковий набір із номером $\mathbf{i}$, що визначається таким чином: $\mathbf{i = \#(x_1, x_2, ..., x_n) = x_1 \cdot 2^{n-1} + x_2 \cdot 2^{n-2} + ... + x_n \cdot 2^0}$.

Введемо функцію $\mathbf{F_i(x_1, x_2, ..., x_n)}$, що визначається співвідношенням:

$$\mathbf{F_i(x_1, x_2, ..., x_n) = \begin{cases} 1, & \# < x_1, x_2, ..., x_n > = i \\ 0, & \# < x_1, x_2, ..., x_n > \neq i \end{cases}}.$$

Таку функцію будемо називати **характеристична функція одиниці.**

Наприклад.

№	x	y	$\mathbf{F_0(x,y)}$	$\mathbf{F_1(x,y)}$	$\mathbf{F_3(x,y)}$
0	0	0	1	0	0
1	0	1	0	1	0
2	1	0	0	0	0
3	1	1	0	0	1

Теорема 1:

про диз'юнктивне подання ФАЛ

Будь-яка таблично задана ФАЛ $\mathbf{f(x_1, x_2, ..., x_n)}$ (крім тотожного нуля) може бути представлена в наступному аналітичному вигляді:

$$\mathbf{f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = F_{i_1} \vee F_{i_2} \vee ... \vee F_{i_k} = \bigvee_{i_j \in T_1} F_{i_j}}, \qquad (1)$$

тобто як диз'юнкція характеристичних функцій одиниці, взятих на одиничних наборах функції $\mathbf{f(x_1, x_2, ..., x_n)}$.

Подання ФАЛ у виді (1) називається **диз'юнктивним поданням** функції $\mathbf{f(x_1, x_2, ..., x_n)}$.

Доведення.

Візьмемо довільний набір аргументів $(\mathbf{x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*})$ вхідної, таблично заданої ФАЛ $\mathbf{f(x_1, x_2, \ldots, x_n)}$.

Нехай його номер дорівнює $\mathbf{i^* = \#(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)}$. На цьому наборі ФАЛ може бути або $\mathbf{1}$, або $\mathbf{0}$. Розглянемо ці два варіанти.

1) Нехай $\mathbf{f(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*) = 1}$.

Потрібно показати, що і права частина (1) на цьому наборі звертається в $\mathbf{1}$. Так як $\mathbf{\#(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*) = i^*}$, отже, $\mathbf{i^* \in T_1}$. Тому в правій частині (1) існує характеристична функція одиниці з номером: $\mathbf{i^* : F_{i^*} \in \underset{i_j \in T_1}{\vee} F_{i_j}}$. За визначенням, $\mathbf{F_{i^*}(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*) = 1}$, але тоді, за властивостями операції диз'юнкція ($\mathbf{1 \vee x = 1}$), і вся права частина (1) на наборі $\mathbf{i^*}$ звертається в 1:

$$\mathbf{f(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*) = F_{i_1} \vee F_{i_2} \vee ... \vee F_{i^*} \vee ... \vee F_{i_k} = F_{i_1} \vee F_{i_2} \vee ... \vee 1 \vee ... \vee F_{i_k} = 1.}$$

2) Нехай $\mathbf{f(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*) = 0}$.

Потрібно показати, що і права частина (1) на цьому наборі звертається в $\mathbf{0}$. Так як $\mathbf{\#(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*) = i^*}$, отже, $\mathbf{i^* \in T_0}$. Тому в правій частині (1) не існує характеристичної функції одиниці з номером: $\mathbf{i^* : F_{i^*} \notin \underset{i_j \in T_1}{\vee} F_{i_j}}$. Тоді, усі характеристичні функції правої частини (1) на наборі $\mathbf{i^*}$ звертаються в $\mathbf{0}$.

За властивостями операції диз'юнкція вся права частина (1) на наборі $\mathbf{i^*}$ звертається в $\mathbf{0}$ ($\mathbf{0 \vee 0 = 0}$). Так як показано, що ліва і права частина співвідношення (1) збігаються на будь-якому наборі аргументів, отже, теорема 1 доведена.

Слідство із теореми 1

Будь-яка таблично задана ФАЛ логіки $\mathbf{f(x_1, x_2, \ldots, x_n)}$ (крім тотожного нуля) може бути представлена в наступному аналітичному вигляді (2):

$$\mathbf{f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = F_{i_1} \oplus F_{i_2} \oplus ... \oplus F_{i_k} = \underset{i_j \in T_1}{\oplus} F_{i_j}}. \quad (2)$$

Представлення ФАЛ у вигляді (2) – **поліноміальне** подання ФАЛ.

Доведення.

У теоремі 1 використовувалася диз'юнкція характеристичних функцій одиниці. Подивимося, чи не можна замінити операцію диз'юнкція на яку-небудь іншу операцію таким чином, щоб (1) залишалося вірною рівністю. Для цього візьмемо дві різні характеристичні функції одиниці: $\mathbf{F_i \neq F_j \leftrightarrow i \neq j}$.

За визначенням дві характеристичні функції одиниці із різними номерами одночасно (на одному наборі аргументів) не можуть дорівнювати $\mathbf{1}$. Тоді, у якості операції, що замінює диз'юнкцію, може бути вибрана операція, яка співпадає із диз'юнкцією на наборах із номерами **0,1,2** і може відрізнятися на забороненому наборі (що ніколи не може зустрітися) із номером **3**.

З аналізу наступної таблиці видно, що такою операцією є операція "складання за модулем 2".

¹	$\mathbf{F_i}$	$\mathbf{F_j}$	$\mathbf{F_i \vee F_j}$	$\mathbf{F_i\,?\,F_j}$	$\mathbf{F_i \oplus F_j}$
0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	1
2	1	0	1	1	1
3	1	1	1	**?**	0

Теорема 2: про ДДНФ

Будь-яка таблично задана ФАЛ $\mathbf{f(x_1, x_2, \dots, x_n)}$ (крім тотожного нуля) може бути представлена в наступному аналітичному вигляді (3):

$$\mathbf{f(x_1, x_2, ..., x_n) = \bigvee_{T_1} x_1^{\alpha_1} \cdot x_2^{\alpha_2} \cdot ... \cdot x_n^{\alpha_n}} \,. \tag{3}$$

Представлення ФАЛ у вигляді (3) називається **диз'юнктивною досконалою нормальною формою** цієї функції (**ДДНФ**).

Доведення.

Введемо наступні позначення. "**Степенем" аргументу** назвемо:

$$\mathbf{x^{\alpha} = \begin{cases} x, & \alpha = 1 \\ \bar{x}, & \alpha = 0 \end{cases}}.$$

Розглянемо кон'юнкцію виду: $\mathbf{x_1^{\alpha_1} \cdot x_2^{\alpha_2} \cdot ... \cdot x_n^{\alpha_n}}$. (4)

Набір $(\alpha_1^*, \alpha_2^*, ..., \alpha_n^*)$ є двійковим, тому існує рівно 2^n різних таких наборів. Отже, і кон'юнкцій виду (4) існує рівно 2^n. Зіставимо кожній кон'юнкції виду (4) номер, який визначається номером набору: $(\alpha_1^*, \alpha_2^*, ..., \alpha_n^*)$. Тоді, запис $\underset{i \in T_1}{\vee} \left(x_1^{\alpha_1} \cdot x_2^{\alpha_2} \cdot ... \cdot x_n^{\alpha_n}\right)_i$ означає диз'юнкцію усіх кон'юнкцій із номерами з множини T_1.

Покажемо, що $x_i^{\alpha_i} = 1$ тоді і тільки тоді, коли виконується рівність $x_i = \alpha_i$. Це випливає з розгляду 4 можливих випадків:

$$\begin{cases} x_i = 0 \\ \alpha_i = 0 \end{cases} \Rightarrow \ x_i^{\alpha_i} = \bar{x}_i = 1.$$

$$\begin{cases} x_i = 0 \\ \alpha_i = 1 \end{cases} \Rightarrow x_i^{\alpha_i} = x_i = 0.$$

$$\begin{cases} x_i = 1 \\ \alpha_i = 0 \end{cases} \Rightarrow \ x_i^{\alpha_i} = \bar{x}_i = 0.$$

$$\begin{cases} x_i = 1 \\ \alpha_i = 1 \end{cases} \Rightarrow \ x_i^{\alpha_i} = x_i = 1.$$

Таким чином, кон'юнкція $x_1^{\alpha_1} \cdot x_2^{\alpha_2} \cdot ... \cdot x_n^{\alpha_n}$ не звертається в нуль тільки у тому випадку, якщо одночасно виконуються наступні n рівностей:

$$\begin{cases} x_1 = \alpha_1; \\ x_2 = \alpha_2; \\ .... \\ x_n = \alpha_n. \end{cases}$$

З попереднього співвідношення випливає, що:

$$F_i(x_1, x_2, ..., x_n) = x_1^{\alpha_1} \cdot x_2^{\alpha_2} \cdot ... \cdot x_n^{\alpha_n}$$

за умови, що $i = \alpha_1 \cdot 2^{n-1} + \alpha_2 \cdot 2^{n-2} + ... + \alpha_n \cdot 2^0$.

Тоді, на підставі теореми 1 про диз'юнктивне подання ФАЛ маємо: $f(x_1, x_2, ..., x_n) = \underset{T_1}{\vee} x_1^{\alpha_1} \cdot x_2^{\alpha_2} \cdot ... \cdot x_n^{\alpha_n}$, що й потрібно було довести.

Алгоритм переходу від табличного завдання ФАЛ до ДДНФ

1. Вибрати в таблиці завдання ФАЛ усі набори аргументів, на яких функція дорівнює одиниці.

2. Виписати елементарні кон'юнкції, що відповідають цим наборам аргументів. При цьому, якщо аргумент $\mathbf{x_i}$ входить у даний набір як $\mathbf{1}$, він вписується без зміни в кон'юнкцію, що відповідає даному набору. Якщо $\mathbf{x_i}$ входить у даний набір як $\mathbf{0}$, то в кон'юнкцію вписується його заперечення.

3. Отримані елементарні кон'юнкції об'єднуються між собою операцією диз'юнкція.

4.10.3 Кон'юнктивна досконала нормальна форма (КДНФ)

Для отримання канонічного представлення іншого типу, через операцію кон'юнкція, введемо **характеристичну функцію нуля**:

$$\Phi_i(x_1, x_2, ..., x_n) = \begin{cases} 0, & \# < x_1, x_2, ..., x_n > = i \\ 1, & \# < x_1, x_2, ..., x_n > \neq i \end{cases}.$$

Теорема 3: про кон'юнктивне подання ФАЛ

Будь-яка таблично задана функція алгебри логіки $\mathbf{f(x_1, x_2, \dots, x_n)}$ (крім тотожної одиниці) може бути представлена в наступному аналітичному вигляді (5):

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \Phi_{i_1} \wedge \Phi_{i_2} \wedge ... \wedge \Phi_{i_k} = \bigwedge_{i_j \in T_0} \Phi_{i_j}. \qquad (5)$$

тобто як кон'юнкція характеристичних функцій нуля $\mathbf{\Phi_i}$, взятих на нульових наборах функції $\mathbf{f(x_1, x_2, \dots, x_n)}$.

Представлення ФАЛ у вигляді (5) – **кон'юнктивне** подання ФАЛ.

Слідство із теореми 3

Будь-яка таблично задана функція алгебри логіки $\mathbf{f(x_1, x_2, \dots, x_n)}$ (крім тотожної одиниці) може бути представлена в наступному аналітичному вигляді (6):

$$\mathbf{f}\,(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\ldots,\mathbf{x}_n)=\hat{\mathbf{O}}_{i_1}\approx\hat{\mathbf{O}}_{i_2}\approx\ldots\approx\hat{\mathbf{O}}_{i_k}=\underset{i_j\in T_0}{\approx}\hat{\mathbf{O}}_{i_j}. \qquad (6)$$

Перейдемо до аналітичного поданням самих характеристичних функцій.

Теорема 4: про КДНФ

Будь-яка таблично задана ФАЛ $\mathbf{f(x_1,x_2,...,x_n)}$ (крім тотожної одиниці) може бути представлена в наступному аналітичному вигляді:

$$\mathbf{f(x_1,x_2,...,x_n)}=\underset{T_0}{\&}\left(\overline{\mathbf{x}_1^{\alpha_1}}\vee\overline{\mathbf{x}_2^{\alpha_2}}\vee\ldots\vee\overline{\mathbf{x}_n^{\alpha_n}}\right) \qquad (7)$$

Подання ФАЛ у такому виді називається **кон'юнктивною досконалою нормальною формою** цієї функції (**КДНФ**).

Алгоритм переходу від табличного завдання ФАЛ до КДНФ

1. Вибрати в таблиці завдання ФАЛ усі набори аргументів, на яких функція дорівнює нулю.

2. Виписати елементарні диз'юнкції, що відповідають цим наборам аргументів. При цьому, якщо аргумент $\mathbf{x_i}$ входить у даний набір як $\mathbf{0}$, він вписується без зміни в диз'юнкцію, що відповідає даному набору.

Якщо $\mathbf{x_i}$ входить у даний набір як $\mathbf{1}$, то в диз'юнкцію вписується його заперечення.

3. Отримані елементарні диз'юнкції об'єднуються між собою із застосуванням операції кон'юнкція.

Наприклад.

Побудувати ДДНФ та КДНФ для функції $\mathbf{F(x,y,z)}$:

$$\mathbf{F(x,y,z)=x\equiv y\downarrow z\oplus y\,\&\,\overline{(z\rightarrow x)}}.$$

Розв'язання.

Для знаходження ДДНФ вибираємо з таблиці істинності для даної функції тільки ті рядки, що відповідають наборам значень аргументів, на яких функція дорівнює одиниці. Це другий, третій і п'ятий рядки.

Випишемо кон'юнкції, що відповідають обраним рядкам: $\overline{\mathbf{x}}\,\overline{\mathbf{y}}\,\mathbf{z},\ \overline{\mathbf{x}}\,\mathbf{y}\,\overline{\mathbf{z}},\ \mathbf{x}\,\overline{\mathbf{y}}\,\overline{\mathbf{z}}$.

№	x	y	z	F(x,y,z)
0	0	0	0	0
1	0	0	1	1
2	0	1	0	1
3	0	1	1	0
4	1	0	0	1
5	1	0	1	0
6	1	1	0	0
7	1	1	1	0

З'єднуючи ці кон'юнкції операцією диз'юнкція, одержуємо ДДНФ:

$$\mathbf{F(x,y,z) = \overline{x}\,\overline{y}\,z \ \vee\ \overline{x}\,y\,\overline{z} \ \vee\ x\,\overline{y}\,\overline{z}}.$$

Для знаходження КДНФ вибираємо з таблиці тільки ті рядки, у яких розташовано набори значень аргументів, на яких функція дорівнює нулю.

Випишемо відповідні диз'юнкції й з'єднаємо їх знаками кон'юнкції:

$$\mathbf{F(x,y,z) = (x \vee y \vee z)\cdot(x \vee \overline{y} \vee \overline{z})\cdot(\overline{x} \vee y \vee \overline{z})\cdot(\overline{x} \vee \overline{y} \vee z)\cdot(\overline{x} \vee \overline{y} \vee \overline{z})}.$$

4.10.4 Повні системи ФАЛ

Система ФАЛ $\{\mathbf{f_1, f_2, ..., f_n}\}$ називається **повної в деякому класі функцій,** якщо будь-яка функція із цього класу може бути представлена суперпозицією цих функцій.

Система ФАЛ, що є повної в деякому класі функцій, називається **базисом.**

Мінімальним базисом називається такий базис, для якого видалення хоча б однієї з функцій $\mathbf{f_i}$, які його утворять, перетворює цю систему функцій у неповну.

Будь-яка функція може бути представлена за допомогою елементарних функцій $\{\neg, \&, \vee\}$. Ця система ФАЛ утворить **універсальний базис**.

Найбільш популярними в алгебрі логіки є базиси $\{\neg,\vee\},\{\neg,\&\},\{\downarrow\},\{|\}$, які є мінімальними.

Наприклад.

Представити функцію $\mathbf{F(x,y,z)=x\equiv y\downarrow z\oplus y\,\&\,(\overline{z\to x})}$ в базисах $\{\neg,\vee\}$, $\{\neg,\&\}$, $\{|\}$. Для перевірки результату скласти таблицю істинності.

Розв'язання.

Для представлення функції $\mathbf{F(x,y,z)}$ у базисі $\{\neg,\vee\}$ застосуємо закони заперечення заперечення та де Моргана до кожної кон'юнкції ДДНФ функції:

$$\mathbf{F(x,y,z)=\overline{\overline{x\,\bar y\,\bar z}}\vee\overline{\overline{\bar x\,\bar y\,z}}\vee\overline{\overline{\bar x\,y\,\bar z}}=\overline{\bar x\vee y\vee z}\vee\overline{x\vee y\vee\bar z}\vee\overline{x\vee\bar y\vee z}}.$$

Для представлення функції $\mathbf{F(x,y,z)}$ у базисі $\{\neg,\&\}$ застосуємо закони заперечення заперечення та де Моргана в цілому до ДДНФ:

$$\mathbf{F(x,y,z)=\overline{\overline{x\bar y\bar z\vee\bar x\,\bar y\,z\vee\bar x\,y\,\bar z}}=\overline{\overline{x\bar y\bar z}\cdot\overline{\bar x\,\bar y\,z}\cdot\overline{\bar x\,y\,\bar z}}}.$$

Для представлення функції у базисі $\{|\}$ застосуємо наступні співвідношення до ДДНФ функції:

$$\mathbf{x\cdot y=\overline{x\,|\,y}}$$

$$\mathbf{x\vee y=\bar x\,|\,\bar y}.$$

$$\mathbf{\bar x=x\,|\,x}$$

Позначимо $\mathbf{F(x,y,z)=\underbrace{x\bar y\bar z}_{\Downarrow \atop \bar A}\vee\underbrace{\bar x\bar y z}_{\Downarrow \atop \bar B}\vee\underbrace{\bar x y\bar z}_{\Downarrow \atop \bar C}}$

Виконаємо переклад у базис $\{|\}$ по діях.

1. $\mathbf{\bar A=(x\,\bar y)\,\bar z=\overline{(x\,|\,\bar y)}\,\bar z=\overline{\overline{x\,|\,\bar y}\,|\,\bar z}=[(x\,|\,(y\,|\,y))\,|\,(x\,|\,(y\,|\,y))\,|\,(z\,|\,z)]\,|}$
$\mathbf{|\,[(x\,|\,(y\,|\,y))\,|\,(x\,|\,(y\,|\,y))\,|\,(z\,|\,z)]}$.

2. $\mathbf{\bar B=(\bar x\cdot\bar y)\,z=\overline{\overline{\bar x\,|\,\bar y}\,|\,z}=[((x\,|\,x)\,|\,(y\,|\,y))\,|\,((x\,|\,x)\,|\,(y\,|\,y))\,|\,z]\,|}$
$\mathbf{|\,[((x\,|\,x)\,|\,(y\,|\,y))\,|\,((x\,|\,x)\,|\,(y\,|\,y))\,|\,z]}$.

3. $\mathbf{\bar C=\bar x\,y\,\bar z=\overline{\overline{\bar x\,|\,y}\,|\,\bar z}=[((x\,|\,x)\,|\,y)\,|\,((x\,|\,x)\,|\,y)\,|\,(z\,|\,z)]\,|}$
$\mathbf{|\,[((x\,|\,x)\,|\,y)\,|\,((x\,|\,x)\,|\,y)\,|\,(z\,|\,z)]}$.

$$\mathbf{F(x,y,z) = (\overline{A} \vee \overline{B}) \vee \overline{C} = (A\,|\,B) \vee \overline{C} = \overline{A\,|\,B}\,|\,C = [(A\,|\,B)\,|\,(A\,|\,B)]\,|\,C}.$$

Перевіримо перетворення з використанням таблиці істинності:

$$\mathbf{\overline{A} = \overbrace{\overbrace{[\underbrace{\underbrace{(x\,|\,\underbrace{(y\,|\,y)}_{1})}_{2}\,|\,(x\,|\,(y\,|\,y))}_{3}\,|\,\underbrace{(z\,|\,z)}_{4}]}^{5}\,|\,[(x\,|\,(y\,|\,y))\,|\,(x\,|\,(y\,|\,y))\,|\,(z\,|\,z)]}^{6}}$$

Таблиця істинності для виразу $\mathbf{\overline{A}}$.

№	x	y	z	1	2	3	4	5	6	$\mathbf{x\,\overline{y}\,\overline{z}}$
0	0	0	0	1	1	0	1	1	0	0
1	0	0	1	1	1	0	0	1	0	0
2	0	1	0	0	1	0	1	1	0	0
3	0	1	1	0	1	0	0	1	0	0
4	1	0	0	1	0	1	1	0	1	1
5	1	0	1	1	0	1	0	1	0	0
6	1	1	0	0	1	0	1	1	0	0
7	1	1	1	0	1	0	0	1	0	0

Аналогічно, перевіряємо $\mathbf{\overline{B}}$ й $\mathbf{\overline{C}}$.

Для перевірки, побудуємо таблицю істинності для отриманої форми функції $\mathbf{F(x,y,z)}$:

$$\mathbf{F(x,y,z) = (\overline{A} \vee \overline{B}) \vee \overline{C} = (A\,|\,B) \vee \overline{C} = \overline{A\,|\,B}\,|\,C = [(A\,|\,B)\,|\,(A\,|\,B)]\,|\,C}.$$

Таблиця істинності для $\mathbf{F(x,y,z)}$

№	x	y	z	$\mathbf{\overline{A}}$	$\mathbf{\overline{B}}$	$\mathbf{\overline{C}}$	A	B	C	$\mathbf{A\,|\,B}$	$\mathbf{\overline{A\,|\,B}}$	$\mathbf{\overline{A\,|\,B}\,|\,C}$
0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0	1	0
1	0	0	1	0	1	0	1	0	1	1	0	1
2	0	1	0	0	0	1	1	1	0	0	1	1
3	0	1	1	0	0	0	1	1	1	0	1	0
4	1	0	0	1	0	0	0	1	1	1	0	1
5	1	0	1	0	0	0	1	1	1	0	1	0
6	1	1	0	0	0	0	1	1	1	0	1	0
7	1	1	1	0	0	0	1	1	1	0	1	0

Стовбці, що відповідають функції $\mathbf{F(x,y,z)}$ у таблицях істинності рівні, отже, перетворення виконані правильно.

4.11 Методи мінімізації функцій алгебри логіки

4.11.1 Основні визначення

Буква – змінна або її заперечення.

Елементарна кон'юнкція – кон'юнкція, у якій кожна буква зустрічається не більш одного разу.

Диз'юнктивна нормальна форма (**ДНФ**) – диз'юнкція елементарних кон'юнкцій.

Ранг елементарної кон'юнкції – кількість букв, що її утворюють.

Диз'юнктивна досконала нормальна форма (ДДНФ) – диз'юнктивна нормальна форма, що складається з кон'юнкцій рангу **n,** де **n –** кількість змінних**.**

Довжина ДНФ (L) – число кон'юнкцій, які її утворюють.

Найкоротша ДНФ – диз'юнктивна нормальна форма, що має найменшу довжину **L** у порівнянні з іншими диз'юнктивними нормальними формами, еквівалентними даній функції.

Сумарний ранг ДНФ(R) – сума рангів кон'юнкцій, що складають ДНФ.

Мінімальна ДНФ – диз'юнктивна нормальна форма, що має найменший сумарний ранг **R** у порівнянні з іншими ДНФ, еквівалентними даної функції.

4.11.2 Мінімізація ФАЛ на кубі

Розглянемо проблему мінімізації для геометричного способу завдання функції алгебри логіки на одиничному багатовимірному кубі. Зіставимо різним геометричним елементам куба (вершинам, ребрам, граням й кубу) кон'юнкції різних рангів.

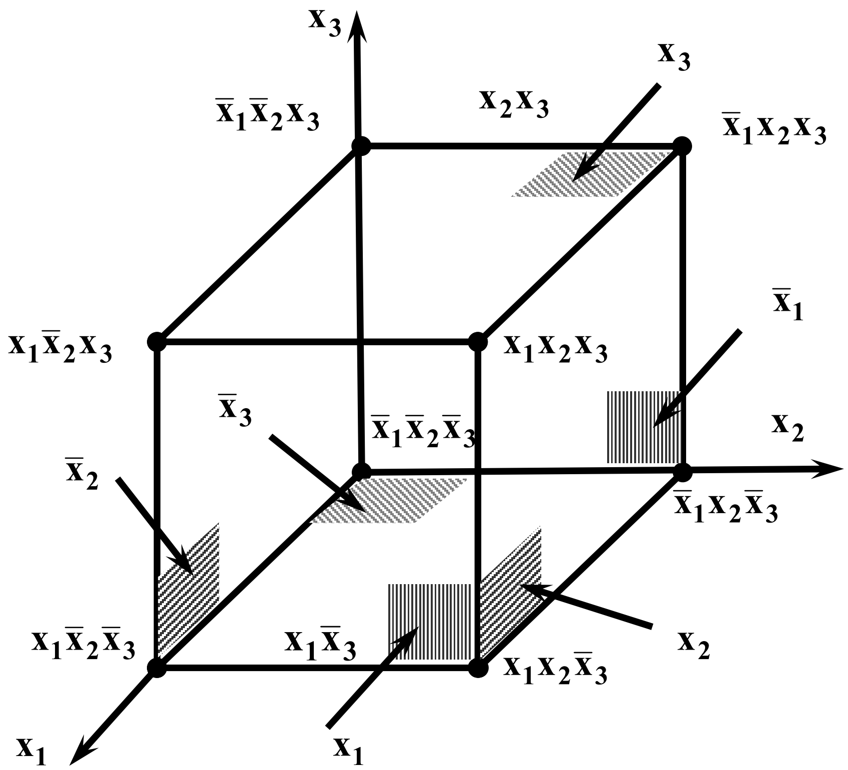
Зауваження.

1) Сума розмірності геометричного еквівалента й рангу кон'юнкції, йому відповідної дорівнює числу аргументів функції алгебри логіки.

2) Кожний геометричний елемент меншої розмірності покривається геометричними елементами більшої розмірності.

3) Кожна кон'юнкція більшого рангу покривається всіма кон'юнкціями меншого рангу.

Геометричні еквіваленти куба називають **інтервалами.**



Інтервал L-го рангу – це така підмножина вершин куба, що відповідають кон'юнкції рангу **L**.

Наприклад кон'юнкції $\mathbf{x_1}$ відповідає чотири вершини: **100,101,110,111**.

На кубі відзначають вершини, де ФАЛ дорівнює **1**. Ці вершини утворюють підмножину $\mathbf{T_1}$. Для того, щоб задати ДНФ на кубі, необхідно задати покриття всіх вершин.

Максимальний інтервал J – інтервал, для якого не існує ніякого іншого інтервалу **J’** з рангом менше, ніж в **J**, і такого, що виконується наступне співвідношення $\mathbf{J \subset J' \subset T_1}$.

Наприклад.

Нехай є функція $\mathbf{f(x_1, x_2, x_3)}$ задана множиною $\mathbf{T_1 = \{3,4,5,6,7\}}$.

ДДНФ $\mathbf{f(x_1, x_2, x_3) = x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee x_1\bar{x}_2x_3 \vee x_1x_2\bar{x}_3 \vee x_1x_2x_3 \vee \bar{x}_1x_2x_3}$.

Ранг ДДНФ дорівнює **15**.

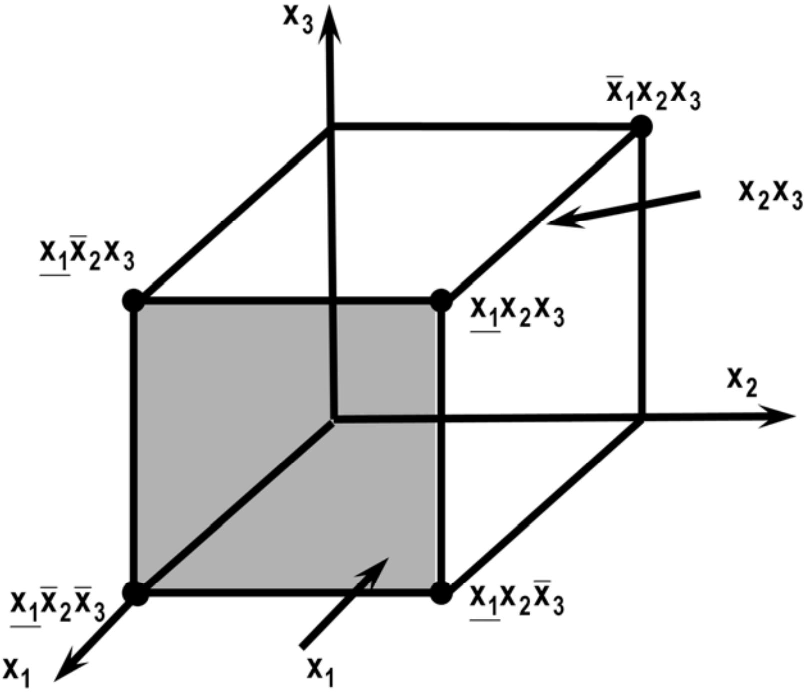
Визначимо множину інтервалів:

$\mathbf{J_1 = x_1, J_2 = x_1 x_2, J_3 = x_2 x_3}$.

Ранг $\mathbf{J_1}$ дорівнює **1**, а для інтервалів $\mathbf{J_2}$ та $\mathbf{J_3}$ ранг дорівнює двом.

Інтервали $\mathbf{J_1}$ та $\mathbf{J_3}$ є максимальними, а інтервал $\mathbf{J_2}$ не є максимальним, бо $\mathbf{J_2 \subset J_1 \subset T_1}$ і ранг $\mathbf{J_1}$ менше рангу $\mathbf{J_2}$.

На рисунку відзначено максимальні інтервали.



Скорочена ДНФ (СДНФ) – диз'юнктивна нормальна форма, що відповідає покриттю множини $\mathbf{T_1}$ всіма максимальними інтервалами.

Мінімальна ДНФ виходить зі скороченої диз'юнктивної нормальної форми шляхом викидання з покриття множини $\mathbf{T_1}$ максимальними інтервалами деяких “зайвих” інтервалів.

Задача про мінімізацію ФАЛ розглядається як задача про знаходження мінімальної ДНФ. Необхідно знайти покриття множини $\mathbf{T_1}$, при якому $\mathbf{R}$ буде мінімальним:

$$\mathbf{R} = \sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{n}} \mathbf{r_i} \, ,$$

де $\mathbf{r_i}$ – ранги всіх інтервалів, що утворюють покриття для даної ФАЛ.

Пункти розв'язання задачі про мінімізацію ФАЛ

1. Побудова скороченої диз'юнктивної нормальної форми, СДНФ, для заданої функції алгебри логіки.

2. Викидання із СДНФ "зайвих" максимальних інтервалів.

Наприклад.

1) Задано ФАЛ множиною $\mathbf{T_1 = \{0,2,5,6\}}$.

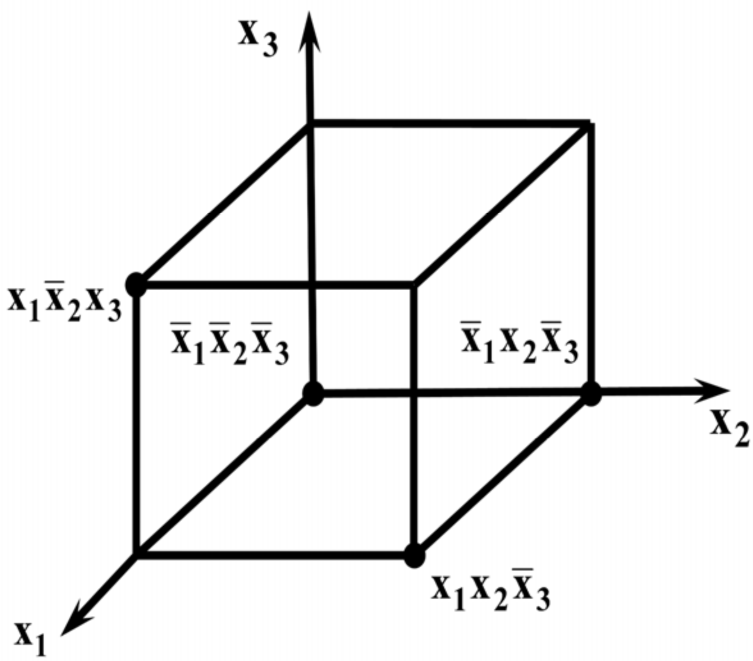
Знайти ДДНФ, СДНФ та МДНФ.

Розв'язання.

ДДНФ $\mathbf{f_1(x_1,x_2,x_3) = \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1x_2\bar{x}_3 \vee x_1\bar{x}_2x_3 \vee x_1x_2\bar{x}_3}$, **R=12.**

Для заданої функції скорочена форма співпадає із мінімальною, бо усі максимальні інтервали є необхідними, тобто нема інтервалу, який можна було б видалити.

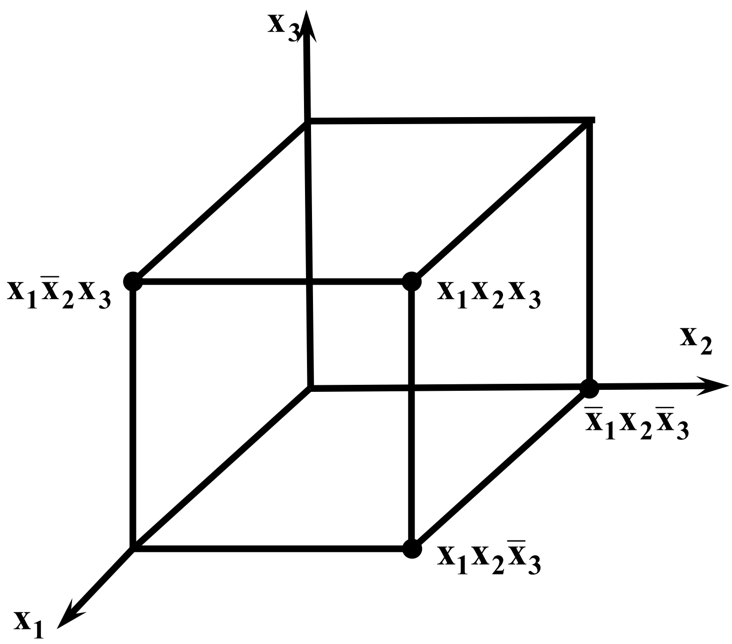
СДНФ=МДНФ $\mathbf{f_1(x_1,x_2,x_3) = \bar{x}_1\bar{x}_3 \vee x_2\bar{x}_3 \vee x_1\bar{x}_2x_3}$, **R=7.**



2) Задано ФАЛ множиною $\mathbf{T_1 = \{2,5,6,7\}}$.

Знайти ДДНФ, СДНФ та МДНФ.

Розв'язання.



ДДНФ $\mathbf{f(x_1,x_2,x_3)=\bar{x}_1x_2\bar{x}_3 \vee x_1x_2x_3 \vee x_1x_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1x_2\bar{x}_3}$, $\mathbf{R=12}$.

СДНФ $\mathbf{f(x_1,x_2,x_3)=x_1x_2 \vee x_1x_3 \vee x_2\bar{x}_3}$, $\mathbf{R=6}$.

Інтервал $\mathbf{x_1x_2}$ є зайвим, бо він сам по собі не покриває жодної одиниці із завдання ФАЛ.

МДНФ $\mathbf{f(x_1,x_2,x_3)=x_1x_3 \vee x_2\bar{x}_3}$, $\mathbf{R=4}$.

3) Задано ФАЛ множиною $\mathbf{T_1=\{1,2,3,4,5,6,7\}}$.

Знайти ДДНФ, СДНФ та МДНФ.

Розв'язання.

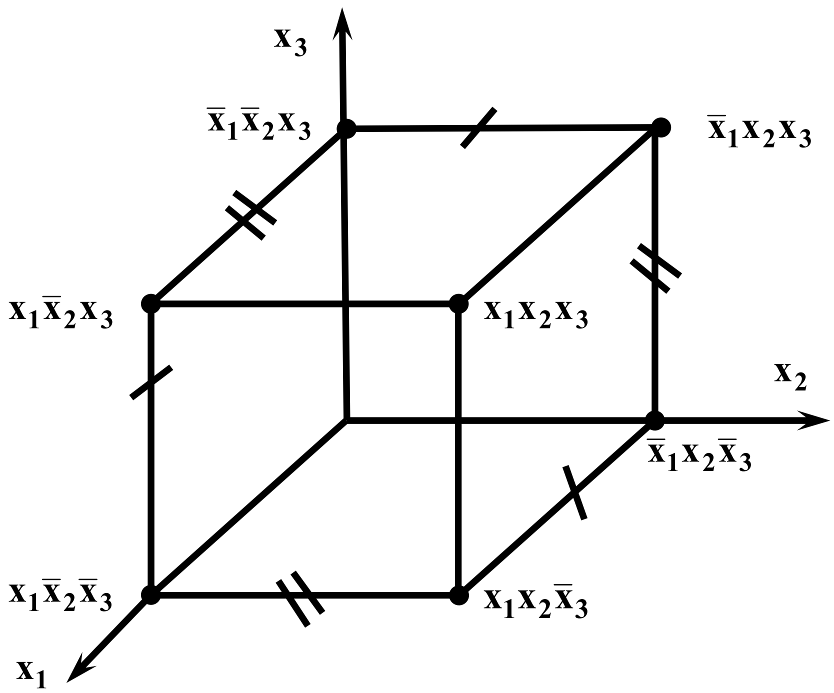
ДДНФ $\mathbf{f(x_1,x_2,x_3)=\bar{x}_1\bar{x}_2x_3 \vee \bar{x}_1x_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1x_2x_3 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee x_1\bar{x}_2x_3 \vee}$
$\mathbf{\vee\, x_1x_2\bar{x}_3 \vee x_1x_2x_3}$, $\mathbf{R=21}$.

СДНФ $\mathbf{f(x_1,x_2,x_3)=x_1\bar{x}_2 \vee \bar{x}_2x_3 \vee \bar{x}_1x_3 \vee \bar{x}_1x_2 \vee x_2\bar{x}_3 \vee x_1\bar{x}_3}$, $\mathbf{R=12}$.

Мінімальна форма неоднозначна, тому що може бути кілька мінімальних форм. У даному випадку ФАЛ має дві різні мінімальні диз'юнктивні форми, вочевидь, що сумарний ранг цих форм однаковий і дорівнює $\mathbf{R=6}$.

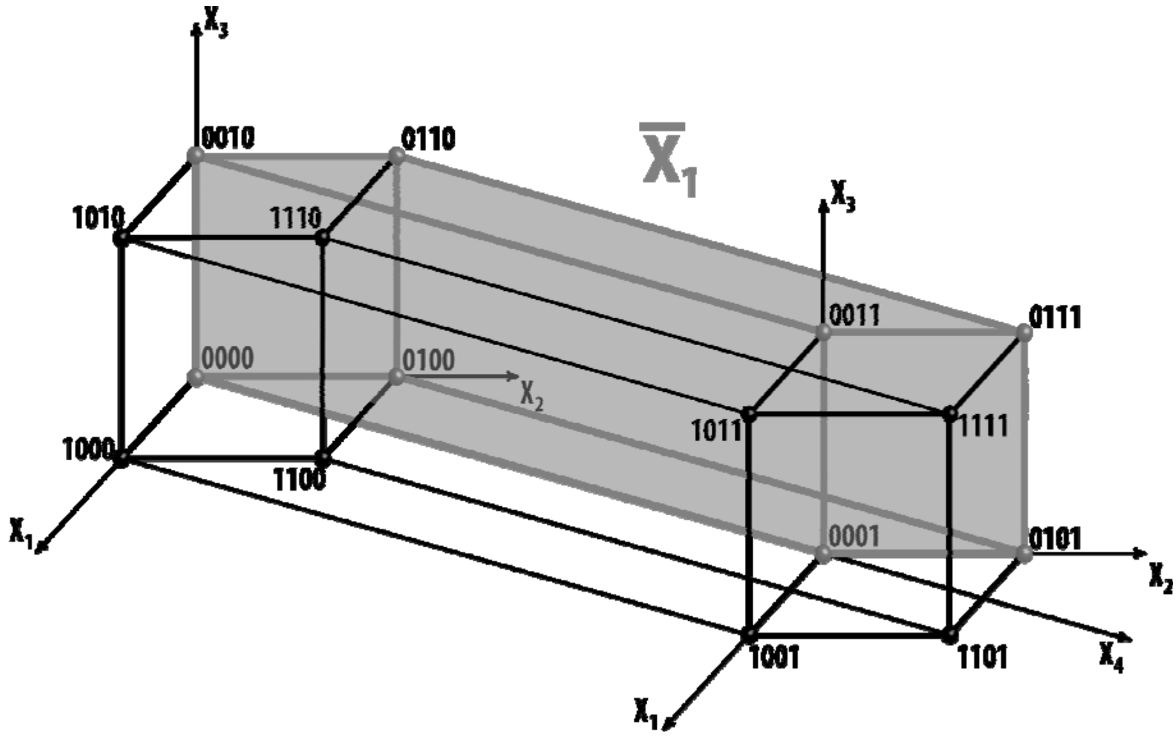
МДНФ1 $\mathbf{f(x_1,x_2,x_3)=x_1\bar{x}_2 \vee \bar{x}_1x_3 \vee x_2\bar{x}_3}$, $\mathbf{R=6}$.

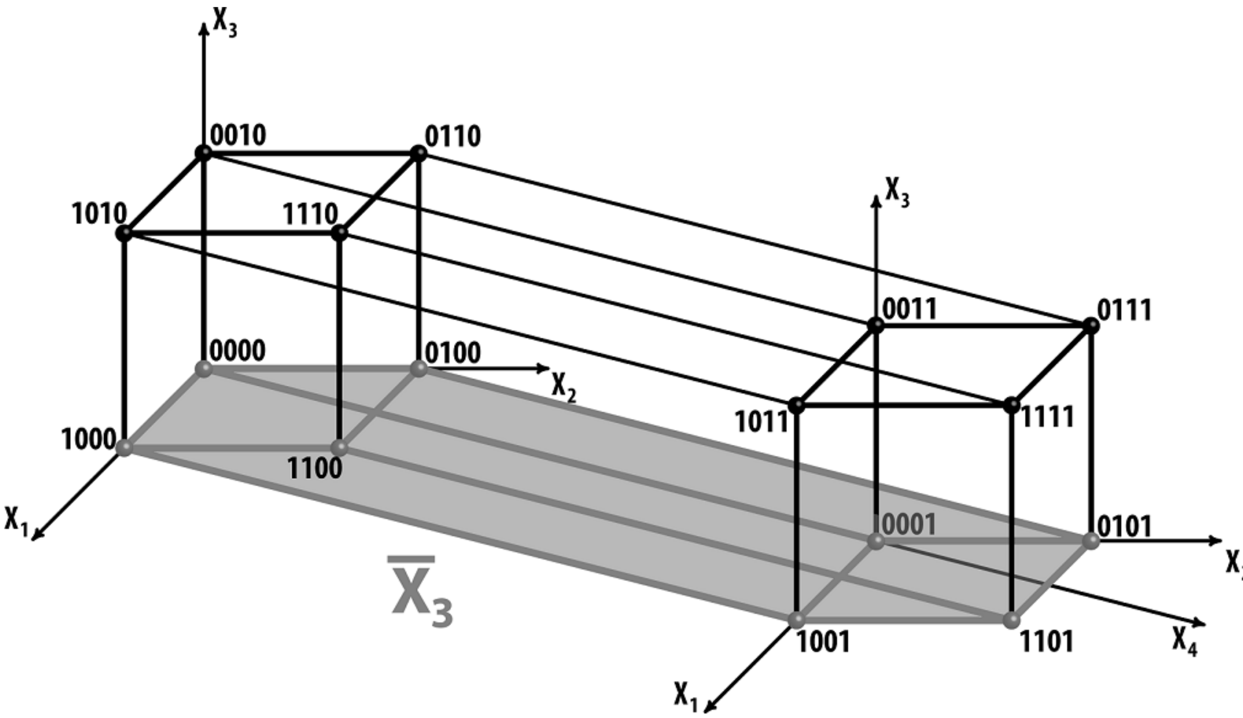
МДНФ2 $\mathbf{f(x_1, x_2, x_3) = \bar{x}_2 x_3 \vee \bar{x}_1 x_2 \vee x_1 \bar{x}_3}$, $\mathbf{R = 6}$.

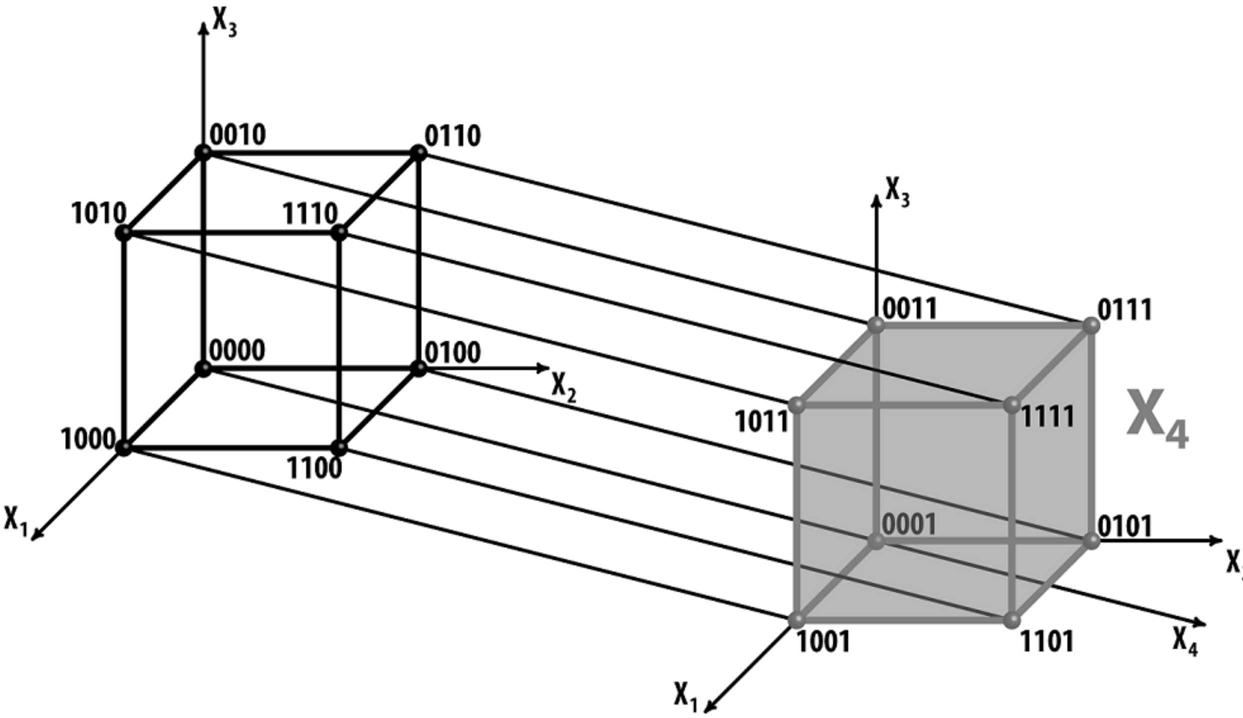


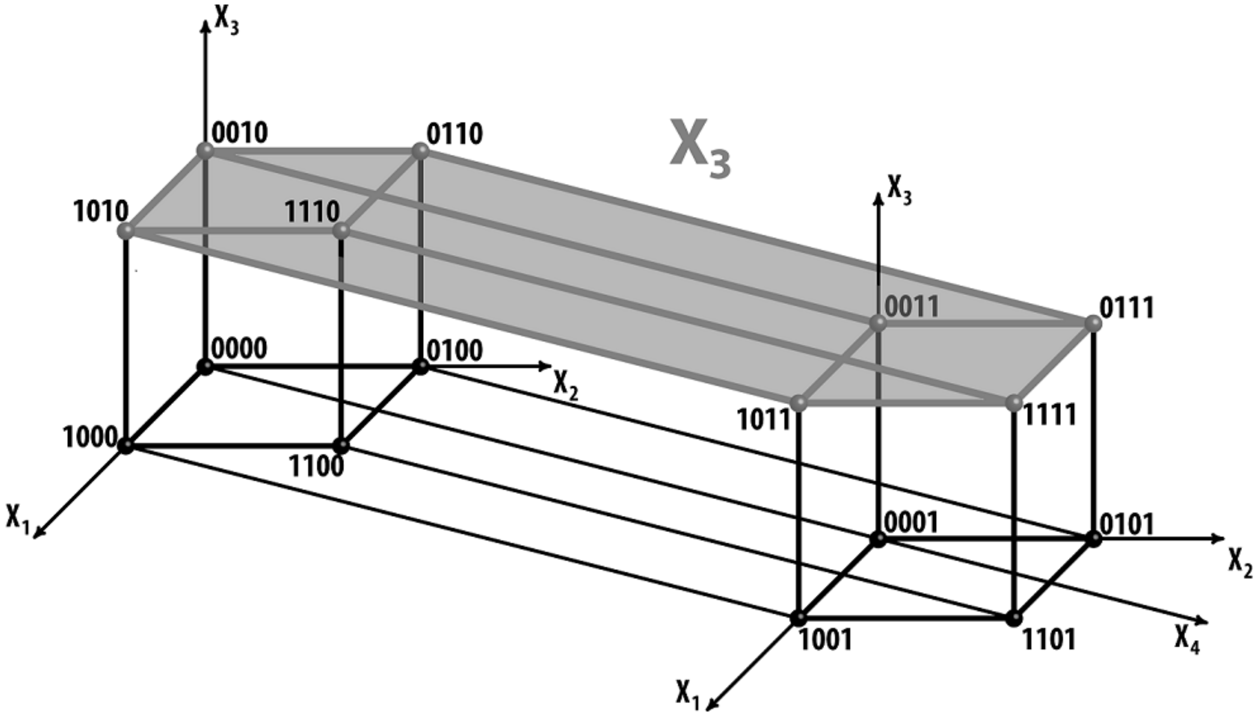
Мінімізація у чотиривимірному просторі

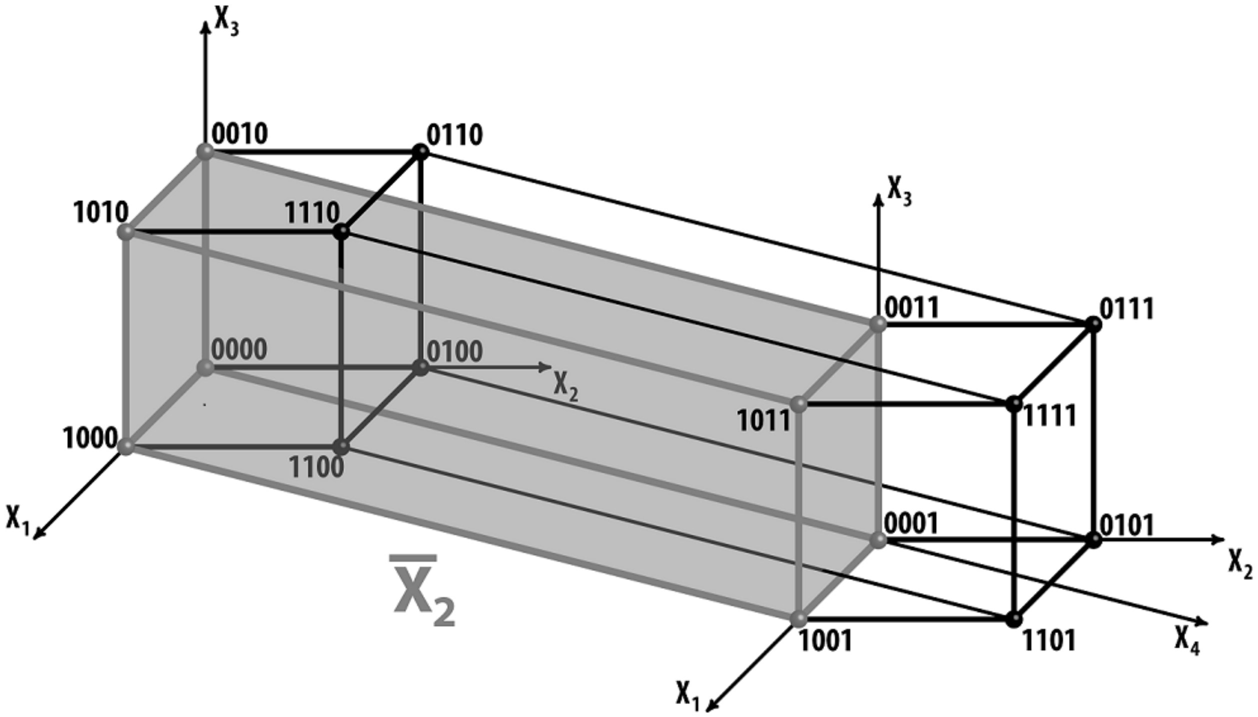
Наступні рисунки ілюструють принципи мінімізації на чотирьохвимірному кубі.




X3
0010
0110
1010
1110
0000
0100
X2
1000
1100
X1
X3
0011
0111
1011
1111
0001
0101
X2
1001
1101
X4
X1
X̄3


X3
0010
0110
1010
1110
0000
0100
X2
1000
1100
X1
X3
0011
0111
1011
1111
X4
0001
0101
X2
1001
1101
X4
X1


X_3
0010
0110
1010
1110
0000
0100
1000
1100
X_1
X_2
X_3
0011
0111
1011
1111
0001
0101
1001
1101
X_1
X_2
X_4


X_3
0010
0110
1010
1110
0000
0100
1000
1100
X_1
X_2
X_3
0011
0111
1011
1111
0001
0101
1001
1101
X_1
X_2
X_4
$\overline{X}_2$

Наприклад.

