ISSN 2075-4272

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

НАУКОВІ ПРАЦІ ДОНЕЦЬКОГО НАЦІОНАЛЬНОГО ТЕХНІЧНОГО УНІВЕРСИТЕТУ

Серія: “Обчислювальна техніка та автоматизація”

№ 1(26)’2014

Донецьк
2014

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

НАУКОВІ ПРАЦІ ДОНЕЦЬКОГО НАЦІОНАЛЬНОГО ТЕХНІЧНОГО УНІВЕРСИТЕТУ

Серія: “Обчислювальна техніка та автоматизація”

Всеукраїнський науковий збірник

Заснований у липні 1998 року

Виходить 2 рази на рік

№ 1(26)’2014

Донецьк
2014

УДК 681.5: 658.5: 621.3

Друкується за рішенням Вченої ради державного вищого навчального закладу «Донецький національний технічний університет» (протокол № 6 від 20.06.2014).

У збірнику опубліковано статті науковців, аспірантів, магістрів та інженерів провідних підприємств і вищих навчальних закладів України, в яких наведено результати наукових досліджень та розробок, виконаних у 2013-2014 роках згідно напрямків: автоматизація технологічних процесів, комп'ютерні інформаційні технології, інформаційно-вимірювальні системи, електронні і мікропроцесорні прилади.

Матеріали збірника призначено для викладачів, наукових співробітників, інженерно-технічних робітників, аспірантів та студентів, що займаються питаннями розробки і використання автоматичних, комп'ютерних і електронних систем.

Засновник та видавець – Донецький національний технічний університет.

Свідоцтво про державну реєстрацію друкованого засобу масової інформації: серія КВ № 7376 від 03.06.2003.

Збірник включено до переліку наукових фахових видань України, в яких можуть публікуватися результати дисертаційних робіт на здобуття наукових ступенів доктора і кандидата наук (затверджено постановою президії ВАК України № 1-05/5 від 01. 07. 2010 р., надруковано в бюлетені ВАК №7, 2010).

Збірник включено до бібліографічної бази даних наукових публікацій Російський індекс наукового цитування (РІНЦ) (http://elibrary.ru/title_about.asp?id=38108)

ISSN 2075-4272

ЗМІСТ

Розділ 1
Автоматизація технологічних процесів

УДК 51 (071)

Л.П. Мироненко (канд. физ.-мат. наук)
И.В. Петренко (канд. физ.-мат. наук), А.Ю. Власенко
ГВУЗ «Донецкий национальный технический университет», г. Донецк
кафедра высшей математики,
кафедра радиотехники и защиты информации
e-mail: mironenko.leon@yandex.ua

ИНТЕГРАЛ НЬЮТОНА-ЛЕЙБНИЦА И ВТОРАЯ ИНТЕГРАЛЬНАЯ ТЕОРЕМА О СРЕДНЕМ

В статье рассматривается определение интеграла в более узком смысле, чем интеграл Римана. Можно считать новое определение, в некотором смысле, частным случаем интеграла Римана. В интегральной сумме Римана функция вычисляется в левых (или правых) точках $\tau-$разбиения отрезка интегрирования. В основе интеграла Ньютона-Лейбница лежит определение первообразной, дифференциала функции и специальный способ выбора точек на частичных отрезках разбиения. Преимуществом такого подхода является формула Ньютона-Лейбница и вторая интегральная теорема о среднем, которые следуют из нашей теории. Предложенная схема углубляет понимание природы интеграла.
Ключевые слова: *методика, интеграл, интегрирование, дифференциал, формула Ньютона-Лейбница, разбиение.*

Введение

В курсе математического анализа определенный интеграл обычно вводится по Риману на основе интегральной суммы (Римана) [1-3]. Определение интеграла по Риману является самым широким определением интеграла, не считая интеграла Лебега, Стилтьеса, функционального интегрирования. В более узком смысле, с большими ограничениями интеграл может быть определен другими способами. Одним из примеров этого определения является интеграл Лагранжа, когда функция в интегральной сумме Римана вычисляется в специально выбранных точках (удовлетворяющих теореме Лагранжа [1]) [4].

Мы рассмотрим еще один способ выбора – левые или правые концы частичных отрезков и покажем еще один вариант формулировки интеграла. Этот вариант мы назвали интегралом Ньютона-Лейбница.

Определение интеграла через дифференциал функции. Формула Ньютона-Лейбница.

Пусть функция $F(x)$ дифференцируема на некотором отрезке $[a,b]$. Ее дифференциал в произвольной точке отрезка $dF(x)=F'(x)dx$. Обозначим $F'(x)=f(x)$. Тогда $dF(x)=f(x)dx$, а в произвольной фиксированной точке x_i

$$dF(x_i)=f(x_i)\Delta x_i, \tag{1}$$

где $\Delta x_i = x - x_i$, $x_i \in [a,b]$.

Произведем $\tau-$разбиение отрезка $[a,b]$ точками $x_i, i=0,1,...,n$, расположив их на отрезке, как это обычно делается при определении $\tau-$разбиения отрезка $a=x_o<x_1<...<x_{n-1}<x_n=b$. Обозначим длину каждого из отрезков разбиения $\Delta x_j = x_j - x_{j-1} > 0$,

$j = 1,2,...,n$, а $|\tau| = \max \Delta x_j$ - наибольший по длине из отрезков Δx_j .

Применим формулу (1) к каждой точке отрезка разбиения, начиная с точки $a = x_o$. Построим сумму

$$\sum_{j=1}^{n} dF(x_j) = \sum_{j=1}^{n} f(x_{j-1})\Delta x_j \ . \qquad (2)$$

Рассмотрим отдельно левую и правую части равенства.

Выразим дифференциал $dF(x_j)$ через конечное приращение $\Delta F(x_j)$, используя определение дифференциала [2]:

$$\Delta F(x_j) = dF(x_j) + o(\Delta x_j),$$

где $o(\Delta x_j)$ - бесконечно малая более высокого порядка малости, чем Δx_j. Теперь левая часть равенства (2) $\sum_{j=1}^{n} \Delta F(x_j) - \sum_{j=1}^{n} o(\Delta x_j)$.

Первая сумма, равная $F(b) - F(a)$ - разность первообразных функции $f(x)$. В самом деле,

$$\sum_{j=1}^{n} \Delta F(x_j) = (F(x_1) - F(x_o)) + (F(x_2) - F(x_1)) + ... + (F(x_{n-1}) - F(x_{n-2})) + (F(x_n) - F(x_{n-1})) =$$
$$= F(x_n) - F(x_o) = F(b) - F(a).$$

Все внутренние слагаемые суммы $\sum_{j=1}^{n} \Delta F(x_j)$ взаимно уничтожаются.

Предел второй суммы должен вычисляться при условиях $n \to \infty, |\tau| \to 0$. При этом $\lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ |\tau|\to 0}} \sum_{j=1}^{n} o(\Delta x_j) = 0$.

Доказательство ограничим случаем равностоящих точек разбиения отрезка $[a,b]$. В этом случае $\Delta x_j = (b-a)/n$. Поэтому величина $o(\Delta x_j)$ есть бесконечно малая более высокого порядка малости, чем $1/n$. Число слагаемых в сумме $\sum_{j=1}^{n} o(\Delta x_j)$ равно n. Фактически, речь идет о вычислении предела $\lim\limits_{n\to\infty} n \cdot o(1/n)$, который равен нулю.

Правая часть равенства (2) называется интегральной суммой Ньютона-Лейбница для функции $f(x)$, а предел $\lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ |\tau|\to 0}} \sum\limits_{j=1}^{n} f(x_{j-1})\Delta x_j$ - определенным интегралом в смысле Ньютона-Лейбница.

Итак, в формулировке Ньютона-Лейбница определенный интеграл может быть определен двояко:

$$\text{как предел} \lim_{\substack{n\to\infty \\ |\tau|\to 0}} \sum_{j=1}^{n} dF(x_j) \quad \text{или} \quad \lim_{\substack{n\to\infty \\ |\tau|\to 0}} \sum_{j=1}^{n} f(x_{j-1})\Delta x_j \ . \qquad (3)$$

В любом из этих вариантов имеем формулу Ньютона-Лейбница

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a). \qquad (4)$$

При этом функция $f(x)$ называется интегрируемой по Ньютону-Лейбницу. Как ясно из рассуждений, основным требованием к функции $f(x)$ является существование первообразной $F(x)$ на $[a,b]$. Это условие гарантирует существование интеграла Ньютона-Лейбница.

Сравнение с интегралом Римана.

В интегральной сумме Римана $\sigma_\tau = \sum_{j=1}^{n} f(\xi_j)\Delta x_j$ точки ξ_j выбираются произвольно на частичных отрезках Δx_j разбиения τ , а определение интеграла Римана имеет следующие особенности:

1. Разбиение отрезка $[a,b]$ произвольное - $\tau-$разбиение.
2. Выбор точек $\xi_j \in [x_{i-1}, x_i]$ произвольный.
3. Существует конечный предел интегральной суммы σ_τ, при условиях $n \to \infty$ и $|\tau| \to 0$.

В формулировке Ньютона-Лейбница первое и третье условия остаются прежними, а вот точки $\xi_j = x_{j-1}$ - левые концы частичных отрезков Δx_j. Во втором условии точки ξ_j не произвольные, а выбираются специальным образом. Безусловно, это сужает определение определенного интеграла, но дает формулу Ньютона-Лейбница, что невозможно в формулировке Римана.