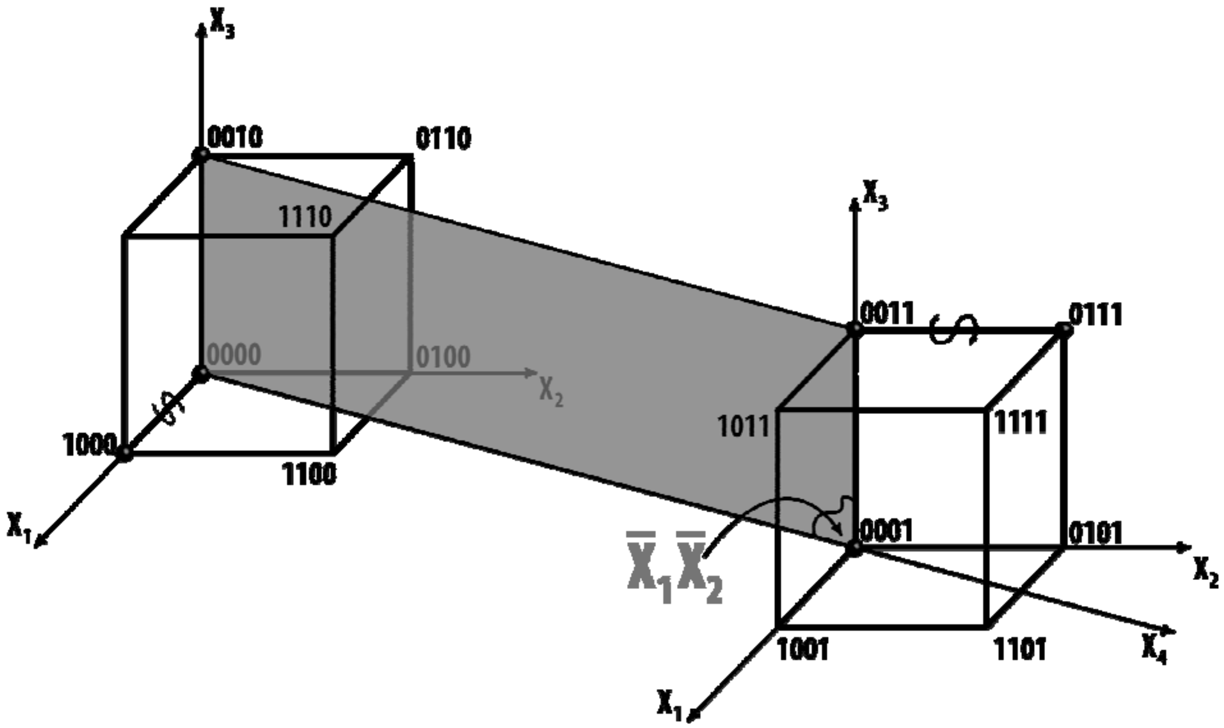
1) ФАЛ задано множиною $\mathbf{T_1 = \{0,1,2,3,7,8\}}$.

Знайти ДДНФ, СДНФ та МДНФ.

Розв'язання.

ДДНФ $\mathbf{f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 x_4 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2 x_3\bar{x}_4 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2 x_3 x_4 \vee}$
$\mathbf{\vee\ \bar{x}_1 x_2 x_3 x_4 \vee x_1 x_2 x_3 \bar{x}_4,\ R = 24.}$

СДНФ=МДНФ $\mathbf{f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \bar{x}_1\bar{x}_2 \vee \bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4 \vee \bar{x}_1 x_3 x_4, R = 8}$.



2) Задано ФАЛ множиною $\mathbf{T_1 = \{0,2,3,7,8,10,11,15\}}$.

Знайти ДДНФ, СДНФ та МДНФ.

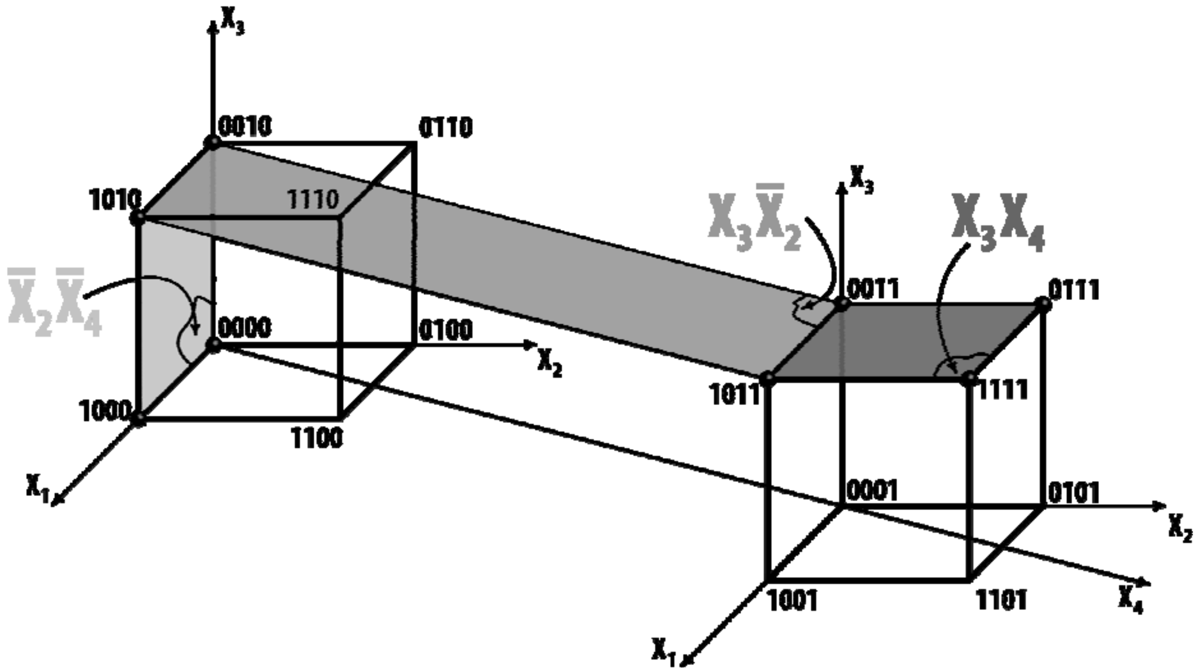
Розв'язання.

ДДНФ $\mathbf{f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2 x_3\bar{x}_4 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2 x_3 x_4 \vee \bar{x}_1 x_2 x_3 x_4 \vee}$
$\mathbf{\vee\ x_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4 \vee x_1\bar{x}_2 x_3\bar{x}_4 \vee x_1 x_2 x_3 x_4,\ R = 28.}$

СДНФ $\mathbf{f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \bar{x}_2\bar{x}_4 \vee \bar{x}_2 x_3 \vee x_3 x_4, R = 6}$.

МДНФ $\mathbf{f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \bar{x}_2\bar{x}_4 \vee x_3 x_4, R = 4}$.

Інтервал $\overline{x}_2 x_3$ є зайвим, бо всі одиниці, що він покриває, вже покриті іншими інтервалами.



4.11.3 Метод Квайна мінімізації булевих функцій

Припустимо, що булева функція задана в ДДНФ. Елементарні кон'юнкції рангу $\mathbf{n}$ будемо називати **мінітермами рангу** $\mathbf{n}$.

Крок 1. Знаходження первинних імплікант.

Усі мінітерми заданої ФАЛ порівнюються між собою попарно на предмет склеювання. Якщо мінітерми $\mathbf{m_i}$ та $\mathbf{m_j}$ такі, що їх можна попарно представити у вигляді $\mathbf{a\overline{x}_i \vee ax_i}$, то виписується кон'юнкція $\mathbf{ax_i \vee a\overline{x}_i = \grave{a}}$, що є мінітермом рангу $\mathbf{n-1}$. Мінітерми $\mathbf{n}$-го рангу, для яких відбулося склеювання відзначаються ($\ast$).

Після побудови усіх мінітермів $\mathbf{(n-1)}$-го рангу знову порівнюють їх попарно, виписують мінітерми $\mathbf{(n-2)}$-го рангу й відзначають мінітерми, що склеюються, і т.д. Етап закінчується, коли знову отримані мінітерми $\mathbf{j}$-го рангу вже не склеюються між собою.

Усі невідмічені мінітерми називаються **первинними** або **простими імплікантами**.

Зауваження: якщо у кінці першого етапу зосталися невідмічені мінітерми рангу $\mathbf{n}$, то їх можна зразу виписати у мінімальну форму, бо далі вони будуть тільки ускладнювати виконання алгоритму.

Для заданої функції алгебри логіки перший етап закінчується побудовою СДНФ:

$$\mathbf{f(x_1, x_2, ..., x_n) = \bigcup_i \lambda_i},$$

де $\boldsymbol{\lambda_i}$ є первинними імплікантами.

Крок 2. Формування імплікантної таблиці

Для знаходження мінімального покриття інтервалами максимального рангу необхідно зробити викидання деякої кількості первинних імплікант.

На етапі розміщення міток складається таблиця, число рядків у якій дорівнює числу первинних імплікант, число стовпців дорівнює числу мінітермів ДДНФ.

Якщо в мінітерм ДДНФ входить який-небудь із первинних імплікант, то на перетинанні відповідного стовпця й рядка ставимо мітку.

Крок 3. Знаходження істотних імплікант.

Якщо в стовпці розташована всього одна мітка, то відповідна імпліканта – **істотна**. Істотна імпліканта не може бути виключена із правої частини (1), тому що без її не буде отримане покриття всього множини $\mathbf{T_1}$ даної функції. Тому з таблиці міток виключаємо рядка, що відповідають істотним імплікантам, і стовпці мінітермів, що покриваються ними.

Крок 4. Викреслювання зайвих стовпців.

Якщо в таблиці є два стовпці з мітками в однакових рядках, то один з них викреслюється (тому що покриття одного забезпечує й покриття іншого).

Крок 5. Викреслювання зайвих первинних імплікант.

Якщо після етапу 4 у таблиці є рядка без єдиної мітки, то вони викреслюються.

Даний крок виповнюється за рахунок повного перебору усіх можливих варіантів. Досліджується отримана таблиця, вибирається така сукупність первинних імплікант, що включає мітки у всіх стовпцях (принаймні по 1 у кожному стовпці). При декількох варіантах віддається перевага варіанту покриття з мінімальним сумарним числом букв у простих імплікантах. Якщо маємо декілька варіантів покриття із однаковим мінімальним сумарним рангом, то задана ФАЛ має декілька мінімальних форм.

Наприклад.

Знайти мінімальну ДНФ функції алгебри логіки $\mathbf{f(x_1,x_2,x_3,x_4):T_1=\{3,4,5,7,9,11,12,13\}}$.

Розв'язання.

ДДНФ для заданої ФАЛ:

$$\mathbf{f(x_1,x_2,x_3,x_4)=\bar{x}_1\bar{x}_2x_3x_4 \vee \bar{x}_1\tilde{o}_2\bar{x}_3\bar{x}_4 \vee \tilde{o}_1x_2\bar{x}_3x_4 \vee \tilde{o}_1x_2x_3x_4 \vee}$$
$$\mathbf{\vee\, x_1\bar{x}_2\bar{x}_3x_4 \vee x_1\bar{x}_2x_3x_4 \vee x_1x_2\bar{x}_3\bar{x}_4 \vee x_1x_2\bar{x}_3x_4,}$$
$$\mathbf{R=32.}$$

1. Визначимо первинні імпліканти для заданої ФАЛ.

Для цього виконаємо порівняння кожного мінітерму рангу 4 із кожним іншим мінітермом ДДНФ на предмет склеювання. Ті мінітерми, що склеювались відмітимо зіркою.

$$\mathbf{3:\bar{x}_1\bar{x}_2x_3x_4\ *} \qquad \mathbf{9:x_1\bar{x}_2\bar{x}_3x_4\ *}$$
$$\mathbf{4:\bar{x}_1\tilde{o}_2\bar{x}_3\bar{x}_4\ *} \qquad \mathbf{B:x_1\bar{x}_2x_3x_4\ *}$$
$$\mathbf{5:\tilde{o}_1x_2\bar{x}_3x_4\ *} \qquad \mathbf{C:x_1x_2\bar{x}_3\bar{x}_4\ *}$$
$$\mathbf{7:\bar{x}_1x_2x_3x_4\ *} \qquad \mathbf{D:x_1x_2\bar{x}_3x_4\ *}$$

Мінітерми 3 рангу:

$$\mathbf{\bar{x}_1x_3x_4}$$
$$\mathbf{\bar{x}_2x_3x_4}$$
$$\mathbf{\bar{x}_1x_2\bar{x}_3\ *}$$
$$\mathbf{x_2\bar{x}_3\bar{x}_4\ *}$$
$$\mathbf{\bar{x}_1x_2x_4}$$
$$\mathbf{x_2\bar{x}_3x_4\ *}$$
$$\mathbf{x_1\bar{x}_2x_4}$$
$$\mathbf{x_1\bar{x}_3x_4}$$
$$\mathbf{x_1x_2\bar{x}_3\ *}$$

Мінітерми 2 рангу: $x_2\bar{x}_3$.

Подальше склеювання неможливо, тому СДНФ для заданої ФАЛ:

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4) = x_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_2x_3x_4 \vee \bar{x}_1x_3x_4 \vee \bar{x}_1x_2x_4 \vee x_1\bar{x}_2x_4 \vee x_1\bar{x}_3x_4.$$

$R = 17$.

Переходимо до другого кроку алгоритму Квайна.

2. Таблиця міток для ФАЛ.

	3	4	5	7	9	B	C	D
$x_2\bar{x}_3$		√	√				√	√
$\bar{x}_2x_3x_4$	√					√		
$\bar{x}_1x_3x_4$	√			√				
$\bar{x}_1x_2x_4$			√	√				
$x_1\bar{x}_2x_4$					√	√		
$x_1\bar{x}_3x_4$					√			√

3. Знаходження істотних імплікант

	3	4	5	7	9	B	C	D
$x_2\bar{x}_3$ *		√	√				√	√
$\bar{x}_2x_3x_4$	√					√		
$\bar{x}_1x_3x_4$	√			√				
$\bar{x}_1x_2x_4$			√	√				
$x_1\bar{x}_2x_4$					√	√		
$x_1\bar{x}_3x_4$					√			√

Проаналізуємо таблицю міток. Стовпці, що відповідають мінітермам **4** та **C** мають рівно одну мітку. Тому, імпліканта $\tilde{o}_2\tilde{o}_3$ є істотною, і може бути вписана у МДНФ. Більше істотних імплікант для заданої ФАЛ нема.

З таблиці міток видаляємо перший рядок, що відповідає істотній імпліканти та стовпці, що вона покриває: мінітерми **4,5,C,D**.

	3	7	9	B
$\bar{x}_2 x_3 x_4$	√			√
$\bar{x}_1 x_3 x_4$	√	√		
$\bar{x}_1 x_2 x_4$		√		
$x_1 \bar{x}_2 x_4$			√	√
$x_1 \bar{x}_3 x_4$			√	

4. Проаналізуємо таблицю міток, маємо 4 мінітерми та 5 імплікант, причому ранг кожної із них дорівнює 3. Треба вибрати таку сукупність імплікант, що покриває усі мінітерми та має мінімальний сумарний ранг. Оскільки ранг кожної імпліканти 3, то, якщо знайдемо дві імпліканти, що покриють усі мінітерми, то таке покриття буде мати мінімальний ранг. Тоді, наприклад, якщо вибрати другу та четверту імпліканту: $\bar{x}_1 x_3 x_4$, $x_1 \bar{x}_2 x_4$, то усі мінітерми будуть покриті.

Виконавши повний перебір усіх можливих варіантів, маємо впевнитись, що таке покриття єдине.

Задана ФАЛ має єдину МДНФ: $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_2 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 x_3 x_4 \vee x_1 \bar{x}_2 x_4$, із сумарним рангом $R = 8$.

4.11.4 Метод Мак-Класки мінімізації булевих функцій

Метод Мак-Класки є модифікацією першого етапу методу Квайна.

Крок 1. Всім мінітермам вхідної ФАЛ ставимо у відповідність їхній двійковий еквівалент.

Наприклад.

$$\bar{x}_1 \tilde{o}_2 \tilde{o}_3 \bar{x}_4 \Rightarrow 0000$$

$$\bar{x}_1 \tilde{o}_2 \tilde{o}_3 \bar{x}_4 \Rightarrow 0110$$

$$x_1 \tilde{o}_2 \tilde{o}_3 x_4 \Rightarrow 1111$$

Крок 2. Всі номери-мінітерми розбиваємо на групи за числом одиниць у цих номерах.

Наприклад.

$\mathbf{0}$ група: $\mathbf{0000}$

$\mathbf{1}$ група: $\mathbf{0001, 0010, 0100, 1000}$

$\mathbf{4}$ група: $\mathbf{1111}$

Крок 3. Всі мінітерми порівнюються між собою попарно на предмет склеювання. Попарне порівняння треба виповняти <u>тільки між сусідніми групами</u>, тому що тільки ці групи відрізняються для вхідних у них мінітермів в одному розряді.

Крок 4. Перетворення нових мінітермів

Застосовуємо закон склеювання.

У розрядах, що відповідають виключеним змінним, ставимо риску. Така модифікація зручна ще й відсутністю громіздкого запису.

Наприклад.

$$\begin{matrix}\mathbf{0110}\\\mathbf{0100}\end{matrix} \Rightarrow \mathbf{01-0}, \quad \begin{matrix}\mathbf{1100}\\\mathbf{0100}\end{matrix} \Rightarrow \mathbf{-100}, \quad \begin{matrix}\mathbf{--10}\\\mathbf{--00}\end{matrix} \Rightarrow \mathbf{---0}.$$

Зауваження: подальше склеювання можливе тільки, якщо перетворені мінітерми мають риски на однакових місцях та відрізняються тільки одним розрядом.

Наприклад.

$$\begin{matrix}\mathbf{0-01}\\\mathbf{1-01}\end{matrix} \Rightarrow \mathbf{--01},$$

$$\begin{matrix}\mathbf{--01}\\\mathbf{--11}\end{matrix} \Rightarrow \mathbf{---1}.$$

Тоді, як мінітерми $\mathbf{0-01}$ та $\mathbf{00-1}$, $\mathbf{1-01}$ та $\mathbf{10-1}$, $\mathbf{00--}$ та $\mathbf{0-1-}$ не можуть бути склеєними.

Крок 5. Будуємо таблицю й розставляємо мітки, аналогічно, як у методі Квайна (п. 2).

Крок 6. Далі мінімізація проводиться по таблиці, як у методі Квайна (п. 3-6).

Наприклад.

Задано функцію $\mathbf{f(x_1,x_2,x_3,x_4)}$, що дорівнює одиниці на наборах з номерами – $\mathbf{T_1 = \{0,1,2,3,4,6,7,8,9,11,15\}}$.

Мінімізувати її методом Квайна-Мак-Класки.

Розв'язання.

1. Побудуємо двійкові набори, на яких задана функція.

№ набору	Набори	$\mathbf{f(x_1,x_2,x_3,x_4)}$
0	0000	1
1	0001	1
2	0010	1
3	0011	1
4	0100	1
5	0101	0
6	0110	1
7	0111	1
8	1000	1
9	1001	1
10	1010	0
11	1011	1
12	1100	0
13	1101	0
14	1110	0
15	1111	1

2. Розіб'ємо мінітерми на групи по числу одиниць.

0000 – нульова група

0001, 0010, 0100, 1000 – перша група

0011, 0110, 1001 –друга група

0111, 1011 – третя група

1111 – четверта група

3. Порівняємо всі мінітерми попарно між собою на предмет склеювання, виконаємо перетворення.

0000* – нульова група

0001*, 0010*, 0100*, 1000* – перша група

0011*, 0110*, 1001* – друга група

0111*, 1011* – третя група

1111* – четверта група

Отримані мінітерми також розіб'ємо на групи.

000_*, 00_0*, 0_00*, _000* – нульова група

00_1*, _001*, 001_*, 0_10*, 01_0*, 100_* – перша група

0_11*, _011*, 011*_, 10_1* – друга група

_111*, 1_11* –третя група

4. Продовжимо порівняння й перетворення мінітермів доти поки перетворення стане неможливим.

00_ _, _00_, 0_ _0 – нульова група

_0_1, 0_1_ – перша група

_ _11 – друга група

5. Побудуємо таблицю й розставимо мітки.

	0000	**0001**	**0010**	**0011**	**0100**	**0110**	**0111**	**1000**	**1001**	**1011**	**1111**
00_ _	√	√	√	√							
_00_	√	√						√	√		
0_ _0	√		√		√	√					
_0_1		√		√					√	√	
0_1_			√	√		√	√				
_ _11				√			√			√	√

6. Проведемо перетворення таблиці (п. 3-6 методу Квайна).

Викреслюємо стрічки, що відповідають істотним імплікантам (в таблиці їх визначено червоним кольором) і відзначимо стовпці мінітермів, що покриваються ними (виділено жирним шрифтом).

					1			2			3
	•1	•2	•1	•3	•1	•1	•3	•2	•2	•3	•3
	0000	0001	0010	0011	0100	0110	0111	1000	1001	1011	1111
00_ _	√	√	√	√							
_00_	√	√						√	√		
0_ _0	√		√		√	√					
_0_1		√		√					√	√	
0_1_			√	√		√	√				
_ _11				√			√			√	√

7. Виберемо сукупність первинних імплікант, що включає мітки у всіх стовпцях (принаймні по 1 у кожному стовпці).

У результаті одержуємо МДНФ:

$$\mathbf{f(x_1,x_2,x_3,x_4)=\bar{x}_2\bar{x}_3\vee\bar{x}_1\bar{x}_4\vee x_3x_4},\ \mathbf{R=6}.$$

4.11.5 Графічний метод мінімізації: карти Карно й діаграми Вейча

Карти Карно – графічний метод відображення булевих функцій, або графічний аналог таблиць істинності, що задають ФАЛ. Вони сформовані так, щоб полегшити процес склеювання. Карти Карно використовуються при $\mathbf{n=\overline{2,6}}$, при $\mathbf{n>6}$ вони практично непридатні. Діаграми Вейча принципово не відрізняються від карт Карно. Розходження складається лише в порядку проходження наборів значень і в позначеннях (Карно – $\{0,1\}$; Вейча – $\{\mathbf{x_1,\ldots,x_n}\}$).

Основні принципи побудови карт Карно

1) Карти Карно – це спеціальні таблиці завдання ФАЛ (плоске розгорнення $\mathbf{n}$- вимірних кубів), що значення змінних розташовуються в заголовках рядків і стовпців карти.

2) Кожній конститєнті одиниці (або нуля) функції ставиться у відповідність одна клітинка таблиці.

3) Значення змінних розташовуються так, щоб сусідні (що мають спільний кордон) рядки та стовпці відрізнялися значенням однієї змінної (для склеювання).

4) Перший та останній рядки (стовпці) вважаються сусідніми.

Наприклад.

1) **n = 2**

Карти Карно

(x,y)

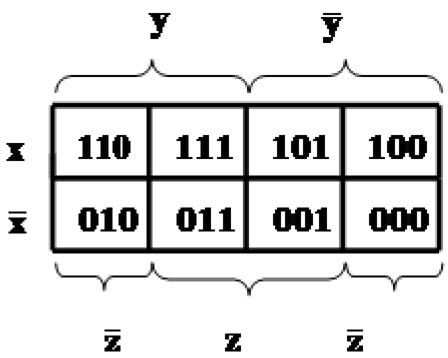
00	01	11	10

Діаграми Вейча

x \ y	1	0
1		
0		

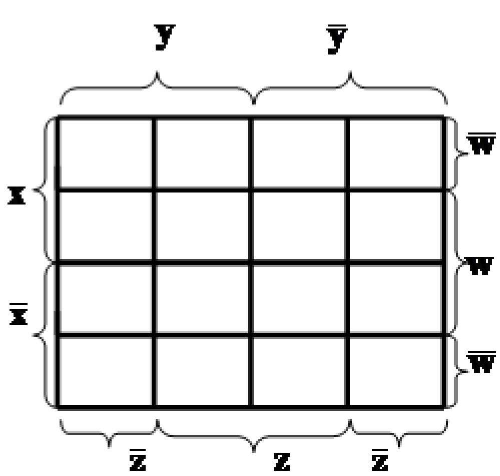
2) **n = 3**

x \ (y,z)	00	01	11	10
0				
1				



3) **n = 4**

(z,w) \ (x,y)	00	01	11	10
00				
01				
11				
10				



Алгоритм побудови МДНФ на картках Карно

1. Будується карта Карно, відповідна для даної ФАЛ.

2. Комірки або клітинки карти об'єднуються в групи, що відповідають операціям склеювання. В об'єднанні беруть участь тільки сусідні одиниці.

3. До групи можна об'єднати число комірок, що дорівнює $\mathbf{2^n}$, $\mathbf{n = 1,2,3,...}$ При цьому група може мати тільки квадратну або прямокутну форму.

4. Задача склеювання полягає в знаходженні набору максимальних груп комірок. Кількість груп у такому наборі має бути мінімальною.

5. Максимальна група – це група, яка не входить цілком ні в жодну іншу групу. Кожна одиниця карти Карно повинна входити хоча б в одну групу.

6. Кожній максимальної групі осередків ставиться у відповідність елементарна кон'юнкція, яку складають змінні, що мають однакове значення для всіх клітинок групи. Змінні беруться без заперечення, якщо їм відповідають одиничні значення, і з запереченням – в іншому випадку.

7. Диз'юнкція всіх отриманих кон'юнкцій і є мінімальна ДНФ – МДНФ.

Наприклад.

Мінімізувати на картах Карно функцію $\mathbf{f(x,y,z,w)}$, що дорівнює одиниці на наборах з номерами – $\mathbf{T_1 = \{0,1,2,3,4,6,7,8,9,11,15\}}$ (попередній приклад). Побудуємо двійкові набори, на яких задана функція.

№	Набори	$\mathbf{f(x,y,z,w)}$
0	0000	1
1	0001	1
2	0010	1
3	0011	1
4	0100	1
6	0110	1
7	0111	1
8	1000	1
9	1001	1
11	1011	1
15	1111	1

Побудуємо карти Карно для заданої функції.

xy \ zw	00	01	11	10
00	1	1	1	1
01	1		1	1
11			1	
10	1	1	1	

$\bar{x}\,\bar{w}$ $\bar{y}\,\bar{z}$ zw

Таким чином, МДНФ для даної ФАЛ дорівнює:

$$f(x,y,z,w) = \bar{x}\,\bar{w} \vee \bar{y}\,\bar{z} \vee zw,\ R = 6.$$

Наприклад.

1) Знайти на картках Карно МДНФ для ФАЛ $T_1 = \{0,1,2,3,4,5,6,7\}$.

xy \ zw	00	01	11	10
00	1	1	1	1
01	1	1	1	1
11				
10				

$\bar{x}$

МДНФ $f(x,y,z,w) = \bar{x}, \quad R = 1$.

2) Знайти на картках Карно МДНФ для ФАЛ $T_1 = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,12\}$.

xy \ zw	00	01	11	10
00	1	1	1	1
01	1	1	1	1
11	1			
10	1			

$\bar{x}$ $\bar{z}\,\bar{w}$

МДНФ $\mathbf{f(x,y,z,w) = \bar{x} \lor \bar{z}\,\bar{w}}, \quad \mathbf{R = 3}$.

3) Знайти на картках Карно МДНФ для ФАЛ $\mathbf{T_1 = \{0,2,8,10\}}$.

xy \ zw	00	01	11	10
00	1			1
01				
11				
10	1			1

$\bar{y}\,\bar{w}$

МДНФ $\mathbf{f(x,y,z,w) = \bar{y}\,\bar{w}, R = 2}$.

4.11.6 Мінімізація неповністю визначених ФАЛ

Схеми, на входи яких деякі комбінації сигналів ніколи не подаються породжують – **заборонені двійкові набори.** Для заборонених наборів вихідні сигнали не визначені: або 0, або 1. При синтезі таких схем можна довільно задати значення вихідних сигналів для заборонених комбінацій. Зазвичай задають так, щоб отримана схема була найбільш простою. Робота схем із забороненими комбінаціями вхідних сигналів описується **неповністю визначеними ФАЛ**.

Частково визначені ФАЛ (не повністю визначені) – це ФАЛ, для яких значення визначені не на усіх можливих наборах аргументів.

У таблицях істинності на тих наборах, де ФАЛ не визначена ставиться *. Приклад: замінюючи * нулем або одиницею можна отримати дві різні повністю визначені ФАЛ.

У загальному випадку, якщо ФАЛ $\mathbf{n}$ від змінних не визначена на наборах $\mathbf{m \le n}$, то шляхом довільного довизначення можна отримати $\mathbf{2^m}$ різних повністю визначених функцій.

Наприклад.

№	x	y	f(x,y)
0	0	0	0
1	0	1	1
2	1	0	1
3	1	1	*

Карта Карно для заданої не повністю визначеної ФАЛ.

(x,y)

00	**01**	**11**	**10**
0	**1**	*****	**1**

1) Нехай на забороненому наборі функція дорівнює 1.

(x,y)

00	**01**	**11**	**10**
0	**1**	**1**	**1**

ÌÄÍÔ $\mathbf{f(x,y) = x \vee y, R = 2}$.

2) Нехай на забороненому наборі функція дорівнює 0.

(x,y)

00	**01**	**11**	**10**
0	**1**	**0**	**1**

ÌÄÍÔ $\mathbf{f(x,y) = \overline{x}y \vee x\overline{y}, R = 4}$.

Форма подання ФАЛ істотно залежить від вибору її значення на заборонених наборах. У даному прикладі по карті Карно неважко визначити найбільш економний варіант довизначення ФАЛ – довизначення 1.

Повністю визначена ФАЛ називається **еквівалентною** деякій частково визначеній ФАЛ, якщо її значення співпадають зі значеннями частково визначеної ФАЛ на тих наборах, на яких вона визначена. Мінімізація не повністю визначених ФАЛ зводиться до відшукання мінімальної МДНФ серед усіх МДНФ повністю визначених ФАЛ, еквівалентних даній функції.

4.12 Завдання для самостійної роботи

1. Для заданої булевої функції трьох змінних $F(x,y,z)$ скласти таблицю істинності функції. Зобразити графічно $F(x,y,z)$ на кубі.

1) $x \mid (z \equiv y \oplus z) \to zy \downarrow y$;
2) $x \to y \downarrow z \cdot \left(\overline{x \mid y} \oplus x \equiv z\right)$;
3) $x\bar{y} \to z\bar{x} \equiv z \downarrow x \mid y\bar{x}$;
4) $x \mid z \oplus (y \downarrow z) \vee x \to z$;
5) $x \equiv y \downarrow x \oplus (y \mid z \to \bar{x}) \mid y$;
6) $x \mid z \oplus \overline{y \downarrow z} \vee \bar{x} \to z \equiv y$;
7) $x \downarrow y \vee (y \equiv y \mid z) \oplus \overline{zx} \to x$;
8) $z \mid (x \equiv y \oplus x) \to \overline{xy} \downarrow y$.

2. Для заданої булевої функції трьох змінних $F(x,y,z)$ скласти таблицю істинності функції. Визначити множину фіктивних аргументів функції $F(x,y,z)$.

1) $x \to (zy \vee z) \oplus z \downarrow y$;
2) $xy \downarrow z \cdot (\bar{y} \oplus x \vee z) \to z$;
3) $x\bar{y} \oplus y\bar{x} \to zx \mid y\bar{x}$;
4) $xz \vee (y \oplus z) \downarrow x \to z$;
5) $xy \to x \downarrow (yz \vee \bar{x}) \mid y \,\&\, x$;
6) $x \to z \cdot \overline{y \downarrow z} \oplus \bar{x} \to zy$;
7) $x \oplus y \cdot (y \vee y \mid z) \to \overline{zx}$;
8) $z \downarrow (x \equiv yx) \to \overline{xy} \oplus y$.

3. Використовуючи закони алгебри логіки, покроково перетворити задану функцію в ДНФ. Побудувати таблицю істинності.

1) $x \cdot (z \oplus y \to z) \to z \downarrow y$;
2) $x \oplus yz \cdot (\bar{y}x \vee z) \to \bar{z}y$;
3) $\bar{x} \vee y \downarrow (y\bar{x} \oplus zx) \mid y\bar{x}$;
4) $x \downarrow z \to (yz \vee x\bar{z}) \downarrow x\bar{z}$;
5) $x \downarrow y \oplus x \cdot (yz \to \bar{x}) \mid y\bar{x}$;
6) $\bar{x} \oplus z \cdot \overline{yz} \to (\bar{x} \vee zy)$;
7) $x\bar{y} \cdot (\bar{y} \to y \mid z) \oplus \overline{z \downarrow x}$;
8) $z \to (\bar{x} \vee y \downarrow x) \to \overline{xy} \oplus y$
9) $(x \vee \bar{z}) \oplus (\bar{y}z \vee x\bar{z}) \to x\bar{z}$
10) $x \oplus \bar{y} \downarrow (\bar{y} \oplus y \vee z) \to zx$.

4. Для булевих функцій, заданих множиною T_1 побудувати таблицю істинності, знайти ДДНФ та КДНФ.

1) $T_1 = \{1,2,3,4,8,9,11\}$;
2) $T_1 = \{2,4,5,8,9,11,14\}$;
3) $T_1 = \{1,2,3,5,9,10,15\}$;
4) $T_1 = \{1,2,5,6,7,9,11\}$;
5) $T_1 = \{2,3,4,8,9,11,15\}$;
6) $T_1 = \{3,4,6,7,8,9,11\}$;
7) $T_1 = \{4,5,6,8,9,10,11\}$;
8) $T_1 = \{4,6,7,8,9,11,12,13\}$;

9) $\mathbf{T_1=\{1,5,6,7,9,11,13\}}$ 10) $\mathbf{T_1=\{1,2,5,6,7,9,11,14\}}$.

5. Довести або спростувати тотожність двома способами: складанням таблиць істинності обох частин та рівносильним перетворенням однієї або обох частин.

1) $\mathbf{(\neg X \equiv Y) \vee \neg(X \to Z) = \overline{X} \cdot Y \vee X\overline{Y} \vee X\overline{Z}}$;

2) $\mathbf{(X \to Y)\,\&\,Z = \overline{X} \cdot Y \vee \overline{X} \cdot \overline{Y} \cdot Z \vee YZ}$;

3) $\mathbf{X \to Y = X\overline{Y} \to \overline{X} = X\overline{Y} \to Y = X\overline{Y} \to 0 = 1 \to \overline{X} \vee Y}$;

4) $\mathbf{(X = \overline{Z})\,\&\,(Y \to Z) = (\overline{X} \vee \overline{Y})\,\&\,(X \vee Z)\,\&\,(\overline{X} \vee \overline{Z})}$.

6. Нанести на тривимірні та чотиривимірний куби набори, на яких функції $\mathbf{f_1}$ і $\mathbf{f_2}$ дорівнюють одиниці, склавши попередньо таблиці істинності для $\mathbf{f_1}$ і $\mathbf{f_2}$.

Написати ДДНФ і КДНФ.

1) $\mathbf{f_1 = (x_2 \to x_3) \downarrow (x_2 \oplus \overline{x}_1 \vee x_3),\ f_2 = (x_1 = x_3) \oplus (x_2 \to \overline{x}_1 x_3);}$

2) $\mathbf{f_1 = (x_1 \vee \overline{x}_1 x_3 \vee x_2) \to (x_1 \overline{x}_2 \downarrow \overline{x}_3);\ f_2 = (x_2 \downarrow x_3) \oplus (x_2 \overline{x}_1 \to x_3);}$

3) $\mathbf{f_1 = x_2 \to x_3 \downarrow x_2 \overline{x}_1 \oplus x_3;\ f_2 = (x_1 \overline{x}_3 \downarrow x_3) \oplus (\overline{x}_1 \vee x_3)}$

7. Для булевих функцій, заданих одиничними наборами, знайти ДДНФ та КДНФ. Найбільш просту аналітичну форму перевести в базиси $\{\wedge,\neg\}$, $\{\vee,\neg\}$, $\{|\},\{\downarrow\}$ та зрівняти із заданою функцією, побудувавши таблицю істинності.

1) $\mathbf{T_1=\{3,4,8,9,11\}}$; 5) $\mathbf{T_1=\{2,3,9,11,15\}}$;

2) $\mathbf{T_1=\{5,8,9,11,14\}}$; 6) $\mathbf{T_1=\{0,4,6,7,8,11\}}$;

3) $\mathbf{T_1=\{0,1,2,10,15\}}$; 7) $\mathbf{T_1=\{5,6,8,10,11\}}$;

4) $\mathbf{T_1=\{0,1,2,5,6,14\}}$; 8) $\mathbf{T_1=\{8,9,11,12,13\}}$.

8. Мінімізувати функцію трьох змінних $\mathbf{F(x,y,z)}$ с використанням куба, карт Карно та методу Квайна-Мак-Класки. Функція $\mathbf{F(x,y,z)}$ задана множиною $\mathbf{T_1}$.

1) $\mathbf{T_1=\{3,4,5,6,7\}}$; 5) $\mathbf{T_1=\{2,3,5,7\}}$;

2) $\mathbf{T_1=\{0,1,2,5,7\}}$; 6) $\mathbf{T_1=\{0,4,6,7\}}$;

3) $\mathbf{T_1=\{0,1,2,5,6\}}$; 7) $\mathbf{T_1=\{0,5,6,7\}}$;

4) $\mathbf{T_1 = \{0,1,3,5,6\}}$; 8) $\mathbf{T_1 = \{1,2,3,7\}}$.

9. Функція алгебри логіки задана аналітично у вигляді ДНФ. Перевірити чи є задана нормальна форма мінімальною. Якщо ні, побудувати мінімальну форму. Перевірку виконати за допомогою методу Квайна-Мак-Класки та карт Карно. Обчислити ранги функції алгебри логіки, що записана різними нормальними формами.

а) $\mathbf{xw \vee \bar{x}yzw \vee xy\bar{z} \vee x\bar{y}\,\bar{z}\,\bar{w}}$; б) $\mathbf{zw \vee x\bar{z}\,\bar{w} \vee xyz \vee \bar{x}\,\bar{w}}$;

б) $\mathbf{x\bar{z} \cdot \bar{w} \vee yz \vee x\bar{y}z}$; в) $\mathbf{yz \vee \bar{x}\,\bar{y}w \vee \bar{x}y\bar{z} \vee x\bar{y}z\bar{w}}$;

г) $\mathbf{xy \vee xz \vee \bar{x}yz \vee x\bar{z}\,\bar{w}}$; д) $\mathbf{xz \vee \bar{y}\,\bar{z}\,\bar{w} \vee \bar{x}\,\bar{y}z\bar{w} \vee x\bar{z}\,\bar{w}}$;

е) $\mathbf{xy \vee x\bar{y}\,\bar{z}\,\bar{w} \vee \bar{x}yz \vee \bar{x}\,\bar{y}\,\bar{z}\,\bar{w}}$; ж) $\mathbf{xw \vee x\bar{z}\,\bar{w} \vee \bar{x}\,\bar{y}w \vee xyz}$;

з) $\mathbf{xyz \vee \bar{x}y\bar{z} \vee zw \vee \bar{x}yzw}$; і) $\mathbf{xyw \vee xz \vee \bar{x}\,\bar{y}\,z \vee xyzw}$;

к) $\mathbf{xy\bar{z} \vee x\bar{z}\,\bar{w} \vee x\bar{z}w \vee \bar{x}yz\bar{w}}$; л) $\mathbf{xy\bar{w} \vee \bar{x}yz \vee \bar{x}\,\bar{y}z \vee \bar{x}yz\bar{w}}$.

10. За допомогою карт Карно та методу Мак-Класки мінімізувати функцію алгебри логіки від 4-х змінних у класі ДНФ. Підтвердити правильність мінімізацією на кубі. Оцінити ранги функцій, отримані при мінімізації різними методами. Функції задано множиною $\mathbf{T_1}$.

1) $\mathbf{T_1 = \{3,4,8,9,11\}}$; 5) $\mathbf{T_1 = \{2,3,9,11,15\}}$;

2) $\mathbf{T_1 = \{5,8,9,11,14\}}$; 6) $\mathbf{T_1 = \{0,4,6,7,8,11\}}$;

3) $\mathbf{T_1 = \{0,1,2,10,15\}}$; 7) $\mathbf{T_1 = \{5,6,8,10,11\}}$;

4) $\mathbf{T_1 = \{0,1,2,5,6,14\}}$; 8) $\mathbf{T_1 = \{8,9,11,12,13\}}$.

11. За допомогою карт Карно та методу Мак-Класки мінімізувати функцію алгебри логіки від 5-х змінних. Оцінити ранги функцій, отримані при мінімізації різними методами. Функції задано множиною $\mathbf{T_1}$.

1) $\mathbf{T_1 = \{3,4,8,19,20,21,29,30,31\}}$; 5) $\mathbf{T_1 = \{0,2,3,9,14,25,28,29,30\}}$;

2) $\mathbf{T_1 = \{1,2,5,8,9,11,15,24,26,31\}}$; 6) $\mathbf{T_1 = \{0,3,4,6,7,8,9,11,23,25\}}$;

3) $\mathbf{T_1 = \{0,1,7,10,15,18,19,25,30\}}$; 7) $\mathbf{T_1 = \{1,5,6,8,10,11,16,17,23\}}$;

8) $\mathbf{T_1 = \{1,4,5,19,20,21,29,30,31\}}$; 11) $\mathbf{T_1 = \{1,2,7,9,14,25,28,29,30\}}$;

9) $\mathbf{T_1 = \{1,3,5,8,9,11,15,24,26,30\}}$; 12) $\mathbf{T_1 = \{1,3,5,6,7,8,9,11,23,25\}}$;

10) $\mathbf{T_1 = \{0,3,7,10,15,18,19,24,29\}}$; 13) $\mathbf{T_1 = \{1,5,8,9,10,11,16,26,27\}}$.

12. За допомогою карт Карно мінімізувати неповністю визначену функцію 4-х змінних у класі ДНФ. Функція алгебри логіки задана множинами: $\mathbf{T_1}$ та $\mathbf{T_*}$ ($\mathbf{T_*}$ - множина, що містить номера заборонених наборів).

Записати ДДНФ для ФАЛ, якщо всі заборонені набори до визначені одиницею або нулем. Оцінити ранги всіх отриманих нормальних форм.

1) $\mathbf{T_1 = \{3,4,8,9,10,11,15\}, T_* = \{0,2,5,6\};}$

2) $\mathbf{T_1 = \{1,2,5,8,9,11,15\}, T_* = \{0,3,4,10\}}$;

3) $\mathbf{T_1 = \{0,2,4,8,9,12,14\}, T_* = \{1,3,5,11\}}$;

4) $\mathbf{T_1 = \{1,3,6,8,9,11,15\}, T_* = \{0,2,4,10\}}$;

5) $\mathbf{T_1 = \{1,3,7,8,9,10,14\}, T_* = \{0,2,6,13\}}$;

6) $\mathbf{T_1 = \{2,3,5,8,9,11,15\}, T_* = \{0,1,4,10\}}$;

7) $\mathbf{T_1 = \{1,4,5,8,9,13,15\}, T_* = \{0,2,3,10\}}$;

8) $\mathbf{T_1 = \{1,3,5,7,9,13,14\}, T_* = \{0,2,6,12\}}$;

9) $\mathbf{T_1 = \{1,5,6,8,10,12,13\}, T_* = \{0,7,9,11\}}$;

10) $\mathbf{T_1 = \{1,6,7,8,9,14,15\}, T_* = \{0,2,11,13\}}$.

13. За допомогою карт Карно мінімізувати неповністю визначену функцію 5-х змінних у класі ДНФ. Функція алгебри логіки задана множинами: $\mathbf{T_1}$ та $\mathbf{T_*}$ ($\mathbf{T_*}$ - множина, що містить номера заборонених наборів). Оцінити ранги функцій, отримані при мінімізації різними методами.

1) $\mathbf{T_1 = \{3,4,8,9,10,21,25\}, T_* = \{0,2,5,11,17,26\};}$

2) $\mathbf{T_1 = \{1,2,5,8,9,22,25\}, T_* = \{0,3,4,7,10,20\}}$;

3) $\mathbf{T_1 = \{0,2,4,8,9,22,24\}, T_* = \{1,3,5,14,16,21\}}$;

4) $\mathbf{T_1 = \{1,3,6,8,9,19,25\}, T_* = \{0,2,4,20,23,28\}}$;

5) $\mathbf{T_1 = \{1,3,7,8,9,20,24\}, T_* = \{0,2,6,16,17,21\}}$;

6) $\mathbf{T_1 = \{2,3,5,8,9,24,29\}, T_* = \{0,1,14,23,27,30\}}$;

7) $\mathbf{T_1 = \{1,4,5,8,9,23,30\}, T_* = \{0,2,13,20,28,31\}}$;

8) $\mathbf{T_1 = \{1,3,5,7,9,17,24\}, T_* = \{0,2,16,22,26,30\}}$;

9) $\mathbf{T_1 = \{1,5,6,8,10,22,23\}, T_* = \{0,7,19,21,31\}}$;

10) $\mathbf{T_1 = \{1,6,7,8,9,24,31\}, T_* = \{0,2,21,23,25,28\}}$.

4.13 Контрольні питання

1. Визначення двійкового набору. Номер двійкового набору. Таблиця істинності. Теорема про кількість двійкових наборів довжиною $\mathbf{n}$.

2. Визначення булевої функції або функції алгебри логіки (ФАЛ). Теорема про кількість ФАЛ від $\mathbf{n}$ аргументів.

3. Фіктивні аргументи ФАЛ. Алгоритм знаходження фіктивних аргументів ФАЛ.

4. ФАЛ від однієї змінної.

5. Елементарні ФАЛ від двох змінних: кон'юнкція, диз'юнкція, імплікація, еквівалентність, штрих Шеффера, стрілка Пірса..

6. Графічне подання ФАЛ.

7. Основні закони алгебри логіки (поглинання, склеювання, де Моргана). Елементарні перетворення одних ФАЛ у другі.

8. Аналітичний опис ФАЛ: диз'юнктивні та кон'юнктивні нормальні форми. ДДНФ та КДНФ. Теореми про аналітичне представлення ФАЛ.

9. Повні системи функцій, універсальний базис, мінімальний базис.

10. Скорочена та мінімальна форми. Ранг кон'юнкції та нормальної форми. Мінімізація ФАЛ на одиничному кубі.

11. Таблично-аналітичний метод мінімізації Квайна.

12. Модифікація методу Квайна - метод Мак-Класки.

13. Карти Карно-Вейча для функцій 2,3,4,5 змінних. Побудова МДНФ на картах Карно-Вейча.

14. Неповністю визначена ФАЛ. Довизначення неповністю визначеної ФАЛ, їх кількість. Мінімальне довизначення.

15. Мінімізація неповністю визначеної ФАЛ на картах Карно-Вейча.

РОЗДІЛ 5

ТЕОРІЯ НЕОРІЄНТОВАНИХ ГРАФІВ. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ

5.1 Основні визначення теорії неорієнтованих графів (неорграфів)

Нехай є деяка не порожня множина $\mathbf{V} \neq \varnothing$ та $\mathbf{V}^{(2)}$ – множина усіх її двоелементних підмножин: $\mathbf{V}^{(2)} = \{\, \{\mathbf{u}, \mathbf{v}\} \mid \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{V}\, \}$.

Неорієнтованим графом (неорграфом) $\mathbf{G}$ називається упорядкована пара множин $\mathbf{G} = (\mathbf{V}, \mathbf{E})$, де $\mathbf{E} \subseteq \mathbf{V}^{(2)}$.

Множина $\mathbf{V}$ – множина **вершин** графа $\mathbf{G}$, множина $\mathbf{E}$ – множина **ребер** графа $\mathbf{G}$.

Число вершин у графі $\mathbf{G}$ називається **порядком** графа й позначається $|\mathbf{G}|$.

Якщо $|\mathbf{V}| = \mathbf{p}, |\mathbf{E}| = \mathbf{q}$, то граф $\mathbf{G} = (\mathbf{V}, \mathbf{E})$ називають $\mathbf{p}$-графом або $(\mathbf{p},\mathbf{q})$-графом.

Якщо множина $\mathbf{V}$ скінченна, то граф називають **скінченним**.

Дві **вершини** графа називаються **суміжними**, якщо вони поєднані ребром.

Два **ребра** графа називаються **суміжними**, якщо вони мають спільну кінцеву вершину.

Ребро $\mathbf{e}$ називається **інцидентним** вершині $\mathbf{v}$, а також, в свою чергу, вершина $\mathbf{v}$ називається **інцидентною** ребру $\mathbf{e}$, якщо вершина $\mathbf{v}$ є одним із кінців ребра $\mathbf{e}$.

5.2 Способи завдання неорграфів

1) **Перерахування** множин $\mathbf{V}$ (вершин) та $\mathbf{E}$ (ребер), що задають граф $\mathbf{G} = (\mathbf{V}, \mathbf{E})$.

2) Графічний спосіб завдання неорграфів

Прообраз вершини – крапка, прообраз ребра – відрізок.

Множина вершин $\mathbf{V}$ – це множина крапок площини, множина ребер $\mathbf{E}$ – множина відрізків прямої (кривої) лінії на площині.

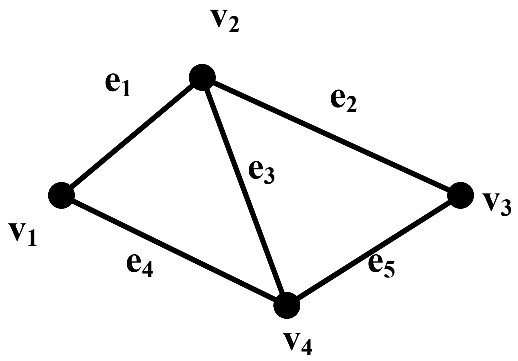
Наприклад.

Нехай задано неорієнтований граф $\mathbf{G = (V, E)}$.

$\mathbf{V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}}$ – множина вершин графа.

$\mathbf{E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}}$ – множина ребер графа.

$\mathbf{|V| = 4}$ – порядок графа. Граф $\mathbf{G}$ – $\mathbf{4}$-граф або $\mathbf{(4,5)}$-граф.



3) **Матричні** способи опису неорграфів

Матриця суміжності – квадратна матриця:

$$\mathbf{A_G = \|a_{ij}\|, i, j = \overline{1,p}}, \text{ де}$$

$$\mathbf{a_{ij} = \begin{cases} 1, & \exists\ e = \{i, j\} \in E \\ 0, & \nexists\ e = \{i, j\} \in E \end{cases}}.$$

Матриця інцидентності – прямокутна матриця:

$$\mathbf{B_G = \|b_{ij}\|, i = \overline{1,p}; j = \overline{1,q}}, \text{ де}$$

$$\mathbf{b_{ij} = \begin{cases} 1, & i \in V, j \in E, \exists k \in V : j = \{i, k\} \\ 0, & i \in V, j \in E, \nexists k \in V : j = \{i, k\} \end{cases}}.$$

Наприклад.

Задано граф $\mathbf{G = (V, E)}$, де $\mathbf{V = \{a, b, c, d\}}$, $\mathbf{E = \{ab, bc, ac, ad, cd\}}$.

Матриця суміжності $\mathbf{A_G}$:

	a	**b**	**c**	**d**
a	0	1	1	1
b	1	0	1	0
c	1	1	0	1
d	1	0	1	0

Матриця інцидентності $\mathbf{B_G}$ **:**

	ab	**bc**	**ac**	**ad**	**cd**
a	1	0	1	1	0
b	1	1	0	0	0
c	0	1	1	0	1
d	0	0	0	1	1

5.3 Степінь вершини у неорграфах

Степенем або **валентністю** вершини $\mathbf{v}$ неорієнтованого графа $\mathbf{G}$ називається число ребер, що є інцидентними даній вершині.

Степінь вершини позначається, як

$$\mathbf{deg(v)},\ \mathbf{deg(v) = |\{e = \{u, v\} : e \in E\}|}.$$

Максимальний степінь усіх вершин графу $\mathbf{G}$ – $\mathbf{\Delta(G)}$**:**

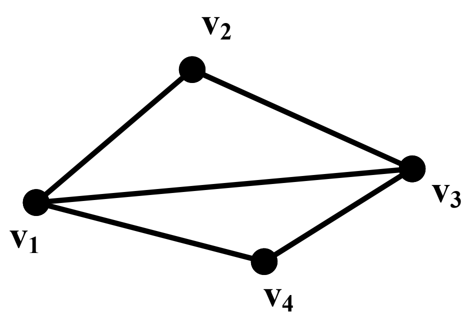
$$\mathbf{\Delta(G) = \underset{v \in V}{MAX}\, deg(v)}.$$

Мінімальний степінь усіх вершин графу $\mathbf{G}$ – $\mathbf{\delta(G)}$**:**

$$\mathbf{\delta(G) = \underset{v \in V}{MIN}\, deg(v)}.$$

Оточенням вершини $\mathbf{v}$ називається множина усіх вершин графа $\mathbf{G}$, суміжних з нею і позначається $\mathbf{N(v)}$.

Наприклад.



– $\mathbf{deg(v_1) = 3, deg(v_2) = 2, deg(v_3) = 3, deg(v_4) = 2}$; $\mathbf{\Delta(G) = 3, \delta(G) = 2}$;

– $\mathbf{N(v_1) = \{v_2, v_3, v_4\}}$, $\mathbf{N(v_2) = \{v_1, v_3\}}$;

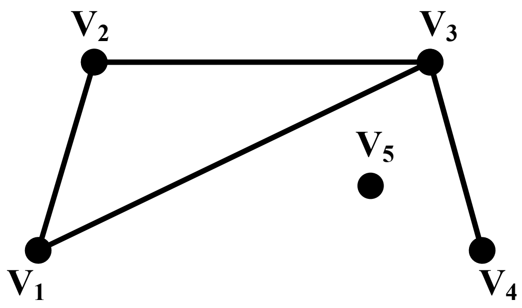
– $\mathbf{N(v_3) = \{v_1, v_2, v_4\}, N(v_4) = \{v_1, v_3\}}$.

Вершина $\mathbf{v}$ графа $\mathbf{G}$ називається **ізольованою**, якщо її степінь дорівнює нулю, $\mathbf{deg(v) = 0}$.

Вершина $\mathbf{v}$ графа $\mathbf{G}$ називається **висячою** або **кінцевою,** якщо степінь цієї вершини дорівнює одиниці, $\mathbf{deg(v) = 1}$.

Вершина $\mathbf{v}$ $\mathbf{(p,q)}$-графа $\mathbf{G}$ називається **домінуючою**, якщо її степінь дорівнює $\mathbf{p - 1}$, $\mathbf{deg(v) = p - 1}$.

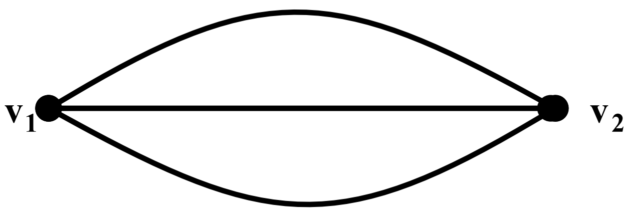
Наприклад.



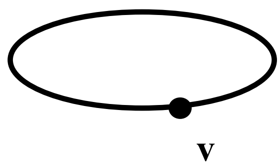
У наведеному графі нема домінуючої вершини, ізольована вершина – $\mathbf{v_5}$, висяча вершина – $\mathbf{v_4}$.

У загальному випадку у множині $\mathbf{E}$ допускається більш ніж одне ребро із однаковими кінцевими вершинами.

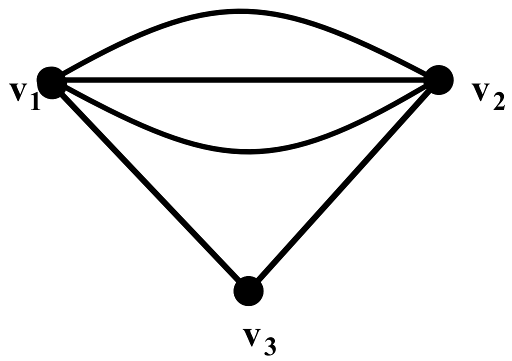
Такі ребра називаються **паралельними** або **кратними**.



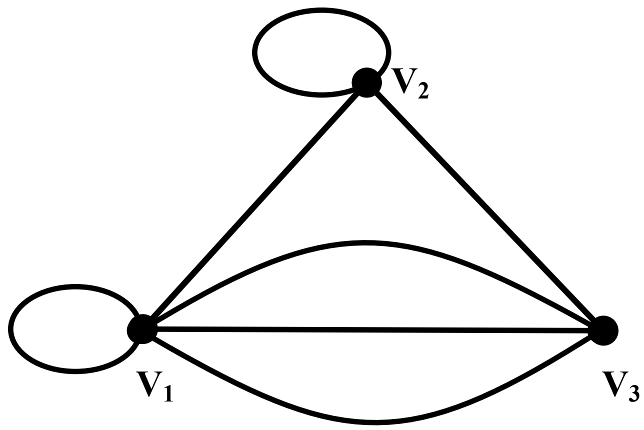
Ребро, що з’єднує вершину $\mathbf{v}$ саму з собою, називають **петлею**.



Граф, що не містить петель, але містить кратні ребра, називається **мультиграфом**.



Граф, що містить й петлі, й кратні ребра називається **псевдографом**.



Граф, що не містить петель й кратних ребер називається **звичайним**.

Далі, якщо не буде особливо обумовлено, розглядаються звичайні скінченні графи.

Лема про рукостискання

Сума степеней усіх вершин неорієнтованого звичайного графу $\mathbf{G=(V,E)}, |\mathbf{V}|=\mathbf{p}, |\mathbf{E}|=\mathbf{q}$ є парною та дорівнює подвоєному числу ребер: $\sum\limits_{i=1}^{p}\mathbf{deg\,v=2q=2|E|}.$

Доведення.

Кожне ребро графа інцидентно двом вершинам, тому воно додає до суми степеней вершин графа число два. Оскільки кількість ребер $\mathbf{q}$, отже, сума всіх степеней вершин графа дорівнює $\mathbf{2q}$ та є парним числом.

Слідство леми про рукостискання

У будь-якому неорієнтованому звичайному графі число вершин непарним степенем парним

Доведення.

Без втрати спільності вважатимемо, що степінь перших $\mathbf{r}$ вершин $\mathbf{v_1,..., v_r}$ – є парним числом, а степінь $\mathbf{(p - r)}$ вершин, що лишилися – непарне число. Тоді, суму $\mathbf{S}$ усіх степеней вершин графу можна представити, як суму двох доданків:

$$\mathbf{S = \sum_{i=1}^{p} deg\, v_i = S_1 + S_2 = \sum_{i=1}^{r} deg\, v_i + \sum_{i=r+1}^{p} deg\, v_i}\,.$$

За лемою про рукостискання маємо, що $\mathbf{S}$ – парне число:

$$\mathbf{S = \sum_{i=1}^{p} deg\, v_i = 2q}\,.$$

$\mathbf{S_1}$ – сума степеней перших $\mathbf{r}$ вершин графу є парним числом, як сума парних чисел, тоді $\mathbf{S_2}$ – сума степеней $\mathbf{n - r}$ вершин графу, що осталися також парна, як різниця парних чисел: $\mathbf{S_2 = S - S_1 = 2q - S_1}$. Кожен доданок в сумі $\mathbf{S_2}$ є непарним числом, отже кількість доданків парна.

5.4 Спеціальні графи

Граф, що не містить жодного ребра, називається **порожнім графом** й позначається $\mathbf{O_p}$, де $\mathbf{p}$ – кількість вершин графа.

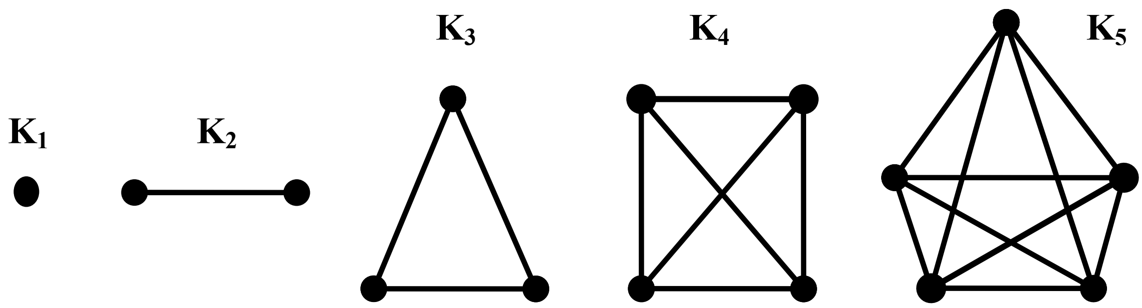
Граф, що не містить жодного ребра, жодної вершини, називається **0-графом** (нуль-граф).

Тривіальний граф – $\mathbf{(1,0)}$-граф.

Граф, $\mathbf{G}$ називається **повним**, якщо усі його вершини суміжні між собою або кожна його вершина є домінуючою.

Повний граф позначається $\mathbf{K_p}$, де $\mathbf{p}$ – кількість його вершин.

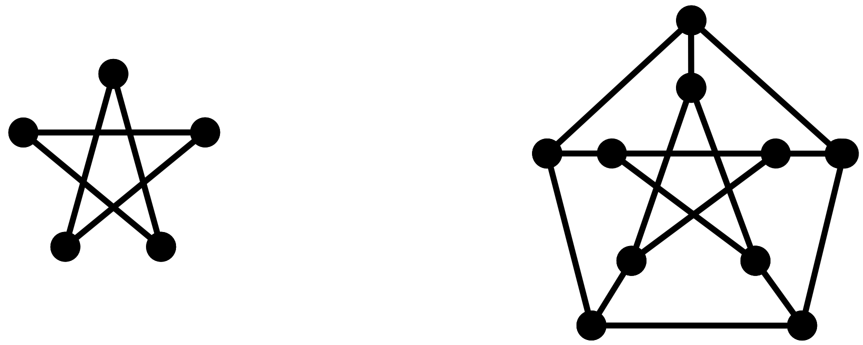
Приклади зображень повних графів.



Однорідний або **регулярний граф** – це граф, у якого ступені всіх вершин рівні.

Усі повні графи є регулярними. Приклади регулярних графів.

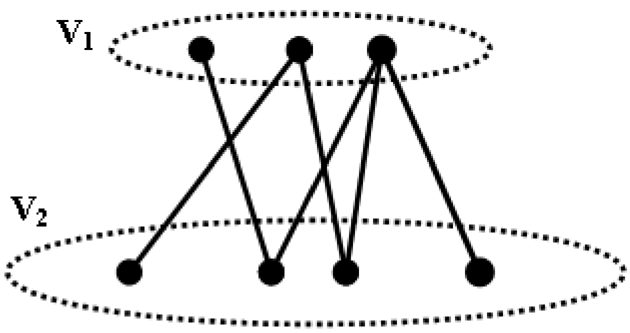
Граф Петерсона



deg=2 **deg=3**

Дводольні або біграфи

Граф $\mathbf{G=(V,E)}$ називається **дводольним** або **біграфом**, якщо множину його вершин $\mathbf{V}$ можна **розбити** на 2 непересічні підмножини $\mathbf{V_1}$ та $\mathbf{V_2}$, $\mathbf{V_1, V_2 \subseteq V}$, $\mathbf{V_1 \cap V_2 = \varnothing}$, $\mathbf{V_1 \cup V_2 = V}$ такі, що будь-яке ребро графа має одну кінцеву вершину у $\mathbf{V_1}$, а іншу у $\mathbf{V_2}$.



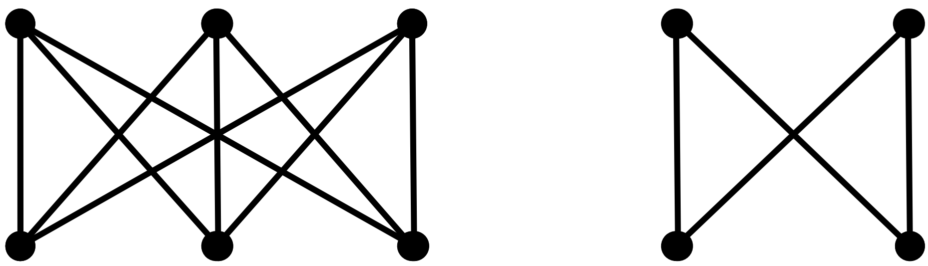
Якщо у звичайному дводольному графі $\mathbf{G=(V,E)}$ із розбиттям $\mathbf{(V_1,V_2):}$ $\forall \mathbf{v_i} \in \mathbf{V_1}, \forall \mathbf{v_j} \in \mathbf{V_2}\ \exists \mathbf{e} = \{\mathbf{v_i}, \mathbf{v_j}\} \in \mathbf{E}$, то такий дводольний граф називається **повним дводольним графом**.

У повному дводольному графі довільна вершина із однієї долі суміжна довільній вершині із другої долі, й навпаки.

Позначається повний дводольний граф, як:

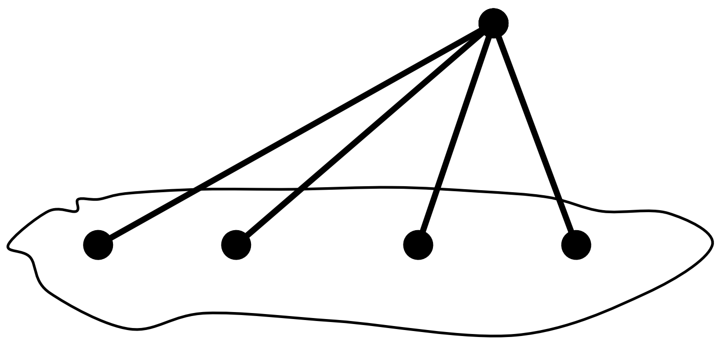
$\mathbf{K_{p_1,p_2}}$, де $|\mathbf{V_1}| = \mathbf{p_1}, |\mathbf{V_2}| = \mathbf{p_2}$.

На рисунку представлено повні дводольні графи $\mathbf{K_{3,3}}$ (із відомої задачі про три будинки та три колодязі) та $\mathbf{K_{2,2}}$.



Повний дводольний граф $\mathbf{K_{1,n}}$ називається **зіркою**.

На рисунку зображено зірку $\mathbf{K_{1,4}}$.

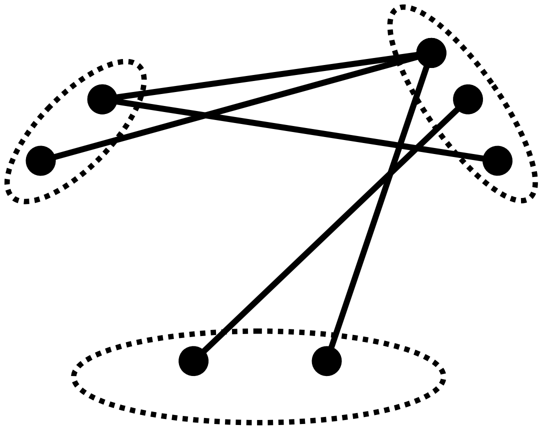


$\mathbf{k}$-дольні графи

Граф $\mathbf{G=(V,E)}$ називають **$\mathbf{k}$-дольним**, якщо множину його вершин $\mathbf{V}$ можна <u>розбити</u> на підмножини $\mathbf{V_i}, \mathbf{i} = \overline{\mathbf{1,k}}$, $\forall \mathbf{i}, \mathbf{j} = \overline{\mathbf{1,k}}, \mathbf{i} \neq \mathbf{j} : \mathbf{V_i} \cap \mathbf{V_j} = \varnothing$,

$\bigcup\limits_{i=1}^{k} V_i = V$ таким чином, що будь-яке ребро графа має одну кінцеву вершину в V_i, а іншу – в V_j.

На рисунку зображено тридольний граф.

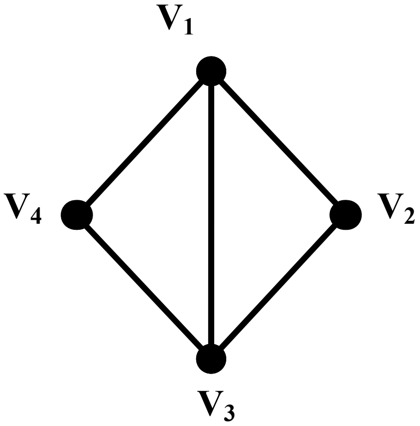


Зауваження: вершини однієї підмножини у $\mathbf{k}$-дольному графі несуміжні між собою.

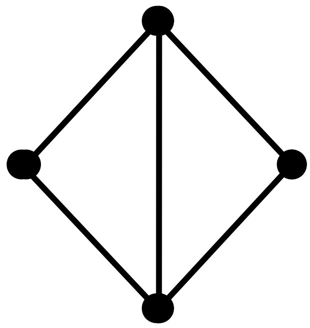
5.5 Підграфи

Неорієнтований граф $G = (V, E)$ називають **позначеним** або **перенумерованим**, якщо кожній вершині графа поставлена у відповідність унікальна мітка (число, символ). Інакше граф називається **абстрактним.**

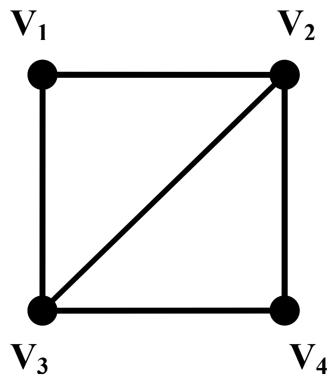
Позначений граф



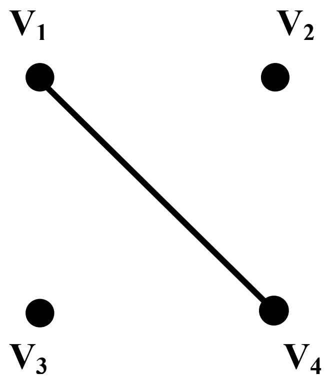
Абстрактний граф



Граф $\overline{G} = (\overline{V}, \overline{E})$ називається **доповненням** графа $G = (V, E)$, якщо множина вершин графів збігається, тобто $V = \overline{V}$, а множина ребер дорівнює $\overline{E} = V^{(2)} \setminus E$.



Граф $\mathbf{G}$



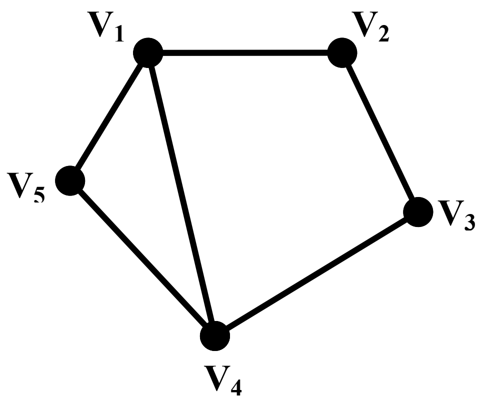
Доповнення $\overline{\mathbf{G}}$

Множина вершин графа $\mathbf{G}$ і його доповнення збігається та будь-які дві вершини, що суміжні в $\mathbf{G}$, несуміжні в його доповненні $\overline{\mathbf{G}}$.

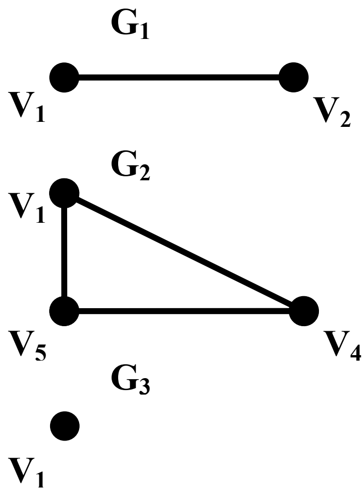
Доповнення графа $\mathbf{G}$ – це доповнення $\mathbf{G}$ до повного графа, на тій же множині вершин.

Підграфом графа $\mathbf{G = (V, E)}$ називається такий граф $\mathbf{G_1 = (V_1, E_1)}$, у якого множина вершин є підмножиною множини вершин графу $\mathbf{G}$, а множина ребер є також підмножиною множини ребер графу $\mathbf{G}$: $\mathbf{V_1 \subseteq V, E_1 \subseteq E}$.

Граф $\mathbf{G}$



Підграфи $\mathbf{G_1, G_2, G_3}$ графу $\mathbf{G}$



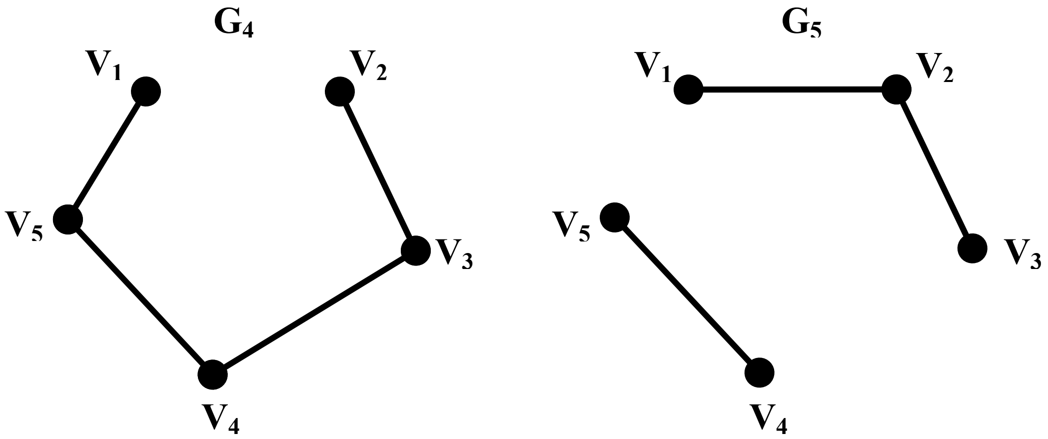
Остовним підграфом графа $\mathbf{G = (V, E)}$ називається такий підграф $\mathbf{G_1 = (V_1, E_1)}$, у якого множина вершин дорівнює множині вершин графу $\mathbf{G}$, а множина ребер є підмножина множини ребер графу $\mathbf{G}$: $\mathbf{V_1 = V, E_1 \subseteq E}$.

Породженим підграфом графа $\mathbf{G}$ (породженим множиною вершин $\mathbf{V_1}$) називається підграф $\mathbf{G_1 = (V_1, E_1)}$, такий, що $\mathbf{V_1 \subseteq V, E_1 \subseteq E}$ й ті вершини, що суміжні у графі $\mathbf{G}$, будуть також суміжні у породженому підграфі.

Наприклад.

1) Для графу $\mathbf{G}$, зображеного на попередньому рисунку, граф $\mathbf{G_1}$ є підграф, породжений множиною вершин $\{\mathbf{v_1, v_2}\}$, $\mathbf{G_2}$ є підграф, що породжений множиною вершин $\{\mathbf{v_1, v_4, v_5}\}$, а граф $\mathbf{G_3}$ є підграф, породжений множиною вершин $\{\mathbf{v_1}\}$.

2) Графи $\mathbf{G_4, G_5}$ для того ж графу $\mathbf{G}$ являються остовними підграфами.



5.6 Ізоморфізм графів

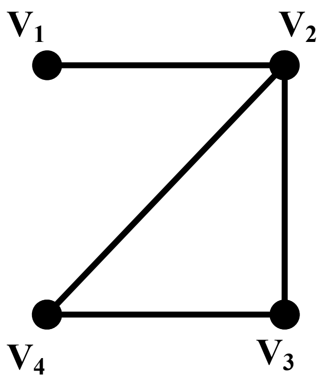
Два графи $\mathbf{G}$ і $\mathbf{H}$ називають **ізоморфними**, якщо існує взаємно однозначна відповідність (бієкція) між множинами їх вершин така, що зберігається відношення суміжності, позначення $\mathbf{G \cong H}$.

Наприклад.

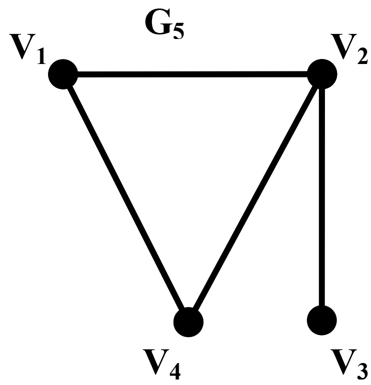
1) Графи $\mathbf{G}$ та $\mathbf{H}$ ізоморфні між собою, бієкція $\mathbf{V} \xrightarrow{\varphi} \mathbf{V'}$, що доводить цей факт, наведена у таблиці.

$\mathbf{u \in V}$	$\mathbf{v_1}$	$\mathbf{v_2}$	$\mathbf{v_3}$	$\mathbf{v_4}$
$\mathbf{\varphi(u) \in V'}$	$\mathbf{v_4}$	$\mathbf{v_3}$	$\mathbf{v_2}$	$\mathbf{v_1}$

$\mathbf{G = (V,E)}$

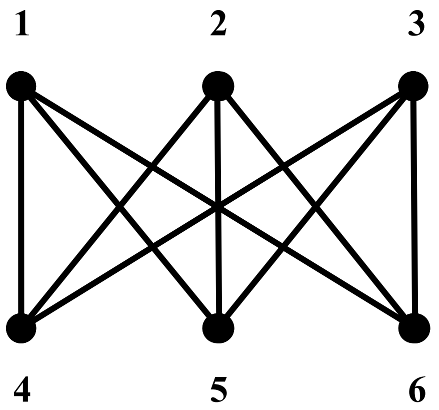


$\mathbf{H = \{V', E'\}}$

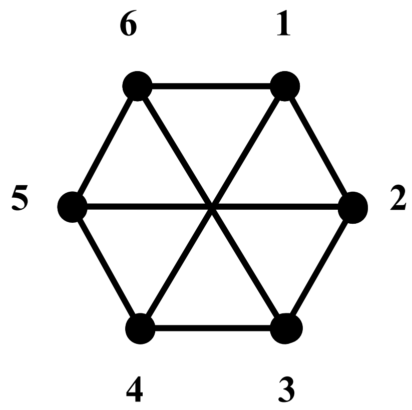


2) Довести ізоморфізм графів: $\mathbf{G_1 = (V_1, E_1) \cong G_2 = (V_2, E_2)}$.

$\mathbf{G_1 = (V_1, E_1)}$



$\mathbf{G_2 = (V_2, E_2)}$



Побудуємо бієкцію між множинами вершин цих двох графів: $\mathbf{V_1 \xrightarrow{\varphi} V_2}$.

$\mathbf{u \in V_1}$ **u**	1	2	3	4	5	6
$\mathbf{\varphi(u) \in V_2}$	1	3	5	6	4	2

Доведемо, що бієкція φ зберігає відношення суміжності між вершинами графів. Це означає наступне: якщо деякі довільні вершини $\mathbf{u, v}$ є суміжними у графі $\mathbf{G_1}$, то й відповідні їм за бієкцією φ вершини: $\mathbf{\varphi(u), \varphi(v)}$ також будуть суміжними у графі $\mathbf{G_2}$.

Перевіримо цей факт для кожної із вершин графу $\mathbf{G_1}$.

Вершина $\mathbf{1}$ графа $\mathbf{G_1}$ суміжна вершинам $\mathbf{4{,}5{,}6}$. Відповідна їй вершина $\mathbf{1}$ графа $\mathbf{G_2}$ повинна бути суміжна вершинам $\mathbf{6{,}4{,}2}$ графа $\mathbf{G_2}$, що відповідають вершинам $\mathbf{4{,}5{,}6}$ графа $\mathbf{G_1}$:

$$\mathbf{1} \to \begin{cases} \mathbf{4} \\ \mathbf{5} \\ \mathbf{6} \end{cases} \Rightarrow \varphi(\mathbf{1}) = \mathbf{1} \to \begin{cases} \varphi(\mathbf{4}) = \mathbf{6} \\ \varphi(\mathbf{5}) = \mathbf{4} \\ \varphi(\mathbf{6}) = \mathbf{2} \end{cases}.$$

Вершина $\mathbf{2}$ графа $\mathbf{G_1}$ суміжна вершинам $\mathbf{4{,}5{,}6}$. Відповідна їй вершина $\mathbf{3}$ графа $\mathbf{G_2}$ повинна бути суміжна вершинам $\mathbf{6{,}4{,}2}$ графа $\mathbf{G_2}$, що відповідають вершинам $\mathbf{4{,}5{,}6}$ графа $\mathbf{G_1}$:

$$\mathbf{2} \to \begin{cases} \mathbf{4} \\ \mathbf{5} \\ \mathbf{6} \end{cases} \Rightarrow \varphi(\mathbf{2}) = \mathbf{3} \to \begin{cases} \varphi(\mathbf{4}) = \mathbf{6} \\ \varphi(\mathbf{5}) = \mathbf{4} \\ \varphi(\mathbf{6}) = \mathbf{2} \end{cases}.$$

Вершина $\mathbf{3}$ графа $\mathbf{G_1}$ суміжна вершинам $\mathbf{4{,}5{,}6}$. Відповідна їй вершина $\mathbf{5}$ графа $\mathbf{G_2}$ повинна бути суміжна вершинам $\mathbf{6{,}4{,}2}$ графа $\mathbf{G_2}$, що відповідають вершинам $\mathbf{4{,}5{,}6}$ графа $\mathbf{G_1}$:

$$\mathbf{3} \to \begin{cases} \mathbf{4} \\ \mathbf{5} \\ \mathbf{6} \end{cases} \Rightarrow \varphi(\mathbf{3}) = \mathbf{5} \to \begin{cases} \varphi(\mathbf{4}) = \mathbf{6} \\ \varphi(\mathbf{5}) = \mathbf{4} \\ \varphi(\mathbf{6}) = \mathbf{2} \end{cases}.$$

Вершина $\mathbf{4}$ графа $\mathbf{G_1}$ суміжна вершинам $\mathbf{1{,}2{,}3}$. Відповідна їй вершина $\mathbf{6}$ графа $\mathbf{G_2}$ повинна бути суміжна вершинам $\mathbf{1{,}3{,}5}$ графа $\mathbf{G_2}$, що відповідають вершинам $\mathbf{1{,}2{,}3}$ графа $\mathbf{G_1}$:

$$\mathbf{4} \to \begin{cases} \mathbf{1} \\ \mathbf{2} \\ \mathbf{3} \end{cases} \Rightarrow \quad \varphi(\mathbf{4}) = \mathbf{6} \to \begin{cases} \varphi(\mathbf{1}) = \mathbf{1} \\ \varphi(\mathbf{2}) = \mathbf{3} \\ \varphi(\mathbf{3}) = \mathbf{5} \end{cases}.$$

Вершина $\mathbf{5}$ графа $\mathbf{G_1}$ суміжна вершинам $\mathbf{1{,}2{,}3}$. Відповідна їй вершина $\mathbf{4}$ графа $\mathbf{G_2}$ повинна бути суміжна вершинам $\mathbf{1{,}3{,}5}$ графа $\mathbf{G_2}$, що відповідають вершинам $\mathbf{1{,}2{,}3}$ графа $\mathbf{G_1}$:

$$\mathbf{5} \rightarrow \begin{cases} \mathbf{1} \\ \mathbf{2} \\ \mathbf{3} \end{cases} \Rightarrow \quad \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{5}) = \mathbf{4} \rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{1}) = \mathbf{1} \\ \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{2}) = \mathbf{3} \\ \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{3}) = \mathbf{5} \end{cases}.$$

Хоча для вершини **6** графу $\mathbf{G_1}$ усі перевірки вже виповнені, повторимо той же хід розміркувань. Вершина **6** графа $\mathbf{G_1}$ суміжна вершинам **1,2,3.** Відповідна їй вершина **2** графа $\mathbf{G_2}$ повинна бути суміжна вершинам **1,3,5** графа $\mathbf{G_2}$, що відповідають вершинам **1,2,3** графа $\mathbf{G_1}$**:**

$$\mathbf{6} \rightarrow \begin{cases} \mathbf{1} \\ \mathbf{2} \\ \mathbf{3} \end{cases} \Rightarrow \quad \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{6}) = \mathbf{2} \rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{1}) = \mathbf{1} \\ \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{2}) = \mathbf{3} \\ \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{3}) = \mathbf{5} \end{cases}.$$

Необхідні умови ізоморфізму двох графів:

1) однакова кількість вершин;

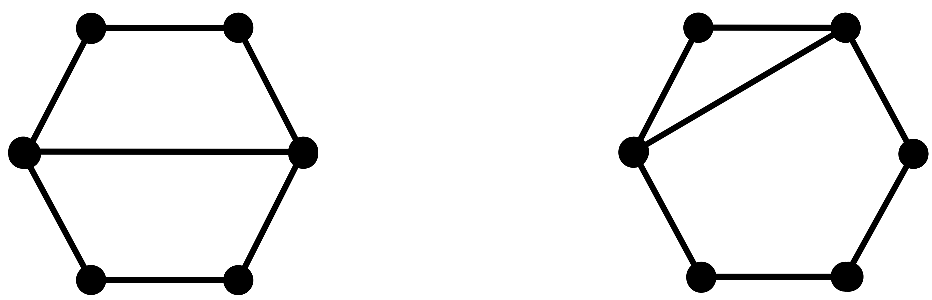
2) однакова кількість ребер;

3) однакові ступеневі послідовності.

Наприклад.

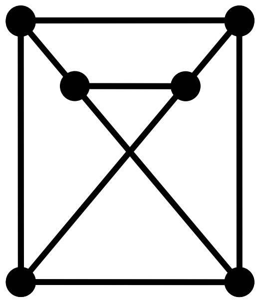
1) Приклади графів, для яких виконуються необхідні умови ізоморфізму, але графи не є ізоморфними.

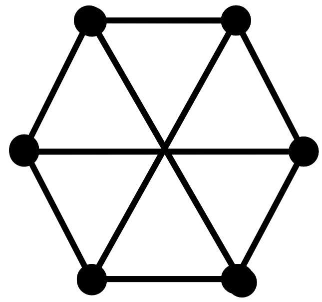
а)

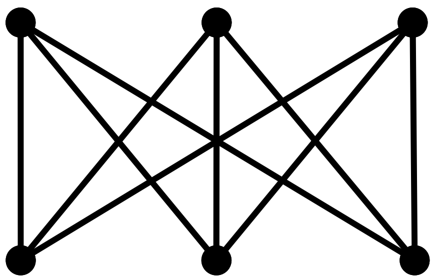


б)

2) Графи, що зображено на рисунку нижче є ізоморфними між собою, більш того це два зображення відомого повного дводольного графу $\mathbf{K_{3,3}}$ (із задачі про три будинки та три колодязі).







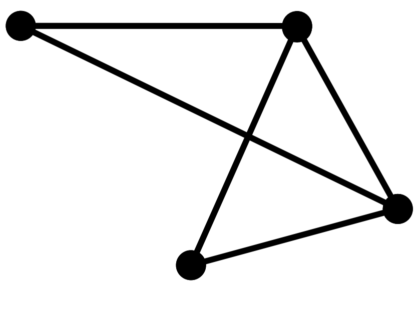
5.7 Ізоморфна вкладеність

Граф $\mathbf{H}$ називається **ізоморфно-вкладеним** у граф $\mathbf{G}$, якщо граф $\mathbf{H}$ є ізоморфним деякому породженому підграфу графа $\mathbf{G}$.

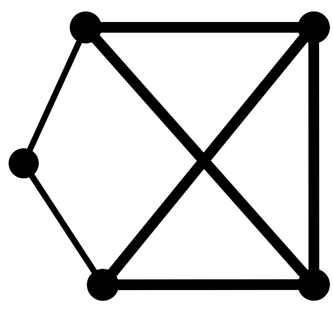
1) Граф $\mathbf{H}$ є ізоморфно-вкладеним у граф $\mathbf{G}$ за визначенням.

Породжений підграф графу $\mathbf{G}$, що ізоморфний графу $\mathbf{H}$, виділений на рисунку графу $\mathbf{G}$.

H

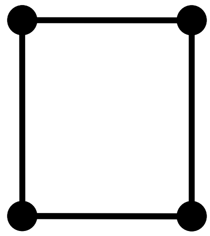


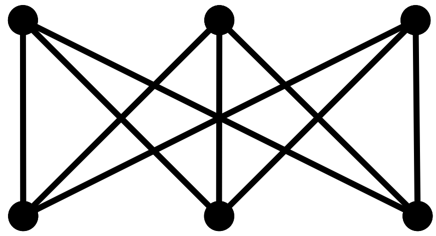
G

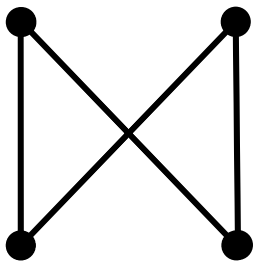


2) Граф $\mathbf{H}$ є ізоморфно-вкладеним у граф $\mathbf{G}$, тому що він ізоморфний графу $\mathbf{K_{2,2}}$, який у свою чергу є породженим підграфом графу $\mathbf{G}$, що є графом $\mathbf{K_{3,3}}$.

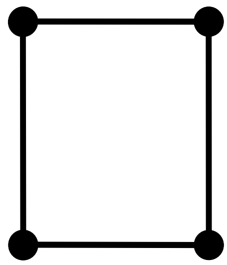
H **G**







$\mathbf{K_{2,2}}$



5.8 Незалежна множина вершин графа

Незалежною множиною вершин (НМВ) графа $\mathbf{G}$ або **внутрішньо-стійкою множиною** називається така підмножина $\mathbf{S}$ вершин графа $\mathbf{G}$, що будь-які дві вершини цієї множини не суміжні між собою**.**

Підграф, породжений незалежною множиною, є порожнім.

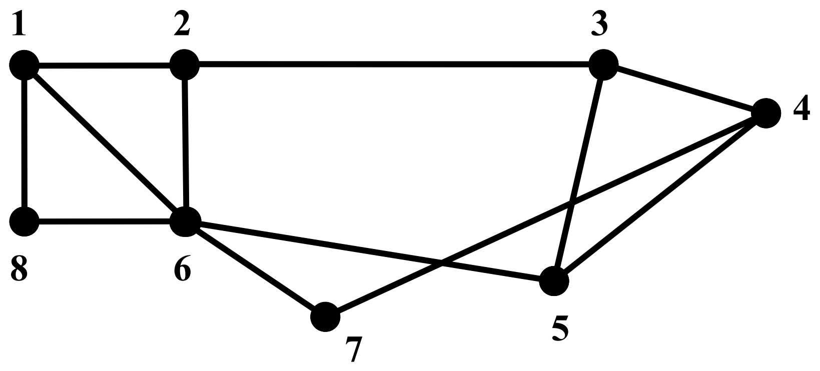
Незалежна множина вершин називається **максимальною**, якщо вона не є власною підмножиною іншої незалежної множини із більшою кількістю вершин.

Незалежна множина вершин називається **найбільшою**, якщо вона найбільша за потужністю.

Потужність найбільшої незалежної множини називається **числом незалежності**.

Позначається число незалежності, як: $\alpha(\mathbf{G})$.

Наприклад.



$\mathbf{S_i, i = \overline{1,10}}$ – приклади незалежних множин.

$\underline{\mathbf{S_1 = \{1,3\}}}$, $\mathbf{S_2 = \{1,3,7\}}$, $\mathbf{S_3 = \{1,4\}}$, $\mathbf{S_4 = \{1,5,7\}}$, $\mathbf{S_5 = \{2,4,8\}}$, $\mathbf{S_6 = \{2,5,7,8\}}$, $\underline{\mathbf{S_7 = \{2,7,8\}}}$, $\mathbf{S_8 = \{3,6\}}$, $\mathbf{S_9 = \{3,7,8\}}$, $\mathbf{S_{10} = \{4,6\}}$.

Максимальними незалежними множинами є усі перераховані НМВ, окрім підкреслених, тобто $\mathbf{S_2, S_3, S_4, S_5, S_6, S_8, S_9, S_{10}}$. Найбільша НМВ для зображеного графу – $\mathbf{S_6}$, тому число незалежності дорівнює $\alpha(\mathbf{G}) = \mathbf{4}$.

5.9 Кліка

Клікою графа $\mathbf{G}$ називається така підмножина вершин $\mathbf{S}$ графа $\mathbf{G}$, що будь-які дві вершини у ній суміжні.

Кліка – антипод незалежної множини вершин.

Підграф, породжений клікою, повним.

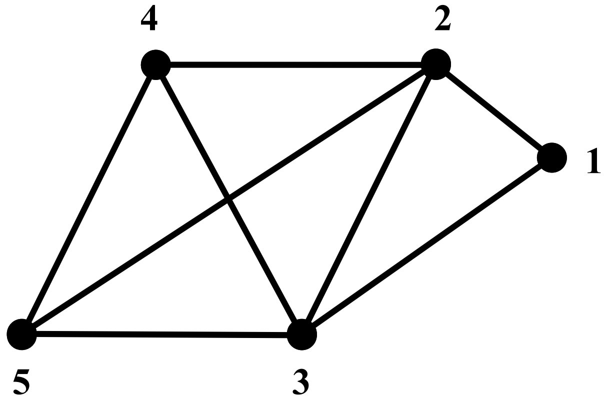
Максимальною клікою графа $\mathbf{G}$ називають таку кліку графа $\mathbf{G}$, що не є власною підмножиною іншої кліки графа із більшим числом вершин.

Найбільша кліка – кліка максимальна за потужністю.

Потужність найбільшої кліки називається **кліковим числом** або **щільністю графа**. Позначається: $\varphi(\mathbf{G})$.

Наприклад.

У наступному графі $\mathbf{S_i, i = \overline{1,6}}$ – кліки: $\mathbf{S_1 = \{1,2\}}$, $\mathbf{S_2 = \{1,2,3\}}$, $\mathbf{S_3 = \{2,3,4\}}$, $\mathbf{S_4 = \{2,3,5\}}$, $\mathbf{S_5 = \{2,4,5\}}$, $\mathbf{S_5 = \{3,4,5\}}$, $\mathbf{S_6 = \{2,3,4,5\}}$. Серед них максимальними являються кліки: $\mathbf{S_2 = \{1,2,3\}}, \mathbf{S_6 = \{2,3,4,5\}}$, а найбільшою – $\mathbf{S_6 = \{2,3,4,5\}}$,тому клікове число або щільність графу дорівнює: $\varphi(\mathbf{G}) = \mathbf{4}$.



5.10 Домінуючі множини вершин графа

Домінуючою (зовнішньо-стійкою) множиною вершин (ДМВ) графа $\mathbf{G}$ називається така підмножина вершин графа $\mathbf{G}$, що

$$\mathbf{S} \subseteq \mathbf{V} : \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V} \setminus \mathbf{S}, \quad \exists \mathbf{w} \in \mathbf{S}, \quad \exists \mathbf{e} = \{\mathbf{v}, \mathbf{w}\} \in \mathbf{E},$$

тобто для кожної вершини, що не входить у $\mathbf{S}$, існує ребро, що йде в цю вершину із деякої вершини $\mathbf{S}$.

Домінуюча множина називається **мінімальною**, якщо немає іншої домінуючої множини, що міститься в цій множині.

ДМВ является **найменшою,** якщо вона має найменшу потужність серед всіх мінімальних ДМВ.

Потужність найменшої домінуючої множини називається **числом домінування**. Позначається $\beta(\mathbf{G})$.

Зауваження

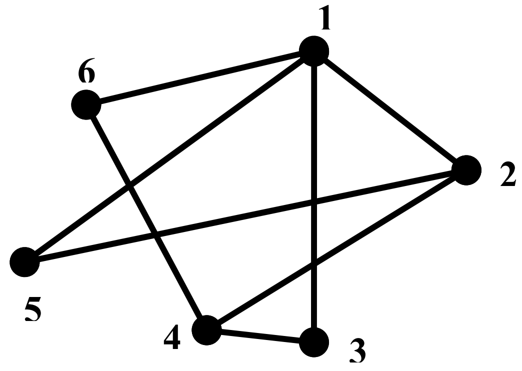
Незалежна множина вершин графа є максимальною (не обов'язково найбільшою), тоді й тільки тоді, якщо вона домінуюча.

Домінуюча множина вершин графа не обов'язково є незалежною множиною.

Підмножина вершин графа, що є одночасно незалежною та домінуючою називається **ядром.**

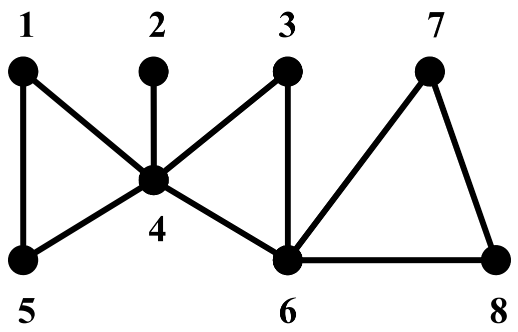
Наприклад.

Нехай задано граф $\mathbf{G}$.



Серед них тільки $\underline{S_1 = \{1,4,6\}}$ не є мінімальною ДМВ. $S_i, i = \overline{2,5}$ є прикладами найменших ДМВ, тому число домінування для графу G дорівнює $\beta(G) = 2$. ДМВ $S_6 = \{3,5,6\}$ є мінімальною, але не найменшою. Домінуючі множини із другої по шосту є також незалежними множинами, а тому й ядрами цього графу.

2) Нехай задано граф H:



Для графу H множини вершин $\{1,2,3,7\}$, $\{1,2,3,8\}$, $\{2,3,5,7\}$, $\{2,3,5,8\}$ являються прикладами <u>найбільших</u> незалежних множин вершин графу H, тому число незалежності для нього дорівнює $\alpha(H) = 4$.

А, наприклад, множина вершин $\{4,7\}$ є максимальною, але не найбільшою незалежною множиною. Усі множини вершин графу $H: \{1,2,3,7\}, \{1,2,3,8\}, \{2,3,5,7\}, \{2,3,5,8\}$ та $\{4,7\}$ є також домінуючими, а тому й ядрами цього графу. Але, наприклад, множина $\{4,6\}$ є домінуючою, але не є незалежною.

З другої сторони, множина $\{4,6\}$ являється мінімальною й найменшою ДМВ графу H, тому число домінування цього графу складає: $\beta(H) = 2$.

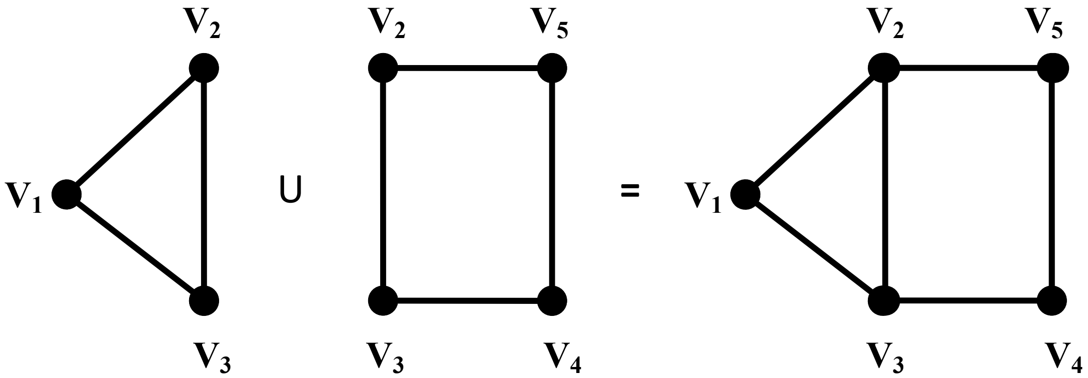
5.11 Операції над графами та їх елементами

5.11.1 Бінарні операції над графами

Нехай задано два неорієнтованих графа: $\mathbf{G_1=(V_1,E_1)}$ та $\mathbf{G_2=(V_2,E_2)}$.

Об'єднанням двох графів $\mathbf{G_1}$ та $\mathbf{G_2}$ називається такий граф $\mathbf{G=(V,E)}$, множина вершин якого є $\mathbf{V=V_1 \cup V_2}$ та множина ребер є $\mathbf{E=E_1 \cup E_2}$.

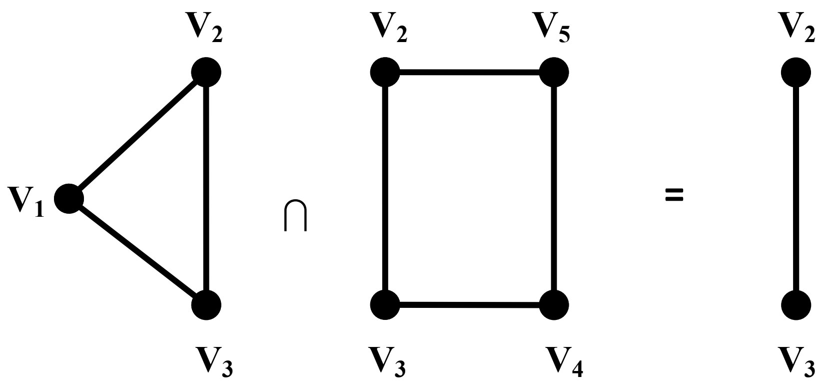
Ілюстрація операції об'єднання двох графів.



Перетином двох графів $\mathbf{G_1}$ і $\mathbf{G_2}$ називається такий граф $\mathbf{G}$, у якого множина вершин є $\mathbf{V=V_1 \cap V_2}$ та множина ребер є $\mathbf{E=E_1 \cap E_2}$.

Непересічними графами називаються графи $\mathbf{G_1}$ і $\mathbf{G_2}$ такі, що $\mathbf{E_1 \cap E_2 = \varnothing}$ та $\mathbf{V_1 \cap V_2 = \varnothing}$ (немає загальних ребер та немає загальних вершин).

Ілюстрація операції перетину двох графів.



5.11.2 Операції над елементами графів

До операцій над елементами графу відносять:

- операцію видалення вершини;
- операцію видалення ребра;
- операцію замикання або ототожнення вершин;
- операцію стягування ребер.

Видалення вершини

Нехай задано граф $\mathbf{G}=(\mathbf{V},\mathbf{E})$ та його довільну вершину $\mathbf{u}\in\mathbf{V}$.

Видалення вершини $\mathbf{u}$ – це унарна операція над графом $\mathbf{G}$, що полягає у побудові породженого підграфа графа $\mathbf{G}$ на множині вершин $\mathbf{V}\setminus\{\mathbf{u}\}$.

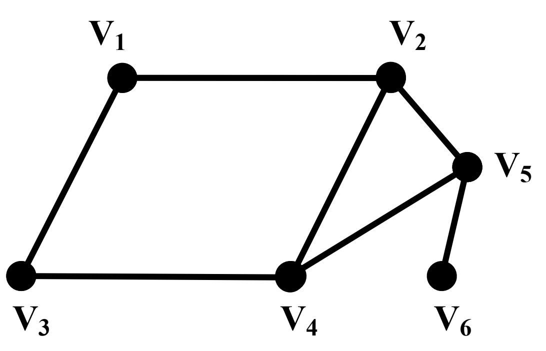
Видалення ребра

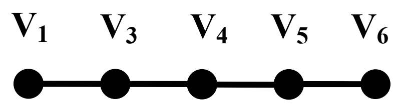
Нехай задано граф $\mathbf{G}=(\mathbf{V},\mathbf{E})$ та його довільне ребро $\mathbf{e}\in\mathbf{E}\,\mathbf{e},$ тоді граф $\mathbf{G'}=(\mathbf{V'},\mathbf{E'})=\mathbf{G}\setminus\mathbf{e}$ виходить шляхом побудови підграфа графа $\mathbf{G}$, із тією ж множиною вершин $\mathbf{V'}=\mathbf{V}$ та множиною ребер $\mathbf{E'}=\mathbf{E}\setminus\{\mathbf{e}\}$.

1) Ілюстрація операції видалення вершини $\mathbf{v_2}$ графу $\mathbf{G}$.

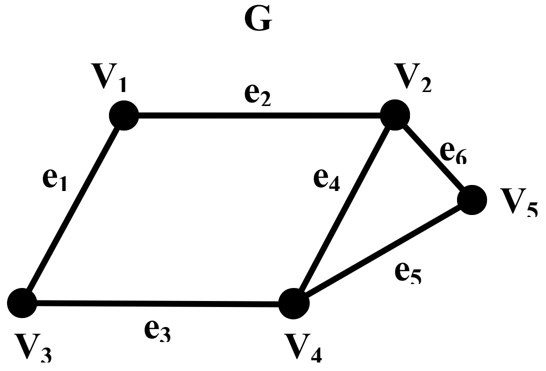
При видаленні вершини, вочевидь, що видаляються ребра, для яких ця вершина є кінцевою.

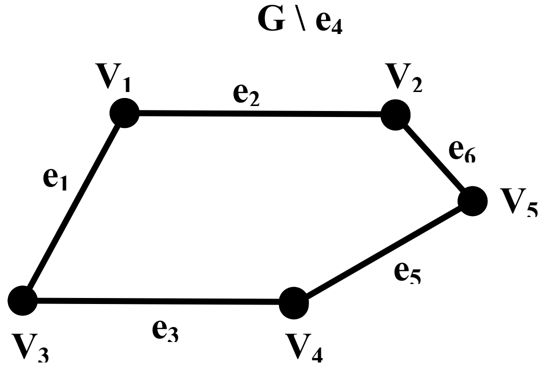
G **G\V$_2$**





2) Ілюстрація операції видалення ребра $\mathbf{e_4}$ графу $\mathbf{G}$.





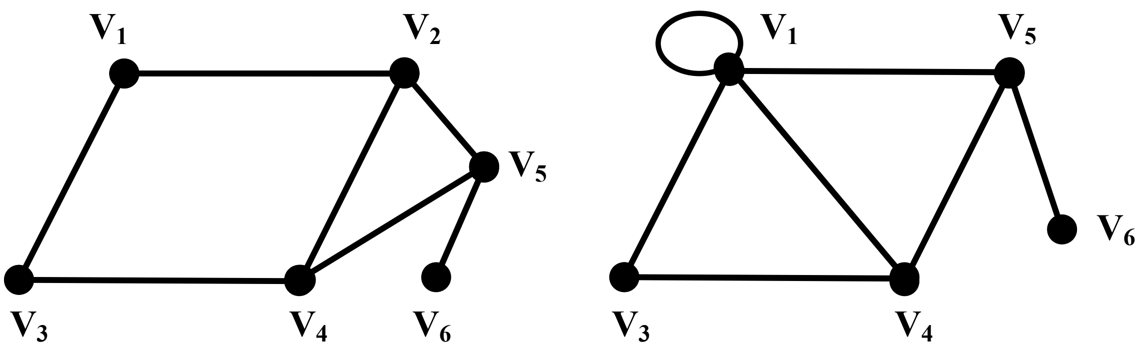
Замикання або ототожнення вершин

Пара вершин $\mathbf{v_i}$ та $\mathbf{v_j}$ у графі $\mathbf{G}$ **замикається**, якщо вони замінюються такою новою вершиною $\mathbf{u}$ (або остається позначка однієї із вершин), що всі ребра графа $\mathbf{G}$ інцидентні вершинам $\mathbf{v_i}$ та $\mathbf{v_j}$, стають інцидентними цій новій вершині $\mathbf{u}$.

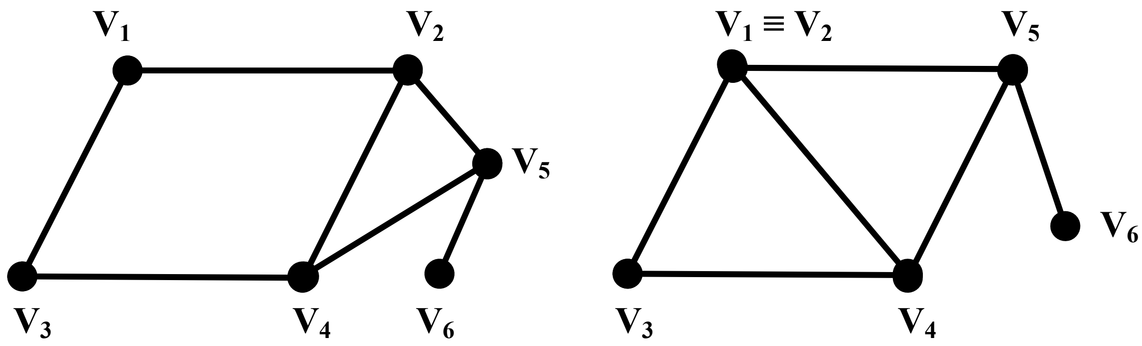
Стягування

Стягування ребра $\mathbf{e=\{u,v\}}$ означає ототожнення його суміжних вершин $\mathbf{u}$ та $\mathbf{v}$.