Вторая интегральная теорема о среднем

Применим определение интеграла Ньютона-Лейбница к трем точкам $x_o = a, x_1, x_2 = b$ разбиения отрезка $[a,b]$

$$\int_a^b f(x)dx = f(a)(x_1 - a) - f(b)(x_1 - b) + o_1(x_1 - a) + o_2(b - x_1).$$

Обратим внимание на то, что $f(a) = F'(a)$ и $f(b) = F'(b)$. Если функция $f(x)$ монотонная и непрерывная на $[a,b]$, то найдется точка $\xi \in [a,b]$, такая, что $o_1(\xi - a) = -o_2(b - \xi)$. В таком случае имеем равенство, выражающее вторую теорему о среднем в интегральном исчислении

$$\int_a^b f(x)dx = f(a)(\xi - a) + f(b)(b - \xi).$$

Обобщение теоремы о среднем простое, если переписать формулу в виде

$$\int_a^b f(x)dx = f(a)\int_a^\xi dx + f(b)\int_\xi^b dx,$$

и применить элементы теории меры [5-6]:

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(a)\int_a^b g(x)dx + f(b)\int_a^b g(x)dx.$$

Подчеркнем, что функция $g(x)$ достаточно произвольная, основное требование к ней – интегрируемость, а функция $f(x)$ должна быть непрерывной и монотонной на $[a,b]$.

В формулировке определенного интеграла по Лагранжу точки ξ_j на частичных отрезках Δx_j τ –разбиения выбираются согласно теореме Лагранжа $\Delta F(x_j) = F'(\xi_j)\Delta x_j = f(\xi_j)\Delta x_j$. Применение к интегральной сумме Лагранжа разбиения отрезка на три точки приводит к первой интегральной теореме о среднем $\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b - a)$. А обобщенная теорема имеет вид

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi)\int_a^b g(x)dx.$$

Мы приходим к следующему заключению. Формулировка определенного интеграла по Лагранжу легко приводит к первой интегральной теореме о среднем, а формулировка по Ньютону-Лейбницу – ко второй теореме о среднем.

В заключении мы предлагаем методическую схему изучения определенного интеграла (рис. 1).

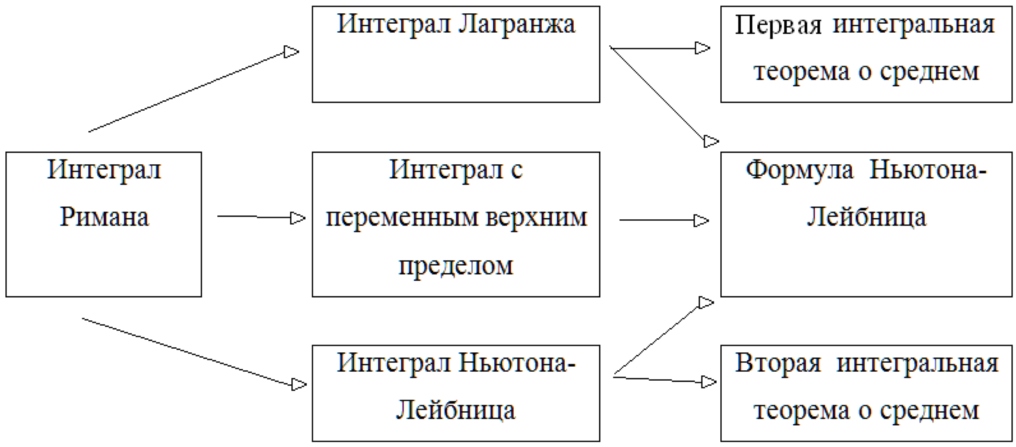

Рисунок 1 – Методическая схема более углубленного изучения определенного интеграла в курсе математического анализа

Выводы

1. Главным результатом работы является еще одна формулировка определенного интеграла, которую мы назвали интегралом Ньютона-Лейбница. Формулировка основана на формуле связи между приращением функции и ее дифференциалом. Подход сразу приводит к формуле Ньютона-Лейбница – основной теореме интегрального исчисления. Формула Ньютона-Лейбница получается за счет специального выбора точек на частичных отрезках разбиения.

2. Отметим два важных достоинства нашего подхода, не считая формулы Ньютона-Лейбница. Первое из них – вторая интегральная теорема о среднем является простым следствием построения интегральной суммы Ньютона-Лейбница. В интеграле Римана доказательство второй теоремы о среднем весьма сложное и не является простым следствием интегральной суммы Римана.

3. Второе достоинство нашего подхода состоит в том, что формулировка и доказательство многих свойств определенного интеграла проще проводить, используя формулу Ньютона-Лейбница, а не с помощью интегральной суммы Римана и предельным переходом в ней, как это делается в стандартном курсе анализа и учебных пособиях [1-3]. В стандартных курсах анализа формула Ньютона-Лейбница обычно рассматривается после свойств интеграла.