1) Ілюстрація операції замикання вершин $\mathbf{v_1}$ та $\mathbf{v_2}$.



2) Ілюстрація операції стягування ребра $\{\mathbf{v_1},\mathbf{v_2}\}$.



5.12 Завдання для самостійної роботи

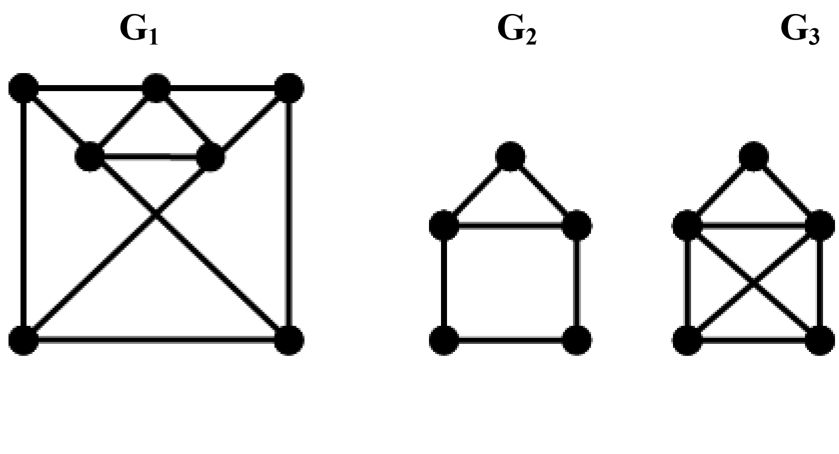
1. Відновити граф за матрицею інцидентності.

	1	2	3	4	5	6
1	0	1	1	0	1	1
2	0	1	0	0	1	0
3	1	0	0	0	0	1
4	1	0	1	0	0	1

2. Відновити граф за матрицею суміжності. Побудувати матрицю інцидентності.

	1	2	3	4
1	0	0	1	1
2	0	0	1	0
3	1	1	0	1
4	1	0	1	0

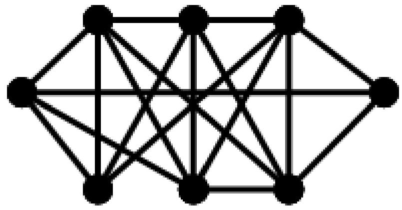
3. Визначити ізоморфну вкладеність графів $\mathbf{G_2}, \mathbf{G_3}$ у $\mathbf{G_1}$.



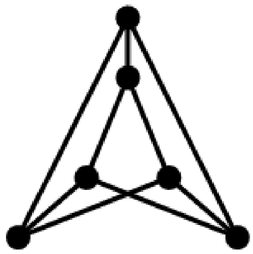
4. Для графа $\mathbf{G}$ знайти:

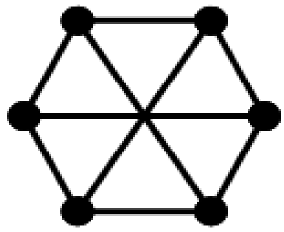
а) найбільший $\mathbf{K_p}$, $\mathbf{O_n}$, изоморфно-вкладені в $\mathbf{G}$;

б) найбільшу зірку, изоморфно-вкладену в $\mathbf{G}$.

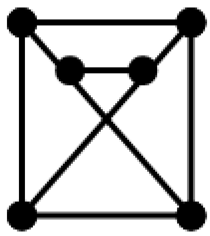


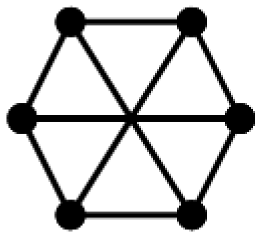
5. Визначити та довести ізоморфізм наступних графів.



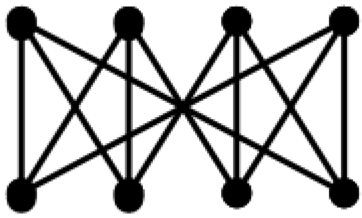


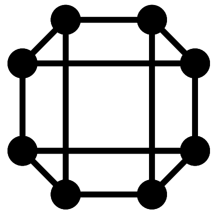
6. Визначити та довести ізоморфізм графів.



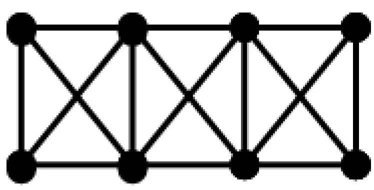


7. Визначити та довести ізоморфізм графів.

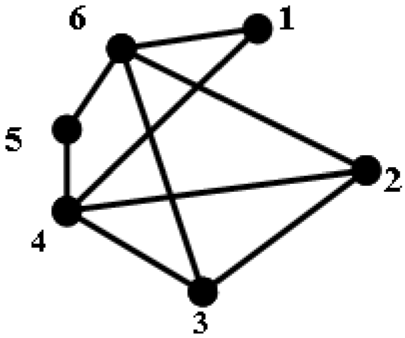




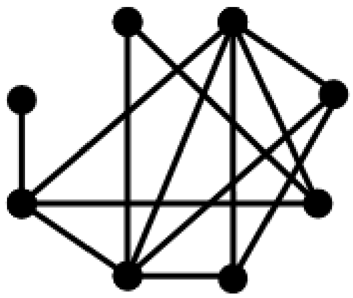
8. Привести усі максимальні та найбільші незалежні множини графа. Знайти число незалежності.



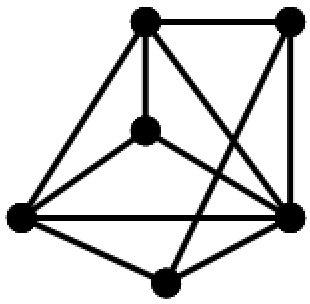
9. Привести усі максимальні та найбільші незалежні множини графа. Знайти число незалежності.



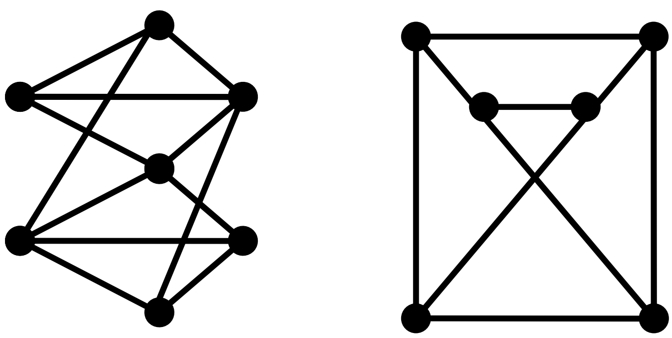
10. Привести усі кліки графа максимальні та найбільші **G** . Знайти кліковe число.



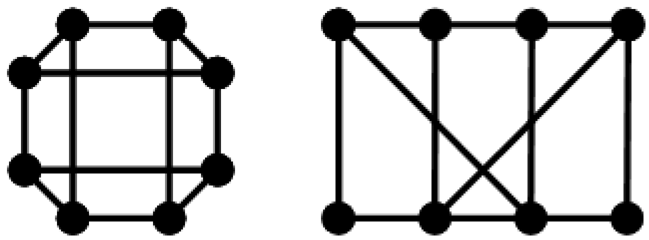
11. Привести усі кліки графа максимальні та найбільші **G** . Знайти кліковe число.



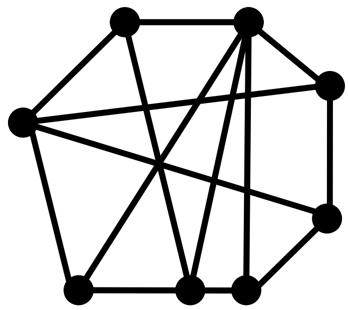
12. Визначити, чи є наступні графи дводольними, тридольныма або регулярними?



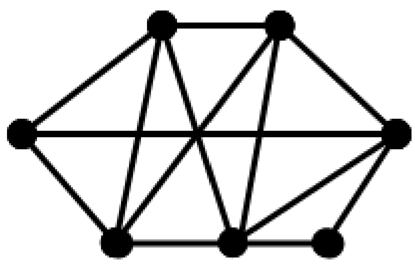
13. Визначити, чи є наступні графи дводольними, тридольными або регулярними?



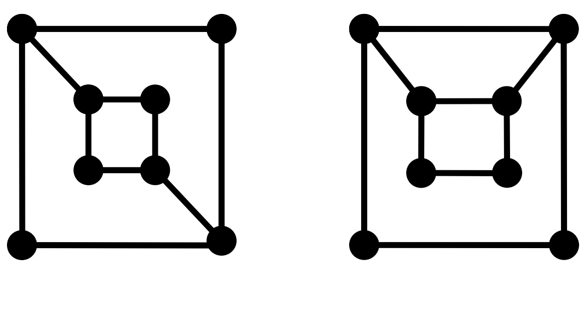
14. Визначити всі найменші та мінімальні домінуючі множини графа. Визначити число домінування.

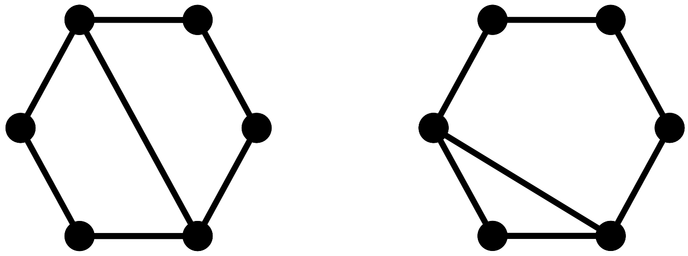


15. Визначити всі найменші та мінімальні домінуючі множини графа. Визначити число домінування.

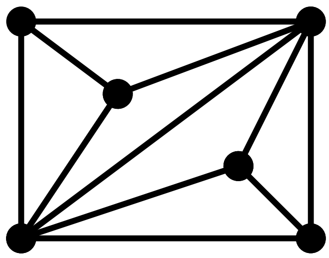


16. Визначити ізоморфні чи ні наступні графи. Відповідь обґрунтувати.





17. Привести усі кліки графа максимальні та найбільші $\mathbf{G}$. Знайти клікове число.



5.13 Контрольні питання

1. Що таке неорієнтовані граф?

2. Визначення підграфа, остовного і породженого підграфа. Доповнення графа.

3. Ізоморфізм графів. Ізоморфна вкладеність.

4. Помічені і абстрактні графи. Повні, порожні, дводольні та регулярні графи. Простий, псевдограф та мультиграф. Зірка.

5. Ступені вершин графа. Лема про рукостискання. Ізольована та домінуюча вершини.

6. Незалежна множина. Максимальне і найбільша незалежна множина. Число незалежності.

7. Кліка. Максимальна і найбільша кліка. Клікове число або щільність графа.

8. Домінуюча множина. Мінімальна та найменша домінуюча множина. Число домінування.

9. Обчислити число ребер в повному графі. Обчислити число різних помічених $\mathbf{p}$-графів, число різних помічених $\mathbf{(p,q)}$-графів.

РОЗДІЛ 6
МАРШРУТИ І ЗВ'ЯЗНІСТЬ У НЕОРІЄНТОВАНИХ ГРАФАХ

6.1 Види маршрутів неорграфів

Маршрут $\mathbf{M = (v_0, e_1, v_1, e_2, ..., e_n, v_n)}$ неорієнтованого графу $\mathbf{G = (V, E)}$ – скінченна послідовність вершин та ребер, що чергуються, починається й закінчується вершиною, кожне ребро маршруту з’єднує дві вершини маршруту – попередню та наступну.

Кінцеві вершини маршруту – $\mathbf{v_0}$ та $\mathbf{v_n}$, **внутрішні** – всі інші вершини.

Маршрут неорграфа повністю задається переліком вершин або/і ребер, в той же час, якщо треба тільки підкреслити, що маршрут починається у вершині $\mathbf{v_0}$, а закінчується $\mathbf{v_n}$ маршрут позначається, як: $\mathbf{M = (v_0, v_n)}$ або $\mathbf{M = (v_0 - v_n)}$.

Замкнутий маршрут $\mathbf{M = (v_0, v_n)}$ – кінцеві вершини співпадають $\mathbf{(v_0 = v_n)}$, інакше **– відкритий** $\mathbf{(v_0 \neq v_n)}$.

Ланцюг – маршрут, усі ребра якого розрізняються (крім можливо кінцевих).

Простий ланцюг – маршрут, усі вершини якого (крім можливо кінцевих), а отже і ребра, розрізняються.

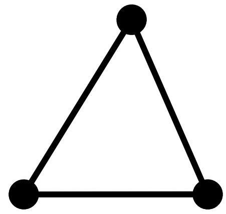
Цикл – замкнутий ланцюг.

Простий цикл – замкнутий простий ланцюг, $\mathbf{n \geq 3}$, $\mathbf{n}$ – кількість вершин.

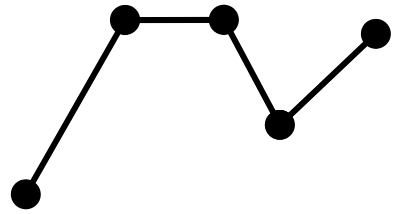
Позначення: $\mathbf{C_n}$ **–** простий цикл, $\mathbf{n \geq 3}$**,** $\mathbf{n}$ **–** кількість вершин.

$\mathbf{P_n}$ **–** простий ланцюг, $\mathbf{n}$ **–** кількість вершин.

$\mathbf{C_3}$

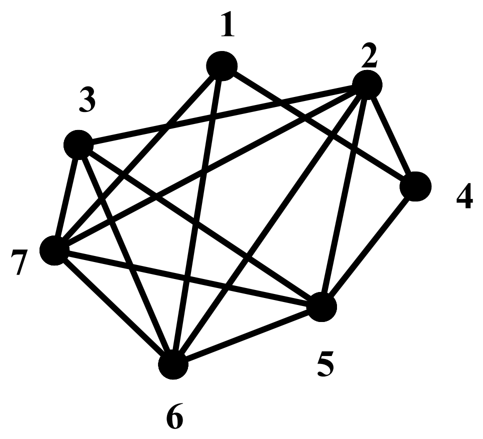


$\mathbf{P_5}$



Наприклад.

Наведений граф **G**. Навести приклади маршруту, ланцюга, простого ланцюга, замкнутого маршруту, циклу і простого циклу.



Маршрут **M1 = (1,4,5,3,7,2,4,5,6)**. Для маршруту **M1** вершини **1** та **6** – кінцеві; **2,3,4,5,7** – внутрішні.

Маршрут **M1** – відкритий, не ланцюг і не простий ланцюг (ребро **{4,5}** повторюється).

Маршрут **M2 = (1,4,5,3,7 ,2,4,5,6,1)**.

Маршрут **M2** – замкнутий, не цикл і не простий цикл (ребро **{4,5}** повторюється).

Маршрут **M3 = (3,7,6,3,2,5)**.

Маршрут **M3** – не простий ланцюг (вершина **3** повторюється).

Маршрут **M4 = (3,7,6,3,2,5,3)**.

Маршрут **M4** – не простий цикл (вершина **3** повторюється).

Маршрут **M5 = (1,4,5,3,6 ,7,2)** . Маршрут **M5** – простий ланцюг.

Маршрут **M6 = (1,4,5,6,7,1)**. Маршрут **M6** – простий цикл.

Твердження

Усякий **(u,v)-** маршрут містить простий **(u,v)-** ланцюг.

Усякий цикл містить простий цикл.

6.2 Зв'язність у неографах

Зв'язний неорієнтований граф $\mathbf{G}$ – будь-яка пара вершин з'єднана маршрутом (простим ланцюгом) в $\mathbf{G}$.

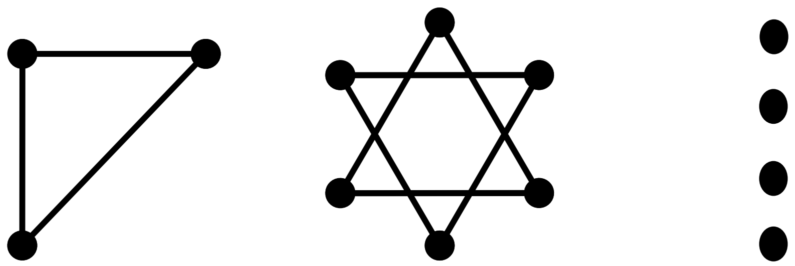
Компонента зв'язності або компонента неографа $\mathbf{G}$ – максимальний за включенням вершин зв'язний підграф графа $\mathbf{G}$.

Дві вершини $\mathbf{u}$ та $\mathbf{v}$ називають **зв'язаними у неографі** $\mathbf{G}$, якщо в $\mathbf{G}$ існує $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$-маршрут.

Кожна вершина неографа вважається **зв'язаною сама із собою**.

Наприклад.

На рисунку зображені три графи. Перший з них являється зв'язним, складається із однієї компоненти зв'язності. Другий складається із двох компонент зв'язності (два трикутники), тому є незв’язним. Третій граф не є зв’язним, має у своєму складі чотири компоненти.



Теореми про зв’язні графи

Теорема 1

Будь-який неограф $\mathbf{G}$ може бути представлений, як об'єднання своїх непересічних компонент зв'язності:

$$\mathbf{G} = \bigcup_{i=1}^{k} \mathbf{G_i}, \mathbf{G_i} \cap \mathbf{G_j} = \varnothing, \quad \mathbf{i} \neq \mathbf{j}, \quad \mathbf{i}, \mathbf{j} = \overline{\mathbf{1}, \mathbf{k}}$$

Доведення.

Дано граф $\mathbf{G} = (\mathbf{V}, \mathbf{E})$. Визначимо на множині його вершин $\mathbf{V}$ наступне бінарне відношення ρ. Дві довільні вершини $\mathbf{u}$ та $\mathbf{v}$ графу $\mathbf{G}$ знаходяться у відношенні ρ, якщо існує $(\mathbf{u,v})$- маршрут у графі $\mathbf{G}$ або ці вершини є зв'язаними у графі $\mathbf{G}$.

Відношення зв'язності вершин є відношенням еквівалентності:

1) рефлексивно:

$\forall\ \mathbf{v \in V} \quad \mathbf{v\rho v}$;

2) симетрично:

$\forall\ \mathbf{u, v \in V} \quad \mathbf{u\rho v \to v\rho u}$,

$\mathbf{u\rho v \Rightarrow\ \exists M = (u, e_1, ..., e_n, v) \Rightarrow}$

$\mathbf{\exists\, M' = (v, e_n, ..., e_1, u) \Rightarrow v\rho u}$;

3) транзитивно:

$\forall\ \mathbf{u, v, w \in V} \quad \mathbf{u\rho v, v\rho w \Rightarrow u\rho w}$,

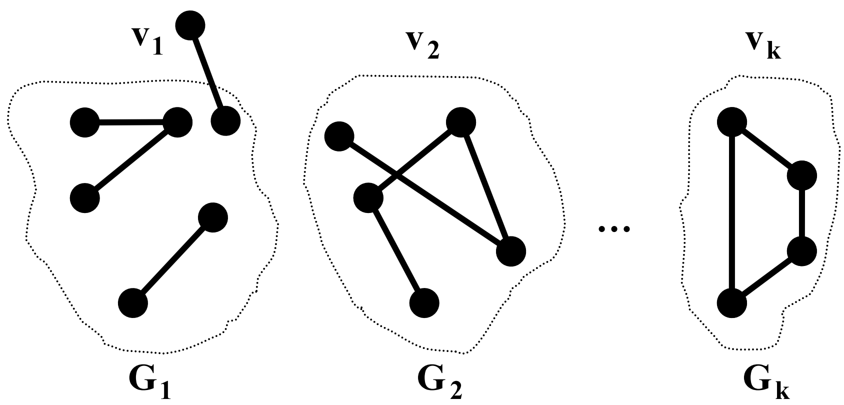
$\mathbf{u\rho v \Rightarrow\ \ \exists\ M_1 = (u, e_1^1, ...e_n^1, v)}$,

$\mathbf{v\rho w \Rightarrow\ \ \exists\ M_2 = (v,\ e_1^2, ..., e_m^2, w) \Rightarrow}$

$\mathbf{\exists\, M = M_1 \cup M_2 =}$

$\mathbf{= (u,\ e_1^1, ..., e_n^1,\ v,\ e_1^2, ..., e_m^2, w) \Rightarrow u\rho w.}$

Відношення ρ є відношенням еквівалентності, отже, воно задає розбиття множини вершин $\mathbf{V}$ графу на класи еквівалентності: $\mathbf{V{=}V_1 \cup ... \cup V_k}$, $\forall\, \mathbf{i, j = \overline{1,k}}\ \ \mathbf{i \neq j}\quad \mathbf{V_i \cap V_j = \varnothing}$, $\mathbf{V_i \subseteq V.}$ Тоді, породжені підграфи на множинах $\mathbf{V_i}$ і тільки вони являються, за визначенням, компонентами зв'язності графа $\mathbf{G}$, тому $\mathbf{G = \bigcup\limits_{i=1}^{k} G_i,\ G_i \bigcap G_j = \varnothing,\ i \neq j, i, j = \overline{1,k}}$, що й треба було довести.



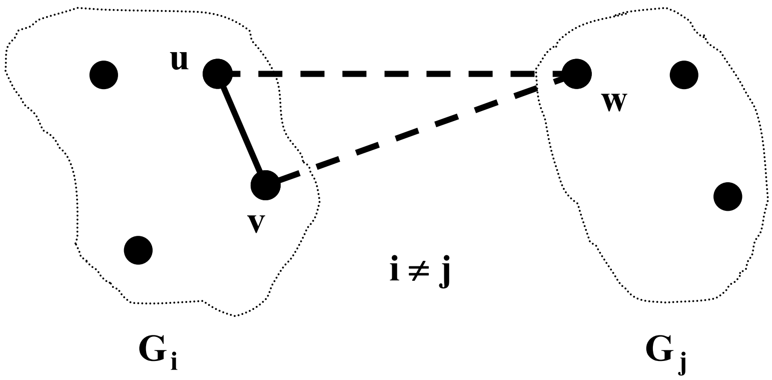
Теорема 2

Для довільного неорграфа або граф $\mathbf{G}$, або його доповнення $\overline{\mathbf{G}}$ являються зв'язними

Доведення.

Нехай граф $\mathbf{G} = (\mathbf{V}, \mathbf{E})$ не являється зв'язним. Покажемо, що його доповнення є зв'язним графом. За теоремою 1 граф можна представити у вигляді об'єднання його компонент зв'язності.

Візьмемо дві довільні компоненти графа $\mathbf{G}$: $\mathbf{G_i}, \mathbf{G_j}, \mathbf{i} \neq \mathbf{j};\ \mathbf{i}, \mathbf{j} = \overline{\mathbf{1}, \mathbf{k}}.$ Побудуємо граф $\overline{\mathbf{G}}$, що є доповненням графа $\mathbf{G}$ за визначенням. Беремо довільні вершини $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ і нехай $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ належать одній компоненті, а $\mathbf{w}$ – інший. Для будь-якої пари вершин із різних компонент $\mathbf{G}$ (наприклад, $\mathbf{u}$ та $\mathbf{w}$, або $\mathbf{v}$ та $\mathbf{w}$) в доповненні існує маршрут довжини один (ребро), за визначенням доповнення.



Для будь-якої пари вершин із однієї компоненти графа $\mathbf{G}$ (наприклад, $\mathbf{u}$ та $\mathbf{v}$) в додатку існує маршрут довжини 2 (через вершину, наприклад $\mathbf{w}$, другої компоненти). Маємо, що будь-які дві вершини у доповненні $\overline{\mathbf{G}}$ з'єднані між собою маршрутом, отже, граф $\overline{\mathbf{G}}$ є зв'язним. Зворотне доказується аналогічно.

Будь-який незв'язний граф містить принаймні дві компоненти зв'язності

6.3 Число вершинної та реберної зв'язності

Число вершинної зв'язності $\chi(\mathbf{G})$ – найменше число вершин, видалення яких призводить до незв'язного або одновершинного графу.

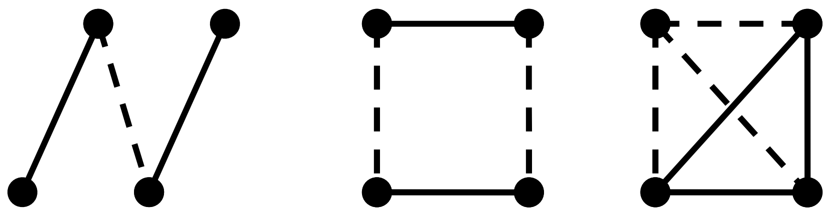
Число реберної зв'язності $\lambda(\mathbf{G})$ – найменше число ребер, видалення яких призводить до незв'язного або одновершинного графу.

$\chi(\mathbf{K_n}) = \mathbf{n-1}$; $\chi(\mathbf{C_n}) = \mathbf{2}$; $\chi(\mathbf{P_n}) = \mathbf{1}$.

$\lambda(\mathbf{K_n}) = \mathbf{n-1}$; $\lambda(\mathbf{C_n}) = \mathbf{2}$; $\lambda(\mathbf{P_n}) = \mathbf{1}$. Вважається, що $\lambda(\mathbf{K_1}) = \mathbf{0}$.

Наприклад.

$$\lambda(\mathbf{P_4}) = \mathbf{1}; \quad \lambda(\mathbf{C_4}) = \mathbf{2}; \quad \lambda(\mathbf{K_4}) = \mathbf{3}.$$



$\mathbf{P_4}$ $\mathbf{C_4}$ $\mathbf{K_4}$

$$\chi(\mathbf{P_4}) = \mathbf{1}; \quad \chi(\mathbf{C_4}) = \mathbf{2}; \quad \chi(\mathbf{K_4}) = \mathbf{3}.$$

Точка зчленування (вершина, що розділяє) – вершина $\mathbf{v}$ графу $\mathbf{G}$, видалення якої збільшує кількість компонент зв'язності графу $\mathbf{G}$.

Міст – ребро, видалення якого призводить до збільшення числа компонент зв'язності.

Неподільний граф – зв'язний граф без точок зчленування.

Блок – максимальний відносно включення вершин неподільний підграф графу **G**.

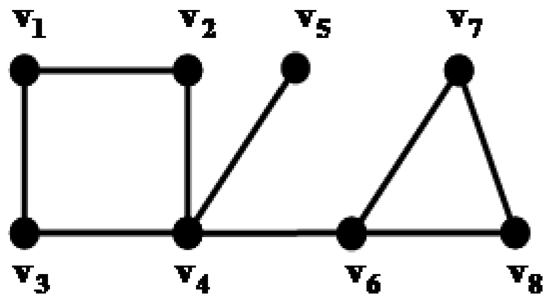
Твердження

Будь-які два блоки графа мають не більше однієї загальної вершини. Зокрема, всяке ребро графа входить тільки в один його блок.

Якщо деяка вершина графа входить більш ніж в один блок графа, то вона є точкою зчленування цього графа.

Якщо блок графа містить дві його деякі вершини, то він містить і всякий простий ланцюг цього графа, що зв'язує ці вершини.

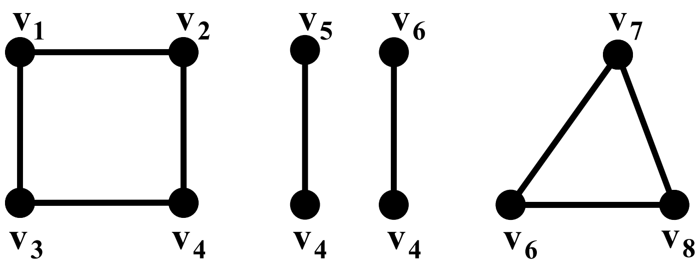
Наприклад. Нехай задано граф $\mathbf{G}$.



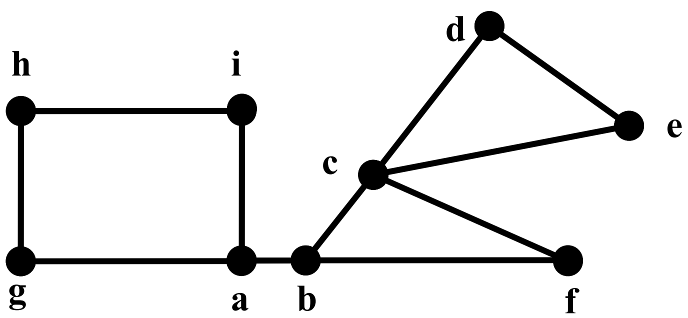
Граф є зв'язним, вершинна зв'язність дорівнює $\chi(\mathbf{G}) = \mathbf{1}$, реберна зв'язність дорівнює $\lambda(\mathbf{G}) = \mathbf{1}$. Точки зчленування $\mathbf{v_4, v_6}$.

Ребро $\{\mathbf{v_4, v_6}\}$ являється мостом графу.

Множина блоків графу $\mathbf{G}$.

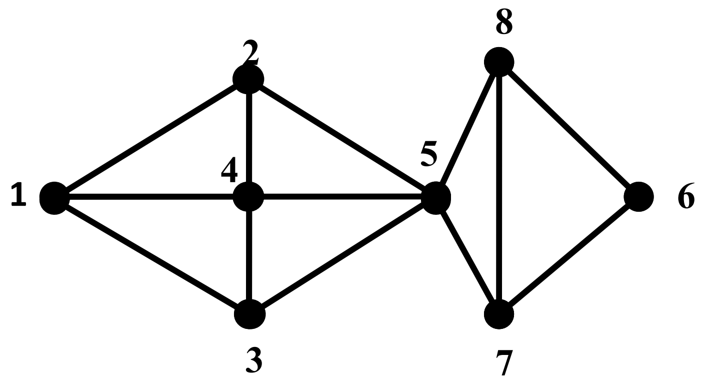


Граф $\mathbf{G1}$:



Для графу $\mathbf{G1}$ вершинна та реберна зв'язність дорівнюють одиниці, $\chi(\mathbf{G1}) = \lambda(\mathbf{G1}) = \mathbf{1}$, точки зчленування – вершини $\mathbf{a, b, c}$; міст – ребро $\{\mathbf{a,b}\}$. Граф $\mathbf{G}$ не є неподільним, блоки графу $\mathbf{G1}$: $\{\mathbf{h,i,g,a}\}, \{\mathbf{a,b}\}, \{\mathbf{b,c,f}\}, \{\mathbf{c,d,e}\}$.

Граф $\mathbf{H}$:



Граф $\mathbf{H}$: вершинна зв'язність графу $\mathbf{H}$ дорівнює $\chi(\mathbf{H}) = \mathbf{1}$ (видалення вершини $\mathbf{5}$ призводить до порушення зв'язності графу $\mathbf{H}$), реберна зв'язність графу $\mathbf{H}$ дорівнює $\lambda(\mathbf{H}) = \mathbf{2}$ (видалення ребер $\{\mathbf{5,7}\}, \{\mathbf{5,8}\}$ призводить до порушення зв'язності графу $\mathbf{H}$), блоки: $\{\mathbf{1,2,3,4,5}\}; \{\mathbf{5,6,7,8}\}$.

Теорема Уітні

Для довільного неорієнтованого графу справедлива нерівність:

$$\chi(\mathbf{G}) \le \lambda(\mathbf{G}) \le \delta(\mathbf{G}),$$

де $\chi(\mathbf{G})$ – число вершинної зв'язності, $\lambda(\mathbf{G})$ – число реберної зв'язності, $\delta(\mathbf{G})$ – мінімальний ступінь вершин графу $\mathbf{G}$.

6.4 Метричні характеристики неорграфів

Довжина маршруту – кількість ребер, що входять до даного маршруту, кожне ребро враховується стільки раз, скільки раз воно входить до маршруту.

Обхват графа $\mathbf{G}$ – довжина мінімального простого циклу графа $\mathbf{G}$ (якщо він існує).

Оточення графа $\mathbf{G}$ – довжина найбільшого простого циклу графа $\mathbf{G}$ (якщо він існує).

Будь-якому ребру приписується одинична довжина, якщо граф не є зваженим.

Зваженим (навантаженим) називається граф, у якого кожному ребру поставлено у відповідність деяке число, що зветься вагою або довжиною ребра.

Матриця ваги $\mathbf{C}$ графу $\mathbf{G}$ – квадратна матриця $\mathbf{p \times p}$, де $\mathbf{p}$ – кількість вершин графу $\mathbf{G}$:

$$\mathbf{C} = \left\| \mathbf{c_{ij}} \right\| \quad \mathbf{i, j = \overline{1, p}}, \ \mathbf{c_{ij}} = \begin{cases} \mathbf{const}, & \exists \mathbf{e = (i, j) \in E} \\ \mathbf{0}, & \nexists \mathbf{e = (i, j) \in E} \end{cases}.$$

Відстань $\mathbf{d(u, v)}$ між двома не співпадаючими вершинами $\mathbf{u}$ та $\mathbf{v}$ **–** довжина найкоротшого простого ланцюга, що з'єднує ці вершини.

Геодезична $\boldsymbol{\sigma}\mathbf{(u, v)}$ **–** найкоротший простий ланцюг між вершинами $\mathbf{u}$ та $\mathbf{v}$**,** що доставляє відстань між цими вершинами.

Матриця відстаней

Матриця відстаней $\mathbf{D_G}$ графу $\mathbf{G}$ – квадратна матриця $\mathbf{p \times p}$, де $\mathbf{p}$ – кількість вершин графу $\mathbf{G}$:

$$\mathbf{D_G} = \left\| \mathbf{d_{i,j}} \right\|, \mathbf{i, j = \overline{1, p}},$$

$$\mathbf{d_{i,j}} = \begin{cases} \mathbf{0}, & \mathbf{i = j} \\ \mathbf{d(i, j)}, & \mathbf{i \neq j}, \ \exists \ \mathbf{M = (i - j)} \\ \infty, & \mathbf{i \neq j}, \ \nexists \ \mathbf{M = (i - j)} \end{cases}$$

Ексцентриситет $\mathbf{e(v)}$ вершини $\mathbf{v}$ графу $\mathbf{G}$ – довжина максимальної геодезичної, що починається у вершині $\mathbf{v}$**:**

$$\mathbf{e(v) = \underset{v \in V}{MAX}\, d(u, v)}.$$

Діаметр $\mathbf{D(G)}$ графу $\mathbf{G}$ – максимальний серед усіх ексцентриситетів вершин графу $\mathbf{G}$:

$$\mathbf{D(G) = \underset{v \in V}{MAX}\ e(v)}.$$

Радіус $\mathbf{R(G)}$ графу $\mathbf{G}$ – мінімальний серед усіх ексцентриситетів вершин графу $\mathbf{G}$:

$$\mathbf{R(G) = \underset{v \in V}{MIN}\ e(v)}.$$

Периферія графа $\mathbf{G}$ – множина вершин графу $\mathbf{G}$, у яких ексцентриситет дорівнює діаметру**.**

Центр графа $\mathbf{G}$ – множина всіх вершин графу $\mathbf{G}$, у яких ексцентриситет дорівнює радіусу.

Периферична вершина – вершина, ексцентриситет якої дорівнює діаметру.

Діаметральний ланцюг – ланцюг, довжина якого дорівнює діаметру.

Центральна вершина – вершина, ексцентриситет якої дорівнює радіусу.

У зв'язному графі відстань є метрикою, тобто задовольняє наступним аксіомам: $\forall\ \mathbf{u,v,w \in V} \quad \mathbf{G=(V,E)}$:

1. $\mathbf{d(u,v) \geq 0}, \quad \mathbf{d(u,v) = 0 \leftrightarrow u = v}$.
2. $\mathbf{d(u,v) = d(v,u)}$.
3. $\mathbf{d(u,v) + d(v,w) \geq d(u,w)}$.

Алгоритм знаходження найкоротших маршрутів (хвильовий)

Нехай заданий неорієнтовані граф $\mathbf{G}$.

Необхідно визначити:

- зв'язність графа;
- компоненти зв'язності;
- знайти відстань від однієї заданої вершини до іншої або від однієї заданої вершини до всіх інших вершин у графі $\mathbf{G}$ або в межах однієї компоненти $\mathbf{G}$.

Ідея алгоритму:

вибирається вершина графа $\mathbf{G}$ та визначаються усі "сусіди" заданої вершини, "сусідами" називають вершини суміжні із даною вершиною, відстань до цих вершин від даної дорівнює 1, позначаються ці вершини, позначаються "сусіди" сусідів, відстань до цих вершин від даної на 1 більше, ніж для на попередньому кроці і так далі.

Алгоритм закінчує роботу, якщо

1) усі вершини помічені, тоді:

- граф є зв'язним;

- побудовані усі геодезичні, що зв'язують дану вершину з рештою у графі;

- знайдені відстані від даної вершини до усіх інших у графі;

2) не усі вершини помічені:

- граф не є зв'язним;

- визначена одна компонента зв'язності;

- побудовані усі геодезичні, що зв'язують дану вершину з рештою у даній компоненті;

- знайдені відстані від даної вершини до усіх інших в даній компоненті.

Алгоритм може бути запущений знову з будь-якої ще не поміченої вершини, якщо необхідно не тільки визначити зв'язність графа, але й усі його компоненти.

Запис «хвильового» алгоритму

Через $\mathbf{U_j}$ позначимо множину вершин помічених до кроку $\mathbf{j}$.

Через $\mathbf{W_j}$ позначимо множину вершин графа, що позначають на цьому кроці.

0) $\mathbf{j = 0}$

$\mathbf{U_0 = \{v\}}$, $\mathbf{d(v,v) = 0,\ \sigma(v,v) = v}$.

1) $\mathbf{j = 1}$

$\mathbf{W_j = \left\{ w \mid \ w \in V \setminus U_{j-1} \quad \text{òà} \quad \exists\ \{u,w\} \in E,\ \ \forall\, u \in U_{j-1} \right\}}$.

$\mathbf{\sigma(v,w) = \sigma(v,u) \circ w}$, $\mathbf{d(v,w) = d(v,u) + 1 = j.}$

2) Якщо $\mathbf{W_j \neq \varnothing}$, то $\mathbf{U_j = U_{j-1} \cup W_j}$,

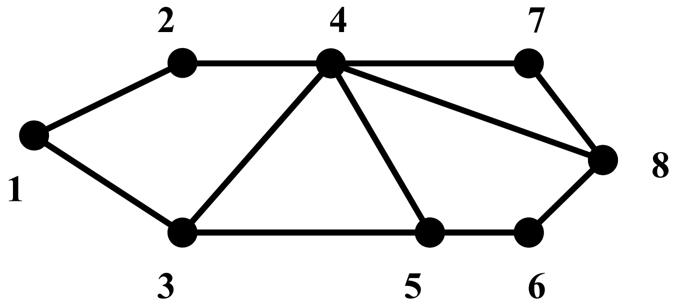
$\mathbf{j{+}{+}}$, перейти на крок 1.

За побудовою $\mathbf{U = U_j}$, граф, що породжується множиною вершин $\mathbf{U}$ є компонентою зв’язності графу $\mathbf{G}$.

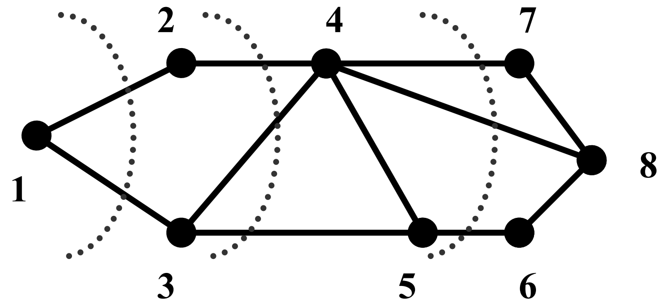
Для виділення решти компонент повторити алгоритм для $\mathbf{G' = V / U.}$

Наприклад.

Графічна ілюстрація виконання хвильового алгоритму для графа $\mathbf{G}$:

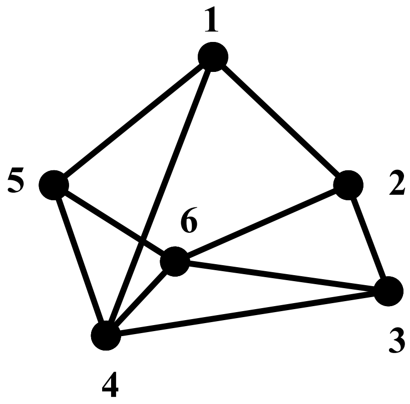


За логікою «хвильового» алгоритму, показано розповсюдження, так званої «хвилі».



Наприклад.

Задано граф $\mathbf{G}$, вага кожного ребра дорівнює 1. Знайти усі метричні характеристики графу, побудувати матрицю відстаней.



Радіус $\mathbf{G : R(G) = 2}$. Діаметр $\mathbf{G : D(G) = 2}$.

Периферія графа $\mathbf{G = \{1,2,3,4,5,6\}}$. Центр графа $\mathbf{G = \{1,2,3,4,5,6\}}$.

Обхват графа $\mathbf{G}$ $\mathbf{= 3}$.

Оточення графа $\mathbf{G}$ $\mathbf{= 6}$, максимальний простий цикл графа містить усі вершини графа $\mathbf{G : (1,2,3,4,6,5,1)}$.

Матриця відстаней D_G

i \ j	1	2	3	4	5	6	e(j)
1	0	1	2	1	1	2	2
2	1	0	1	2	2	1	2
3	2	1	0	1	2	1	2
4	1	2	1	0	1	1	2
5	1	2	2	1	0	1	2
6	2	1	1	1	1	0	2

6.5 Алгоритми знаходження найкоротших маршрутів

Задача про найкоротший шлях полягає в знаходженні найкоротшого шляху від заданої початкової вершини ($\mathbf{s}$) до заданої кінцевої вершини ($\mathbf{t}$)**,** за умови його існування.

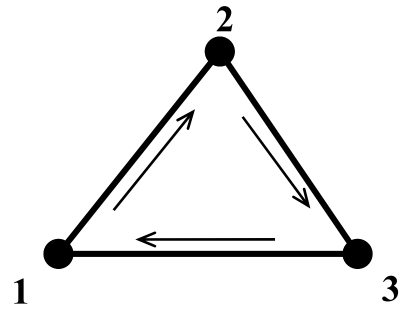
Задачі даного типу мають наступні модифікації:

- для заданої початкової вершини **s** знайти найкоротші шляхи від **s** до всіх інших вершин графа;
- знайти найкоротші шляхи між усіма парами вершин графу.

Для вирішення цих задач розглянемо граф $\mathbf{G = (V, E)}$, $\mathbf{|V| = p, |E| = q}$, ребра якого мають певну вагу (вартість). Вага ребер задається матрицею $\mathbf{C = \|c_{ij}\|, i, j = \overline{1,p}}$, яка відповідає матриці суміжності графу, але замість 1 ставиться вага існуючого ребра.

Елементи $\mathbf{c_{ij}}$ матриці ваги $\mathbf{C}$ можуть бути позитивними, від’ємними або нулями. Тому існує обмеження: в $\mathbf{G}$ не повинно бути циклів з сумарною від’ємною вагою (в цьому випадку найкоротшого шляху не існує). Звідси також витікає, що ребра графу $\mathbf{G}$ не можуть мати від’ємної ваги. Наприклад, якщо вага ребер графу $\mathbf{G1}$ складають відповідно: $\mathbf{c_{12} = 2, c_{23} = -3, c_{13} = -1}$, то маємо цикл сумарної від’ємної ваги: $\mathbf{c_{12} + c_{23} + c_{13} = -2}$ і задача не має вирішення.

G1:



Введемо позначення, нехай $\Gamma(\mathbf{v_i})$ – множина вершин графу $\mathbf{G}$, які суміжні з вершиною $\mathbf{v_i}$. Так, для графу $\mathbf{G1}$ маємо $\Gamma(1)=\{2,3\}$.

Алгоритм Дейкстри ($c_{ij} \ge 0$)

Задача алгоритму полягає у знаходженні найкоротшого шляху від заданої початкової вершини ($\mathbf{s}$) до заданої кінцевої вершини ($\mathbf{t}$), за умови його існування. Алгоритм за тривіальною модифікацією може бути застосований до знаходження найкоротших шляхів між усіма вершинами графу.

У загальному випадку цей метод заснований на тому, що вершинам приписуються тимчасові позначки. Позначки позначають довжини шляхів від початкової вершини $\mathbf{s}$ до даної вершини (причому тимчасові позначки є верхніми межами довжин шляхів). Величини цих поміток поступово зменшуються за допомогою ітераційної процедури (тобто процедури, в якій постійно повторюється деякий набір операцій). На кожному кроці ітерації одна з тимчасових позначок стає постійною (тобто такою, яка позначає точну довжину найкоротшого шляху від $\mathbf{s}$ до даної вершини).

Розглянемо цей алгоритм для випадку, коли вага кожного ребра графа не є від'ємною ($\forall \mathbf{i},\mathbf{j}=\overline{1,p}\ \ c_{ij} \ge 0$).

Алгоритм:

Нехай $\mathbf{l(i)}$ – позначка вершини $\mathbf{i}$.

Крок 1.

Покласти $\mathbf{l(s)=0}$ і вважати цю позначку постійною.

Покласти $\mathbf{l(i)=\infty}$ для всіх $\mathbf{i \neq s}$ та вважати ці позначки тимчасовими. Покласти $\mathbf{p = s}$.

Крок 2.

Для всіх $\mathbf{i \in \Gamma(p)}$, позначки яких тимчасові, замінити позначки відповідно до наступного виразу:

$$\mathbf{l(i) \leftarrow min[\, l(i), l(p) + c(p,i)\,]}.$$

Крок 3.

Серед усіх вершин із тимчасовими позначками знайти таку, для якої:

$$\mathbf{l(i^*) = min[\, l(i)\,]}$$

Крок 4. Вважати позначку вершини $\mathbf{i^*}$ постійною і покласти $\mathbf{p = i^*}$.

Крок 5.1.

Виконується, якщо треба знайти найкоротший шлях тільки від $\mathbf{s}$ до $\mathbf{t}$.

При $\mathbf{p = t}$ алгоритм закінчує роботу, $\mathbf{l(p)}$ є довжина найкоротшого шляху від $\mathbf{s}$ до $\mathbf{t}$.

При $\mathbf{p \neq t}$ перейти до кроку 2.

Крок 5.2.

Виконується, якщо треба знайти найкоротший шлях від $\mathbf{s}$ до усіх інших вершин графу.

Якщо усі вершини отримали постійні позначки, то алгоритм закінчує роботу.

Якщо деякі вершини мають тимчасові позначки, перейти до кроку 2.

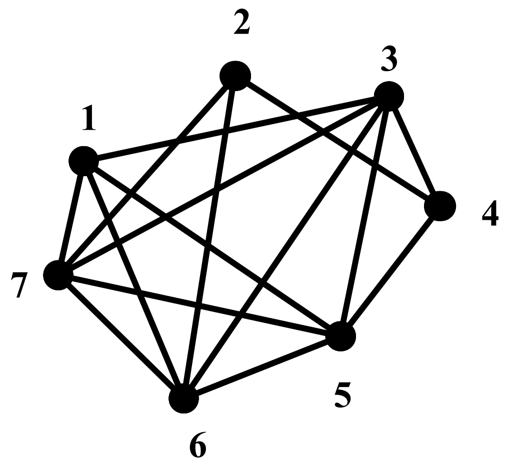
Як тільки довжини найкоротших шляхів будуть знайдені, самі шляхи можна отримати за допомогою рекурсивної процедури з використанням співвідношення:

$$\mathbf{l(i') + c(i',i) = l(i)}.$$

Оскільки вершина $\mathbf{i'}$ безпосередньо передує вершині $\mathbf{i}$ в найкоротшому шляху від $\mathbf{s}$ до $\mathbf{i}$, то для будь-якої вершини $\mathbf{i}$ відповідну вершину $\mathbf{i'}$ можна знайти як одну з вершин, що залишилися, для якої виповнюється: $\mathbf{l(i') + c(i',i) = l(i)}$.

Наприклад.

Граф $\mathbf{G}$**:** постійні позначки будемо виділяти знаком $+$.



Матриця ваги для графу $\mathbf{C_G}$:

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
1	0	0	4	0	15	13	1
2	0	0	0	4	0	5	7
3	4	0	0	9	12	13	2
4	0	4	9	0	3	0	0
5	15	0	12	3	0	2	11
6	13	5	13	0	2	0	12
7	1	7	2	0	11	12	0

Крок 1. $\mathbf{l(1)=0}$. Встановлюємо нульову позначку для вершини **1**, вважаємо її постійною.

$\mathbf{p=1}$.

Встановлюємо тимчасові позначки для вершин (**2,...,7**).

$\mathbf{l(2) = l(3) = ... = l(7) = \infty}$.

Крок 2. $\mathbf{\Gamma(p)=\Gamma(1)=\{3,5,6,7\}}$ – усі вершини, суміжні вершині **1** мають тимчасові позначки.

Змінюємо тимчасові позначки відповідно до виразу

$\mathbf{l(i) \leftarrow min[\, l(i), l(p)+c(p,i)\,]}$:

$\mathbf{l(3) = \min(\infty, 0 + 4) = 4}$

$\mathbf{l(5) = \min(\infty, 0 + 15) = 15}$

$\mathbf{l(6) = \min(\infty, 0 + 13) = 13}$

$\mathbf{l(7) = \min(\infty, 0 + 1) = 1}$

Шаг 3. $\mathbf{l(i^*) = \min\ (\underbrace{4}_{3}, \underbrace{15}_{5}, \underbrace{13}_{6}, \underbrace{1}_{7}, \underbrace{\infty}_{2,4}) = 1}$, відповідає вершині $\mathbf{i^* = 7}$.

Крок 4. $\mathbf{l(7) = 1+}$ – вершина $\mathbf{7}$ отримує постійну позначку.

$\mathbf{p = 7}$.

Крок 5. Не всі вершини мають постійні позначки, а тільки $\mathbf{\{1,7\}}$, тому алгоритм продовжує роботу, переходимо до кроку 2.

Крок 2. $\mathbf{\Gamma(p) = \Gamma(7) = \{1,2,3,5,6\}}$.

Серед них тільки вершина $\mathbf{1}$ має постійну позначку, тому перераховуємо позначки для вершин $\mathbf{\{2,3,5,6\}}$:

$\mathbf{l(2) = \min(\infty, 1+ +7) = 8}$

$\mathbf{l(3) = \min(4, 1+ +2) = 3}$

$\mathbf{l(5) = \min(15, 1+ +11) = 12}$

$\mathbf{l(6) = \min(13, 1+ +12) = 13}$.

Крок 3. $\mathbf{l(i^*) = \min\ (\underbrace{8}_{2}, \underbrace{3}_{3}, \underbrace{\infty}_{4}, \underbrace{12}_{5}, \underbrace{13}_{6}) = 3}$, відповідає вершині $\mathbf{i^* = 3}$.

Крок 4. $\mathbf{l(3) = 3+}$ – вершина $\mathbf{3}$ отримує постійну позначку. $\mathbf{p = 3}$.

Крок 5. Не всі вершини мають постійні позначки, а тільки $\mathbf{\{1,3,7\}}$, алгоритм продовжує роботу, переходимо до кроку $\mathbf{2}$.

Крок 2. $\mathbf{\Gamma(p) = \Gamma(3) = \{1,4,5,6,7\}}$.

Постійні позначки мають вершини $\mathbf{\{1,3,7\}}$, виключаємо їх із розгляду, перераховуємо тимчасові позначки для вершин $\mathbf{\{4,5,6\}}$:

$\mathbf{l(4) = \min(\infty, 3+ +9) = 11}$,

$\mathbf{l(5) = \min(12, 3+ +12) = 12}$,

$\mathbf{l(6) = \min(13, 3+ +13) = 13}$.

Крок 3. Серед усіх вершин із тимчасовими позначками, а це множина вершин $\{2,4,5,6\}$, знаходимо:

$$l(i^*) = \min(\underbrace{8}_{2}, \underbrace{11}_{4}, \underbrace{12}_{5}, \underbrace{13}_{6}) = 8$$, відповідає вершині $i^* = 2$.

Крок 4.

$l(2) = 8+$ – вершина **2** отримує постійну позначку.

p=2.

Крок 5. Не усі вершини мають постійні позначки, а тільки $\{1,2,3,7\}$, алгоритм продовжує роботу, переходимо до кроку 2.

Крок 2. $\Gamma(p) = \Gamma(2) = \{4,6,7\}$, вершина **7** має постійну позначку, тому виключаємо її із розгляду.

$l(4) = \min(12, 8+ +4) = 12$,

$l(6) = \min(13, 8+ +5) = 13$,

$l(4) = l(5) = 12+, \; p = 4, 5$.

Можна вибирати як вершину **4**, так і вершину **5**. Вибираємо вершину **4**.

$l(4) = 12+, \; p = 4$.

Множина вершин із постійними позначками: $\{1,2,3,4,7\}$.

Крок 2. $\Gamma(p) = \Gamma(4) = \{2,3,5\}$, вершини **2** та **3** мають постійну позначку, отже, не розглядаються.

$l(5) = \min(12, 12+ +3) = 12$,

$l(i^*) = \min(12, 13) = 12$, вершина **5** отримує постійну позначку.

$l(5) = 12+, \; p = 5$.

Множина вершин із постійними позначками: $\{1,2,3,4,5,7\}$.

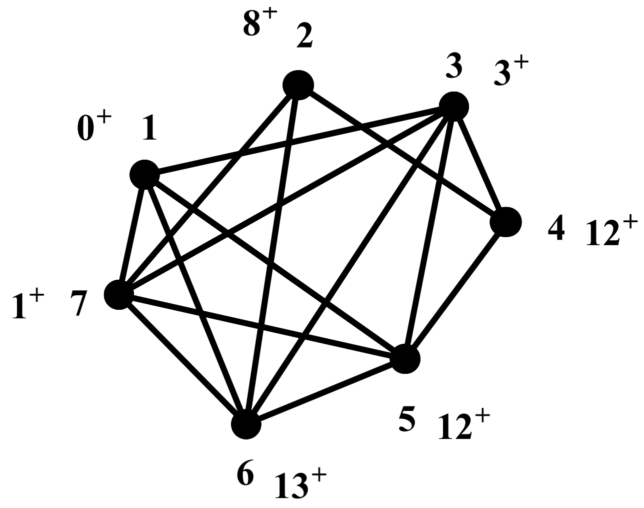
Крок 2. $\Gamma(p) = \Gamma(5) = \{1,3,4,6,7\}$, усі вершини, окрім **6** мають постійні позначки.

$l(6) = \min(13, 12+ +2) = 13$,

$l(6) = 13+, \; p = 6$.

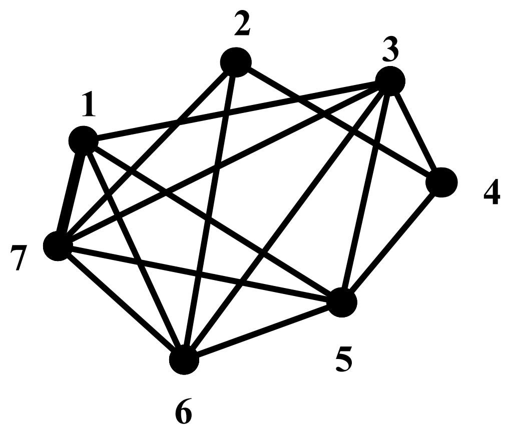
Множина вершин із постійними позначками: $\{1,2,3,4,5,6,7\}$.

Крок 5. Усі вершини мають постійні позначки, алгоритм закінчує роботу. Знайдені найкоротші відстані від вершини **1** до всіх інших вершин у графі.

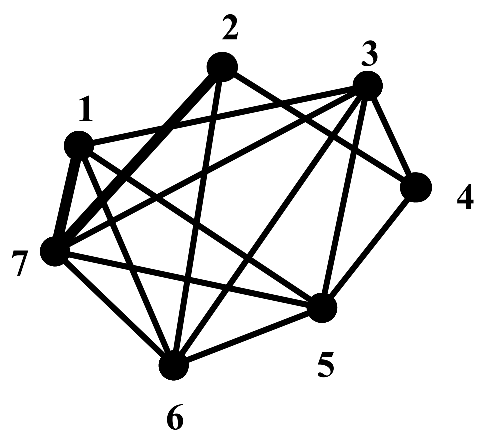


Таким чином, найкоротші маршрути від вершини **1**:

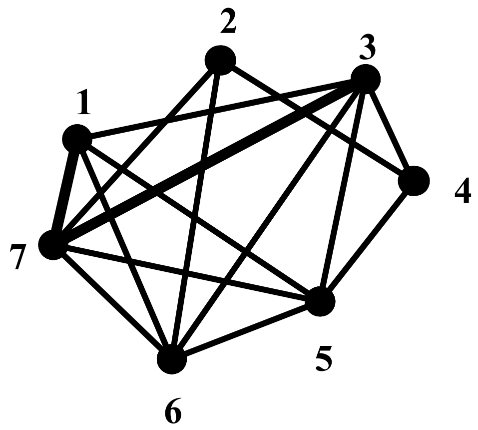
1 - 7 = (1,7) = 1



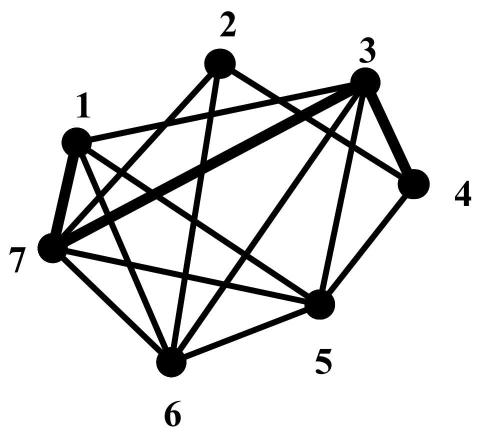
1 - 2 = (1,7,2) = 8

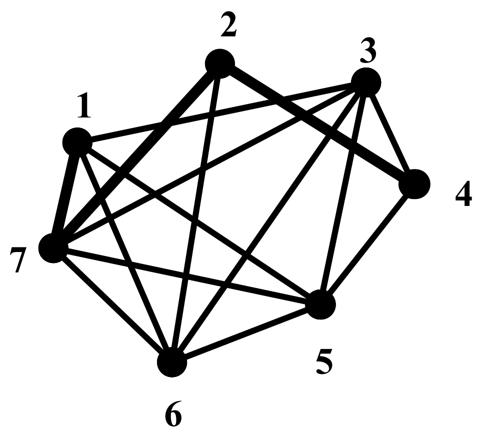


1 - 3 = (1,7,3) = 3

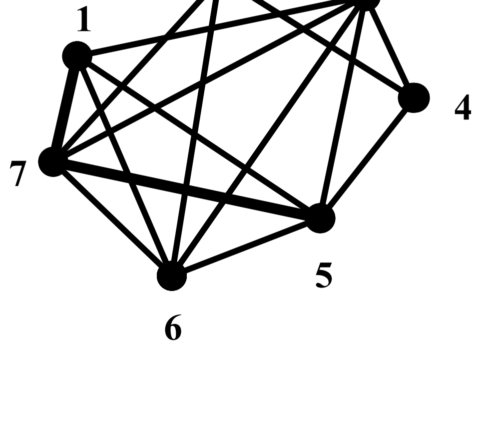


1 - 4 = (1,7,3,4) = (1,7,2,4) = 12

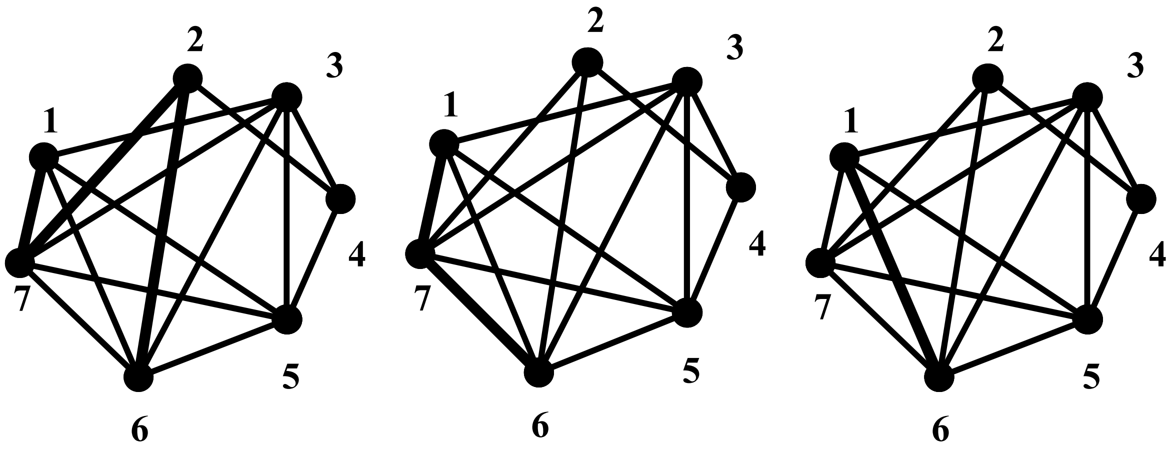




1 - 5 = (1,7,5) = 12



$$\mathbf{1 - 6 = (1{,}6) = (1{,}7{,}6) = (1{,}7{,}2{,}6) = 13.}$$



Алгоритм Форда

Задача про найкоротший шлях полягає у знаходженні найкоротшого шляху від заданої початкової вершини $\mathbf{s \in V}$ до заданої кінцевої вершини $\mathbf{t \in V}$, за умови існування такого шляху. Елементи $\mathbf{c_{ij}}$ матриці ваги $\mathbf{C}$ можуть бути позитивними, від'ємними або нулями.

Всі цикли в графі $\mathbf{G}$ мають невід'ємну сумарну вагу.

Нехай $\mathbf{l^k(i)}$ – позначка вершини $\mathbf{i}$ в кінці $\mathbf{(k+1)}$-й ітерації, $\mathbf{\Gamma(s)}$ – множина вершин, суміжних із $\mathbf{s}$. Алгоритм може бути легко модіфікований для застосування у орієнтованих графах.

Крок 1. Покладемо, $\mathbf{S = \tilde{A}(s), k = 1}$, $\mathbf{l^1(s) = 0}$, $\mathbf{l^1(i) = c(s,i)}$ для усіх $\mathbf{i \in \Gamma(s)}$ та $\mathbf{l^1(i) = \infty}$ для всіх інших $\mathbf{i}$.

Крок 2. Для кожної вершини $\mathbf{i \in \Gamma(s)}$, $\mathbf{i \neq s}$ змінити її позначку наступним чином :

$$\mathbf{l^{k+1}(i) = \min\,[l^k(i),\ \min_{j \in T_i}\{l^k(j) + c(j,i)\}\,]}, \text{ де } \mathbf{T_i = \Gamma(i) \cap S}.$$

Для кожної вершини $\mathbf{i \notin \Gamma(s)}$ покладемо $\mathbf{l^{k+1}(i) = l^k(i)}$.

Крок 3. Якщо $\mathbf{k \le p - 1}$ та $\mathbf{l^{k+1}(i) = l^k(i)}$ для усіх $\mathbf{i}$, то позначки дорівнюють довжинам найкоротших шляхів.

Якщо $\mathbf{k < p - 1}$ та $\mathbf{l^{k+1}(i) \neq l^k(i)}$ для деякої вершини $\mathbf{i}$, то перейти до кроку 4.

Якщо $\mathbf{k = p - 1}$ та $\mathbf{l^{k+1}(i) \neq l^k(i)}$ для деякої вершини $\mathbf{i}$, то в графі існує цикл негативної ваги та задача не має рішення.

Крок 4. Відновити множину таким чином : $\mathbf{S = \{i \,|\, l^{k+1}(v_i) \neq l^k(v_i)\}}$.

Крок 5. Покласти $\mathbf{k = k + 1}$ та перейти до кроку 2.

Алгоритм Флойда
(найкоротші шляхи між усіма парами вершин)

Нехай потрібно знайти найкоротші шляхи між усіма парами вершин графа. Вочевидь, що можливо застосування попередніх алгоритмів із кожної вершини графа, але метод Флойда може бути застосовано для довільної матриці ваги. Метод базується на використанні послідовності з $\mathbf{p}$ перетворень (ітерацій) початкової матриці ваги $\mathbf{C}$. При цьому на $\mathbf{k}$-й ітерації матриця представляє довжини найкоротших шляхів між кожною парою вершин з тим обмеженням, що шлях між $\mathbf{i}$ та $\mathbf{j}$ (для будь-яких $\mathbf{i}$ та $\mathbf{j}$) містить у якості проміжних тільки вершини з множини: $\mathbf{\{1,2,...,k\}}$.

Всі цикли в графі $\mathbf{G}$ мають невід'ємну сумарну вагу.

Крок 1. Покласти $\mathbf{k = 0}$.

Крок 2. $\mathbf{k = k + 1}$.

Крок 3. Для всіх $\mathbf{i \neq k}$, таких, що $\mathbf{c_{ik} \neq \infty}$, та для усіх $\mathbf{j \neq k}$, таких, що $\mathbf{c_{kj} \neq \infty}$, вводимо операцію:

$$\mathbf{c_{ij} = \min[c_{ij}, (c_{ik} + c_{jk})]}.$$

Крок 4. Якщо $\mathbf{c_{ii} < 0}$,то в графі існує цикл від'ємної ваги, що містить вершину $\mathbf{i}$, розв'язання задачі не існує.

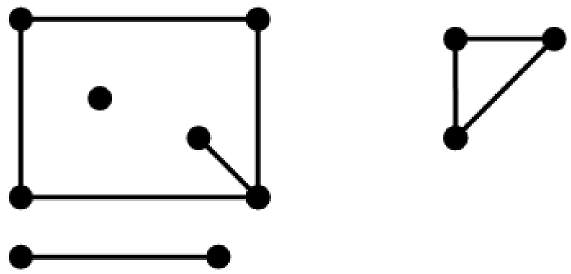
Якщо все усі $\mathbf{c_{ii} \geq 0}$ та $\mathbf{k = p}$, то отримано рішення та матриця дає довжини всіх найкоротших шляхів.

Якщо все $\mathbf{c_{ii} \geq 0}$, але $\mathbf{k < p}$, то повернутися до кроку 2.

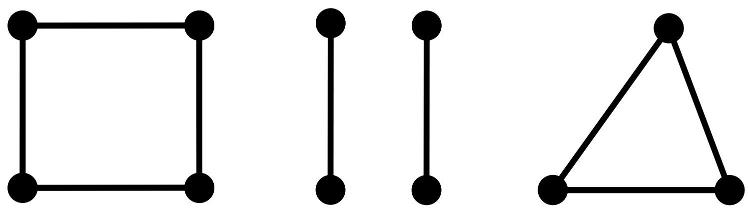
6.6 Завдання для самостійної роботи

1. Визначити, чи є заданий граф зв'язним. Визначити кількість та виділити множини компонент зв’язності.

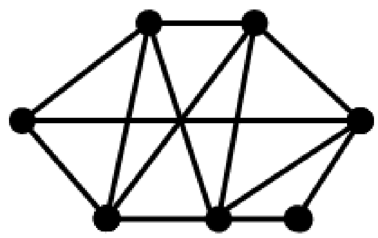
а)



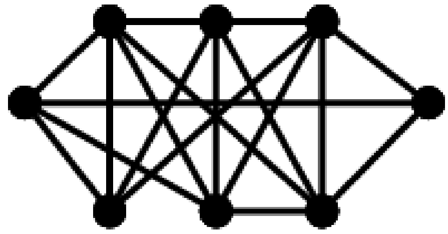
б)



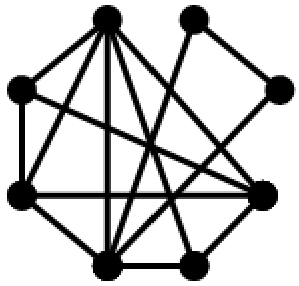
2. Для наступного графа виділити маршрут не ланцюг, замкнутий маршрут не ланцюг, ланцюг, простий ланцюг, цикл, простий цикл. Визначити обхват та оточення графу.



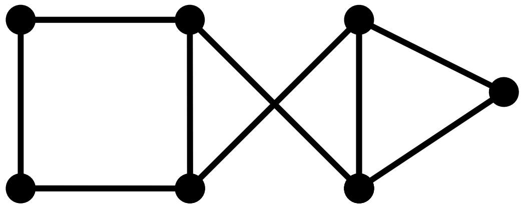
3. Для наступного графа виділити маршрут не ланцюг, замкнутий маршрут не ланцюг, ланцюг, простий ланцюг, цикл, простий цикл. Визначити числа вершинної та реберної зв’язності.



4. Для наступного графа визначити числа вершинної та реберної зв'язності. Знайти мости та вершини зчленування, визначити блоки графу.



5. Для наступного графа визначити числа вершинної та реберної зв'язності. Знайти мости та вершини зчленування, визначити блоки графу.



6. Навести приклад графа $\mathbf{G}$, для якого:

$\boldsymbol{\chi}(\mathbf{G}) = \mathbf{1}$ – число вершинної зв'язності $\mathbf{G}$;

$\boldsymbol{\lambda}(\mathbf{G}) = \mathbf{2}$ – число реберної зв'язності $\mathbf{G}$;

$\boldsymbol{\delta}(\mathbf{G}) = \mathbf{3}$ – мінімальна степінь вершин графа $\mathbf{G}$.

7. Навести приклад графа $\mathbf{G}$, для якого:

$\boldsymbol{\chi}(\mathbf{G}) = \mathbf{2}$ – число вершинної зв'язності $\mathbf{G}$;

$\boldsymbol{\lambda}(\mathbf{G}) = \mathbf{3}$ – число реберної зв'язності $\mathbf{G}$;

$\boldsymbol{\delta}(\mathbf{G}) = \mathbf{3}$ – мінімальна степінь вершин графа $\mathbf{G}$.

8. Навести приклад графа $\mathbf{G}$, для якого:

$\boldsymbol{\chi}(\mathbf{G}) = \mathbf{3}$ – число вершинної зв'язності $\mathbf{G}$;

$\boldsymbol{\lambda}(\mathbf{G}) = \mathbf{3}$ – число реберної зв'язності $\mathbf{G}$;

$\boldsymbol{\delta}(\mathbf{G}) = \mathbf{3}$ – мінімальна степінь вершин графа $\mathbf{G}$.

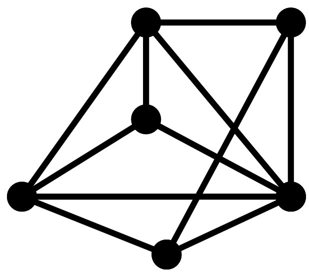
9. Навести приклад графа $\mathbf{G}$, для якого:

$\boldsymbol{\chi}(\mathbf{G}) = \mathbf{4}$ – число вершинної зв'язності $\mathbf{G}$;

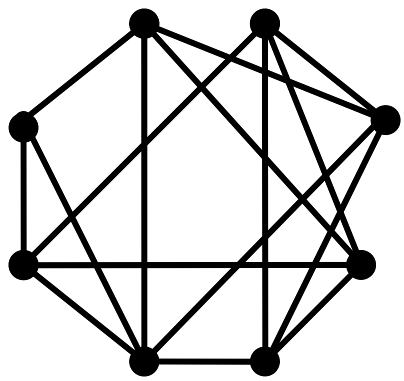
$\boldsymbol{\lambda}(\mathbf{G}) = \mathbf{3}$ – число реберної зв'язності $\mathbf{G}$;

$\boldsymbol{\delta}(\mathbf{G}) = \mathbf{3}$ – мінімальна степінь вершин графа $\mathbf{G}$.

10. Побудувати матрицю відстаней наступного графу за хвильовим алгоритмом, визначити ексцентриситети вершин, радіус, діаметр, центр, периферію, діаметральний ланцюг.



11. Побудувати матрицю відстаней наступного графу за хвильовим алгоритмом, визначити ексцентриситети вершин, радіус, діаметр, центр, периферію, діаметральний ланцюг.



12. Навести приклад графа з вершинною і реберною зв'язністю рівною 2 і точкою зчленування, якщо це можливо. Відповідь обґрунтувати.

13. Навести приклад графа, у якого усі ребра є мости. Відповідь обґрунтувати.

14. Навести приклад графа, у якого радіус дорівнює діаметру.

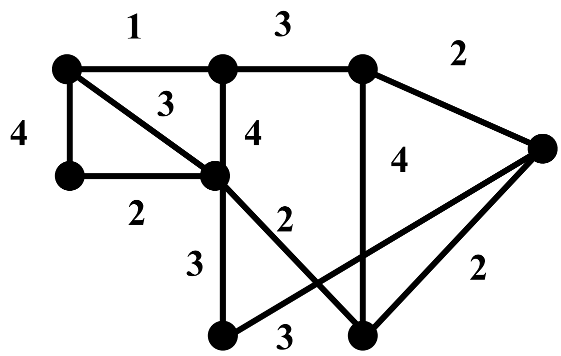
15. Навести приклад графу, у якого центр:

а) є одна вершина;

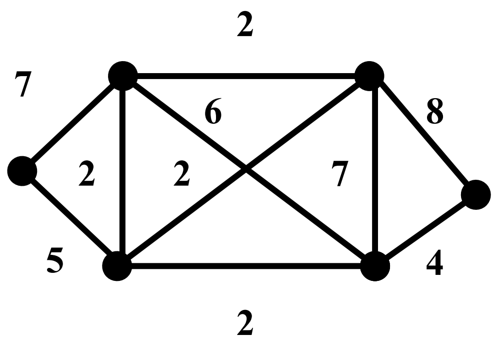
б) рівно три вершини і не співпадає із множиною усіх вершин графа;

в) співпадає із множиною усіх вершин графа.

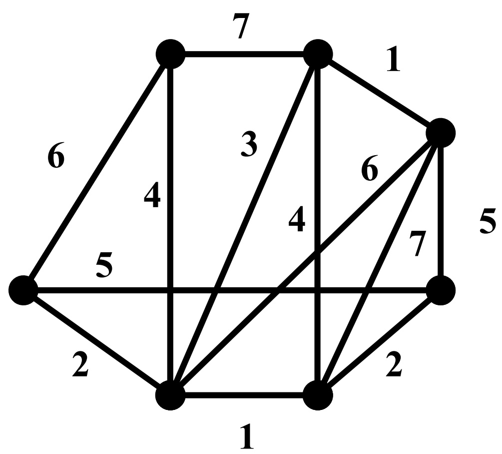
16. Визначити найкоротші маршрути та їх довжину від кожної вершини графу **G** до кожної іншої вершини графу за алгоритмом Дейкстри. Побудувати матрицю відстаней.



17. Визначити найкоротші маршрути та їх довжину від кожної вершини графу **G** до кожної іншої вершини графу за алгоритмом Форда. Побудувати матрицю відстаней.



18. Визначити найкоротші маршрути та їх довжину від кожної вершини графу **G** до кожної іншої вершини графу за алгоритмом Флойда. Побудувати матрицю відстаней.



19. Нехай множина вершин графа є відрізком натурального ряду чисел $\mathbf{N_n}$. Множина ребер визначається наступним чином: не співпадаючі вершини $\mathbf{u}$ та $\mathbf{v}$ є суміжними, якщо відповідні їм числа являються взаємно простими. Записати матрицю суміжності такого графа. Визначити, чи є він зв'язним, виділити для нього компоненти зв'язності, обчислити числа реберної та вершинної зв'язності. Знайти мости та точки зчленування.

6.7 Контрольні питання

1. Визначити поняття маршруту, відкритого та замкнутого маршруту, кінцевих та внутрішніх вершин маршруту у неорієнтованому графі.
2. Що таке ланцюг та простий ланцюг, цикл та простий цикл у неорієнтованому графі?
3. Дати визначення зв'язного графу та компоненти зв'язності.
4. Сформулювати теореми про зв'язні графи.
5. Дати визначення чисел вершинної та реберної зв'язності.
6. Дати визначення моста та вершини зчленування, блоку, неподільного графу.
7. Метричні характеристики неорієнтованих графів: довжина маршруту, обхват, оточення, ексцентриситет, радіус, діаметр, центр та периферія.
8. Що таке матриця ваги та матриця відстаней для неорієнтованого графу. Дати визначення геодезичної.
9. Навести приклади графів, які мають усі периферійні та усі центральні вершини.
10. Записати алгоритми знаходження найкоротших маршрутів: «хвильовий», Дейкстри, Форда та Флойда. Визначити області застосування алгоритмів.
11. Навести приклад графа, який задовольняє строгу нерівність теореми Уітні.

РОЗДІЛ 7
ДЕРЕВА Й КІСТЯКИ

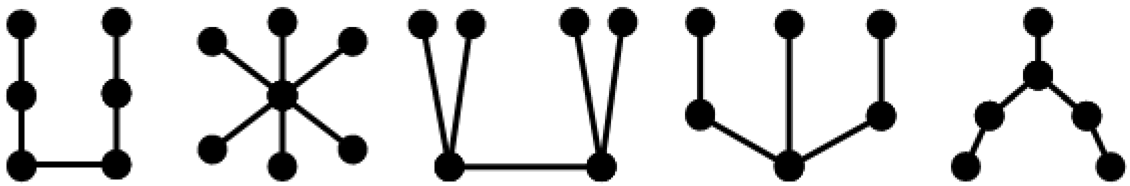
Клас графів, що отримав назву дерева, був відкритий декілька разів. По-перше, інженером-електриком Г. Кирхгофом при вивченні електричних кіл, по-друге, А. Келі при вивченні насичених вуглеводнів, а також дерева були досліджені К. Жордано, як чисто математичний об’єкт.

7.1 Визначення дерева

Ациклічний граф або **ліс –** граф, який не містить циклів.

Дерево – зв'язний граф, що не містить циклів граф, тобто зв'язний та одночасно ациклічний граф.

Компонентами лісу є дерева. Приклади дерев порядку 6 приведено на наступному рисунку.



7.2 Теорема про 5 еквівалентних визначень дерева

Теорема про дерево: 5 різних визначень дерева.

Для кожного $\mathbf{(p,q)}$ **-** графа $\mathbf{G}$ твердження (1-5) є еквівалентними.

1. Граф $\mathbf{G}$ – дерево.

2. Будь-які дві неспівпадаючі вершини графа $\mathbf{G}$ з'єднані єдиним простим ланцюгом.

3. Граф $\mathbf{G}$ – зв'язний і кількість ребер у ньому на 1 менше, ніж кількість вершин: $\mathbf{q = p - 1, p = q + 1}$.

4. Граф $\mathbf{G}$ – ациклічний і кількість ребер у ньому на 1 менше, ніж кількість вершин: $\mathbf{q = p - 1, p = q + 1}$.

5. Граф $\mathbf{G}$ – ациклічний і, якщо будь-яку пару його неспівпадаючих несуміжних вершин, з'єднати ребром $\mathbf{e}$, то отриманий граф $\mathbf{G+e}$ буде містити рівно один цикл.

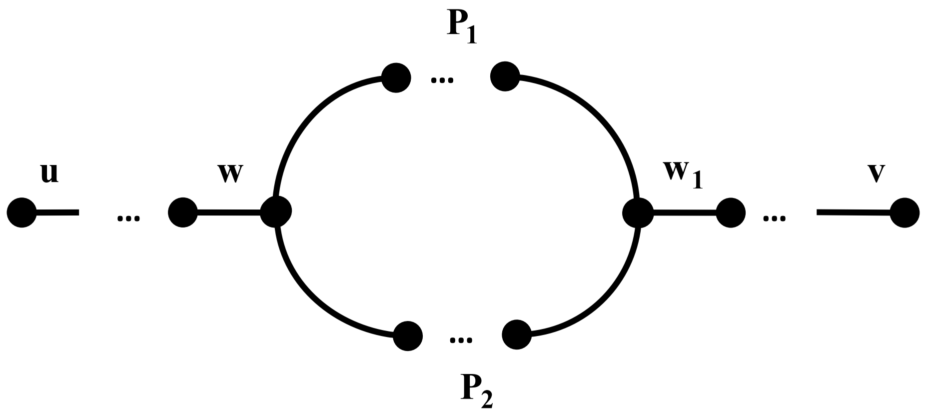
Доведення.

1) 1→ 2

Дано: $\mathbf{G}$ – зв'язний, ациклічний граф.

Довести: будь-які дві вершини в графі $\mathbf{G}$ з'єднані єдиним простим ланцюгом.

З того, що граф $\mathbf{G}$ зв'язний випливає, що будь-які дві вершини в ньому з'єднані простим ланцюгом. Потрібно довести, що такий ланцюг є єдиним. Доведення єдності – від протилежного. Візьмемо дві довільні вершини $\mathbf{u}$ і $\mathbf{v}$ вхідного графа і нехай вони з'єднані двома простими ланцюгами $\mathbf{P_1}$ й $\mathbf{P_2}$. Нехай $\mathbf{w}$ – перша вершина, яка належить $\mathbf{P_1}$ й $\mathbf{P_2}$, після якої ланцюги розрізняються, а $\mathbf{w_1}$ – остання вершина ланцюга, яка з'єднує $\mathbf{P_1}$ й $\mathbf{P_2}$, після якої $\mathbf{P_1}$ й $\mathbf{P_2}$ збігаються. Таким чином, вершини $\mathbf{w}$ і $\mathbf{w_1}$ з'єднані циклом, а за умовою, граф $\mathbf{G}$ – ациклічний.



Звідси, маємо протиріччя, виходить, наше припущення про існування у графі двох вершин, які з'єднані не єдиним простим ланцюгом, невірно.

2) 2 → 3

Дано: будь-які дві неспівпадаючі вершини графа $\mathbf{G}$ з'єднані єдиним простим ланцюгом.

Довести: $\mathbf{G}$ – зв'язний, $\mathbf{q=p-1}$.

$\mathbf{G}$ – зв'язний, тому що будь-яку пару вершин з'єднує простий ланцюг. Доведемо, що $\mathbf{q = p - 1}$ методом індукції. Спочатку доведемо, що це справедливо для двох тривіальних випадків.

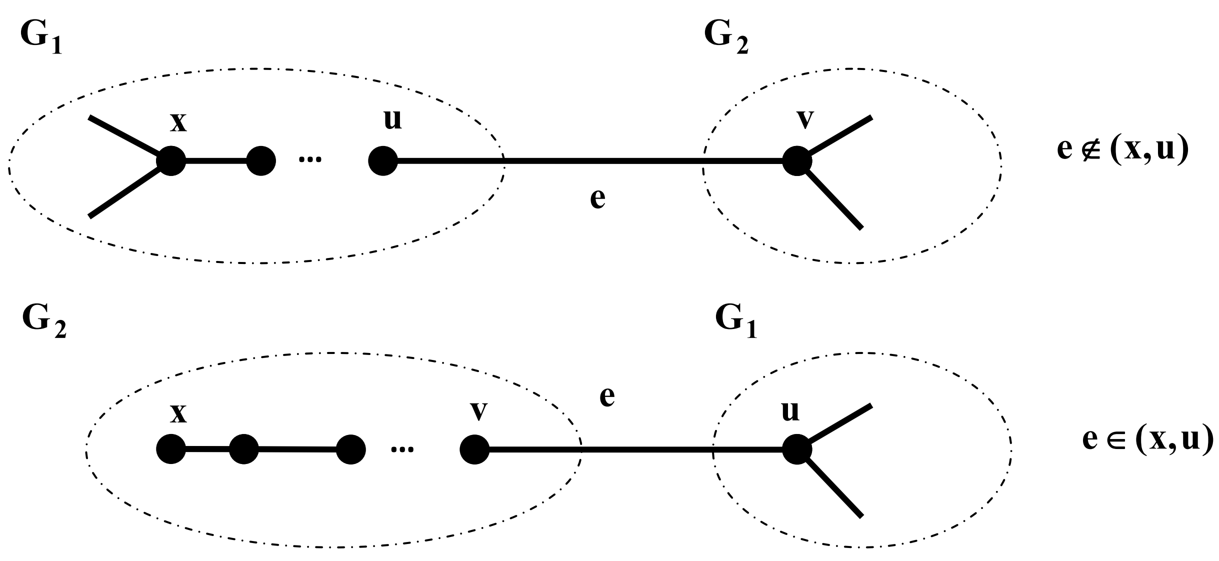
1) Тривіальний граф: $\mathbf{P_1 = K_1}$ **:** 

$\mathbf{p = 1;\ q = 0;\ q = p - 1 = 1 - 1 = 0.}$

2) Дерево із двох вершин $\mathbf{P_2 = K_2}$ **:** 

$\mathbf{p = 2;\ q = 2 - 1 = 1.}$

Припускаємо, що ця властивість виконується для графа який є деревом, у якого $\mathbf{p-1}$ вершин і $\mathbf{p > 2}$. Нехай $\mathbf{e}$ – деяке ребро графа $\mathbf{G}$, тоді воно становить єдиний простий ланцюг, між своїми кінцевими вершинами. Нехай $\mathbf{e}$ – це ребро $\mathbf{\{u, v\}}$, тобто $\mathbf{e = uv}$. Видалимо із графа $\mathbf{G}$ ребро $\mathbf{e}$, тобто побудуємо граф $\mathbf{G - e}$. Цей граф буде не зв'язний, тому що в ньому вершини $\mathbf{u}$ і $\mathbf{v}$ не будуть з'єднані маршрутом. Покажемо, що видалення ребра $\mathbf{e}$ розбиває граф рівно на <u>дві</u> компоненти зв’язності. Ребро $\mathbf{e}$ містило кінцеві вершини $\mathbf{u}$ і $\mathbf{v}$, тому що $\mathbf{u}$ і $\mathbf{v}$ не зв'язані, то вони належать різним компонентам: $\mathbf{u \in G_1}$ і $\mathbf{v \in G_2}$. Візьмемо довільну вершину $\mathbf{x}$ графа $\mathbf{G}$, $\mathbf{x \neq u, x \neq v}$ і покажемо, що ця вершина після видалення ребра $\mathbf{e}$ буде належати або $\mathbf{G_1}$, або $\mathbf{G_2}$. Вхідний граф $\mathbf{G}$ – зв'язний, отже, у ньому існує простий ланцюг $\mathbf{(x,u)}$.



Якщо ребро $\mathbf{e} \notin (\mathbf{x}, \mathbf{u})$–ланцюгу, то вершина $\mathbf{x} \in \mathbf{G_1}$.

Якщо ребро $\mathbf{e} \in (\mathbf{x}, \mathbf{u})$–ланцюгу, то вершина $\mathbf{x} \in \mathbf{G_2}$.

Так, як $\mathbf{x}$ – довільна вершина графа $\mathbf{G}$, то в графі $\mathbf{G}$ рівно 2 компоненти:

$\mathbf{u}: \mathbf{G_1} = (\mathbf{p_1}, \mathbf{q_1})$-граф ; $\mathbf{v}: \mathbf{G_2} = (\mathbf{p_2}, \mathbf{q_2})$-граф, $\mathbf{p_i} < \mathbf{p}; \mathbf{i} = \mathbf{1,2.}$

Тоді, по індуктивному припущенню:

$$\begin{cases} \mathbf{q_1} = \mathbf{p_1} - \mathbf{1} \\ \mathbf{q_2} = \mathbf{p_2} - \mathbf{1} \end{cases} \quad \begin{cases} \mathbf{p_1} + \mathbf{p_2} = \mathbf{p} \\ \mathbf{q_1} + \mathbf{q_2} + \mathbf{1} = \mathbf{q} \end{cases}.$$

$\mathbf{q_1} + \mathbf{q_2} = \mathbf{p1} + \mathbf{p_2} - \mathbf{2} \Rightarrow \mathbf{q} = \mathbf{p} - \mathbf{1}$, що й треба було довести.

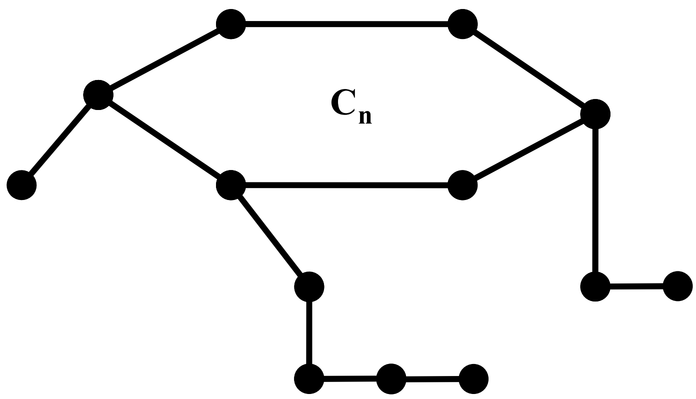
3) 3→4.

Дано: $\mathbf{G}$ – зв'язний, $\mathbf{q} = \mathbf{p} - \mathbf{1}$.

Довести: $\mathbf{G}$ – ациклічний, $\mathbf{q} = \mathbf{p} - \mathbf{1}$.

Доведення від протилежного.

Нехай граф $\mathbf{G}$ містить простий цикл $\mathbf{C_n}$, $\mathbf{n}$ – кількість вершин, $\mathbf{n} \le \mathbf{p}$. Якщо в простому циклі $\mathbf{n}$ вершин, то в ньому $\mathbf{n}$ ребер. Вхідний граф зв'язний, тому для кожної з $\mathbf{p} - \mathbf{n}$ вершин, що не належать циклу, існує инцидентне їй ребро, що лежить на геодезичній, що йде від деякої вершини циклу. Усі такі ребра попарно відмінні. Тоді, у частині графа, що залишилася, мінімум $\mathbf{p} - \mathbf{n}$ ребер.



$\mathbf{q} \ge \mathbf{n} + (\mathbf{p} - \mathbf{n});$ $\mathbf{n}$ – кількість ребер у циклі $\mathbf{C_n}$;

$\mathbf{p} - \mathbf{n}$ – мінімальне число ребер поза циклом.

Маємо $\mathbf{q} \ge \mathbf{p}$ – протиріччя, звідси, граф $\mathbf{G}$ не містить циклів.

4) $4 \to 5$

Дано: $\mathbf{G}$ – ациклічний, $\mathbf{q = p - 1}$.

Довести: $\mathbf{G}$ – ациклічний, граф $\mathbf{G + e}$ має єдиний простий цикл.

$\mathbf{G}$ – ациклічний, у загальному випадку він незв'язний.

Нехай граф $\mathbf{G}$ містить $\mathbf{k}$ компоненти зв'язності: $\mathbf{G_i, i = 1,...,k}$.

Кожна компонента буде деревом, бо граф ациклічний.

Тоді, для кожної компоненти $\mathbf{G_i}$ справедливо: $\forall \mathbf{i} = \overline{\mathbf{1,k}}\ \ \mathbf{q_i = p_i - 1}$.

Просумуємо від $\mathbf{1}$ до $\mathbf{k}$: $\sum_{i=1}^{k} \mathbf{q_i} = \sum_{i=1}^{k} \mathbf{p_i} - \mathbf{k};\ \mathbf{q = p - k} \quad \Rightarrow\ \mathbf{k = 1}$.

$\sum_{i=1}^{k} \mathbf{q_i} = \mathbf{q}; \sum_{i=1}^{k} \mathbf{p_i} = \mathbf{p}$.

Маємо, що граф $\mathbf{G}$ – зв'язний, але він й ациклічний. $\Rightarrow$ Граф $\mathbf{G}$ є дерево. $\Rightarrow$ По другому визначенню маємо, що будь-які дві неспівпадаючі вершини в ньому з'єднані єдиним простим ланцюгом.

Якщо до дерева додати ребро $\mathbf{e = \{u, v\}}$, яке з'єднує неспівпадаючі й несуміжні вершини, то разом з єдиним простим ланцюгом, що з'єднує ці вершини в графі, $\mathbf{G}$ ребро $\mathbf{e = \{u, v\}}$ утворить єдиний простий цикл.

5) $5 \to 1$.

Дано: $\mathbf{G}$ – ациклічний, граф $\mathbf{G + e}$ має єдиний простий цикл.

Довести: $\mathbf{G}$ – ациклічний і зв'язний.

Ациклічність очевидна. Покажемо, що $\mathbf{G}$ є зв'язним графом методом від протилежного. Нехай $\mathbf{G}$ – не зв'язний, тоді можна додати ребро $\mathbf{e}$, що з'єднує вершини з різних компонент і граф $\mathbf{G + e}$ не буде містити цикл, тому що у вхідному графі $\mathbf{G}$ не було простого ланцюга, що з'єднує ці дві вершини, а це суперечить умові. Отже, припущення, що $\mathbf{G}$ – незв'язний невірно.

7.3 Теорема про висячі вершини дерева

У будь-якому нетривіальному ($\mathbf{p \geq 2}$) дереві є принаймні дві висячі вершини

Доведення.

Оскільки дерево – це зв'язний, ациклічний граф, тому степінь будь-якої вершини графа більш нуля. За лемою про рукостискання: $\sum_{i=1}^{p} \deg v_i = 2q = 2p - 2$. Оскільки, ця рівність виконується, якщо в лівій його частині принаймні два елементи в сумі рівні 1. Виходить, у дереві є принаймні дві висячі вершини.

7.4 Теорема про центр дерева

Центр будь-якого дерева складається або з 1, або з 2 суміжних вершин

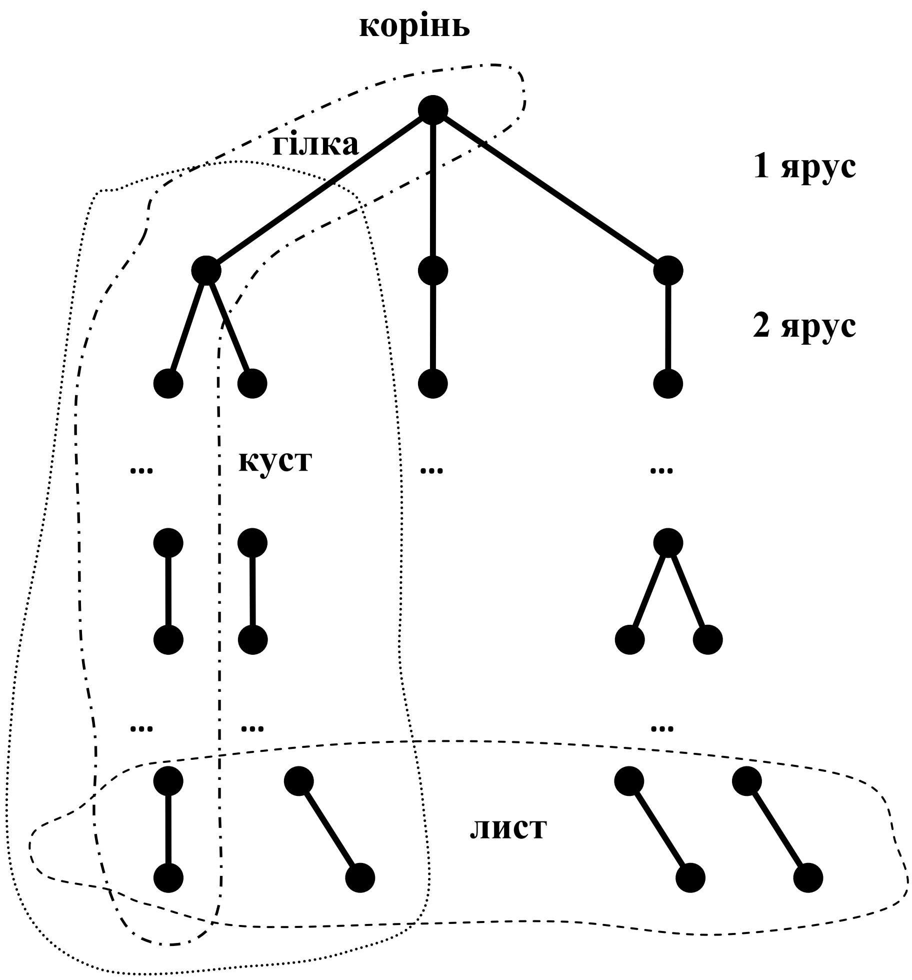
Доведення.

Для K_1 і K_2 це очевидно. Нехай є дерево T порядку n, де $n > 2$ (кількість вершин). Видаливши з T всі кінцеві вершини, одержимо деяке дерево T', у якого ексцентриситет на 1 менше, ніж ексцентриситет дерева T, а центри дерев T и T' збігаються. Дерево є скінченний граф (скінчена кількість вершин), тому застосуємо операцію видалення кінцевих вершин скінчену кількість разів, одержимо дерево K_1 або K_2. Ця теорема лежить в основі визначення центра довільного дерева: видаляються кінцеві вершини дерева доти, доки кількість вершин ≥ 3.

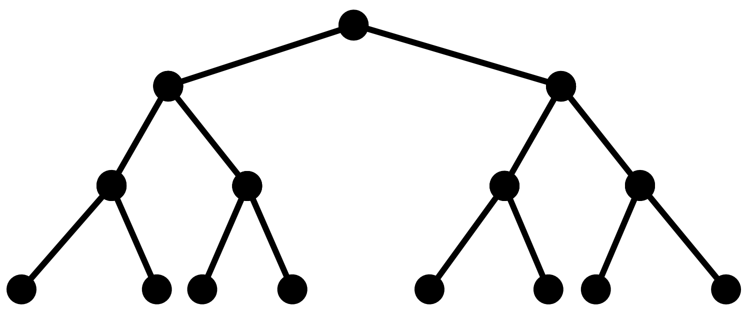
7.5 Ярусна (ієрархічна) форма зображення дерев

Нехай граф $G = (V, E)$ є дерево. Для ярусного представлення дерева, вибираємо його довільну вершину, як правило це вершина із найменшим номером, та розміщуємо її на нульовий рівень або ярус. Нехай це буде вершина $v_0 \in V$ графа $G = (V, E)$. Вершина нульового ярусу називається **коренем** дерева. На i-й ярус розмістимо вершини з відстанню від кореня, рівним i. Тобто на перший ярус розмістимо вершини, що суміжні кореню, на другий вершини, що суміжні вершинам першого ярусу і так далі. Кінцеві висячі вершини будемо називати **листками**, а геодезичні від кореня до листка – **гілками.**

Піддерево у ярусному представленні дерева називають **кустом.**



Двійкові дерева (b – дерева) – це дерева, у яких ступені будь-яких не кінцевих вершин дорівнюють 2.



7.6 Способи обходу дерев

Існує два основних способи обходу (пошуку) вершин дерева:

– обхід у глибину;

– обхід у ширину.

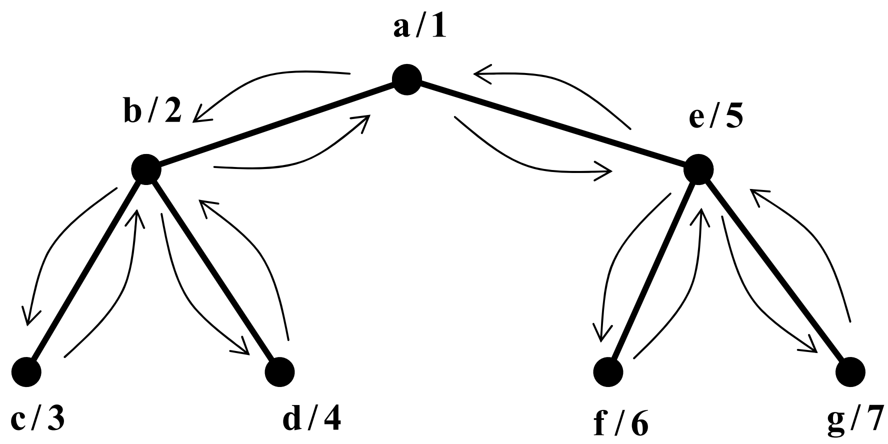
1. Спосіб обходу у глибину

Спосіб обходу у глибину складається з перегляду гілок дерева. Починаємо пошук з деякої фіксованої вершини $\mathbf{v_0}$. Знаходимо вершину $\mathbf{u}$ суміжну з $\mathbf{v_0}$ і повторюємо весь процес, починаючи з вершини $\mathbf{u}$. Якщо існує не переглянута вершина, суміжна з вершиною $\mathbf{u}$, розглядаємо її й починаючи з неї продовжуємо пошук. Якщо не існує не однієї нової вершини, суміжної з $\mathbf{u}$, то говорять, що вершина $\mathbf{u}$ використана й робиться повернення у вершину з якої потрапили у вершину $\mathbf{u}$, продовжуємо процес. Якщо на якомусь кроці $\mathbf{u = v_0}$, і немає ні однієї використаної вершини, то алгоритм закінчує роботу.

Ілюстрація алгоритму обходу у глибину для графа, заданого матрицею суміжності, приведена на наступному рисунку, де у позначенні кожної вершини $\mathbf{i}$: $\mathbf{i/j}$ указується номер її проходження при виконанні алгоритму, $\mathbf{j}$.

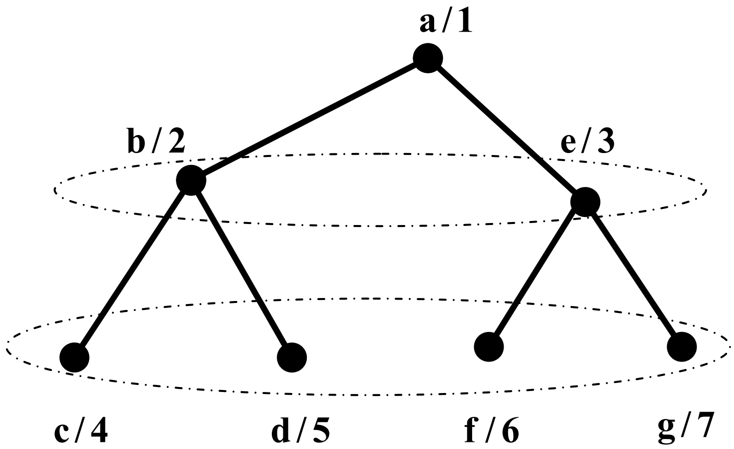
Матриця суміжності:

	a	**b**	**c**	**d**	**e**	**f**	**g**
a	0	1	0	0	1	0	0
b	1	0	1	1	0	0	0
c	0	1	0	0	0	0	0
d	0	1	0	0	0	0	0
e	1	0	0	0	0	1	1
f	0	0	0	0	1	0	0
g	0	0	0	0	1	0	0



2. Спосіб обходу в ширину

Пошук в ширину означає перегляд вершин по ярусах в ієрархічному зображенні дерева. Під «використанням» вершини мається на увазі перегляд всіх «сусідів» (вершин, суміжних даній вершині) вершини.



7.7 Кістяки неорієнтованого графа

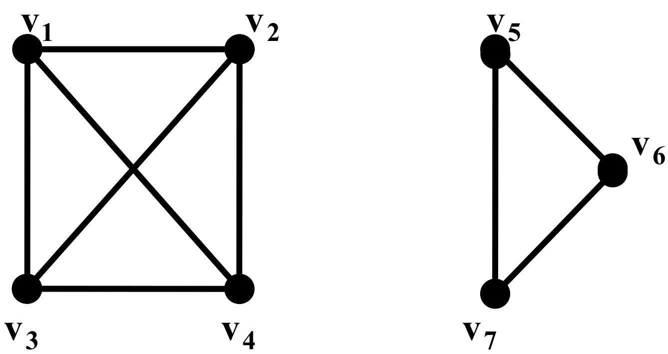
Кістяк (каркас, остов графа $\mathbf{G}$) – це остовний підграф графа $\mathbf{G}$, що задає дерево на кожній компоненті зв'язності графа $\mathbf{G}$.

Для зв'язного графа: **кістяк** – це дерево, що покриває всі вершини вхідного графа.

Очевидно, що в кожному графі існує кістяк, у загальному випадку не один. Ребра кістяка $\mathbf{T}$ деякого графа $\mathbf{G}$ називаються **гілками**, а ребра графа $\mathbf{G}$, що не увійшли до кістяка називаються **хордами**.

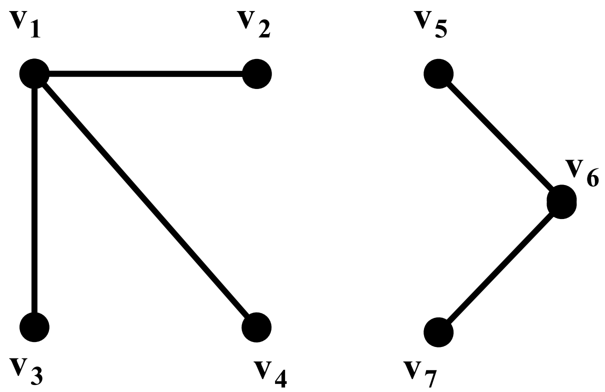
Наприклад.

1) Нехай є деякий незв’язний неорієнтований граф $\mathbf{G}$:

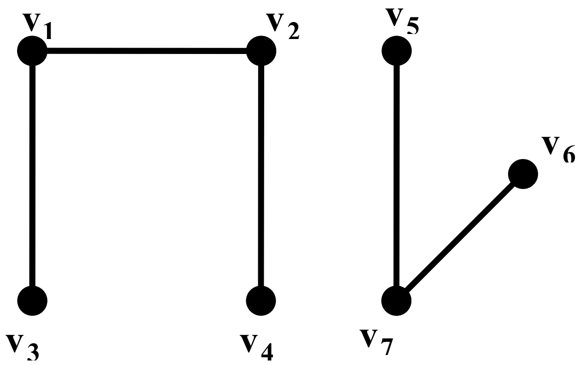


Приклади кістяків графа **G** :

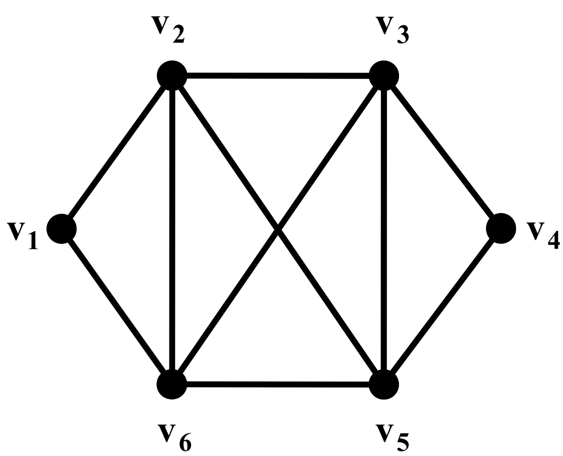
а)



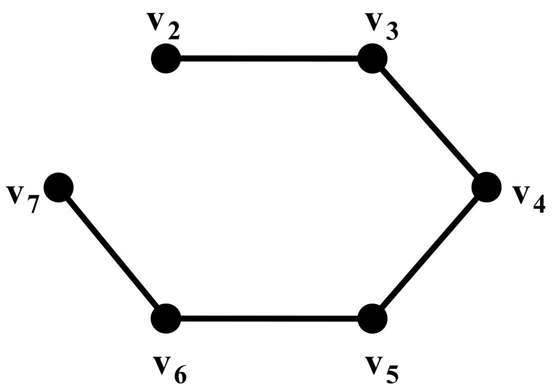
б)

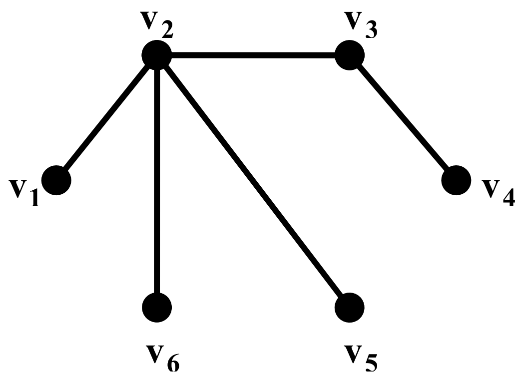


2) Нехай є деякий зв'язний граф **G** :



Приклади кістяків графа **G** :

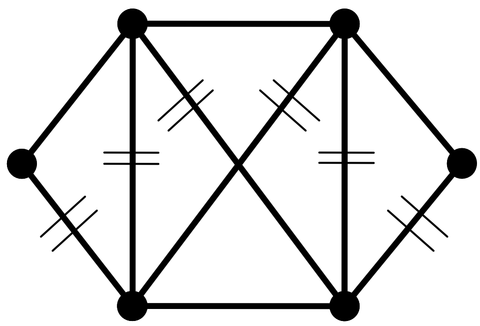




7.7.1 Алгоритми побудови кістяка

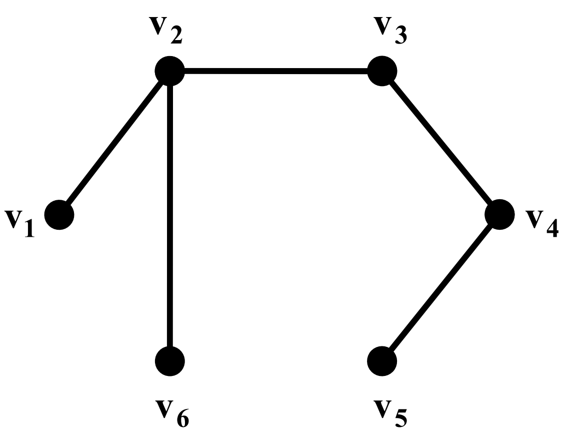
I клас. Видалення ребер вхідного графа.