Список использованной литературы

1. Кудрявцев Л.Д. Математический анализ. Т. 1 / Л.Д. Кудрявцев. - М.: Наука, 1970. - 571 с.
2. Ильин В.А. Основы математического анализа. Т. 1 / В.А. Ильин, Э.Г. Поздняк. - М.: Изд-во ФМЛ, Москва, 1956. - 472 с.
3. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 1 / Г.М. Фихтенгольц. - М.: Наука, Изд-во ФМЛ, 1972. - 795 с.
4. Мироненко Л.П. Интегральная форма теоремы Лагранжа и ее применение к определенному интегралу / Л.П. Мироненко, Н.А. Прокопенко // Сб. науково-методичних робіт. – 2009. - вип. 6. - С. 119-126.
5. Мироненко Л.П. Интегральные теоремы о среднем. Подход, основанный на свойствах интегральной меры. / Л.П. Мироненко, И.В. Петренко, О.А.Рубцова // Искусственный интеллект. – 2010. – 4. - С. 617-622.
6. Мироненко Л.П. Простой способ доказательства теоремы о среднем в интегральном исчислении / Л.П. Мироненко, О.А. Рубцова, Т. И. Табаленкова // Материалы

региональной студенческой конференции «Математическая культура инженера». – Донецк, 2010. - С. 233-237.

References

1. Kudrjavstev, L.D. (1970), *Matematichesky analiz. Tom 1*. [Mathematical analysis. Vol.1.], Nauka, Moskow, Russia.
2. Ilyn, V.A. and Pozdnjak, E.G. (1956), *Osnovy matematicheskogo analiza*. *Tom 1*. [The bases of mathematical analysis. Vol.1.], FML, Moskow, Russia.
3. Fihtengolts, G.M. (1972), *Kurs differentsialnogo i integralnogo ischislenia*. *Том 1*. [A course of differential and integral calculus. Vol.1.], Nauka, FML, Moskow, Russia.
4. Mironenko, L.P. and Prokopenko, N.A. (2009), "Integralnja forma teoremy Lagranga i primenenie k opredelennomu integralu*"*, *sbornic naukovo-metodichnih robot DonNTU*, vol, 6, pp. 119-126.
5. Mironenko, L.P., Petrenko, I.V., and Rubtsova, O.A. (2010), "Integralnie teoremy o srednem. Podhod, osnovanniy na svojstvah integralnoj meri", *Iskustvenniy intelekt* [Artificial intelligence], no. 4, pp. 617-622.
6. Mironenko, L.P., Rubtsova, O.A. and Tabalenkova, T., (2010), "A simple prove of the theorems in the integral calculus", *Proc. of regionaly student conference* "*Mathematical culture engineer"*, National Technical University, Donetsk, pp. 233-238.

Надійшла до редакції: 18.05.2014

Рецензент: д-р фіз.-мат. наук, проф. Малашенко В.В.

Л.П. Мироненко, І.В. Петренко, А.Ю.Власенко
ДВНЗ «Донецький національний технічний університет»

Інтеграл Ньютона-Лейбниця та друга інтегральна теорема про середнє. *У статті розглядається визначення інтеграла в більш вузькому сенсі, ніж інтеграл Рімана. Можна вважати нове визначення, в деякому розумінні, окремим випадком інтеграла Рімана. В інтегральний сумі Рімана функція обчислюється в лівих (або правих) точках* $\tau-$*розбиття відрізка інтегрування. В основі інтеграла Ньютона-Лейбніца лежить визначення первісної, диференціала функції і спеціальний спосіб вибору точок на часткових відрізках розбиття. Перевагою такого підходу є формула Ньютона-Лейбніца і друга інтегральна теорема про середню, які випливають з нашої теорії. Запропонована схема поглиблює розуміння природи інтегралу.*
Ключові слова: *методика, інтеграл, інтегрування, диференціал, формула Ньютона-Лейбниця, дроблення відрізку.*

L.P.Mironenko, I.V. Petrenko, A.Yu. Vlasenko
Donetsk National Technical University

Newton-Leibnitz's integral and the second mean value theorem
The paper considers an integral in a more narrow sense than Riemann's integral. The integral is a case of Riemann's integral when values of the integral function in the Riemann's integral sum are taken at left (right) points on the partial intervals of a $\tau-$*breaking of the total integration interval. Newton-Leibnitz's integral is based on the definitions of a primitive function and differential and, as was pointed above, by special choice of points in partial intervals. Advantages of the approach are Newton-Leibnitz's formula and the second mean value theorem, which follow right from our theory. Also we proposed a method of more deep studying of the definite integral in the course of mathematical analysis.*
Keywords: *methods, integral, integration, differential, Newton-Leibnitz's formula, mean value.*