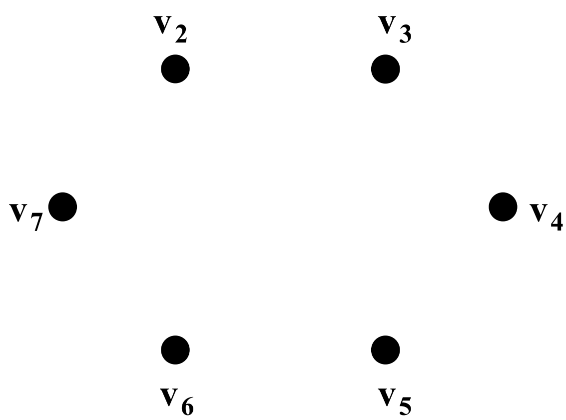
Причому, чергове ребро, яке видаляється, не повинно робити граф не зв'язним, але повинно підтримувати ациклічність дерева.



II клас. Додавання ребра до порожнього графа.

Чергове ребро, яке додається, не повинне приводити до утворення циклу.





ІІІ клас. Кістяк найкоротших маршрутів (КНМ).

З довільної вершини алгоритм будує не просто дерево, а дерево на базі геодезичних.

7.7.2 Матриця Кирхгофа

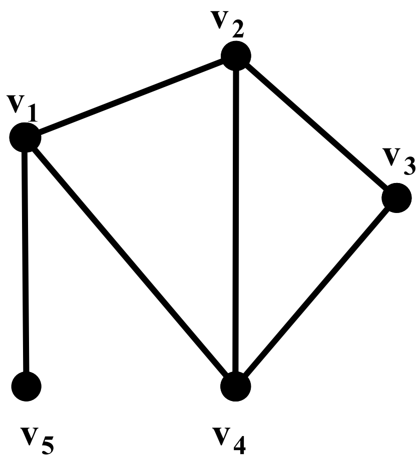
Матриця Кирхгофа – це квадратна матриця:

$$\mathbf{M} = \left\| \mathbf{m_{ij}} \right\|, \quad \mathbf{i, j = 1, ..., p}, \quad \mathbf{m_{ij}} = \begin{cases} \mathbf{\deg v_i, i = j} \\ \mathbf{-a_{ij}, \quad i \neq j} \end{cases},$$

де $\mathbf{a_{ij}}$ – відповідний елемент матриці суміжності

Наприклад.

Для графа $\mathbf{G}$ матриця Кирхгофа:



M=

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
v_1	3	-1	0	-1	-1
v_2	-1	3	-1	-1	0
v_3	0	-1	2	-1	0
v_4	-1	-1	-1	3	0
v_5	-1	0	0	0	1

Сума елементів будь-якого рядка й стовпця, як і сума усіх елементів матриці Кирхгофа, дорівнює 0.

7.7.3 Теореми Кирхгофа та Келі

Число кістякових дерев зв'язного графу $\mathbf{G}$ порядку $\mathbf{p}$, $\mathbf{p \geq 2}$ дорівнює алгебраїчному доповненню будь-якого елемента матриці Кирхгофа

У зв'язному позначеному графі всі алгебраїчні доповнення матриці Кирхгофа рівні між собою й визначають загальне число позначених кістяків цього графа

Наслідок з теореми Кирхгофа

При $\mathbf{p > 1}$, де $\mathbf{p}$ – кількість вершин, число кістяків повного графа $\mathbf{K_p}$ дорівнює $\mathbf{p^{p-2}}$

Теорема Келі

Число позначених дерев порядку $\mathbf{p}$ дорівнює $\mathbf{p^{p-2}}$

Доведення.

Розглянемо матрицю Кирхгофа для повного графа $\mathbf{K_p}$.

M=

	1	**2**	**3**	**…**	**p**
1	p-1	-1	-1	…	-1
2	-1	p-1	-1	…	-1
3	-1	-1	p-1	…	-1
…	…	…	…	…	…
p	-1	-1	-1	…	p-1

Розглянемо алгебраїчне доповнення матриці Кирхгофа для елемента $\mathbf{m_{11}}$.

У новому визначнику буде $\mathbf{p-1}$ рядків і $\mathbf{p-1}$ стовпців.

$\mathbf{Am_{11}}$:

	1	**2**	**3**	**…**	**p-1**
1	p-1	-1	-1	…	-1
2	-1	p-1	-1	…	-1
3	-1	-1	p-1	…	-1
…	…	…	…	…	…
p-1	-1	-1	-1	…	p-1

Виконаємо наступні еквівалентні перетворення:

1) додамо до першого рядка суму всіх інших рядків, перетворення типу:

$$(p-1)+(p-2)*(-1)=1.$$

	1	**2**	**3**	**…**	**p-1**
1	1	1	1	…	1
2	-1	p-1	-1	…	-1
…	…	…	…	…	…
p-1	-1	-1	-1	…	p-1

2) додамо перший рядок до інших;

	1	**2**	**3**	**…**	**p-1**
1	1	1	1	…	1
2	0	p	0	…	0
…	…	…	…	…	…
p-1	0	0	0	…	p

3) віднімаємо перший стовпець із інших.

	1	**2**	**3**	**…**	**p-1**
1	1	0	0	…	0
2	0	p	0	…	0
…	…	…	…	…	…
p-1	0	0	0	…	p

$$\det Am_{11}=p^{p-2}.$$

7.7.4 Алгоритми пошуку кістяків найкоротших маршрутів

Задано зважений граф G із матрицею ваги C_G,

$$G=(V,E),\ C_G=\left\|c_{ij}\right\|, i,j=\overline{1,p},$$

де c_{ij} – вага ребра $\{i,j\}$, якщо воно існує.

Потрібно знайти кістяк з мінімальною сумарною вагою ребер.

7.7.4.1 Алгоритм Краскала

1. Впорядкуємо ребра вхідного графа в порядку неспадання їхньої ваги.

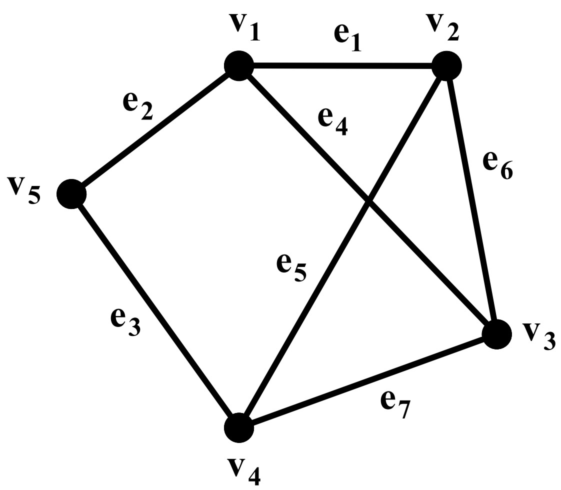
2. Будуємо порожній граф $\mathbf{O_p}$, де $\mathbf{p}$ – кількість вершин вхідного графа.

3. На кожному кроці до вже сформованого графа зі списку ребер додається ребро з мінімальною вагою. Ребро, яке додається, не повинне приводити до утворення циклу.

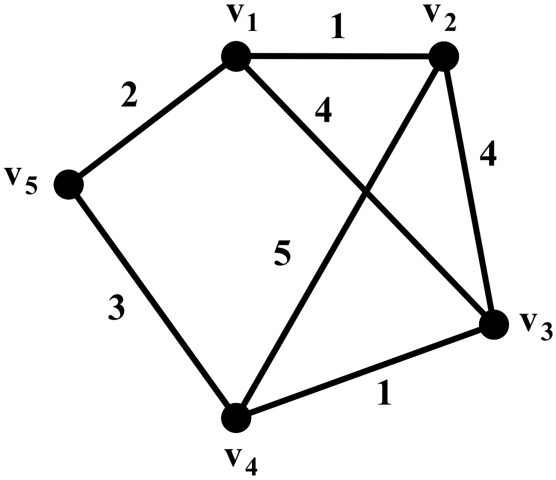
4. Алгоритм закінчує роботу, якщо кількість ребер у сформованому графі стане рівним $\mathbf{p-1}$.

Наприклад.

Знайти кістяк найкоротших маршрутів за алгоритмом Краскала.



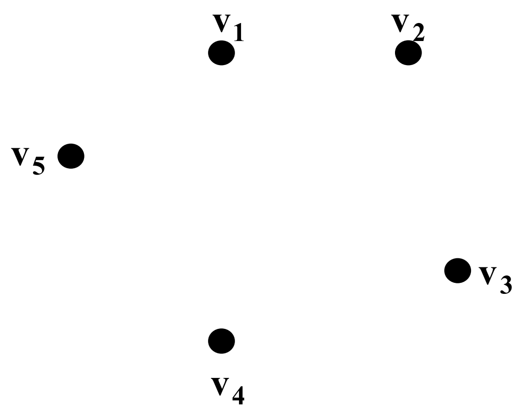
Список ребер.



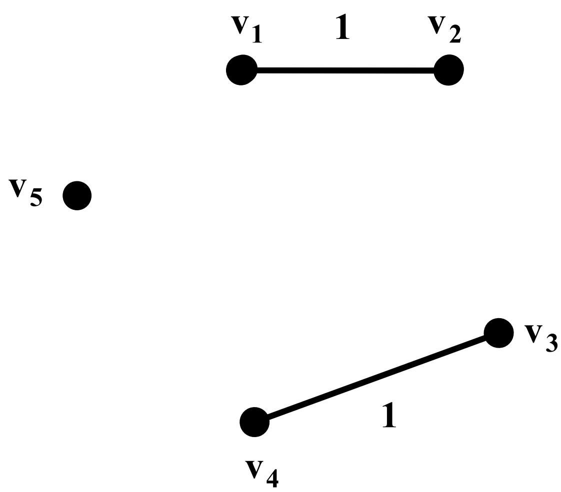
(1, 2), (4, 3)	1
(1, 5)	2
(4, 5)	3
(1, 3), (2, 3)	4
(2, 4)	5

<u>Покрокове виконання алгоритму Краскала.</u>

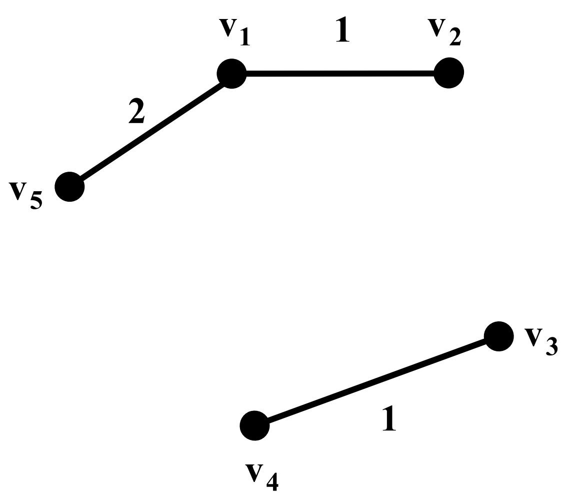
1. Побудувати порожній граф на 5 вершинах.



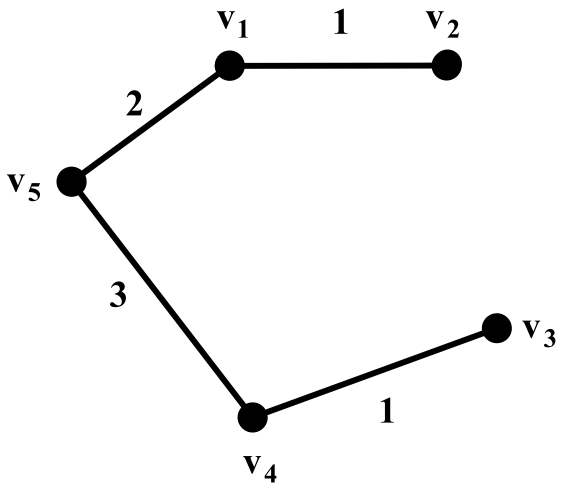
2. Додати 2 перші ребра зі списку ребер: $\mathbf{e_1}$ і $\mathbf{e_7}$.



3. Додати ребро довжиною 2 – $\mathbf{e_2}$.

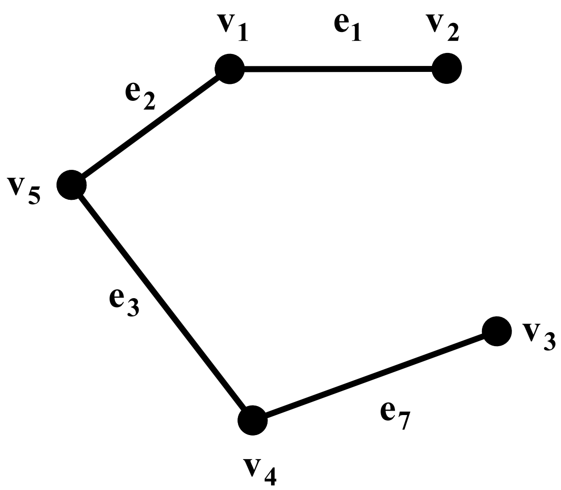


4. Додати ребро довжиною 3 – $\mathbf{e_3}$.



Результат застосування алгоритму Краскала

Кістяк найкоротших маршрутів має довжину: 7.



7.7.4.2 Алгоритм Прима

Відрізняється від алгоритму Краскала тим, що на кожному кроці будується не просто граф без циклів, але дерево.

1. Впорядкуємо ребра вхідного графа в порядку не спадання їхньої ваги.

2. Будуємо порожній граф $\mathbf{O_p}$, де $\mathbf{p}$ – кількість вершин вхідного графа.

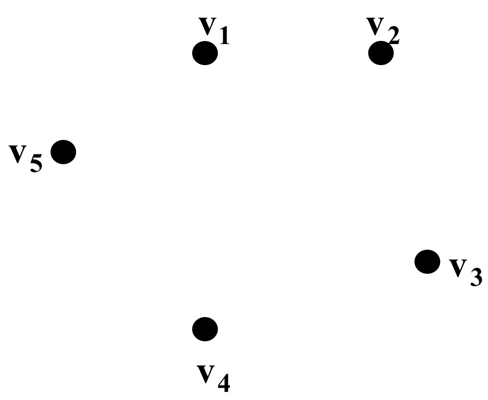
3. На кожному кроці до формованого графа додаємо таке ребро зі списку ребер, щоб не утворився цикл і не порушувалася зв'язність.

Для цього список ребер кожен раз проглядається, починаючи з 1 ребра, і алгоритм починає побудову кістяка найкоротших маршрутів за допомогою розростання піддерева $\mathbf{T}$ з однією вершиною. Піддерево $\mathbf{T}$ поступово розростається за рахунок приєднання ребер $\{\mathbf{i},\mathbf{j}\}$, де вершина $\mathbf{i} \in$ поточному дереву, а $\mathbf{j}$ – йому не належить і вага ребра $\{\mathbf{i},\mathbf{j}\}$, найменша з усіх можливих.

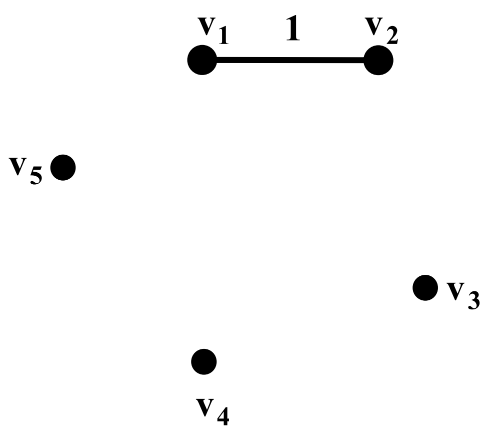
4. Алгоритм закінчує роботу, якщо кількість ребер у формованому графі стане рівним $\mathbf{p-1}$.

Покрокове виконання алгоритму Прима

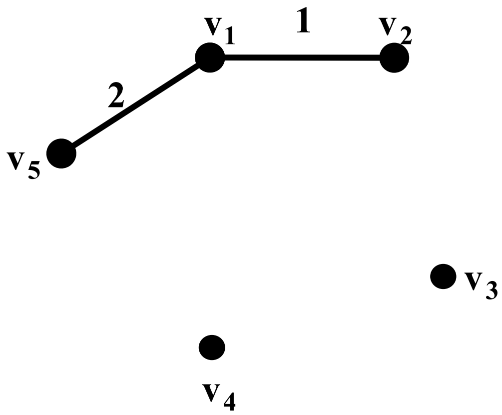
1. Побудувати порожній граф на 5 вершинах.



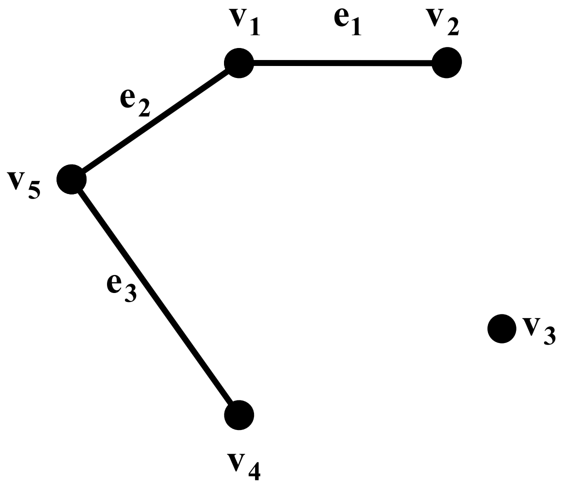
2. Додати одне ребро довжиною 1, нехай $\mathbf{e_1}$.



3. Додати ребро $\mathbf{e_2}$ довжиною 2, будується дерево на кожному кроці.

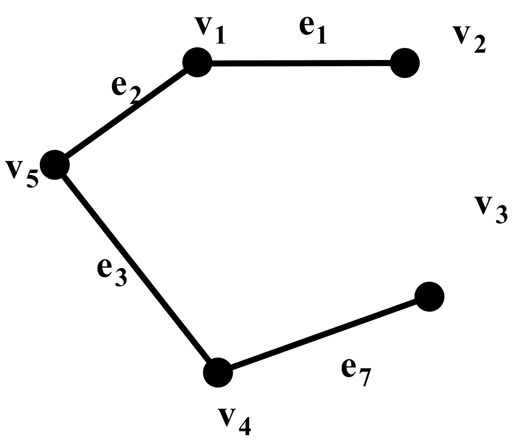


4. Переглядається список ребер спочатку, можна продовжувати дерево з вершин 1,2,5. Додати ребро довжиною 3, мінімально можливе.



Результат застосування алгоритму Прима

Кістяк найкоротших маршрутів (аналогічний КНМ за алгоритмом Краскала для цього графа, порядок підключення вершин різний). Довжина КНМ=7.



7.8 Завдання до самостійної роботи

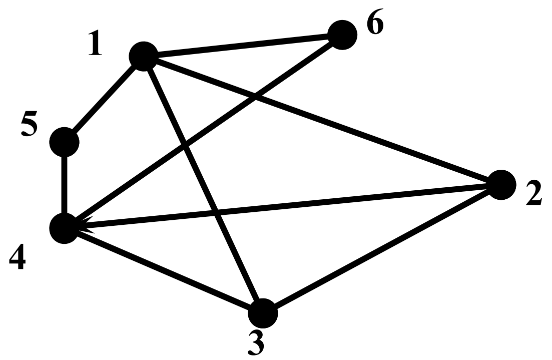
1. Згенерувати усі абстрактні, не ізоморфні один одному дерева порядку 4, 5, 6, 7. Розділити множину дерев на дві: під множини дерева із одною та із двома центральними вершинами.

2. Для графа множина вершин якого дорівнює $\mathbf{N_6}$, а множина ребер складається за таким принципом: дві вершини із номерами $\mathbf{i}$ та $\mathbf{j}$, $\mathbf{i,j \in N_6}$ є суміжними, якщо вони діляться без залишку чи на 5, чи на 6 продемонструвати виконання алгоритмів обхід у глибину та обхід у ширину.

3. Для графа множина вершин якого дорівнює $\mathbf{N_5}$, а множина ребер складається за таким принципом: дві вершини із номерами $\mathbf{i}$ та $\mathbf{j}$, $\mathbf{i,j \in N_5}$ є суміжними, якщо вони діляться без залишку чи на 2, чи на 3 обчислити кількість помічених остовів.

4. Для графа множина вершин якого дорівнює $\mathbf{N_{10}}$, а множина ребер складається за таким принципом: дві вершини із номерами $\mathbf{i}$ та $\mathbf{j}$, $\mathbf{i,j \in N_{10}}$ є суміжними, якщо вони діляться без залишку чи на 6, чи на 7 продемонструвати виконання алгоритмів обхід у глибину та обхід у ширину.

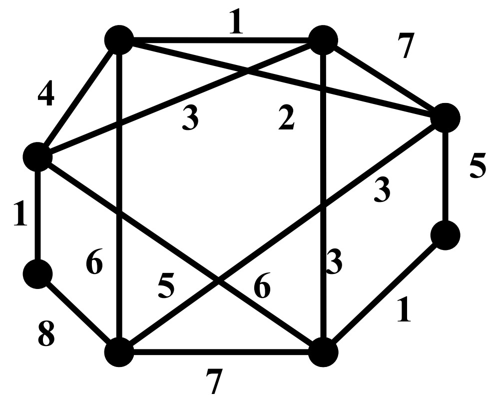
5. Для заданного графа знайти кістяк найменшої довжини за алгоритмами Краскала та Прима, якщо довжина ребер обчислюється, як $\mathbf{(i * j) mod 5 + 1}$.



6. Для графа множина вершин якого дорівнює $\mathbf{N_{12}}$, а множина ребер складається за таким принципом: дві вершини із номерами $\mathbf{i}$ та $\mathbf{j}$, $\mathbf{i,j \in N_{12}}$ є

суміжними, якщо вони діляться без залишку чи на 5, чи на 6 продемонструвати виконання алгоритмів Краскала та Прима. У якості ваги ребра $\{\mathbf{i},\mathbf{j}\}$ прийняти результат виконання операції: $(\mathbf{i}+\mathbf{j})\,\mathbf{mod}\,\mathbf{6}+1$.

7. Для заданного графа знайти кістяк найменшої довжини за алгоритмами Краскала та Прима. Продемонструвати покрокове виконання алгоритмів.



8. Для графа множина вершин якого дорівнює $\mathbf{N_{13}}$, а множина ребер складається за таким принципом: дві вершини із номерами $\mathbf{i}$ та $\mathbf{j}$, $\mathbf{i},\mathbf{j}\in\mathbf{N_{13}}$ є суміжними, якщо вони діляться без залишку чи на 7, чи на 9 продемонструвати виконання алгоритмів Краскала та Прима. У якості ваги ребра $\{\mathbf{i},\mathbf{j}\}$ прийняти результат виконання операції: $(\mathbf{i}+\mathbf{j})\,\mathbf{mod}\,\mathbf{8}+1$.

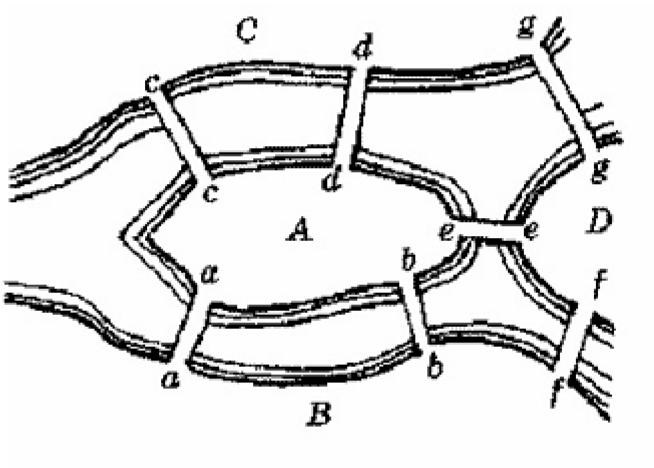
7.9 Контрольні питання

1. Навести визначення дерева, лісу, компоненти лісу.
2. Теорема про п’ять еквівалентних визначень дерева
3. Теореми про центральні та висячі вершини дерева.
4. Ярусна форма зображення дерев
5. Способи обходу вершин в ширину та глибину.
6. Дати визначення кістяка дерева.
7. Дати визначення матриці Кирхгофа та її властивостей.
8. Теорема Кирхгофа та Келлі.
9. Кістяки найменших маршрутів. Алгоритми побудови КНМ.
10. Чим відрізняються алгоритми Прима та Краскала.

РОЗДІЛ 8
ЕЙЛЕРЕВІ ТА ГАМІЛЬТОНОВІ ГРАФИ

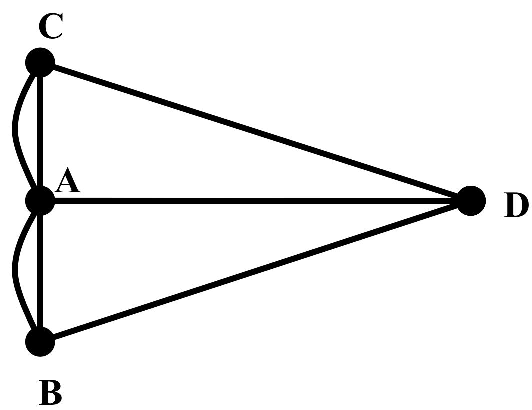
8.1 Ейлереві обходи та графи

Виникнення теорії графів, як науки, пов’язане із розв’язанням знаменитої задачі про Кенігсберзькі мости. У місті Кенігсберг (нині Калінінград) два річкових острови **A** і **D** ріки Преголь з'єднані між собою та із берегами за допомогою 7 мостів. Чи можна, вийшовши з будинку, повернутися назад, пройшовши в точності один раз по кожному із мостів.



Математична постановка задачі про Кенігсбергські мости

Чи існує в графі (мультиграфі) цикл, що містить всі ребра вхідного графа рівно один раз? У 1736 році Леонард Ейлер довів, що для такого мультиграфа не можна побудувати описаний маршрут.



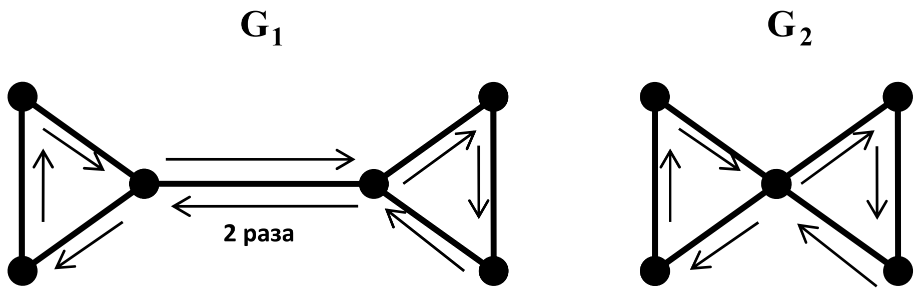
8.1.1 Основні визначення

Ейлерів цикл – цикл, що містить кожне ребро графа.

Ейлерів граф – граф, що містить ейлерів цикл.

Наприклад.

Граф $\mathbf{G_1}$ не є ейлеревим, а граф $\mathbf{G_2}$ – ейлерів.



Ейлеревим ланцюгом з кінцевими вершинами $(\mathbf{a},\mathbf{b})$ називається ланцюг, що починається у вершині $\mathbf{a}$, закінчується у вершині $\mathbf{b}$ і містить кожне ребро вхідного графа рівно один раз.

8.1.2 Критерій існування ейлерева циклу в неорграфі

Теорема про існування ейлерева циклу в неорграфі (критерій ейлеровості – необхідні й достатні умови)

Зв'язний неорієнтований простий граф $\mathbf{G}$ є ейлеревим тоді й тільки тоді, коли ступені всіх його вершин парні

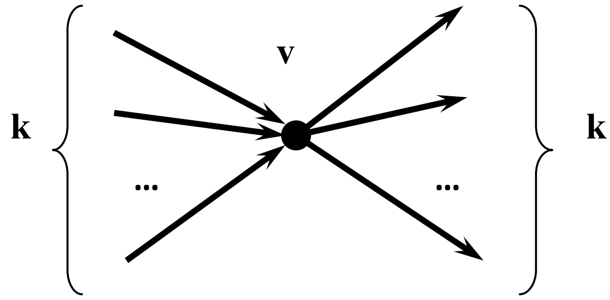
Доведення.

1. Необхідність.

Дано: зв'язний граф $\mathbf{G}=(\mathbf{V},\mathbf{E})$ – ейлерів.

Довести: ступені усіх вершин $\mathbf{G}$ – парні.

Граф $\mathbf{G}$ – ейлерів, отже, у ньому існує ейлерів цикл $\mathbf{Z}$. Візьмемо довільну вершину графа $\mathbf{G}: \mathbf{v}\in\mathbf{V}$, тому що граф $\mathbf{G}$ – ейлерів, та вершина $\mathbf{v}\in\mathbf{Z}$.



Нехай ця вершина зустрічається рівно $\mathbf{k}$ раз в ейлеревому циклі $\mathbf{Z}$, тобто рівно $\mathbf{k}$ раз цикл входить і виходить із неї по новим, ще не пройденим ребрам.

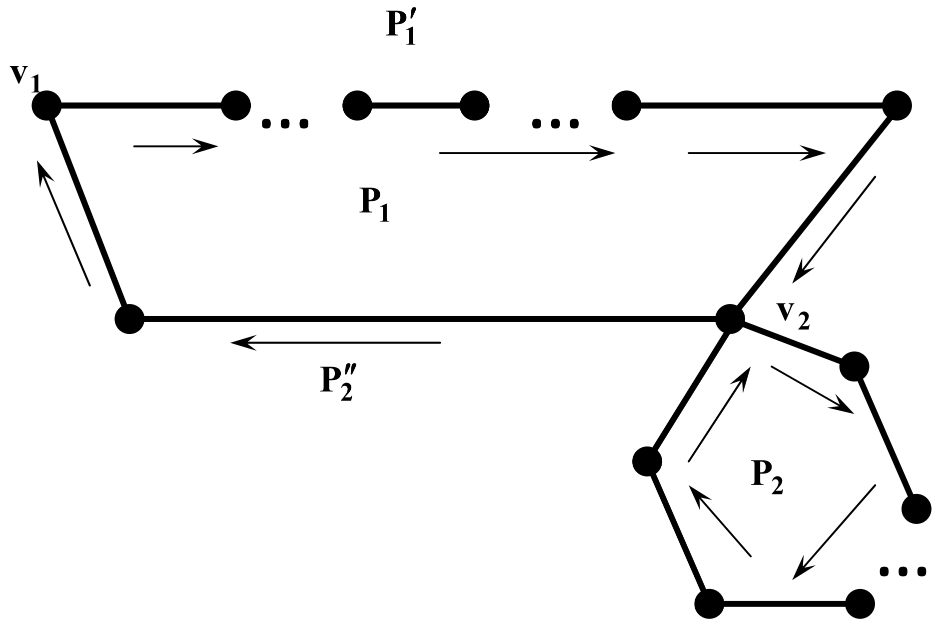
Ейлерів цикл містить всі ребра вхідного графа. Тоді, ступінь вершини $\mathbf{v}$ дорівнює $\mathbf{2k}$, тобто є парним числом. Оскільки вершина $\mathbf{v}$ – це довільна вершина вхідного графа, тоді усі інші вершини графа мають парний ступінь.

2. Достатність.

Дано: ступені усіх вершин $\mathbf{G}$ – парні.

Довести: $\mathbf{G}$ – ейлерів.

Візьмемо довільну вершину $\mathbf{v}_1$ і будемо будувати простий ланцюг $\mathbf{P}_1$, починаючи із цієї вершини й вибираючи щоразу нове, ще не пройдене ребро, поки це можливо. Тому що ступені усіх вершин парні, то потрапивши в чергову вершину, відмінну від вхідної, завжди будемо мати в розпорядженні ще одне не пройдене ребро. Побудова ланцюга $\mathbf{P}_1$ закінчиться у вершині $\mathbf{v}_1$, тобто ланцюг $\mathbf{P}_1$ неодмінно буде циклом.



Якщо $\mathbf{P}_1$ містить усі ребра вхідного графа, то це буде ейлерів цикл. Якщо ні, видалимо із графа $\mathbf{G}$ всі ребра циклу $\mathbf{P}_1$, одержимо деякий граф $\mathbf{G}_1$. Оскільки вхідний граф і цикл $\mathbf{P}_1$ мали вершини парних ступенів, то й граф $\mathbf{G}_1$ має таку ж властивість. Вхідний граф $\mathbf{G}$ – зв'язний та не всі ребра увійшли в $\mathbf{P}_1$.

Отже, найдеться хоча б одна вершина загальна для $\mathbf{P}_1$ і $\mathbf{G}_1$. Нехай це буде вершина $\mathbf{v}_2$. Тоді, із $\mathbf{v}_2$, будуємо цикл $\mathbf{P}_2$ аналогічно побудові $\mathbf{P}_1$.

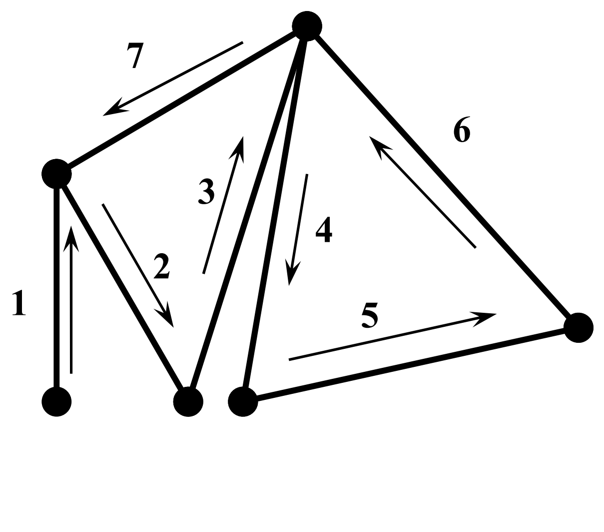
Із двох циклів $\mathbf{P}_1$ і $\mathbf{P}_2$ конструюємо один цикл: $\mathbf{P}_3$. Цикл проходить по ребрах ланцюга $\mathbf{P}_1'$ до $\mathbf{v}_2$, потім всі ребра циклу $\mathbf{P}_2$, і повертається в $\mathbf{v}_1$ по $\mathbf{P}_1'': \mathbf{P}_3 = \mathbf{P}_1'' \cup \mathbf{P}_2 \cup \mathbf{P}_1''$. Якщо $\mathbf{P}_3$ містить всі ребра вхідного графа, то граф $\mathbf{G}$ – ейлерів; якщо ні, діємо аналогічно попередній побудові: видаляємо з $\mathbf{G}$ всі ребра $\mathbf{P}_3$, обираємо вершину $\mathbf{v}_3$ і будуємо цикл $\mathbf{P}_4$, і так далі. Тому що в графі скінченна кількість вершин та ребер, то за скінчене число кроків отримаємо цикл, який буде ейлеревим.

Наведений доказ достатності в теоремі Ейлера є конструктивним, бо містить один з алгоритмів побудови ейлерева циклу в графі. На практиці найчастіше використовують для побудови ейлерева циклу алгоритм Флері.

Наслідок №1. Для зв'язного графа $\mathbf{G}$ множину ребер можна розбити на прості цикли, якщо граф – ейлерів.

Наслідок №2. Для того, щоб зв'язний граф $\mathbf{G}$ покривався єдиним ейлеревим ланцюгом, необхідно й достатньо, щоб він містив рівно 2 вершини з непарним ступенем. Тоді ланцюг починається в одній із цих вершин і закінчується в іншій.

Ілюстрація ейлерева ланцюга графу.



8.1.3 Алгоритм Флері побудови ейлерева циклу

Дано зв'язний простий граф $\mathbf{G=(V,E), |V|=p, |E|=q}$, що містить ейлерів цикл. Треба пронумерувати ребра вхідного графа від **1** до **q** так, щоб номер ребра вказував, яким по рахунку це ребро ввійде в ейлерів цикл.

Алгоритм Флері.

1. Беремо довільну вершину $\mathbf{v \in V}$ і довільне ребро $\mathbf{e=\{u,v\} \in E}$.

Приписуємо ребру **e** номер 1.

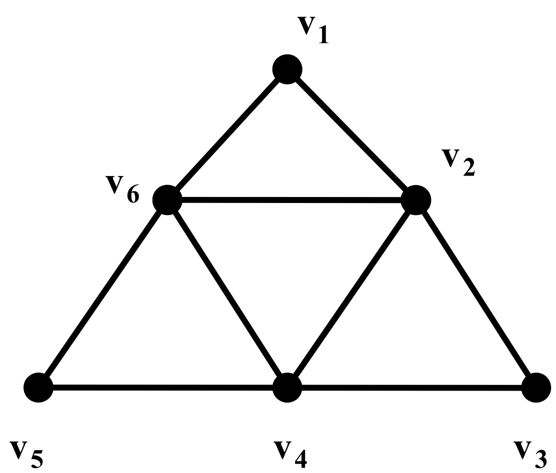
Викреслюємо це ребро зі списку ребер і переходимо до вершини $\mathbf{v}$.

2. Нехай **w** поточна вершина і **k** номер, останнього викресленого ребра. Вибираємо довільне ребро инцидентне вершині **w**, причому міст і ребро, що повертає нас у начальну вершину **v**, вибираємо тільки в крайньому випадку, якщо інших можливостей вибору ребра не існує. Приписуємо ребру номер $\mathbf{k+1}$ і викреслюємо його. Процес триває доти, поки всі ребра не викреслені.

Наприклад.

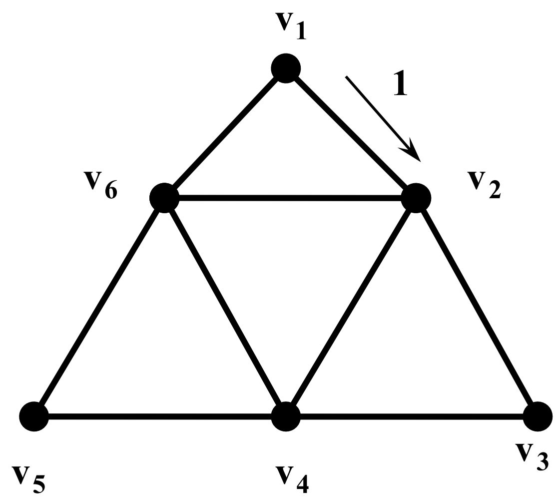
Нехай маємо граф $\mathbf{G=(V,E), |V|=6, |E|=8}$, що зображений на наступному рисунку.

Граф **G** є зв'язним та ейлеревим за теоремою Ейлеру, бо кожна вершина в ньому має парну степінь.

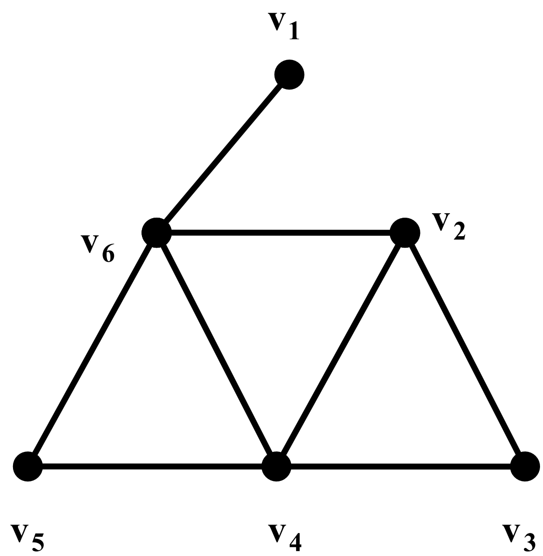


Продемонструємо покрокове виконання алгоритму Флери.

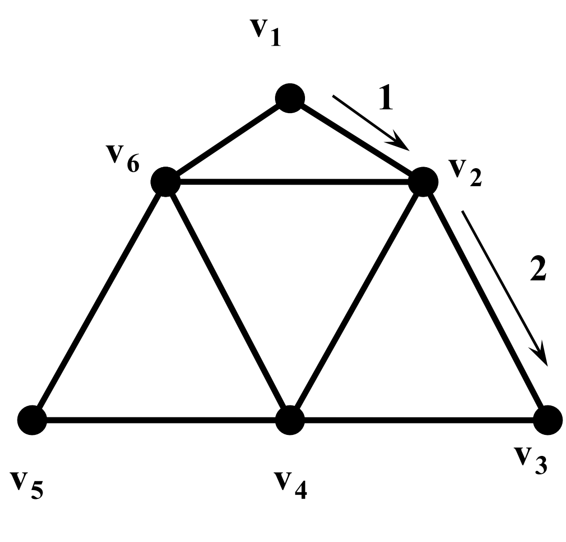
1. Вибираємо вершину $\mathbf{v_1}$ та ребро $\mathbf{\{v_1, v_2\}}$, приписуємо цьому ребру номер 1.



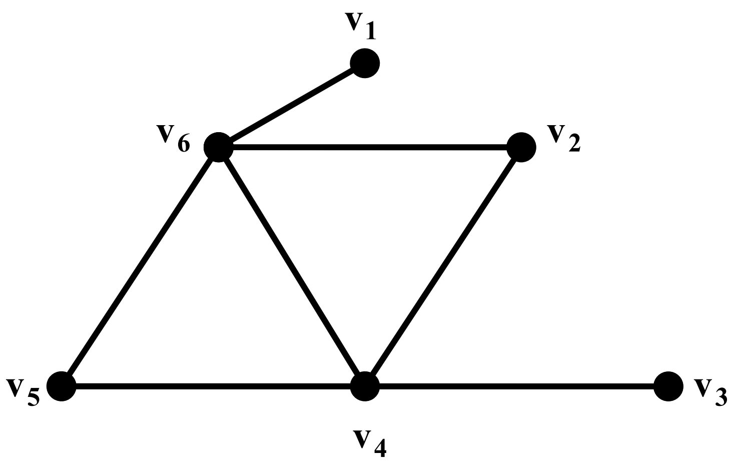
2. Викреслюємо це ребро із списку ребер та переходимо у вершину $\mathbf{v_2}$.



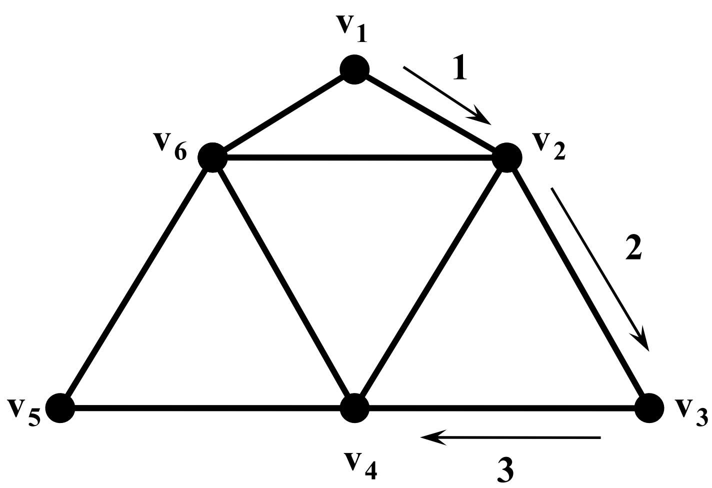
3. Вибираємо ребро $\{\mathbf{v_2}, \mathbf{v_3}\}$, приписуємо ребру номер 2.



4. Викреслюємо це ребро із списку ребер та переходимо у вершину $\mathbf{v_3}$.

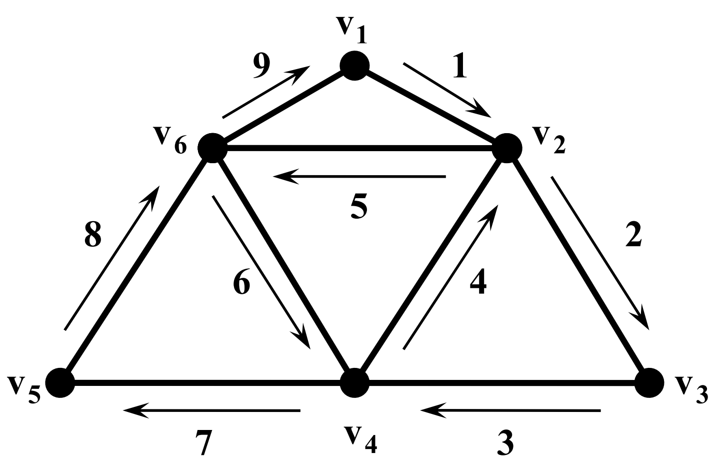


5. Вибираємо ребро $\{\mathbf{v_3}, \mathbf{v_4}\}$ (ребро $\{\mathbf{v_3}, \mathbf{v_4}\}$ є міст, але іншої можливості на цьому кроці немає), приписуємо ребру номер 3.



6. Викреслюємо це ребро із списку ребер та переходимо у вершину $\mathbf{v_4}$.

7. Продовжуючи цю процедуру із вершини $\mathbf{v_4}$ за скінчене число кроків, пронумеруємо усі ребра заданого графу, тобто побудуємо ейлерів цикл.



8.1.4 Задача китайського поштаря

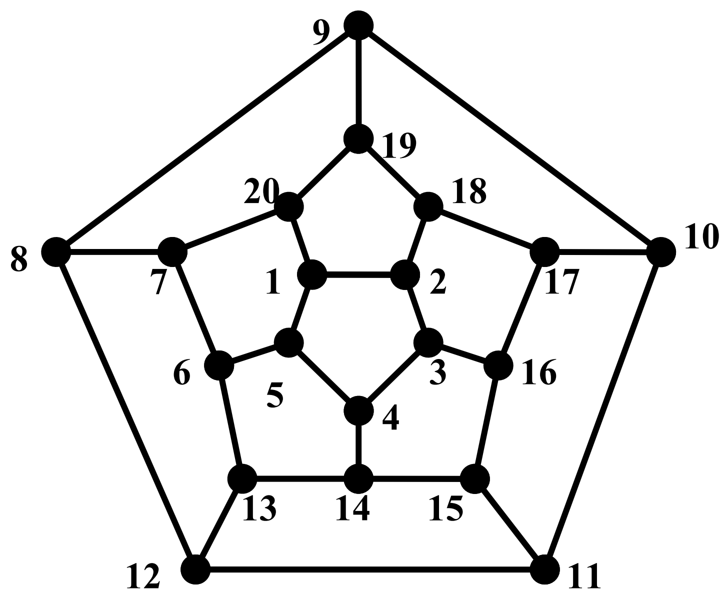
Задача китайського поштаря – це узагальнення задачі про пошук ейлеревого циклу в графі.

Математична постановка задачі.

Нехай є зв'язний зважений граф, кожному ребру якого приписано деяке число, що називаються вагою ребра (часто, але не завжди, в додатках вага ребра – це його довжина). Потрібно знайти такий цикл, при якому кожне ребро графа проходиться принаймні один раз і сумарна вага усіх ребер, що увійшли до циклу, є мінімальною. Зауважимо, що якщо граф є ейлеревим, то розв'язання задачі китайського поштаря співпадає із задачею побудови ейлерева циклу.

8.2 Гамільтонові цикли та графи

Гамільтонові цикл та граф названі на честь ірландського математика Вільяма Гамільтона, який вперше у 1859 році запропонував задачу, яка отримала назву «кругосвітня подорож». Кожній із 20 вершин додекаедру приписувалось подеяке із найбільших міст Землі, а ребра символізували дороги, що їх з'єднують. Потрібно було, проїхати через кожне місто рівно один раз і повернутись в начальний пункт. На наступному рисунку проілюстровано один із відомих розв'язків задачі «кругосвітня подорож». Номера вершин дають гамільтонів цикл графу.



Не зважаючи на те, що задача про пошук гамільтонова циклу у графі дуже схожа на задачу про пошук ейлерева циклу, щодо її розв’язання, то тут ситуація прямо протилежна. Задача про ейлерів цикл графу повністю розв’язана, бо доказано критерій існування такого циклу у графі, а також розроблені ефективні алгоритми побудови такого циклу у ейлеревому графі. Для пошуку гамільтонова циклу, до цих пір не знайдено ефективного критерію, що відповідає на питання: чи є в графі гамільтонів цикл, є тільки низка достатніх умов його існування.

Алгоритми побудови гамільтонова циклу це є алгоритми повного перебору або їх модифікації. Пошук ефективних алгоритмів для розв’язання цієї задачі – один з популярних напрямків розвитку сучасної теорії графів.

8.2.1 Основні визначення

Гамільтонів цикл – простий цикл, що містить кожну вершину графа.

Гамільтонів граф – граф, що містить гамільтонів цикл.

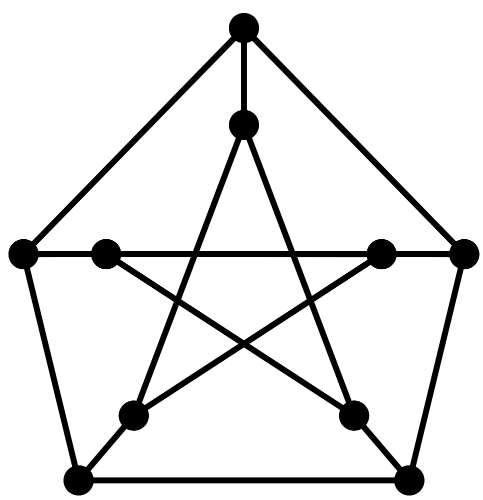
Гамільтонів ланцюг – простий ланцюг, що містить кожну вершину графа.

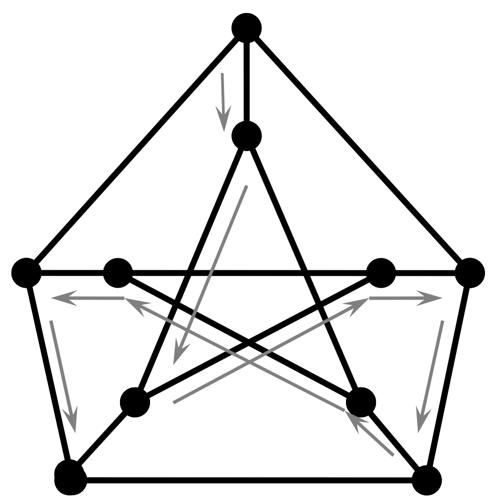
Зауваження

1) Будь-який повний граф є гамільтоновим.

2) Усі цикли є гамільтоновими графами.

На наступному рисунку приведено граф Петерсена, який не має гамільтонова циклу, але містить гамільтонів ланцюг.





8.2.2 Достатні умови існування гамільтонова циклу в графі

Теорема Дірака (1952р.)

Якщо число вершин графа $\mathbf{p}$ і для будь-якої вершини виконується умова:

$\forall \mathbf{v_i} \in \mathbf{V}, \mathbf{i} = \overline{\mathbf{1,p}}, \mathbf{\deg v_i} \geq \frac{\mathbf{p}}{\mathbf{2}}$, то граф $\mathbf{G}$ – гамільтонів

Теорема Оре (1960 р.)

Якщо число вершин графа $\mathbf{p}$ і для будь-яких двох несуміжних вершин $\mathbf{u}$ і $\mathbf{v}$ виконується нерівність: $\mathbf{\deg u + \deg v \geq p}$, $\nexists(\mathbf{u,v}) \in \mathbf{E}$,

то граф $\mathbf{G}$ – гамільтонів

Наприклад.

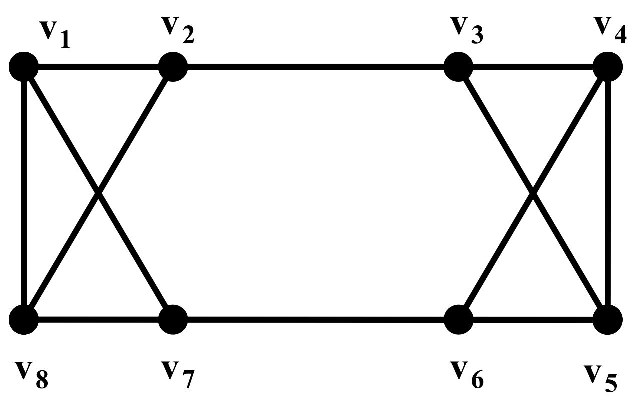
На наступному рисунку приведено приклад графу $\mathbf{G = (V,E), |V| = p = 8}$, для якого не виконуються достатні умови теореми Дірака, але граф є гамільтоновим, бо містить і не один гамільтонів цикл.

Наприклад, $\mathbf{Г1 = (v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_1)}$.

$\mathbf{Г2 = (v_1, v_8, v_7, v_6, v_5, v_4, v_3, v_2, v_1)}$.

$$\mathbf{p = 8}, \ \mathbf{\deg v_i = 3, i = \overline{1,8}},$$

$$\mathbf{3 \not\geq \frac{8}{2} = 4}.$$

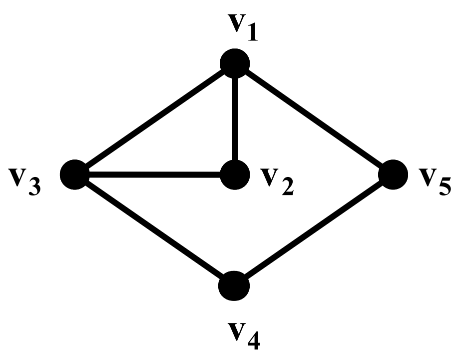


8.2.3 Дерево повного перебору

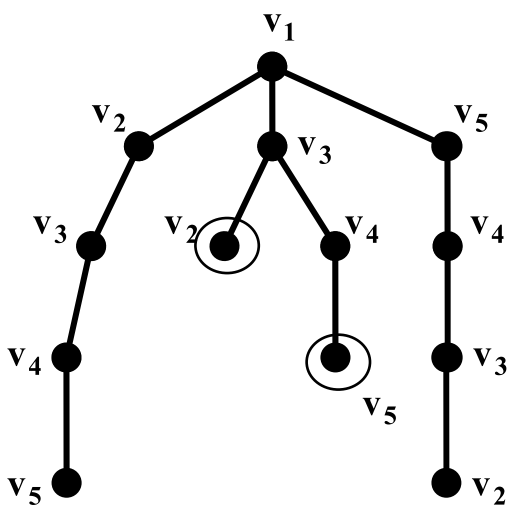
Дерево повного перебору – універсальний спосіб визначення гамільтоновості графа. Для його генерації використовують ідею ярусного представлення графу, при умові, що вершина не може повторюватися тільки у гілці, бо будується гамільтонів ланцюг. Якщо гамільтонів ланцюг існує, остається перевірити, чи є замикаюче ребро, чи ні. Дерево повного перебору вершин це громіздкий метод, і може використовуватись лише для ілюстрації ідеї побудови гамільтонова циклу.

Наприклад.

Задано граф $\mathbf{G}$ на 5 вершинах. Побудувати усі гамільтонові цикли графу, якщо такі існують.



Дерево повного перебору для графа $\mathbf{G}$.



Гамільтонові цикли: $\mathbf{Г1 = (v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_1)}$.

$\mathbf{Г2 = (v_1, v_5, v_4, v_3, v_2, v_1)}$.

8.2.4 Алгоритм перебору Робертса і Флореса

Задано: граф $\mathbf{G}$.

Знайти: усі гамільтонові цикли заданого графу.

Ідея алгоритму:

– вибирається деяка початкова вершина графа $\mathbf{G}$ хай $\mathbf{v_1}$, ця вершина утворює перший елемент множини $\mathbf{S:S=\{v_1\}}$;

– множина $\mathbf{S}$ на кожному кроці зберігатиме вже знайдені вершини гамільтонова ланцюга;

– до $\mathbf{S}$ додається перша вершина в стовпці, відповідному $\mathbf{v_1}$, нехай ця вершина $\mathbf{a}$;

– потім до $\mathbf{S}$ додається перша можлива вершина в стовпці $\mathbf{a}$, хай це вершина $\mathbf{b}$: $\mathbf{S=\{v_1,a,b\}}$ і так далі.

Під можливою розуміється вершина, яка ще не належить $\mathbf{S}$.

Існує 2 принципи, що перешкоджають включенню деякої вершини на кроці $\mathbf{r}$ в множину $\mathbf{S}$.

Нехай множина $\mathbf{S}$ має вигляд: $\mathbf{S=\{v_1,a,b,...,v_{r\ 1},v_r\}}$.

1. У стовпці $\mathbf{v_r}$ немає можливих вершин (множину $\mathbf{S}$ не можна розширити).

2. Ланцюг, визначений послідовністю вершин $\mathbf{S}$, має довжину $\mathbf{p-1}$, де $\mathbf{p}$ – кількість вершин графа, тобто він є гамільтоновим ланцюгом.

У випадку 2 також 2 варіанти:

2 а) У графі $\mathbf{G}$ існує ребро $\mathbf{\{v_r,v_1\}}$, знайдений гамільтонів цикл.

2 б) У графі $\mathbf{G}$ не існує ребра $\mathbf{\{v_r,v_1\}}$, гамільтонів цикл не може бути одержаний.

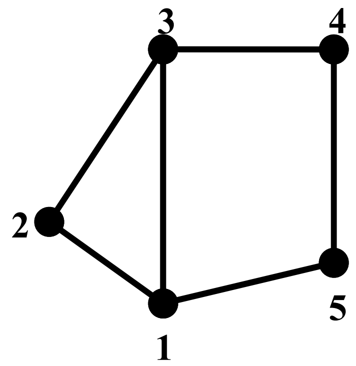
Якщо потрібні всі гамільтонові цикли, то у випадку 2а обробити гамільтонів цикл і до кроку повернення.

У випадку 1 і 2б слід перейти до кроку повернення. Крок повернення полягає у видаленні останньої включеної вершини із $\mathbf{S}$ після чого $\mathbf{S}$ матиме вигляд: $\mathbf{S = \{v_1, a, b, ..., v_{r-1}\}}$ і додавання до S першої можливої вершини, наступної за $\mathbf{v_r}$ у стовпці $\mathbf{v_{r-1}}$.

Якщо не існує ніякої можливої вершини, то робиться наступний крок повернення. Пошук закінчується тоді і тільки тоді, коли **S** складається з однієї вершини і не існує ніякої можливої вершини, яку можна було додати в S, крок повернення робить **S** порожньою. Це означає, що усі гамільтонові цикли знайдені і алгоритм закінчує роботу.

Наприклад.

На рисунку задано граф $\mathbf{G = (V, E)}$.



Проілюструємо покрокове виконання алгоритму Робертса і Флореса.

1. $\mathbf{S = \{1\}}$.
2. $\mathbf{S = \{1,2\}}$.
3. $\mathbf{S = \{1,2,3\}}$.
4. $\mathbf{S = \{1,2,3,4\}}$.
5. $\mathbf{S = \{1,2,3,4,5\}}$ гамільтонів ланцюг.
6. У графі **G** існує замикаюче ребро $\mathbf{\{5,1\}} \Rightarrow$ $\mathbf{S = \{1,2,3,4,5,1\}}$ є $\mathbf{\Gamma_1}$.
7. Крок повернення: $\mathbf{S = \{1,2,3,4\}}$.
8. Крок повернення: $\mathbf{S = \{1,2,3\}}$.
9. Крок повернення: $\mathbf{S = \{1,2\}}$.
10. Крок повернення: $\mathbf{S = \{1\}}$.
11. $\mathbf{S = \{1,3\}}$.
12. $\mathbf{S = \{1,3,2\}}$.

13. Крок повернення: $\mathbf{S=\{1,3\}}$.
14. $\mathbf{S=\{1,3,4\}}$.
15. $\mathbf{S=\{1,3,4,5\}}$.
16. Крок повернення: $\mathbf{S=\{1,3,4\}}$.
17. Крок повернення: $\mathbf{S=\{1,3\}}$.
18. Крок повернення: $\mathbf{S=\{1\}}$.
19. $\mathbf{S=\{1,5\}}$.
20. $\mathbf{S=\{1,5,4\}}$.
21. $\mathbf{S=\{1,5,4,3\}}$.
22. $\mathbf{S=\{1,5,4,3,2\}}$, $\mathbf{\exists\{2,1\}\in E \Rightarrow S=\{1,5,4,3,2,1\}}$ є $\mathbf{\Gamma_2}$.
23. Крок повернення: $\mathbf{S=\{1,5,4,3\}}$.
24. Крок повернення: $\mathbf{S=\{1,5,4\}}$.
25. Крок повернення: $\mathbf{S=\{1,5\}}$.
26. Крок повернення: $\mathbf{S=\{1\}}$.

27) Крок повернення: $\mathbf{S=\varnothing}$. Кінець алгоритму.

У графі $\mathbf{G}$ два гамільтонові цикли: $\mathbf{\{1,2,3,4,5,1\}}$; $\mathbf{\{1,5,4,3,2,1\}}$.

8.2.5 Задача комівояжера

Задача комівояжера (бродячого торговця) – це узагальнене задачі про пошук гамільтонова циклу в графі.

Математична постановка задачі.

Побудувати маршрут (цикл, ланцюг) в зваженому графі $\mathbf{G}$ із мінімальною вагою, що проходить, принаймні, один раз по кожній вершині графа.

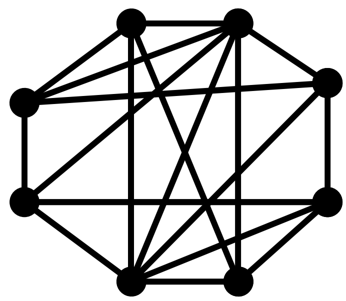
Якщо такий маршрут існує (цикл, ланцюг), то задача зводиться до задачі про пошук гамільтонова маршруту в графі. Всі ефективні (такі, що скорочують повний перебір) методи розв'язання задачі комівояжера – евристичні. У більшості евристичних методів знаходиться не найефективніший маршрут, а наближений розв'язок. Задача комівояжера – NP-повна. Часто на ній проводять випробування нових підходів до евристичного скорочення повного перебору.

8.3 Завдання для самостійної роботи

1. Нехай задано неорієнтований граф, множина вершин якого дорівнює $\mathbf{N_{10}}$, а множина ребер складається за таким принципом: дві вершини із номерами $\mathbf{i}$ та $\mathbf{j}$, $\mathbf{i,j} \in \mathbf{N_{10}}$ є суміжними, якщо вони діляться без залишку, чи на 5, чи на 6. Визначити являється граф ейлеревим чи ні. Якщо граф є ейлеревим, продемонструвати виконання алгоритму Флері. Якщо граф не є ейлеревим, розв'язати для нього задачу китайського поштаря. У якості ваги ребра $\{\mathbf{i,j}\}$ взяти 1.

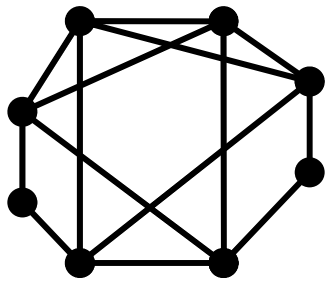
2. Нехай задано неорієнтований граф, множина вершин якого дорівнює $\mathbf{N_9}$, а множина ребер складається за таким принципом: дві вершини із номерами $\mathbf{i}$ та $\mathbf{j}$, $\mathbf{i,j} \in \mathbf{N_9}$ є суміжними, якщо вони діляться без залишку, чи на 4, чи на 6. Визначити являється граф ейлеревим чи ні. Якщо граф не є ейлеревим, добавити до нього мінімальне число ребер, що робить його ейлеревим. Знайти ейлерів граф по алгоритму Флері. У якості ваги ребра $\{\mathbf{i,j}\}$ взяти 1.

3. Для наведеного графу, визначити існування ейлеревого циклу та розв'язати задачу китайського поштаря. У якості ваги ребра $\{\mathbf{i,j}\}$ взяти 1.



4. Нехай задано неорієнтований граф, множина вершин якого дорівнює $\mathbf{N_8}$, а множина ребер складається за таким принципом: дві вершини із номерами $\mathbf{i}$ та $\mathbf{j}$, $\mathbf{i,j} \in \mathbf{N_8}$ є суміжними, якщо вони діляться без залишку, чи на 4, чи на 5. Визначити являється граф ейлеревим чи ні. Якщо граф не є ейлеревим, добавити до нього мінімальне число ребер, що робить його ейлеревим. Знайти ейлерів граф по алгоритму Флері. У якості ваги ребра $\{\mathbf{i,j}\}$ взяти 1.

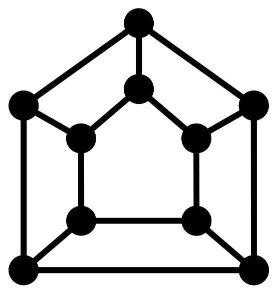
5. Для заданного графа знайти ейлерів цикл за допомогою алгоритму Флері та наслідку 1 із теореми Ейлера. Продемонструвати покрокове виконання алгоритмів.



6. Нехай задано неорієнтований граф, множина вершин якого дорівнює $\mathbf{N_5}$, а множина ребер складається за таким принципом: дві вершини із номерами $\mathbf{i}$ та $\mathbf{j}$, $\mathbf{i,j} \in \mathbf{N_5}$ є суміжними, якщо вони діляться без залишку, чи на 2, чи на 3. Визначити, чи є граф гамільтоновим. Якщо граф – гамільтонів, то побудувати гамільтонів цикл, використовуючи дерево повного перебору, побудувати гамільтонові цикли, використовуючи алгоритм Робертса-Флореса. У якості ваги усіх ребер взяти 1.

7. Нехай задано неорієнтований граф, множина вершин якого дорівнює $\mathbf{N_6}$, а множина ребер складається за таким принципом: дві вершини із номерами $\mathbf{i}$ та $\mathbf{j}$, $\mathbf{i,j} \in \mathbf{N_5}$ є суміжними, якщо вони діляться без залишку, чи на 3, чи на 5. Визначити, чи є граф гамільтоновим. У якості ваги усіх ребер взяти 1. Якщо граф не є гамільтоновим, розв’язати для нього задачу комівояжера, а також добавити мінімальне число ребер, щоб граф був гамільтоновим, та побудувати усі гамільтонові цикли.

8. Для наведеного графу побудувати усі гамільтонові цикли та розв’язати задачу комівояжера. У якості ваги усіх ребер взяти 1.



9. Для графа, що є додекаедр привести декілька розв'язків задачі «кругосвітня подорож».

10. Нехай задано неорієнтований граф, множина вершин якого дорівнює $\mathbf{N_7}$, а множина ребер складається за таким принципом: дві вершини із номерами $\mathbf{i}$ та $\mathbf{j}$, $\mathbf{i,j} \in \mathbf{N_7}$ є суміжними, якщо вони діляться без залишку, чи на 7, чи на 8. У якості ваги усіх ребер взяти 1. Визначити, чи є граф гамільтоновим. Якщо граф – гамільтонів, то побудувати гамільтонів цикл, використовуючи дерево повного перебору, побудувати гамільтонові цикли, використовуючи алгоритм Робертса-Флореса, інакше – розв'язати задачу комівояжера.

8.4 Контрольні питання

1. Дати постановку та розв'язання задачі про Кенігсберзькі мости.

2. Дати визначення ейлерева циклу, графа.

3. Сформулювати критерій існування в графі ейлеревого циклу.

4. Наслідки із теореми Ейлера.

5. Дати визначення ейлерева ланцюга.

6. Записати алгоритми генерації ейлеревого циклу в ейлеревому графі. Алгоритм Флері.

7. Дати постановку задачі про китайського поштаря.

8. Дати постановку задачі «кругосвітня подорож».

9. Який граф називається гамільтоновим? Дати визначення гамільтонових цикла та ланцюга.

10. Сформулювати теореми Оре, Дірака. Що таке достатні умови існування гамільтонова циклу?

11. Навести приклад графу, для якого не виконуються умови теорем Оре чи Дірака, але граф містить гамільтонів цикл.

11. Для чого потрібно дерево повного перебору?

12. Записати алгоритм Робертса та Флореса.

13. Що знаходить задача комівояжера? Яка складність алгоритмів розв'язання задачі комівояжера?

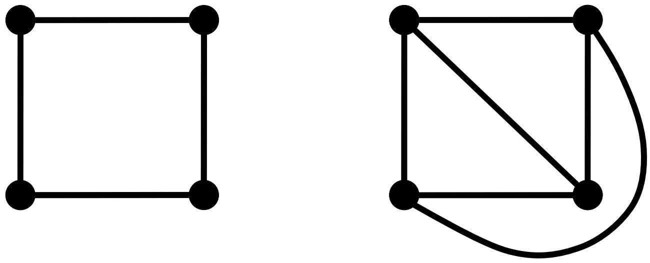
РОЗДІЛ 9
ПЛАНАРНІСТЬ ТА РОЗФАРБУВАННЯ ГРАФІВ

9.1 Планарність неорієнтованих графів

9.1.1 Плоскі та планарні графи

Плоским називають такий граф $\mathbf{G}$ у якого вершини – точки площини, а ребра – безперервні плоскі лінії без пересічень та самопересічень, причому з'єднуються вершини так, що ніякі два ребра не мають спільних точок, окрім інцидентних їм обом вершин.

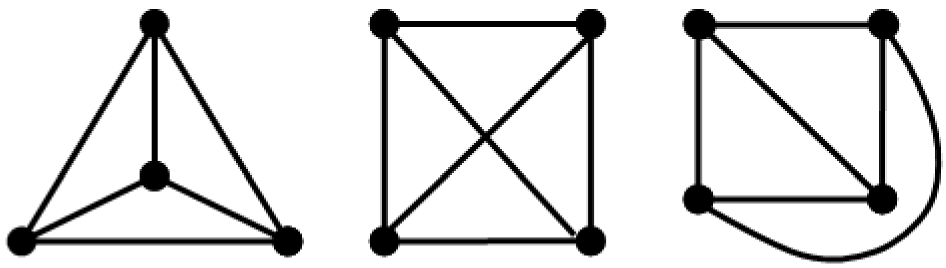
Наприклад.



Планарний – це граф, який є ізоморфним плоскому.

На наступному рисунку приведено три зображення графу $\mathbf{K_4}$.

Графи $\mathbf{G_1},\mathbf{G_3}$ є плоскими за визначенням, а граф $\mathbf{G_2}$ є планарним, бо ізоморфний плоскому графу.



$\mathbf{G_1}$ $\mathbf{G_2}$ $\mathbf{G_3}$

Про планарні графи кажуть, що вони мають **плоску укладку** або **укладаються на площині**.

Твердження 1. Всякий підграф планарного графа є планарним.

Твердження 2. Якщо граф включає непланарний підграф, то і сам граф непланарний.

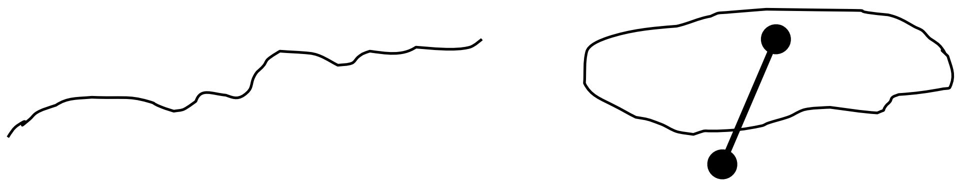
9.1.2 Теорема Жордано

Жорданова крива – це неперервна спрямлена лінія, яка не має самопересічень.

Теорема Жордано

Замкнена жорданова крива **L** на площині розподіляє область на дві області, таким чином, що будь-яка лінія, що з’єднує точки в різних підобластях перетинає жорданову криву

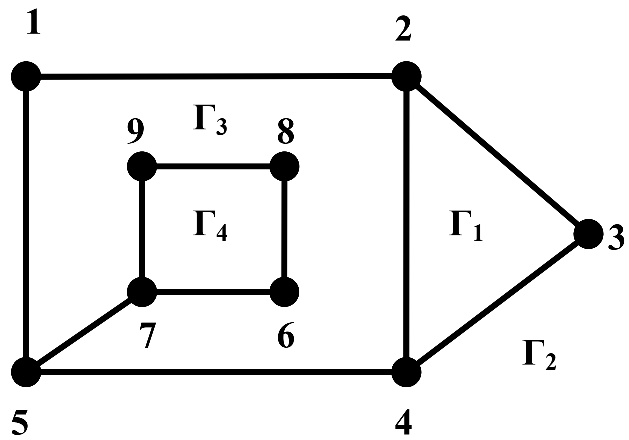
Наприклад.



Гранню плоского графа називається максимальна за включенням кількість точок, кожна пара яких може бути з’єднана жордановою кривою, яка не перетинає ребра графа.

Межа грані – це множина вершин та ребер, які належать одній грані.

Наприклад.



$$\mathbf{Г1 = \{2, 3, 4\}}\ \text{або}\ \mathbf{\{23, 24, 34\}}.$$

$$\mathbf{Г2 = \{1, 2, 3, 4, 5\} \to \{12, 23, 34, 45, 15\}}\ .$$

$$\mathbf{Г3 = 1)\{1,2,4,5\} \to \{12,15,24,45\}}$$
$$\mathbf{2)\{5,6,7,8,9\} \to \{57,67,68,79,89\}}.$$

$$\mathbf{Г4 = \{6,7,8,9\} \to \{67,68,79,89\}}$$

Усілякий плоский граф має одну єдину необмежену грань. Цю грань називають **зовнішньою,** інші – **внутрішніми.**

Слідство з теореми Жордана

Будь-які дві вершини, які належать грані можуть бути з'єднані ланцюгом довільної довжини таким чином, що вибрана грань розіб'ється на дві грані

9.1.3 Теорема Ейлера для плоских графів

Нехай зв'язний плоский граф $\mathbf{G = (V, E)}$ має $\mathbf{p}$ вершин, $|\mathbf{V}| = \mathbf{p}$, $\mathbf{q}$ – ребер, $|\mathbf{E}| = \mathbf{q}$ та $\mathbf{f}$ – граней плоского графа.

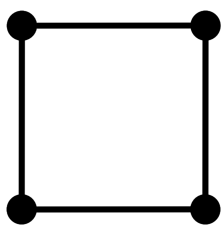
Теорема Ейлера для плоских графів (1758)

Для будь-якого зв'язного плоского графа $\mathbf{G}$ вірне співвідношення: $\mathbf{p - q + f = 2}$.

Наприклад.

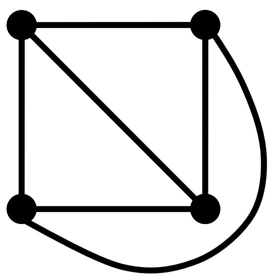
$\mathbf{p = 4}$
$\mathbf{q = 4}$
$\mathbf{f = 2}$

4-4+2=2



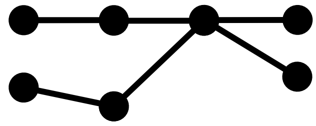
$\mathbf{p = 4}$
$\mathbf{q = 6}$
$\mathbf{f = 4}$

4-6+4=2



$\mathbf{p = 7}$
$\mathbf{q = 6}$
$\mathbf{f = 1}$

7-6+1=2



Доведення.

Візьмемо $\mathbf{G}$ – зв'язний плоский $\mathbf{(p,q)}$-граф.

Побудуємо деякий кістяк $\mathbf{T}$, очевидно, що дерево $\mathbf{T}$ матиме одну зовнішню грань, $\mathbf{f=1}$. $\mathbf{T: q = p - 1 \to p - q + f = p - (p-1) + 1 = 2}$.

Додамо до дерева чергову хорду, при цьому кількість ребер збільшиться на 1 і кількість граней за теоремою Жордана також збільшиться на 1. За скінчену кількість кроків отримаємо вхідний граф $\mathbf{G}$ для якого справедливе співвідношення: $\mathbf{p - q + f = 2}$.

Слідство 1.

Кількість граней будь-якої плоскої укладки зв'язного планарного графа з $\mathbf{p}$-вершинами і $\mathbf{q}$-ребрами незмінне і дорівнює:

$\mathbf{f = 2 - \ p + q}$,

тобто $\mathbf{f}$ – є інваріант планарного графа, тобто не залежить від засобу укладки графа на площині.

Слідство 2.

Для зв'язного планарного $\mathbf{(p,q)}$**-** графа справедливо: $\mathbf{q \le 3p - 6}$ при $\mathbf{p \ge 3.}$

Доведення.

Візьмемо $\mathbf{G}$ – зв'язний планарний $\mathbf{(p,q)}$-граф, кількість граней у плоскій укладці для нього дорівнює $\mathbf{f}$.

Нехай $\boldsymbol{\kappa}(\mathbf{r_i})$ – кількість ребер, що утворюють грань $\mathbf{r_i, i = \overline{1,f}.}$

Так як будь-яке ребро входить двічі у дві суміжні грані, то $\sum\limits_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{f}} \boldsymbol{\kappa}(\mathbf{r_i}) \le \mathbf{2q}$.

Кожне ребро може бути межею не більш, ніж двох граней.

Граф не містить кратних ребер, тому кожна грань обмежена принаймні трьома ребрами (виняток – дерево з трьома вершинами, але для нього нерівність справедлива). Тоді, $\boldsymbol{\kappa}(\mathbf{r_i}) \ge \mathbf{3.}$ Просумуємо за $\mathbf{i}$:

$$\sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{f}} \boldsymbol{\kappa}(\mathbf{r_i}) \ge \mathbf{3f} \quad \Rightarrow \mathbf{3f \le 2g,\ f = 2 + q - p \Rightarrow 3f = 6 + 3q - 3p \le 2q \Rightarrow q \le 3p - 6,}$$

що й треба було довести.

Слідство 3.

Графи $\mathbf{K_5}$ та $\mathbf{K_{3,3}}$ – непланарні.

Доведення.

Нехай $\mathbf{K_5}$ – планарний, тоді теорема Ейлера є вірною.

Отже, $\mathbf{p = 5, q = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10, f = 2 - p + q = 2 - 5 + 10 = 7;\; 3f = 21 \overset{?}{\leq} 2 \cdot q = 20}$.

Маємо протиріччя, тобто граф $\mathbf{K_5}$ – непланарний.

Граф $\mathbf{K_{3,3}}$ – непланарний. Доведення від зворотного.

Нехай $\mathbf{K_{3,3}}$ – планарний, тоді теорема Ейлера є вірною:

$\mathbf{p = 6, q = 9, f = q - p + 2 = 5 \Rightarrow 3 \cdot 5 = 15 \leq 2 \cdot 9 = 18.}$

Протиріччя відсутнє. Але граф $\mathbf{K_{3,3}}$ – дводольний, тобто не містить циклів непарної довжини. Отже, будь-яка грань обмежена мінімум 4 ребрами замість 3 (вершини у долі несуміжні): $\mathbf{4f \leq 2q \Rightarrow 20 \leq 18}$ – протиріччя.

Таким чином, доведено, що графи $\mathbf{K_5}$ та $\mathbf{K_{3,3}}$ є непланарними.

9.1.4 Критерії планарності для графів

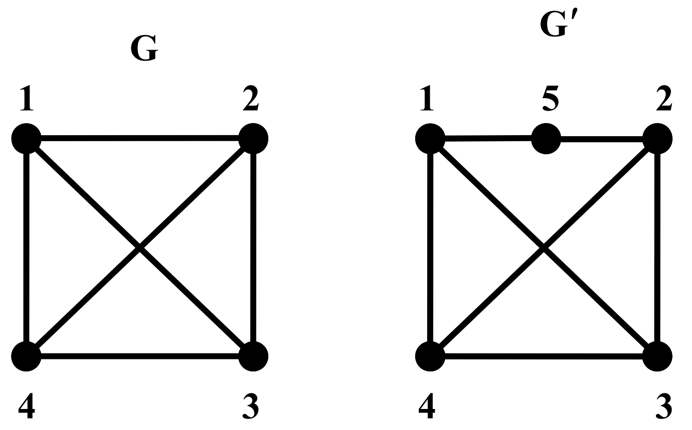
В теорії графів існує декілька теорем, що встановлюють необхідні та достатні умови планарності неорієнтованих графів. Найбільш відомі критерії Понтрягіна-Куратовського та Вагнера. Для того, щоб сформулювати ці критерії введемо додаткові терміни і дві операції над ребрами графів: підрозбиття та стягування.

Операція підрозбиття ребер

У довільному графі $\mathbf{G}$ видаляється ребро $\mathbf{e = \{u, v\}}$ і додається 2 нових $\mathbf{e_1 = \{u, a\}, e_2 = \{a, v\}}$, де $\mathbf{a}$ – нова вершина, що не належить графові $\mathbf{G}$. Таким чином, ребро $\mathbf{\{u, v\}}$ графа $\mathbf{G}$ підрозбивається вершиною $\mathbf{a}$ на два ребра та отримується новий граф:

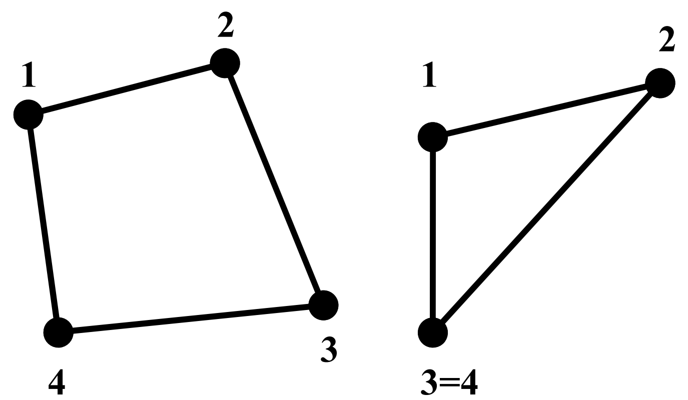
$$\mathbf{G' = G - \{u, v\} + \{u, a\} + \{a, v\}}.$$

Наприклад.



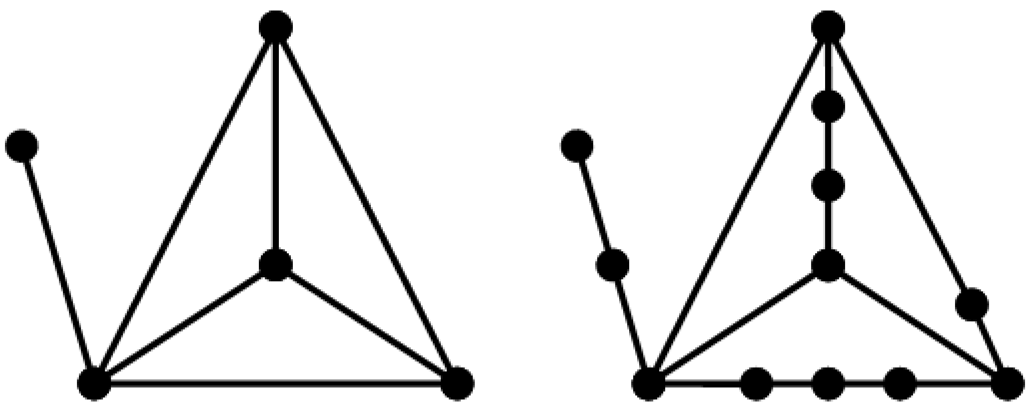
Стягування ребер

Операція стягування ребер – ототожнення суміжних вершин ребра (операція протилежна підрозбиттю ребер).



Два графа називаються **гомеоморфними** один одному, якщо вони можуть бути отримані з одного й того ж графа підрозбиттям його ребер.

Наприклад.



Критерій планарності Понтрягіна-Куратовського

Граф є планарним тоді й тільки тоді, коли він не містить підграфів гомеоморфних $\mathbf{K_5}$ або $\mathbf{K_{3,3}}$.

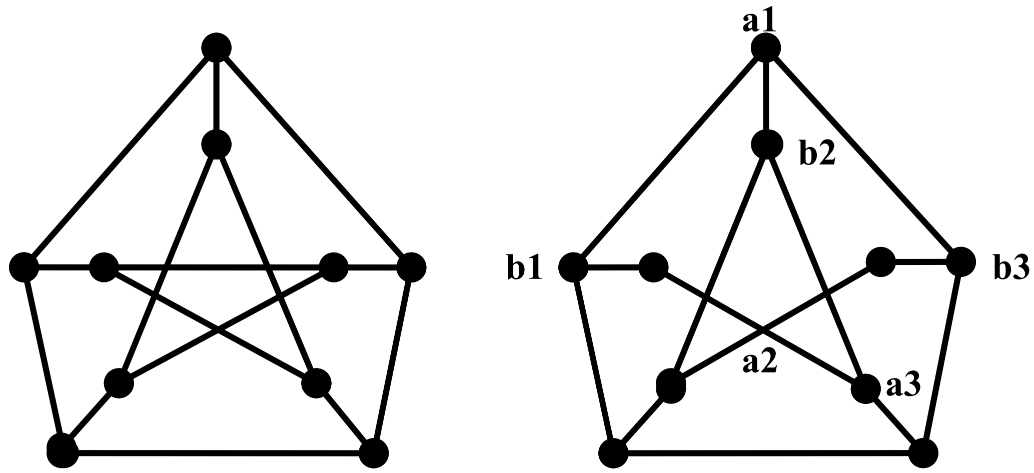
Критерій планарності Вагнера

Граф є планарним тоді і тільки тоді, коли він не містить підграфів, які стягуються до $\mathbf{K_5}$ або $\mathbf{K_{3,3}}$.

Наприклад.

Граф Петерсона (зліва на рисунку) стягується до $\mathbf{K_5}$, тому є непланарним.

Граф справа від графу Петерсона стягується до $\mathbf{K_{3,3}}$, тому також є непланарним.



9.1.5 Алгоритм плоскої укладки – алгоритм γ

Для плоскої укладки графа та перевірки чи є він планарним, використовується алгоритм γ .

Для правильної роботи алгоритму (без обмеження області застосування алгоритму) обмежимо властивості графів, які подаються до входу алгоритму:

- граф має бути зв’язним;

- граф повинен мати хоча б один цикл;

- граф не повинен містити мостів, тобто ребер після видалення яких граф розпадається на кілька компонент зв’язності.

Алгоритм плоскої укладки графа

Алгоритм γ плоскої укладки графа $\mathbf{G}$ являє собою процес послідовного приєднання до деякого вже укладеного підграфа $\tilde{\mathbf{G}}$ графа $\mathbf{G}$ нового ланцюга, обидва кінця якого належать $\tilde{\mathbf{G}}$. Цей ланцюг розбиває одну із граней графа $\tilde{\mathbf{G}}$ на дві. При цьому в якості початкового плоского графа обирається будь-який простий цикл вхідного графа. Процес продовжується до того часу, доки не буде отримана плоска укладка графа $\mathbf{G}$ або приєднання деякого ланцюга опиняється неможливим, в тому разі граф $\mathbf{G}$ є планарним.

Нехай є граф $\mathbf{G}$ та побудована деяка плоска укладка підграфа $\tilde{\mathbf{G}}$ графа $\mathbf{G}$.

Сегментом відносно поточної плоскої укладки або просто **сегментом** $\tilde{\mathbf{G}}$ будемо називати підграф вхідного графа $\mathbf{G}$ одного з наступних видів:

1) ребро $\mathbf{e}=\{\mathbf{u},\mathbf{v}\}$ вхідного графа $\mathbf{G}$ таке, що не належить поточній плоскій укладці, $\mathbf{e}\notin\tilde{\mathbf{G}}$, але кінцеві вершини ребра $\mathbf{u},\mathbf{v}$ вже є в плоскій укладці;

2) зв'язна компонента графу $\mathbf{G}-\tilde{\mathbf{G}}$, доповнена всіма ребрами графа $\mathbf{G}$, інцидентними вершинам взятої компоненти та кінцевими вершинами цих ребер.

Контактна вершина – це вершина $\mathbf{v}$ сегмента $\mathbf{S}$ відносно $\tilde{\mathbf{G}}$, якщо вона належить множині вершин поточної плоскої укладки.

Допустимою гранню для сегмента $\mathbf{S}$ називається така грань Γ графа $\tilde{\mathbf{G}}$, яка містить усі контактні вершини сегмента $\mathbf{S}$.

Позначимо $\boldsymbol{\Gamma}(\mathbf{S_i})$ – множину усіх допустимих граней сегмента $\mathbf{S_i}$.

Простий ланцюг α сегмента $\mathbf{S}$, який містить 2 різні котактні вершини і не містить інших контактних вершин, називається **α-ланцюгом.**

Простий α- ланцюг проходить з контактної вершини крізь неконтактні і повертається до контактної вершини.

Алгоритм γ

0. Оберемо деякий простий цикл $\mathbf{C}$ графа $\mathbf{G}$ і укладемо його на площині (краще обирати максимальний простий цикл графа $\mathbf{G}$, що доставляє оточення).

1. Знайдемо грані графа $\tilde{\mathbf{G}}$ та множину сегментів $\mathbf{S}$ відносно поточної $\tilde{\mathbf{G}}$. Якщо множина сегментів порожня, перейти до п. 7.

2. Для кожного сегмента $\mathbf{S}$ знайдемо множини допустимих граней.

3. Якщо існує сегмент $\mathbf{S}$ для якого $\mathbf{\Gamma(S)} = \varnothing$ (множина граней порожня), то граф $\mathbf{G}$ не є планарним, вихід з алгоритму, інакше перехід до п. 4.

4. Якщо існує сегмент $\mathbf{S}$, для якого рівно одна допустима грань $(|\mathbf{\Gamma(S)}| = \mathbf{1})$, то перейдемо до п. 6, інакше п. 5.

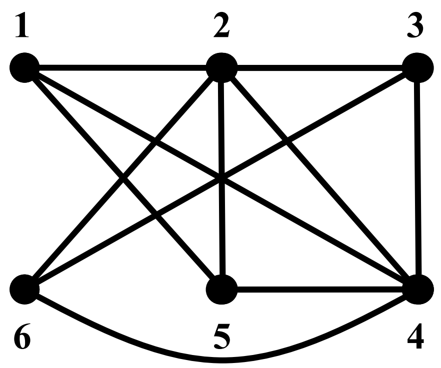
5. Для деякого сегмента $\mathbf{S}$ обираємо довільну допустиму грань $\mathbf{\Gamma}$.

6. Помістимо довільний α-ланцюг $\mathbf{L}$, який належить $\mathbf{S}$ до грані $\mathbf{\Gamma}$, замінимо $\tilde{\mathbf{G}}$ на $\tilde{\mathbf{G}} \cup \mathbf{L}$ та перейдемо до п. 1. Побудована часткова плоска укладка графа $\mathbf{G}$.

7. Побудована плоска укладка графа $\mathbf{G}$.

Наприклад.

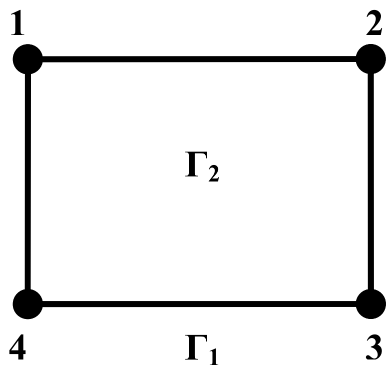
Визначити планарність та побудувати плоску укладку графа $\mathbf{G}$.



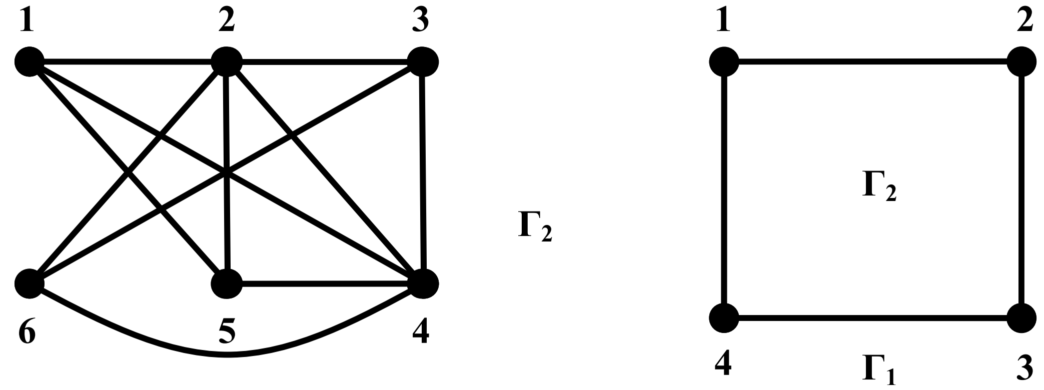
Ініціалізація алгоритму.

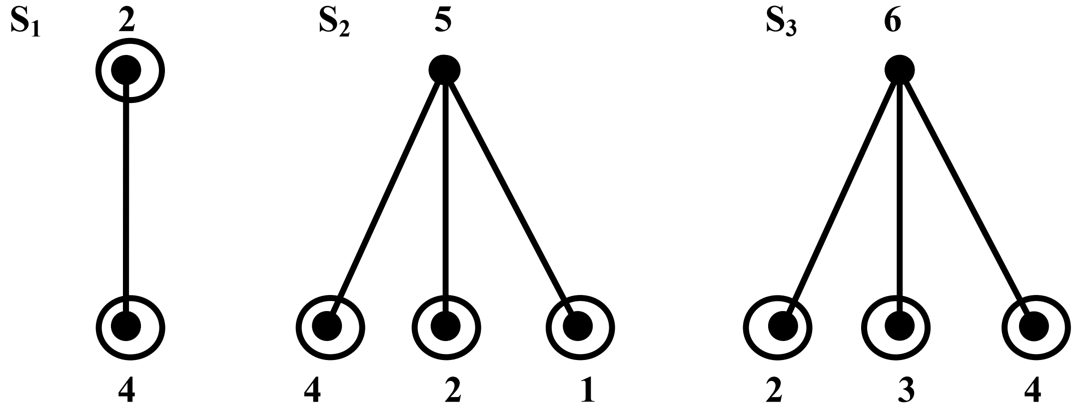
Оберемо в графі довільний простий цикл та укладемо його на площині.

Визначимо для нього множину граней.



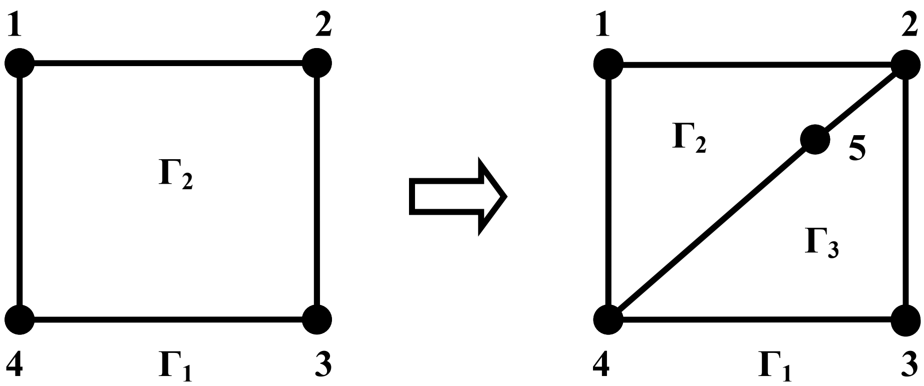
1) Визначимо множину сегментів відносно поточної плоскої укладки.



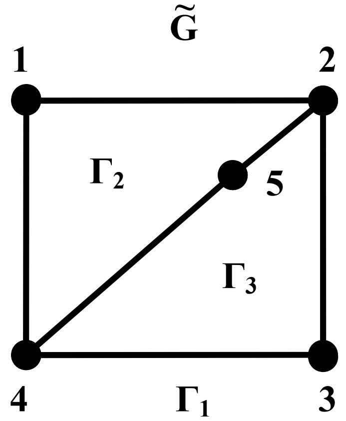


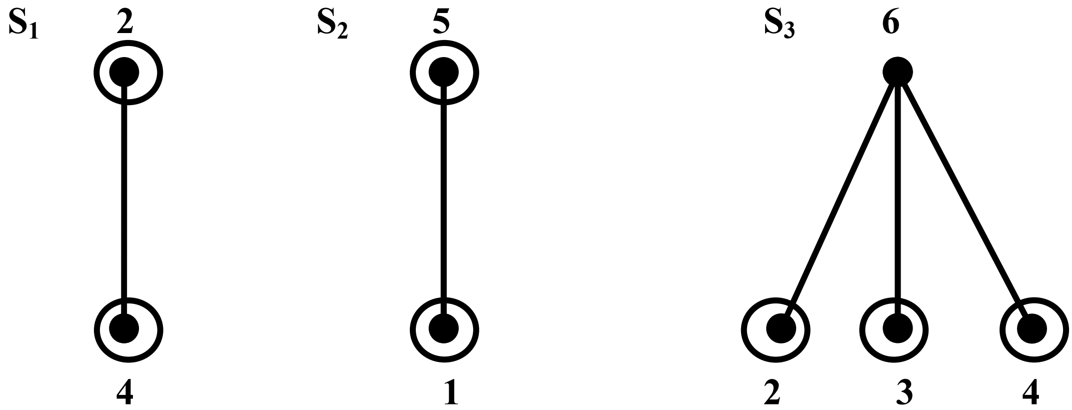
Множина сегментів не порожня. Визначимо для кожного сегмента множину допустимих граней: $\Gamma(\mathbf{S1}) = \Gamma(\mathbf{S2}) = \Gamma(\mathbf{S3}) = \{\Gamma\mathbf{1}, \Gamma\mathbf{2}\}$.

Оберемо сегмент **S2** і α-ланцюг = $\{\mathbf{4, 5, 2}\}$, укладемо його до однієї з допустимих граней, нехай це буде $\Gamma\mathbf{2}$.



2) Для нової поточної плоскої укладки визначаємо нові множини граней і сегментів.



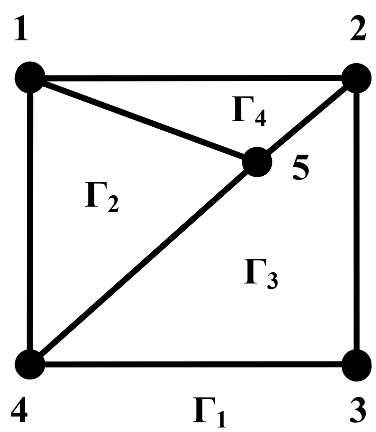


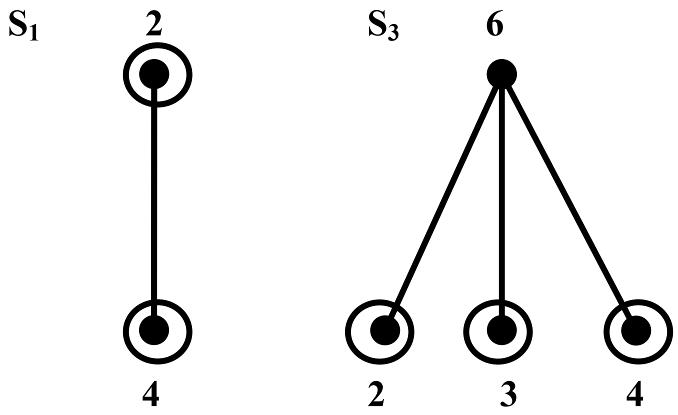
Для кожного сегмента визначимо множини допустимих граней:

$$\mathbf{\Gamma(S1)=\{\Gamma1,\ \Gamma2, \Gamma3\}},\ \mathbf{\Gamma(S2)=\{\Gamma2\}}, \mathbf{\Gamma(S3)=\{\Gamma1, \Gamma3\}}.$$

Обираємо сегмент **S2** і укладаємо його в єдину для нього допустиму грань **Г2** . Отримуємо поточну часткову плоску укладку графа **G** .

3) Для нової поточної часткової укладки $\mathbf{\tilde{G}}$ визначимо множину граней та сегментів.

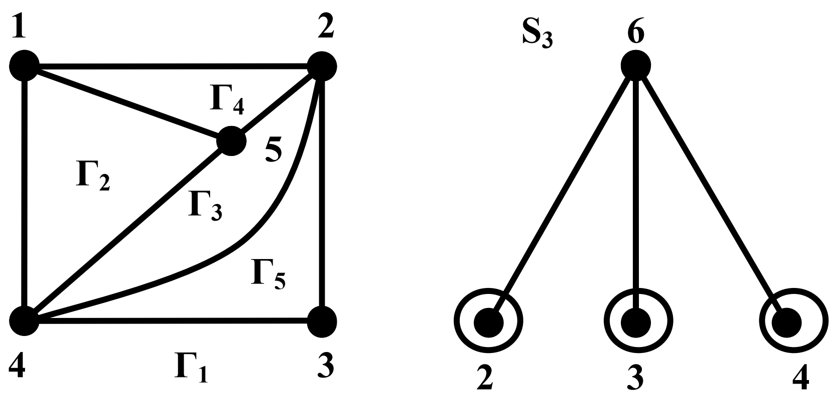




Множини допустимих граней для сегментів: $\mathbf{\Gamma(S1) = \Gamma(S3) = \{\Gamma1, \Gamma3\}.}$

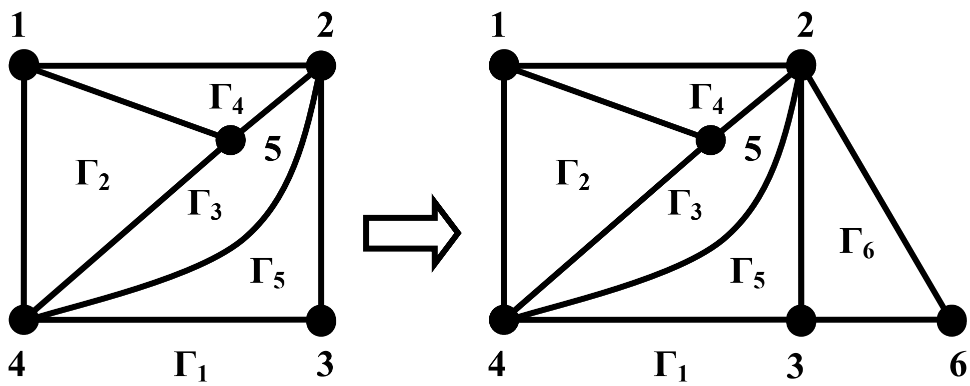
Обираємо сегмент $\mathbf{S1}$ та укладаємо до допустимої для нього грані $\mathbf{\Gamma3}$.

4) Отримуємо нову часткову укладку. Визначаємо для неї множину граней та сегментів.



Множина допустимих граней для сегмента $\mathbf{\Gamma(S3) = \{\Gamma1, \Gamma5\}}$.

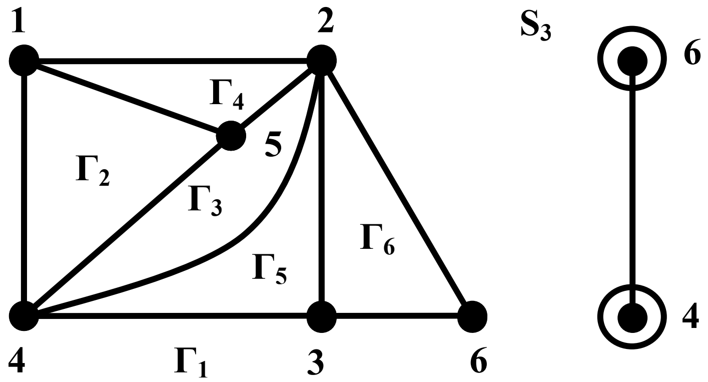
5) Обираємо грань $\mathbf{\Gamma1}$ і α-ланцюг $=\mathbf{\{3, 6, 2\}}$, укладаємо його до допустимої грані та отримуємо нову поточну часткову укладку.



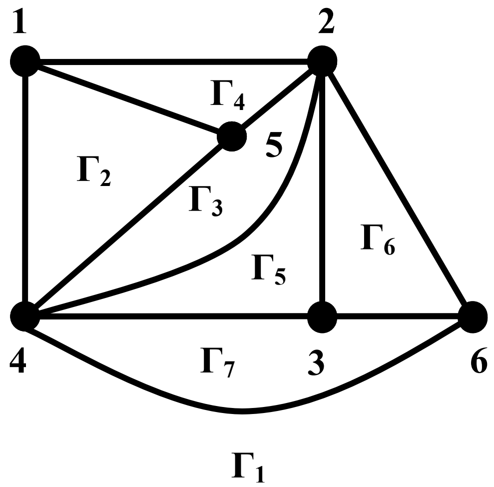
5) Для нової поточної часткової укладки знаходимо множину граней та сегментів.

Для сегмента **S3** множина допустимих граней складає: $\mathbf{Г(S3) = \{Г1\}}$.

Укладаємо сегмент **S3** до допустимої грані **Г1**.



Отримуємо нову поточну плоску укладку. Множина сегментів порожня, отже, алгоритм закінчив роботу. Вхідний граф – планарний і побудована його плоска укладка.



9.1.6 Характеристики непланарних графів

Граф **G** укладається у простір **L**, якщо існує таке відображення вершин та ребер графа **G** відповідно у точки та жорданові криві цього простору, що різним вершинам відповідають різні точки простору, а криві, що відповідають різним ребрам, перетинаються тільки у інцидентних цім ребрам вершинах.

Наведені нижче характеристики графів представляють ту чи іншу міру непланарності.

Кількість схрещувань графа $\mathbf{G}$ – це мінімальна кількість пересічень двох ребер при зображенні графа $\mathbf{G}$ на площині, позначають **Cr(G).**

Поняття пересічення відноситься до пересічення рівно двох ребер.

Кількість схрещувань дорівнює 0 тоді і тільки тоді, коли граф є планарним.

Перекрученість $\mathbf{G}$ – це мінімальна кількість ребер, видалення яких призводить до планарного графа, $\mathbf{Sk(G)}$.

Товщина $\mathbf{G}$ – максимальна кількість його планарних підграфів, об'єднання яких дає граф $\mathbf{G}$, позначають $\mathbf{t(G)}$.

Вочевидь, що товщина планарного графа дорівнює одиниці.

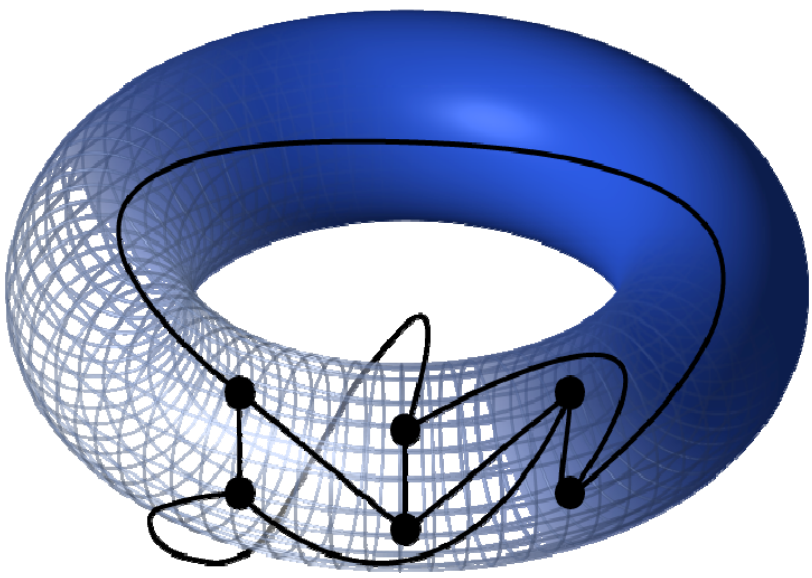
Рід графа G – це мінімальна кількість ручок, які необхідно додати до сфери, щоб можна було укласти граф без пересічень та самопересічень ребер.

Графи, які не можна укласти на площині, але можна укласти на торі (сфері із однією ручкою), називають **тороїдальними.**

Граф $\mathbf{K_{3,3}}$ укладається на торі без пересічень и самопересічень ребер, рід такого графа дорівнює 1.

Тороідальними являються наступні графи: $\mathbf{K_5, K_7, K_{3,3}, K_{4,4}}$.

Приклад укладки графа $\mathbf{K_{3,3}}$ на торі.



9.2 Розфарбування графів

9.2.1 Вершинне розфарбування

Нехай є неорієнтований граф $\mathbf{G}$ і нехай $\mathbf{k}$ – деяке натуральне число.

Вершинне $\mathbf{k}$-розфарбуванням або $\mathbf{k}$-розфарбуванням графа $\mathbf{G}$ називається довільна функція $\mathbf{f}$, що відображає множину вершин графа $\mathbf{G}$ у деяку $\mathbf{k}$-елементну множину:

$$\mathbf{f : V \to \{a_1, a_2, ..., a_k\} = A}.$$

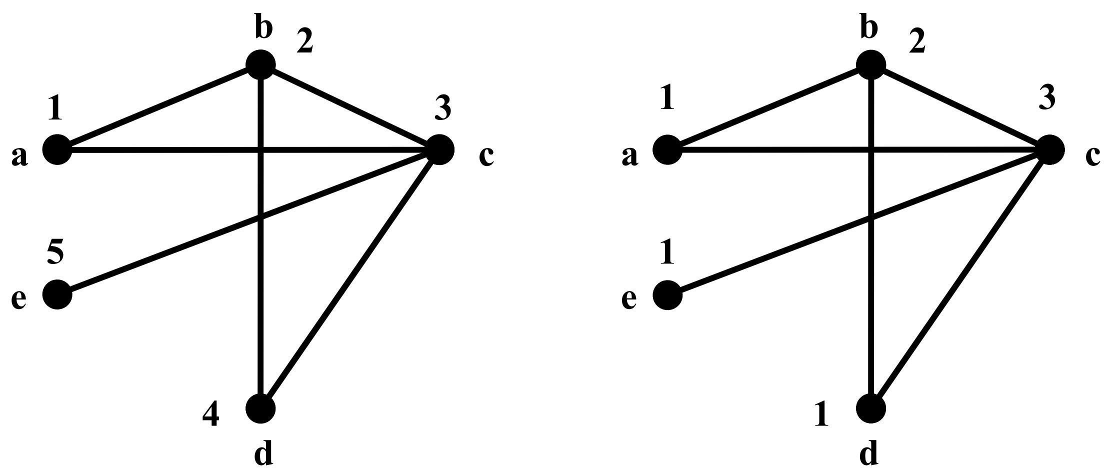
У якості елементів множини $\mathbf{A}$ найчастіше використається відрізок натурального ряду $\mathbf{N_k = \{1, 2, ..., k\}}$ або $\mathbf{\{a, b, ..., n\}}$ або фарби типу {синій, червоний, ..., чорний}.

Розфарбування називається **правильним**, якщо для будь-яких суміжних вершин $\mathbf{u}$ і $\mathbf{v}$ графа $\mathbf{G}$: $\mathbf{f(u) \neq f(v)}$ або кінцеві вершини будь-якого ребра пофарбовані в різні кольори.

Граф, для якого існує правильне **k**-розфарбування, називається **k-розфарбованим.**

5-розфарбований 3-розфарбований

(розфарбування правильне)



Хроматичне число графа G – це мінімальне число фарб, при якому граф має правильне розфарбування.

Якщо хроматичне число дорівнює **k**, то граф називається **k-хроматичним**:

$$\chi(G) = k.$$

Правильне **k**-розфарбування графа **G** можна представити як розбиття множини вершин графа **G** на не більш ніж **k** непустих множин, які називаються **однокольоровими класами**: $V = V_1 \cup V_2 \cup ... \cup V_k$.

Кожний кольоровий клас є незалежною множиною вершин.

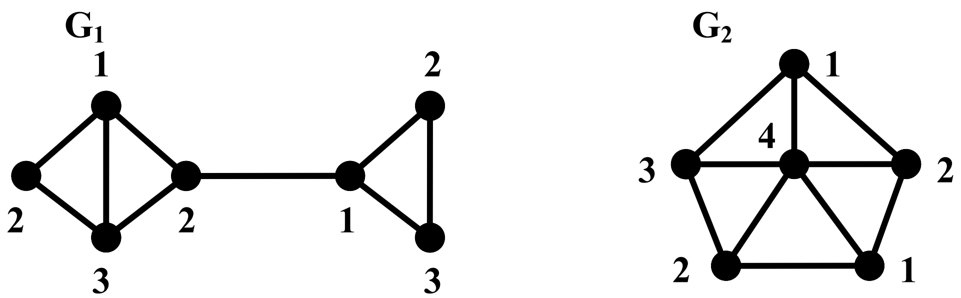
Для повного графа K_p хроматичне число дорівнює: $\chi(K_p) = p$.

Для простого циклу із парним числом вершин: $\chi(C_{2p}) = 2$.

Для простого циклу із непарним числом вершин: $\chi(C_{2n+1}) = 3$.

Для порожнього графу: $\chi(O_n) = 1$.

Граф, у якого **χ = 2,** називається **біхроматичним (біграф).**



Теорема Кеніга (критерій дводольності графа)

Непустий граф є біхроматичним тоді й тільки тоді, коли він не містить циклів непарної довжини

Доведення.

1) Достатність.

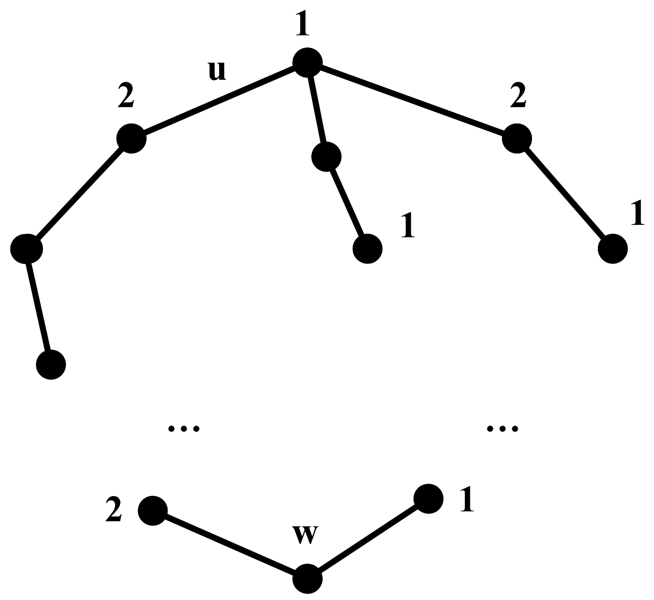
Дано: граф **G** не містить циклів непарної довжини.

Довести: граф **G** є біхроматичним, тобто $\chi(G) = 2$.

Візьмемо довільну вершину **u** графа **G**, офарбимо її в колір 1, всі суміжні їй вершини офарбимо в колір 2, всі суміжні з вершинами, пофарбованими в колір 2 – офарбимо в колір 1 і так далі. При цьому ніяка вершина не може бути пофарбована у два кольори.

Припустимо, що в результаті такого фарбування з'являється вершина, що повинна бути пофарбована двома кольорами. Нехай це вершина **w**.

Це означає, що вершини **u** і **w** з'єднані двома ланцюгами, причому одна з них має парну довжину, інша непарну.



Але тоді вершини **u** і **w** належать циклу непарної довжини, що суперечить умові теореми. Отже, будь-яка вершина графа розфарбована в перший або в другий колір, значить графа - біхроматичний.

2) Необхідність.

Дано: граф **G** – біхроматичний.

Довести: граф **G** не має циклів непарної довжини.

Розфарбуємо вершини графа як і у випадку 1.

Візьмемо довільний цикл **z**, що належить **G**.

У цьому випадку вершинні кольори 1 і 2 чергуються. Отже, кількість вершин циклу парна. Виходить, він має парну довжину.

Наслідок 1. Будь-яке дерево – біхроматично.

Наслідок 2. Будь-який дводольний граф є біхроматичним.

Задача про пошук хроматичного числа графа є NP-складною, тобто не існує ефективних поліноміальних алгоритмів для її рішення.

Алгоритм послідовного розфарбування

(субоптимальний, наближений,

дає розфарбування близьке до мінімального)

1. Довільній вершині графа **G** приписуємо колір 1.

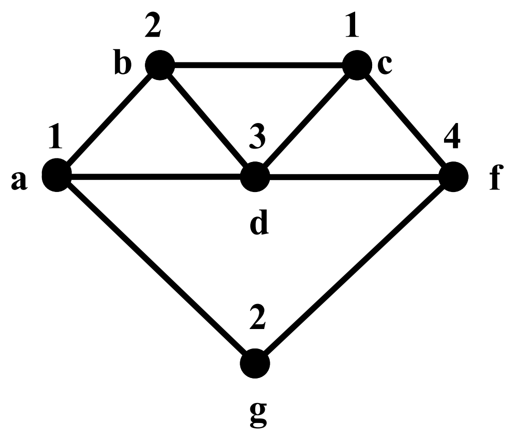
2. Нехай розфарбовані $\mathbf{i}$ вершин графа **G** у кольори від $\mathbf{1}$ до $\mathbf{k}$, где $\mathbf{k} \le \mathbf{i}$.

Довільній незабарвленій вершині приписуємо мінімальний колір невикористаний при розфарбуванні суміжних з нею вершин.

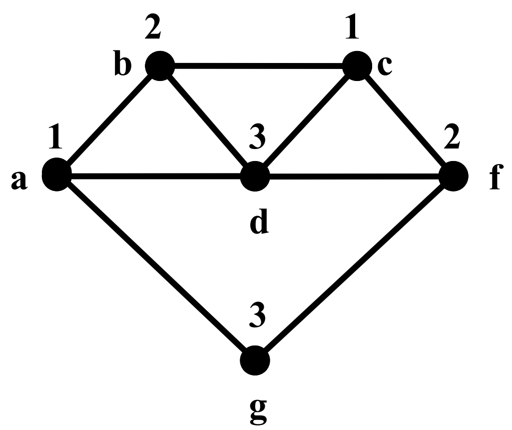
Алгоритм послідовного розфарбування залежить від способу перебору вершин.

Наприклад.

Послідовність розфарбування така: $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{g}, \mathbf{d}, \mathbf{c}, \mathbf{f})$. Число красок, що використані для правильного розфарбування вершин графа дорівнює 4.



Послідовність: $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{d}, \mathbf{c}, \mathbf{f}, \mathbf{g})$. Число красок, що використані для правильного розфарбування вершин графа дорівнює 3.



9.2.2 Розфарбування ребер

Нехай є $\mathbf{G = (V, E)}$, де $\mathbf{|V| = p, |E| = q}$.

Реберним k-розфарбуванням графа $\mathbf{G}$ називається деяка функція φ, що задає відображення безлічі ребер графа **G**, у деяку $\mathbf{k}$- елементну множину, тобто.

$\varphi : \mathbf{E \to A = \{a_1, a_2, ..., a_k\}}$.

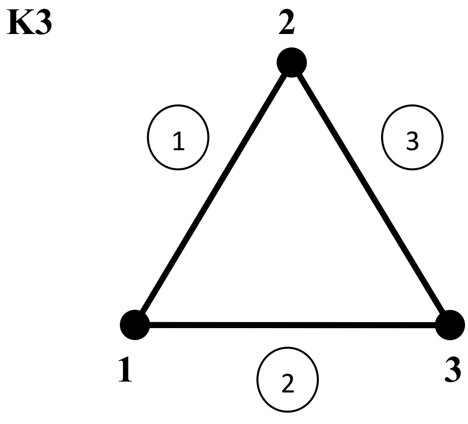
Множина ребер, пофарбованих у певний колір, називають **реберним однокольоровим класом**.

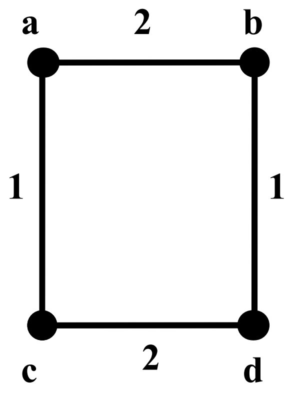
Якщо $\varphi(\mathbf{e}) = \mathbf{c}$, то говорять, що ребро $\mathbf{e}$ пофарбоване в колір $\mathbf{c}$.

Реберне розфарбування є **правильним**, якщо суміжні ребра пофарбовані в різні кольори.

Граф у цьому випадку називається **реберним k-розфарбованим**.

Мінімальне число $\mathbf{k}$, при якому існує правильне реберне $\mathbf{k}$-розфарбування називається **реберним хроматичним числом** або **хроматичним індексом**.





Хроматичний індекс для повного графа з парним числом вершин дорівнює:

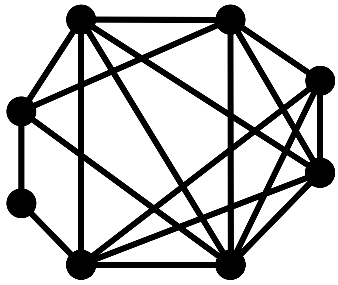
$$\chi'(\mathbf{K_{2n}}) = \mathbf{2n - 1},$$

і з непарним числом вершин:

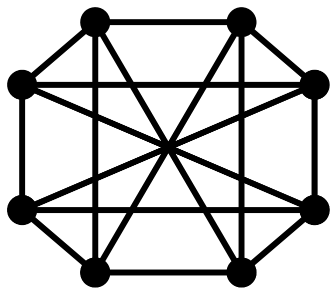
$$\chi'(\mathbf{K_{2n+1}}) = \mathbf{2n + 1}.$$

9.3 Завдання для самостійної роботи

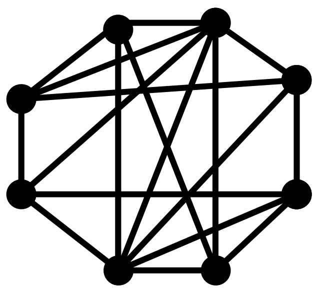
1. Визначити, чи є граф $\mathbf{G}$ планарним, використовуючи критерій Понтрягина-Куратовського або Вагнера. Побудувати плоску укладку графа $\mathbf{G}$, використовуючи алгоритм γ.



2. Визначити, чи є граф $\mathbf{G}$ планарним, використовуючи критерій Понтрягина-Куратовського або Вагнера. Побудувати плоску укладку графа $\mathbf{G}$, використовуючи алгоритм γ.

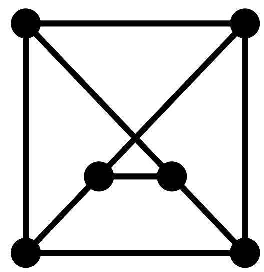


3. Визначити, чи є граф $\mathbf{G}$ планарним, використовуючи критерій Понтрягина-Куратовського або Вагнера. Якщо вхідний граф був планарним додати мінімальне число ребер до непланарності. Для непланарного графу (вхідного чи перетвореного) визначити характеристики: рід, товщину, число схрещувань та перекрученість.

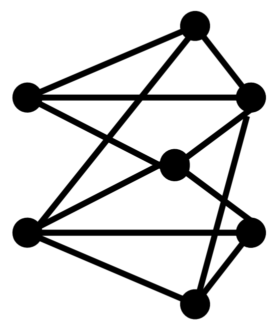


4. Нехай задано граф $\mathbf{G}$ множина вершин якого дорівнює $\mathbf{N_9}$, а множина ребер складається за таким принципом: дві вершини із номерами $\mathbf{i}$ та $\mathbf{j}$, $\mathbf{i},\mathbf{j} \in \mathbf{N_9}$ є суміжними, якщо вони діляться без залишку чи на 7, чи на 8. Визначити, чи є граф $\mathbf{G}$ планарним, використовуючи критерій Понтрягина-Куратовського або Вагнера. Побудувати плоску укладку графа $\mathbf{G}$. Якщо вхідний граф був планарним додати мінімальне число ребер до непланарності. Для непланарного графу (вхідного чи перетвореного) визначити характеристики: рід, товщину, число схрещувань та перекрученість.

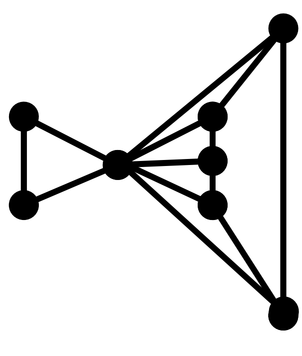
5. Для заданого графа $\mathbf{G}$ знайти хроматичне число та хроматичний індекс.



6. Для заданого графа $\mathbf{G}$ знайти хроматичне число та хроматичний індекс.



7. Послідовно розфарбувати граф $\mathbf{G}$, знайти хроматичне число та хроматичний індекс.



8. Нехай задано граф $\mathbf{G}$ множина вершин якого дорівнює $\mathbf{N_8}$, а множина ребер складається за таким принципом: дві вершини із номерами $\mathbf{i}$ та $\mathbf{j}$, $\mathbf{i},\mathbf{j} \in \mathbf{N_8}$

є суміжними, якщо вони діляться без залишку чи на 5, чи на 6. Для заданого графа $\mathbf{G}$ знайти хроматичне число та хроматичний індекс.

9. Нехай задано граф $\mathbf{G}$ множина вершин якого дорівнює $\mathbf{N_{10}}$, а множина ребер складається за таким принципом: дві вершини із номерами $\mathbf{i}$ та $\mathbf{j}$, $\mathbf{i}, \mathbf{j} \in \mathbf{N_{10}}$ є суміжними, якщо вони діляться без залишку чи на 7, чи на 9. Для заданого графа $\mathbf{G}$ знайти хроматичне число та хроматичний індекс.

10. Навести приклад графа, у якого число фарб для правильного розфарбування буде залежати від порядку обходу вершин.

9.4 Контрольні питання

1. Який граф називається плоским, планарним?

2. Що таке жорданова крива? Сформулювати теорему Жордано та наслідок із неї.

3. Дати визначення грані та границі грані плоского графа.

4. Сформулювати теорему Ейлера для плоского графа.

5. Операції підрозбиття та стягнення ребер графу. Гомеоморфні графи.

6. Сформулювати критерії планарності графів. Критерій Понтрягина-Куратовського та Вагнера.

7. Алгоритм плоскої укладки графа. Дати визначення сегменту, контактної вершини, $\alpha-$ланцюга, допустимої грані.

8. Дати визначення характеристикам непланарних графів: число схрещувань, товщина, рід графа, перекрученість.

9. Дати визначення вершинного та реберного розфарбування.

10. Яке розфарбування називається правильним? Привести опис алгоритму послідовного розфарбування.

11. Сформулювати визначення хроматичного числа, хроматичного індексу.

12. Сформулювати теорему Кеніга та наслідків із неї. Дати визначення біхроматичного графу.

РОЗДІЛ 10
ОРІЄНТОВАНІ ГРАФИ (ОРГРАФИ)

10.1 Основні визначення теорії орієнтованих графів

Орієнтований граф $\mathbf{G=(V,A)}$ – пара множин $\mathbf{V}$ і $\mathbf{A}$, таких, що $\mathbf{V}$ – деяка кінцева непорожня множина, а $\mathbf{A}$ – деяка підмножина декартового квадрату множини $\mathbf{V}: \mathbf{V^2 = V \times V}$.

Вершини графа $\mathbf{G}$ – елементи множини $\mathbf{V}$.

Дуги графа $\mathbf{G}$ – елементи множини **A.**

Дуга – упорядкована пара вершин $\mathbf{a=(u,v)}$.

Початок дуги – вершина **u, кінець дуги** – вершина **v.**

Дуга **виходить** з свого початку і **заходить** у свій кінець.

Орграф $\mathbf{G}$ – орграф $\mathbf{p}$**-**го **порядку,** якщо потужність множини вершин дорівнює $\mathbf{|V|=p}$.

10.2 Способи завдання орграфів

1. **Матриця суміжності**

$$\mathbf{A = \| a_{ij} \|, i,j=\overline{1,p}, \quad |V|=p, |A|=q}.$$

$$\mathbf{a_{ij} = \begin{cases} 1, & (i,j) \in A \\ 0, & (i,j) \notin A \end{cases}}$$

2. **Матриця інцидентності**

$$\mathbf{B = \| b_{ij} \|, i=\overline{1,p}, j=\overline{1,q}, |A|=q, |V|=p.}$$

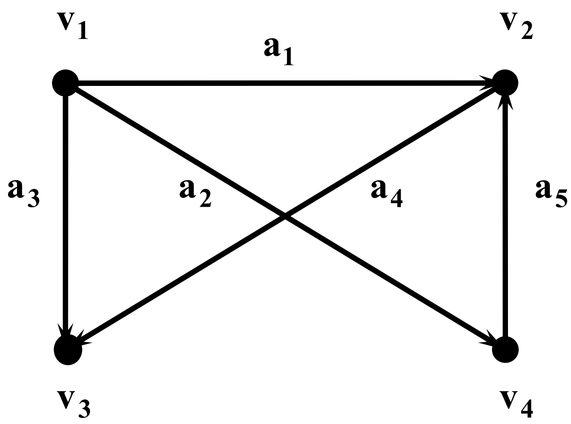
$$\mathbf{j=(i,v) \in A}.$$

$$\mathbf{b_{ij} = \begin{cases} 1, & i,v \in V, \quad j=(i,v) \in A \\ -1, & i,v \in V \quad j=(v,i) \in A \\ 0, & else \end{cases}}$$

Наприклад.

Нехай маємо орграф $\mathbf{G(V,A)}$ порядку 4.

Графічне зображення орграфу приведено нижче.



Матриця інцидентності $\mathbf{B_G}$ **:**

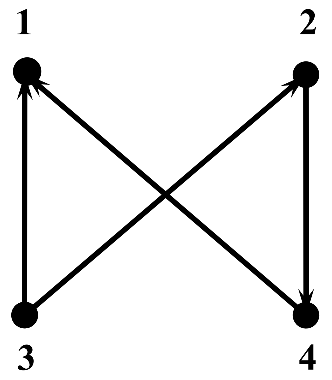
	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
v_1	1	1	1	0	0
v_2	-1	0	0	1	-1
v_3	0	0	-1	-1	0
v_4	0	-1	0	0	1

Матриця суміжності $\mathbf{A_G}$ **:**

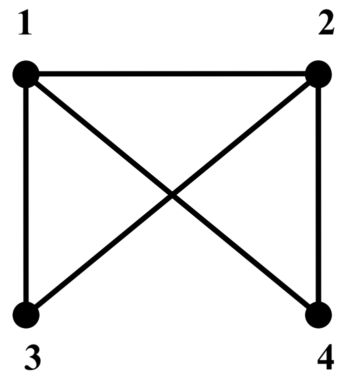
	v_1	v_2	v_3	v_4
v_1	0	1	1	1
v_2	0	0	1	0
v_3	0	0	0	0
v_4	0	1	0	0

Основа – неорієнтований граф, що виходить внаслідок зняття орієнтації із дуг вхідного орграфа.

Зворотній орграф $\mathbf{G^{-1} = (V, A^{-1})}$ – орграф, у якого множина вершин збігається із множиною вершин орграфу $\mathbf{G}$, і дуга $\mathbf{(u, v) \in A^{-1} \leftrightarrow (v, u) \in A}$.



Зворотній орграф $\mathbf{G^{-1}}$



Основа $\mathbf{G}$

10.3 Степінь вершини орграфа

Напівстепінь заходу вершини $\mathbf{v}$ графа $\mathbf{G}$ – кількість дуг, що заходять у вершину $\mathbf{v}$: $\mathbf{deg^-(v) = |X|;\quad X = \{x \mid x = (u, v) \in A\}.}$

Напівстепінь виходу вершини $\mathbf{v}$ графа $\mathbf{G}$ – число дуг, що виходять із вершини $\mathbf{v}$: $\mathbf{deg^+(v) = |Y|;\quad Y = \{y \mid y = (v, u) \in A\}.}$

Степінь вершини $\mathbf{v}$ графа $\mathbf{G}$ – сумма півстепеней заходу та виходу у вершині $\mathbf{v}$: $\mathbf{deg(v) = deg^-(v) + deg^+(v)}$.

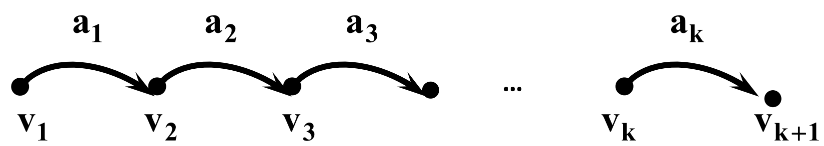
Лема про рукостискання для орграфів

Сума напівстепеней заходу всіх вершин орграфа $\mathbf{G}$ дорівнює сумі напівстепеней виходу та дорівнює кількості дуг орграфа:

$$\sum_{i=1}^{p} \mathbf{deg^+(v_i)} = \sum_{i=1}^{p} \mathbf{deg^-(v_i)} = \mathbf{q}\ ,\quad \mathbf{q = |A|,\quad p = |V|}\ .$$

10.4 Маршрути в орграфах

Орієнтований маршрут (ормаршрут) – кінцева послідовність, що чергується з вершин дуг графа таких, що кожна дуга виходить з попередньої вершини і заходить у наступну вершину $\mathbf{a_i = (v_i, v_{i+1})}$:



Орієнтований ланцюг (орланцюг) – орієнтований маршрут без дуг, що повторюються.

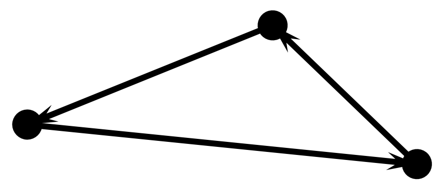
Шлях – ланцюг без повторюваних вершин.

Орієнтований цикл (орцикл)– замкнутий орієнтований ланцюг.

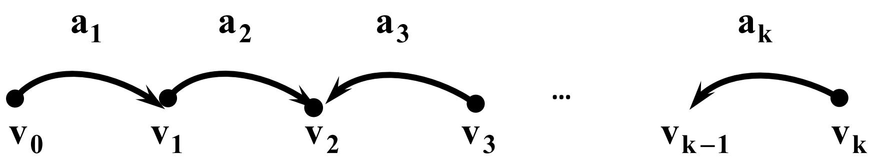
Контур – замкнутий шлях або или замкнутий шлях без повторення дуг та вершин (окрім, можливо, крайніх).

Довжина орієнтованого маршруту – число дуг, що складають маршрут з урахуванням повторення.

Приклад контура.

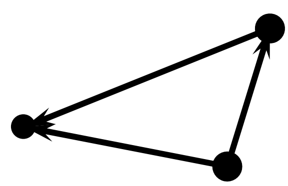


Напівмаршрут (маршрут основи) – послідовність вершин і дуг орграфа, така, що $\mathbf{a_i = (v_{i+1}, v_i)}$ або $\mathbf{a_i = (v_i, v_{i+1})}$.



Аналогічно вводяться поняття **напівланцюг, напівшлях, напівконтур.**

Приклад напівконтура.



10.5 Типи зв'язності у орієнтованому графі

Вершина **v** орграфа **G** **досяжна** з вершини **u,** якщо існує (**u**,**v**)-ормаршрут в **G,** відповідно вершина **u** – **контрдосяжна** для вершини **v**.

Будь-яка вершина вважається **досяжною сама для себе**.

Вершини **v** и **u** орграфа **G** – **взаємнодосяжні,** якщо вершина **v** досяжна для вершини **u**, і вершина **u** досяжна для вершини **v**.

Орграф G – сильнозв'язний (сильний), якщо будь-які дві вершини в ньому взаємнодосяжні.

Орграф G – односторонньо зв'язний (односторонній), якщо для кожної пари його вершин, принаймні, одна досяжна з іншої.

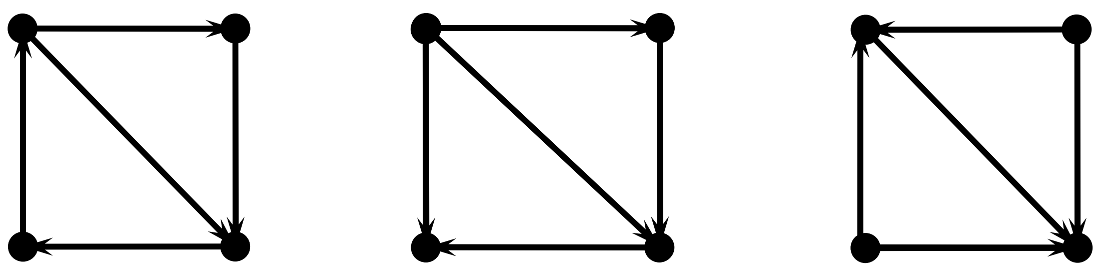
Орграф G – слабозв'язний (слабкий), якщо будь-які дві його вершини з'єднані напівмаршрутом (напівшляхом).

Орграф G – незв'язний, якщо не зв'язна його основа.

Сильна компонента – максимальний щодо включення вершин сильний підграф вхідного орграфа.

Одностороння компонента – максимальний щодо включення вершин односторонній підграф вхідного орграфа.

Слабка компонента – максимальний щодо включення вершин слабкий підграф вхідного орграфа.



Сильний орграф　　Односторонній орграф　　Слабкий орграф

10.6 Критерії сильної, односторонньої та слабкої зв'язності у орграфах

Орграф є **сильним** тоді і тільки тоді, коли в ньому є остовний циклічний ормаршрут.

Остовний маршрут – маршрут, що містить усі вершини вхідного графа.

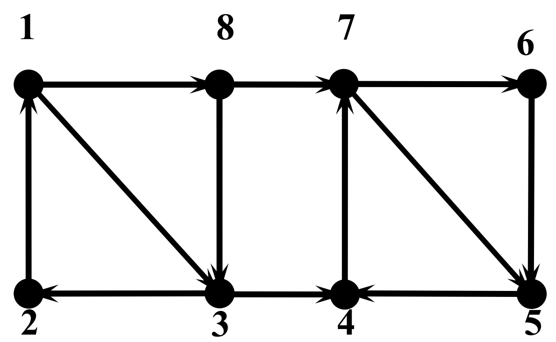
Орграф є **одностороннім** тоді і тільки тоді, коли в ньому є остовний маршрут.

Орграф є **слабким** тоді і тільки тоді, коли в ньому є остовний напівмаршрут.

10.7 Конденсація орграфа

Конденсація орграфа $\mathbf{G}$ – орграф $\mathbf{G^*}$, вершини $\mathbf{S_1, S_2, ..., S_m}$ якого відповідають сильним компонентам орграфа $\mathbf{G}$ і дуга $\mathbf{(S_i, S_j)}$ належить орграфу $\mathbf{G^*}$ тоді і тільки тоді, коли в $\mathbf{G}$ існує дуга, початок якої, знаходиться в сильній компоненті $\mathbf{S_i}$, кінець – в $\mathbf{S_j}$.

Наприклад.



Орграф $\mathbf{G}$

Сильні компоненти $\mathbf{G}$

$\mathbf{S_1 = \{1,2,3,8\}}$

$\mathbf{S_2 = \{4,5,6,7\}}$

Орграф $\mathbf{G^*}$ – конденсація $\mathbf{G}$

Конденсація $\mathbf{G^*}$ будь-якого орграфа $\mathbf{G}$ не має контурів

Алгоритм побудови конденсації

1. Побудуємо матрицю досяжності орграфа $\mathbf{G}$.

$$\mathbf{R} = \left\| \mathbf{r_{ij}} \right\|, \mathbf{i}, \mathbf{j} = \overline{\mathbf{1}, \mathbf{p}}.$$

$$\mathbf{r_{ij}} = \begin{cases} \mathbf{1}, \mathbf{i} \ \text{äîñÿæíà} \quad \text{äëÿ} \ \mathbf{j} \\ \mathbf{0}, \mathbf{i} \ \text{íå} \quad \text{äîñÿæíà} \quad \text{äëÿ} \ \mathbf{j} \end{cases}.$$

2. Побудуємо матрицю контрдосяжності.

$$\mathbf{Q} = \left\| \mathbf{q_{ij}} \right\|, \mathbf{i}, \mathbf{j} = \overline{\mathbf{1}, \mathbf{p}}, \ \mathbf{Q} = \mathbf{R}^{\mathbf{T}}.$$

$$\mathbf{q_{ij}} = \begin{cases} \mathbf{1}, \mathbf{i} \ \text{êîíòðäîñÿæ} \quad \text{íà} \quad \text{äëÿ} \ \mathbf{j} \\ \mathbf{0}, \mathbf{i} \ \text{íå} \quad \text{êîíòðäîñÿæ} \quad \text{íà} \quad \text{äëÿ} \ \mathbf{j} \end{cases}$$

2. Знайдемо матрицю взаємної досяжності.

Позначимо як $*$ – оператор поелементного добутку матриць.

$$\mathbf{S} = \mathbf{R} * \mathbf{Q} = \mathbf{R} * \mathbf{R}^{\mathbf{T}},$$

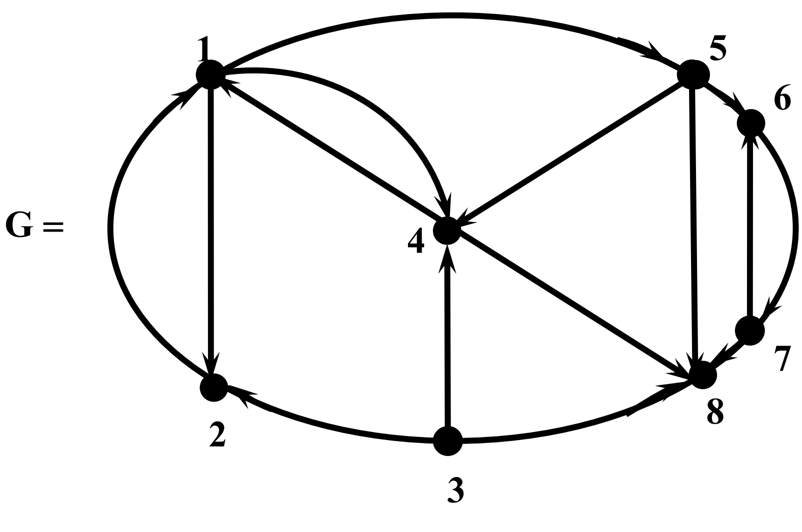
$$\mathbf{s_{ij}} = \mathbf{r_{ij}} * \mathbf{q_{ij}}, \ \mathbf{i}, \mathbf{j} = \overline{\mathbf{1}, \mathbf{p}}.$$

Оберемо деяку вершину $\mathbf{v_i} \in \mathbf{V}$, тоді сильна компонента орграфа, що містить $\mathbf{v_i}$, визначається одиничними елементами $\mathbf{i}$-того рядка матриці $\mathbf{S}$.

Іншими словами, перестановкою рядків і стовпців можна привести матрицю $\mathbf{S}$ до блочно-діагонального вигляду, де кожен блок буде відповідати деякій сильній компоненті орграфа $\mathbf{G}$.

Наприклад:

Задано орієнтований граф $\mathbf{G}$. Побудувати конденсацію $\mathbf{G}^*$.



Розв'язання.

Матриця досяжності $\mathbf{R_G}$:

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
1	1	1	0	1	1	1	1	1
2	1	1	0	1	1	1	1	1
3	1	1	1	1	1	1	1	1
4	1	1	0	1	1	1	1	1
5	1	1	0	1	1	1	1	1
6	0	0	0	0	0	1	1	1
7	0	0	0	0	0	1	1	1
8	0	0	0	0	0	0	0	1

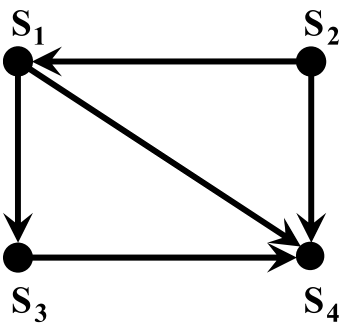
Матриця контрдосяжності $\mathbf{Q_G}$:

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
1	1	1	1	1	1	0	0	0
2	1	1	1	1	1	0	0	0
3	0	0	1	0	0	0	0	0
4	1	1	1	1	1	0	0	0
5	1	1	1	1	1	0	0	0
6	1	1	1	1	1	1	1	0
7	1	1	1	1	1	1	1	0
8	1	1	1	1	1	1	1	1

Матриця взаємної досяжності $\mathbf{S_G}$:

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
1	1	1	0	1	1	0	0	0
2	1	1	0	1	1	0	0	0
3	0	0	1	0	0	0	0	0
4	1	1	0	1	1	0	0	0
5	1	1	0	1	1	0	0	0
6	0	0	0	0	0	1	1	0
7	0	0	0	0	0	1	1	0
8	0	0	0	0	0	0	0	1

Конденсація орграфа $\mathbf{G}$: $\mathbf{S_1 = \{1,2,4,5\}}$, $\mathbf{S_2 = \{3\}}$, $\mathbf{S_3 = \{6,7\}}$, $\mathbf{S_4 = \{8\}}$



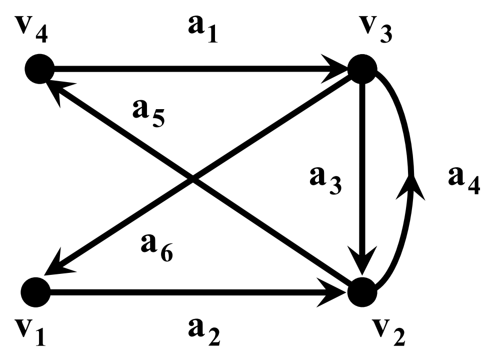
10.8 Обходи орграфа

Ейлерів орцикл – цикл, що містить кожну дугу орграфа.

Ейлерів орграф – зв'язний орграф, що містить ейлерів цикл**.**

Наприклад.

Ейлерів цикл орграфа: $(\mathbf{a_1,a_3,a_4,a_6,a_2,a_5})$.



Критерій ейлеровості для орграфів

Для зв'язного орграфа наступні умови еквівалентні:

1. Орграф $\mathbf{G}$ – ейлерів.
2. Для будь-якої вершини $\mathbf{v}$ справедливо:

Наслідок із теореми Ейлера

Орграф $\mathbf{G}$ є об'єднанням контурів, що попарно не мають спільних дуг.

Гамільтонів контур орграфа G – контур, що містить всі вершини даного орграфа.

Гамільтонів орграф G – орграф, що містить гамільтонів контур.

10.9 База та антибаза орграфу

10.9.1 База орграфа

База орграфа G – найменша (щодо включення) підмножина вершин $\mathbf{B}$, що задовольняє умові: будь-яка вершина $\mathbf{v} \in \mathbf{V} / \mathbf{B}$ досяжна із якої-небудь вершини $\mathbf{u} \in \mathbf{B}$**.**

Базова компонента – сильна компонента орграфа $\mathbf{G}$, в яку не входить жодна дуга з інших сильних компонент.

У конденсації $\mathbf{G}^*$ таким компонентам відповідають вершини з нульовими півстепенями заходу.

Підмножина вершин $\mathbf{B}$ орграфа $\mathbf{G}$ – база, якщо $\mathbf{B}$ складається з вершин, що належать базовим компонентам, причому в кожну базову компоненту входить тільки одна вершина з множини $\mathbf{B}$.

Алгоритм знаходження бази

1. Побудувати конденсацію $\mathbf{G}^*$ орграфу $\mathbf{G}$.

2. Виділити в конденсації вершини з нульовими півстепенями заходу. Такі вершини будуть визначати базові компоненти.

3. З кожної базової компоненти вибирається по одній вершині, таким чином, база орграфа може бути визначена не єдиним чином.

10.9.2 Антибаза орграфу

Антибаза орграфа $\mathbf{G}$ – найменша (щодо включення) підмножина вершин $\mathbf{B'}$**,** така, що: будь-яка вершина $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$, досяжна з будь-якої вершини $\mathbf{u} \in \mathbf{V} / \mathbf{B'}$.

Підмножина вершин $\mathbf{B}$ орграфа $\mathbf{G}$ – база, якщо $\mathbf{B}$ складається з вершин, що належать базовим компонентам, причому в кожну базову компоненту входить тільки одна вершина з множини $\mathbf{B}$.

Алгоритм знаходження антибази

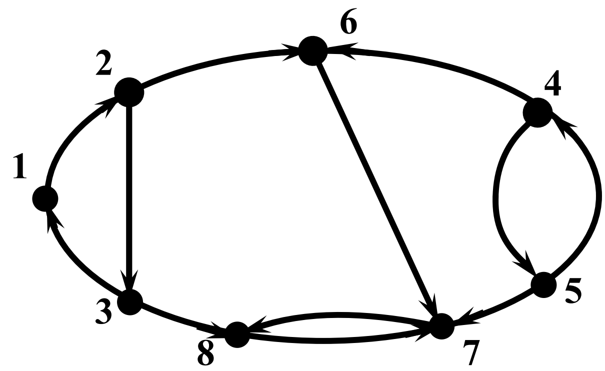
1. Побудувати конденсацію $\mathbf{G}^*$.

2. Виділити в конденсації вершини з нульовими півстепенями виходу.

3. З кожної компоненти, що відповідає такий вершині, вибирається по одній вершині.

Наприклад.

Заданий орієнтований граф $\mathbf{G}$. Знайти базу і антибазу.

$\mathbf{G} =$ 

Розв'язання. Побудуємо конденсацію $\mathbf{G}^*$.

Матриця досяжності $\mathbf{R_G}$:

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
1	1	1	1	0	0	1	1	1
2	1	1	1	0	0	1	1	1
3	1	1	1	0	0	1	1	1
4	0	0	0	1	1	1	1	1
5	0	0	0	1	1	1	1	1
6	0	0	0	0	0	1	1	1
7	0	0	0	0	0	0	1	1
8	0	0	0	0	0	0	1	1

Матриця контрдосяжності $\mathbf{Q_G}$:

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
1	1	1	1	0	0	0	0	0
2	1	1	1	0	0	0	0	0
3	1	1	1	0	0	0	0	0
4	0	0	0	1	1	0	0	0
5	0	0	0	1	1	0	0	0
6	1	1	1	1	1	1	0	0
7	1	1	1	1	1	1	1	1
8	1	1	1	1	1	1	1	1

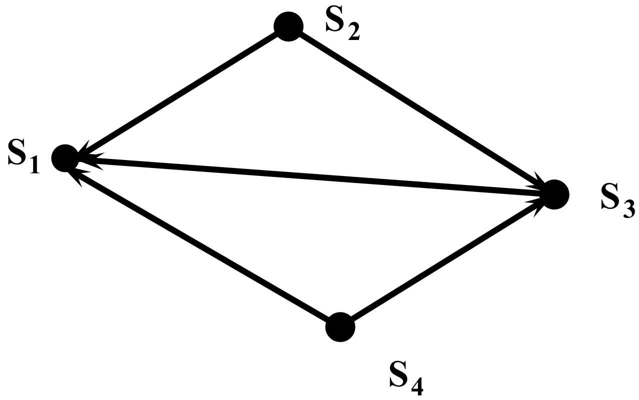
Матриця взаємної досяжності $\mathbf{S_G}$:

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
1	1	1	1	0	0	0	0	0
2	1	1	1	0	0	0	0	0
3	1	1	1	0	0	0	0	0
4	0	0	0	1	1	0	0	0
5	0	0	0	1	1	0	0	0
6	0	0	0	0	0	1	0	0
7	0	0	0	0	0	0	1	1
8	0	0	0	0	0	0	1	1

Сильні компоненти орграфу $\mathbf{G}$:

$\mathbf{S_1 = \{1,2,3\}, S_2 = \{6\}, S_3 = \{4,5\}, S_4 = \{7,8\}}$.

Конденсація $\mathbf{G^*}$ орграфу $\mathbf{G}$:

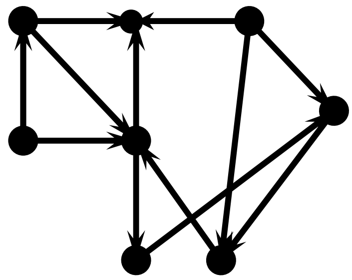


Для знаходження бази виділимо в конденсації вершини з нульовими півстепенями заходу, тобто базові компоненти. Базові компоненти: $\mathbf{S_1}$ і $\mathbf{S_3}$.

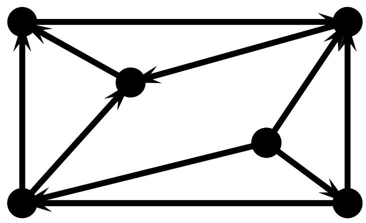
З кожної базової компоненти вибираємо по одній вершині. Бази орграфа **G**: $\mathbf{\{1,4\};\{1,5\};\{2,4\};\{2,5\};\{3,4\};\{3,5\}}$. Для знаходження антибази виділимо в конденсації вершини з нульовими півстепенями виходу, це будуть антибазові компоненти. Антибазова компонента: $\mathbf{S_4}$. Антибаза орграфа **G**: $\mathbf{\{7\};\{8\}}$.

10.10 Задачі для самостійної роботи

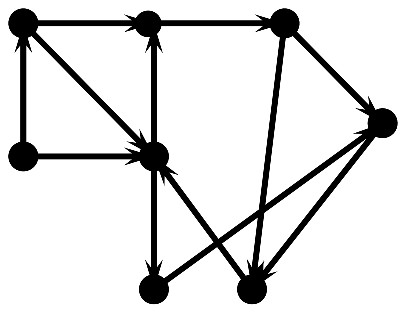
1. Для заданого орграфа побудувати матрицю суміжності і матрицю інцидентності. Знайти основу та зворотний граф. Побудувати ормаршрут, виділити в ньому орланцюг, шлях, напівмаршрут, напівланцюг, напівшлях, привести приклади, якщо це можливо замкненого ормаршруту, орциклу і контуру.



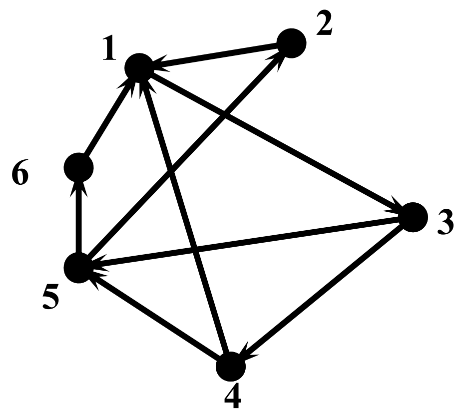
2. Для заданого орграфа побудувати матрицю суміжності і матрицю інцидентності. Знайти основу та зворотний граф. Побудувати ормаршрут, виділити в ньому орланцюг, шлях, напівмаршрут, напівланцюг, напівшлях, привести приклади, якщо це можливо замкненого ормаршруту, орциклу і контуру.



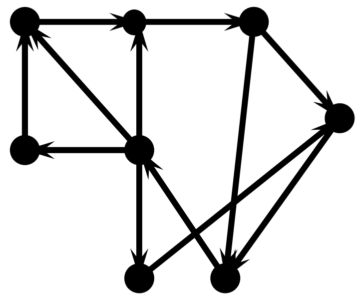
3. Для заданого орграфа побудувати матрицю суміжності і матрицю інцидентності. Знайти основу та зворотний граф. Побудувати ормаршрут, виділити в ньому орланцюг, шлях, напівмаршрут, напівланцюг, напівшлях, привести приклади, якщо це можливо замкненого ормаршруту, орциклу і контуру.



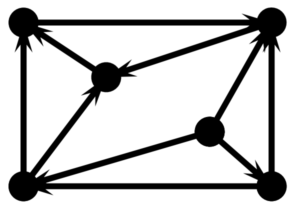
4. Для заданого орграфу побудувати матрицю досяжності, контр досяжності та взаємної досяжності. Визначити тип зв'язності орграфа, виділити сильні компоненти. Побудувати конденсацію орграфу.



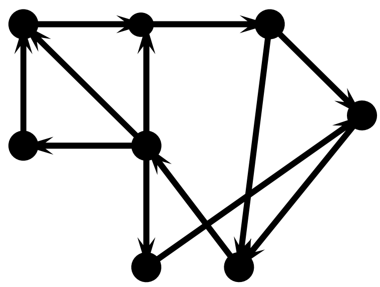
5. Для заданого орграфу побудувати конденсацію. Визначити бази та антибази. Виділити ядро орграфа.



6. Для заданого орграфу побудувати конденсацію. Визначити бази та антибази. Виділити ядро орграфа.



7. Знайти в орграфі контур або ланцюг Ейлера та Гамільтона, якщо такі існують.



8. Побудувати приклад конденсації деякого орграфу, якщо відомо, що оргаф має дві бази потужності три.

9. Побудувати приклад конденсації деякого орграфу, якщо відомо, що оргаф має одну базу потужності три.

10. Побудувати приклад конденсації деякого орграфу, якщо відомо, що оргаф має три бази потужності два.

11. Привести приклад, у якому разі конденсація буде співпадати с заданим орграфом. Дати відповідь, для якого графу конденсація є одновершинний або тривіальний граф.

10.11 Контрольні питання

1. Дати визначення орграфа, дуги орграфа.

2. Перелічити матричні способи опису орграфа та їх особливості.

3. Дати визначення основи та зворотного орграфу.

4. Визначити поняття степень, напівстепень заходу та виходу вершин орграфу. Аналог леми про рукостискання для орграфу.

5. Дати визначення маршруту в орієнтованому графі, орланцюга, орциклу, шляху та контуру, а також напівмаршруту, напівланцюгу, напівшляху, напівконтуру.

6. Означити поняття довжини ормаршруту.

7. Дати визначення понять: досяжність, контрдосяжність та взаємна досяжність. Дати визначення типам зв’язності у орграфі: сильна, одностороння і слабка зв'язність. Компоненти зв’язності.

8. Сформулювати критерії зв’язності у орграфі.

9. Дати визначення конденсації орграфа та описати алгоритм її побудови.

10. Дати визначення понять: база, антибаза та ядро орграфа. Навести алгоритми побудови бази та антибази орграфу.

11. Дати визначення гамільтонових контуру та орграфу.

12. Дати визначення ейлеревих циклу та орграфу. Навести критерій існування ейлеревого циклу у орграфі та наслідки з критерію.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Кук Д., Бейз Г. Компьютерная математика. – М.: Наука, 1990. – 383с.
2. Міхайленко В.М., Федоренко Н.Д., Демченко В.В. Дискретна математика: Підручник. – Київ: Вид-во Європ. ун-ту, 2003. – 318с.
3. Бондаренко М.Ф., Белоус Н.В., Руткас А.Г. Компьютерная дискретная математика. – Харьков: Компания СМИТ, 2004. – 476с.
4. Поспелов Д.А. Логические методы анализа и синтеза схем. – М.: Энергия, 1974. – 268с.
5. Столл Р. Множества. Логика. Аксиоматические теории. – М.: Просвещение, 1968. – 318с.
6. Андерсон Дж. Дискретная математика и комбинаторика. – М.: Мир, 2001. – 960с.
7. Лавров И.А., Максимова Л.Л. Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов. – М.: Наука, 1975. – 238с.
8. Горбатов В.А. Основы дискретной математики. – М.: Высшая школа, 1986. – 311с.
9. Капітонова Ю.В., Кривий С.Л., Летичевський О.А. Основи дискретної математики. – К.: Наукова думка, 2002. – 578с.
10. Кузнецов О.П., Адельсон-Вельский Г.М. Дискретная математика для инженера. – М.: Энергия, 1980. – 344с.
11. Мендельсон Э. Введение в математическую логику. – М.: Наука, 1976. – 320с.
12. Москинова Г.И. Дискретная математика. Математика для менеджера в примерах и упражнениях. – М.: Логос, 2002. – 238с.
13. Тевяшев А.В., Гусарова И.Г. Основы дискретной математики в примерах и задачах. - Харьков: ХНУРЭ, 2003. – 272 с.
14. Яблонский С.В. Введение в дискретную математику. – М.: Наука, 1979. – 384 с.

15. Виленкин Н.Я. Комбинаторика. – М.: Наука, 1969. – 328 с.

16. Ежов И.И., Скороход А.В., Ядренко М.И. Элементы комбинаторики. – М.: Наука, 1977. – 80с.

17. Глускин Л.М., Шварц В.Я., Шор Л.А. Задачи и алгоритмы комбинаторики и теории графов. – Донецк: ДПИ,1982. – 112 с.

18. Липский В. Комбинаторика для программистов. – М.: Мир, 1988.

19. Риордан Д. Введение в комбинаторный анализ.– М.: ИЛ, 1963.– 288с.

20. Холл М. Комбинаторика. – М.: Мир, 1970. – 424с.

21. Уилсон Р. Введение в теорию графов. – М.: Мир, 1977. – 205с.

22. Лекции по теории графов /под ред. Емеличева Е.А./ – М.: Наука, 1990. – 384с.

23. Кристофидес Н. Теория графов: алгоритмический подход. – М.: Мир, 1978. – 432с.

24. Харари Ф. Теория графов. – М.: Мир, 1973. – 300с.

25. Евстигнеев В.А. Применение теории графов в программировании. – М.: Наука, 1985. – 352с.

26. Свами М., Тхуласираман К. Графы, сети и алгоритмы. – М.: Мир, 1988. – 455с.

27. Уилсон Р. Введение в теорию графов. – М.: Мир, 1977. – 205с.

Предметний покажчик

А

Б

В

Г

Д

З

І

К

Л

М

О

П

Р

С

У

Ф

Х

Ц

Ч

ЗМІСТ

Навчальне видання

Назарова Ірина Акопівна

Дискретний аналіз

Навчальний посібник

Редактор:

Комп'ютерний набор:

Комп'ютерна верстка: