

НОРМИРОВАННАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ФРИКЦИОННОЙ МУФТЫ С УПРУГИМ ВХОДНЫМ ВАЛОМ

Чикалов В.И., Писковатская О.В., Федосиенко И.А.

Донецкий государственный технический университет

ola@elf.dgtu.donetsk.ua

In article the description of mathematical model frictional coupling with the elastic entrance shaft is given. The developed model allows to raise accuracy of results of modeling of dynamic systems with frictional connections for the account of exacter reproduction of processes in real object of research.

Развитие современной компьютерной техники дает возможность проводить исследования сложных электромеханических систем (ЭМС) методами математического моделирования с высоким уровнем приближения к реальным условиям.

Разработанная модель фрикционной муфты (ФМ), вращательное движение которой передается через упругий вал, позволяет повысить точность результатов моделирования динамических систем с фрикционными связями, в особенности, прецизионных ЭМС, за счет более точного воспроизведения процессов протекающих в реальном объекте исследования.

Расчетная кинематическая схема исследуемой ФМ показана на рис.1.

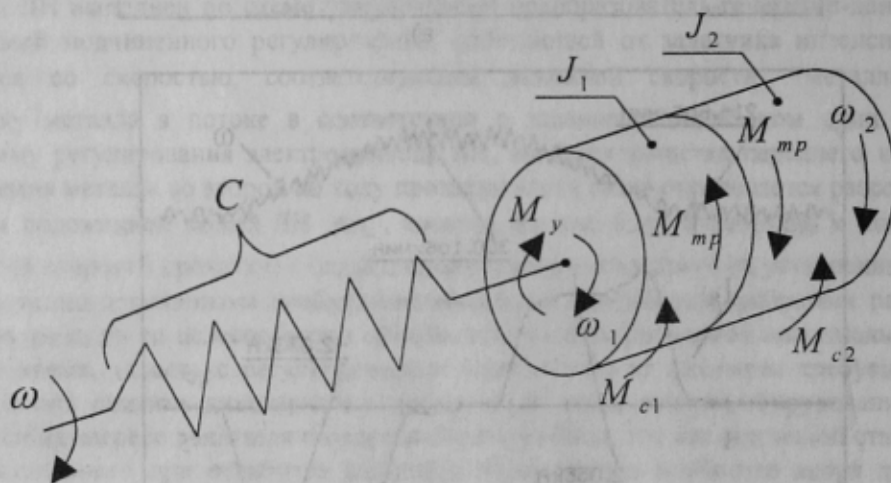


Рисунок 1 – Расчетная кинематическая схема исследуемой ФМ

Как видно из рис.1, ФМ состоит из ведущей J_1 и ведомой J_2 полумуфт, связь между которыми осуществляется с помощью сил трения. Причем для ведущей полумуфты момент M_{mp} , обусловленный этими силами, является тормозящим, а для ведомой – движущим. Кроме этого на каждую из полумуфт действуют моменты сил сопротивления M_{c1} и M_{c2} соответственно.

Ведущая полумуфта вращается с частотой ω_1 , а ведомая – ω_2 . При отсутствии буксования $\omega_1 = \omega_2$.

Движущим моментом, приложенным к ведущей полумуфте, является момент упругой деформации M_y входного вала муфты. Последний возникает из-за скручивания входного вала, показанного на рис.1 в виде пружины с коэффициентом жесткости C , вызванного разностью частот вращения свободного конца вала ω и ведущей полумуфты ω_1 .

Наиболее существенным фактором в таких системах является возможность возникновения проскальзывания (буксования) полумуфт относительно друг друга со скоростью скольжения

$$\omega_{ск} = \omega_1 - \omega_2.$$

В процессе моделирования необходимо четко фиксировать моменты возникновения буксования и его прекращения.

При отсутствии взаимного проскальзывания полумуфт, когда $\omega_{ск} = 0$, ФМ с упругим входным валом описывается системой уравнений

$$\frac{dM_y}{dt} = C(\omega - \omega_1); \quad (1)$$

$$(J_1 + J_2) \frac{d\omega_1}{dt} = M_y - M_{c1} - M_{c2}; \quad (J_1 + J_2) \frac{d\omega_2}{dt} = M_y - M_{c1} - M_{c2};$$

Как показывают два последних уравнения системы (1), ФМ в этом случае представляет собой монолитное тело с моментом инерции $(J_1 + J_2)$. При этом $\omega_1 = \omega_2$ и $\omega_{ск} = 0$. Поскольку вращение от ведущей к ведомой полумуфте передается посредством момента трения M_{mp} между ними, такое состояние будет сохраняться до тех пор, пока динамический момент $M_{\partial 2}$, вызывающий изменение частоты вращения ведомой полумуфты не достигнет уровня

$$M_{\partial 2} = J_2 \frac{d\omega_2}{dt} = M_{mp} - M_{c2}. \quad (2)$$

Попытки дальнейшего его увеличения приведут к возникновению буксования. Следовательно, чтобы определить момент начала взаимного проскальзывания полумуфт, из суммарного динамического момента $M_{\partial \Sigma} = M_y - M_{c1} - M_{c2}$, приложенного к ФМ, необходимо выделять ту его часть $M_{\partial 2}$, которая воздействует на ведомую полумуфту, и сравнивать ее с предельной величиной (2). Это можно сделать, переписав последнее уравнение системы (1) в следующем виде

$$M_{\partial 2} = J_2 \frac{d\omega_2}{dt} = \frac{J_2}{J_1 + J_2} M_{\partial \Sigma}. \quad (3)$$

Имея динамические моменты $M_{\partial \Sigma}$ и $M_{\partial 2}$, уравнение движения ведущей полумуфты можно записать в виде

$$J_1 \frac{d\omega_1}{dt} = M_{\partial \Sigma} - M_{\partial 2}. \quad (4)$$

Причем, уравнение (4) справедливо во всех режимах, как при буксовании, так и без него. В последнем случае суммарный динамический момент распределяется между полумуфтами пропорционально их собственным моментам инерции, что обеспечивает равенство их ускорений и при одинаковых начальных условиях совпадение величин ω_1 и ω_2 .

Из сопоставления уравнений (2) и (3) следует, что режим буксования возникает тогда, когда $M_{\partial 2}$, вычисленный по выражению (3), превышает максимально допустимую величину, определяемую формулой (2). В этом случае нарушается пропорциональное распределение $M_{\partial \Sigma}$ между полумуфтами, так как $M_{\partial 2}$ ограничен величиной $(M_{mp} - M_{c2})$. Следствием этого является неравенство ускорений составных частей ФМ, приводящее к возникновению разности их скоростей, характеризуемой частотой скольжения $\omega_{ск}$. Таким образом, индикатором наступления режима буксования является величина динамического момента $M_{\partial 2}$.

Однако, чтобы судить о моменте прекращения буксования, контроля только за этим параметром недостаточно. Помимо выполнения соотношения $\frac{J_2}{J_1 + J_2} M_{\partial \Sigma} \leq (M_{mp} - M_{c2})$ обязательно должно соблюдаться условие $\omega_{ск} = 0$.

Суммируя все вышеизложенное, математическая модель, позволяющая исследовать динамические режимы ФМ с упругим входным валом, может быть представлена в следующем виде

$$\begin{aligned} \frac{dM_y}{dt} &= C(\omega - \omega_1); & J_1 \frac{d\omega_1}{dt} &= M_{\partial \Sigma} - M_{\partial 2}; \\ M_{\partial \Sigma} &= M_y - M_{c1} - M_{c2}; & M_{\partial 2} &= J_2 \frac{d\omega_2}{dt}; \end{aligned} \quad (5)$$

$$J_2 \frac{d\omega_2}{dt} = \begin{cases} \frac{J_2}{J_1 + J_2} M_{\partial \Sigma}, & \text{при } \frac{J_2}{J_1 + J_2} M_{\partial \Sigma} \leq (M_{mp} - M_{c2}) \text{ и } \omega_{ск} = 0; \\ M_{mp} - M_{c2}, & \text{при } \frac{J_2}{J_1 + J_2} M_{\partial \Sigma} > (M_{mp} - M_{c2}) \text{ или } \omega_{ск} \neq 0. \end{cases}$$

Недостатком полученной модели является то, что она описана в абсолютных физических величинах, а это привязывает ее и полученные на ней результаты к конкретному единичному объекту. Для придания общности проводимым исследованиям и расширения области применения получаемых результатов желательно провести нормирование координат, описывающих состояние объекта. При этом в качестве базовых единиц удобно

взять следующие: $\omega_B = \omega$ - частота вращения свободного конца входного вала, задаваемая источником механической энергии; $M_B = M_{mp0}$ - максимально возможное значение момента трения покоя. Помечая относительные величины символом "*", систему (5) можно переписать в следующем виде:

$$\frac{dM_y^*}{dt} = \frac{C\omega}{M_{mp0}} (1 - \omega_1^*); \quad \frac{d\omega_1^*}{dt} = \frac{M_{mp0}}{J_1\omega} (M_{\partial\Sigma}^* - M_{\partial 2}^*);$$

$$M_{\partial\Sigma}^* = M_y^* - M_{c1}^* - M_{c2}^*; \quad M_{\partial 2}^* = \frac{J_2\omega}{M_{mp0}} \frac{d\omega_2^*}{dt}; \quad (6)$$

$$\frac{d\omega_2^*}{dt} = \begin{cases} \frac{M_{mp0}}{(J_1 + J_2)\omega} M_{\partial\Sigma}^*, & \text{при } \frac{J_2}{J_1 + J_2} M_{\partial\Sigma}^* \leq (M_{mp}^* - M_{c2}^*) \text{ и } \omega_{ck}^* = 0; \\ \frac{M_{mp0}}{J_2\omega} (M_{mp}^* - M_{c2}^*), & \text{при } \frac{J_2}{J_1 + J_2} M_{\partial\Sigma}^* > (M_{mp}^* - M_{c2}^*) \text{ или } \omega_{ck}^* \neq 0. \end{cases}$$

Чтобы обеспечить более компактную запись этой системы, введем новые обозначения:

$$T_y = \frac{M_{mp0}}{C\omega}; \quad T_1 = \frac{J_1\omega}{M_{mp0}}; \quad T_2 = \frac{J_2\omega}{M_{mp0}}; \quad T_{12} = \frac{(J_1 + J_2)\omega}{M_{mp0}}.$$

При этом оказывается, что эти новые переменные являются параметрами системы, несущими вполне определенный физический смысл.

T_y [с] - постоянная времени упругого вала, которая характеризует промежуток времени, за который момент упругой деформации M_y достигает базовой величины M_{mp0} , при $\omega_{ck} = \omega$.

T_1, T_2, T_{12} [с] - постоянные времени ведущей и ведомой полумуфт, а также всей ФМ при отсутствии буксования соответственно. Каждая из них определяет временной интервал, за который соответствующий механический элемент достигает базовой скорости ω под воздействием момента M_{mp0} .

Теперь появляется возможность в математической модели (6) перейти к относительному безразмерному времени τ . Так, если в качестве базового времени принять постоянную времени упругого элемента T_y , система (6) преобразуется к виду:

$$\frac{dM_y^*}{d\tau} = (1 - \omega_1^*); \quad \frac{d\omega_1^*}{d\tau} = \frac{1}{T_1^*} (M_{\partial\Sigma}^* - M_{\partial 2}^*);$$

$$M_{\partial\Sigma}^* = M_y^* - M_{c1}^* - M_{c2}^*; \quad M_{\partial 2}^* = T_2^* \frac{d\omega_2^*}{d\tau}; \quad (7)$$

$$\frac{d\omega_2^*}{d\tau} = \begin{cases} \frac{1}{T_{12}^*} M_{\partial\Sigma}^*, & \text{при } \frac{T_2^*}{T_{12}^*} M_{\partial\Sigma}^* \leq (M_{mp}^* - M_{c2}^*) \text{ и } \omega_{ck}^* = 0; \\ \frac{1}{T_2^*} (M_{mp}^* - M_{c2}^*), & \text{при } \frac{T_2^*}{T_{12}^*} M_{\partial\Sigma}^* > (M_{mp}^* - M_{c2}^*) \text{ или } \omega_{ck}^* \neq 0. \end{cases}$$

Полученная система (7) представляет собой нормированную математическую модель ФМ с упругим входным валом. На ее основе разработана структурная схема, показанная на рис.2. В этой структуре p - оператор дифференцирования $\frac{d}{d\tau}$.

Входными сигналами для разработанной модели являются частота вращения свободного конца входного вала $\omega^* = 1$, моменты сил сопротивления M_{c1}^* и M_{c2}^* . Кроме того, в приведенном упрощенном варианте момент трения между полумуфтами задан в виде независимой величины $M_{mp}^* = 1$. В случае необходимости отразить его зависимость от ω_{ck}^* достаточно между соответствующими точками установить нелинейный преобразователь, воспроизводящий требуемую функцию $M_{mp}^*(\omega_{ck}^*)$.

Как видно из приведенной схемы, момент упругой деформации входного вала M_y^* , являющийся движущим в данной системе, формируется традиционным методом. Далее путем алгебраического суммирования

его с моментами сил сопротивления M_{c1}^* и M_{c2}^* вычисляется суммарный динамический момент $M_{\partial\Sigma}^*$. Полученный сигнал направляется по двум каналам. В первом из них выделяется часть его $\frac{T_2^*}{T_{12}^*} M_{\partial\Sigma}^*$, которая поступает на пропорциональный блок с коэффициентом передачи 1 и управляемым ограничением выходной координаты. Величина ограничения последней непрерывно вычисляется согласно выражению $(M_{mp}^* - M_{c2}^*)$. Таким образом, на выходе этого блока формируется сигнал пропорциональный динамическому моменту $M_{\partial 2}^*$. Далее путем интегрирования вычисляется величина частоты вращения ω_2^* .

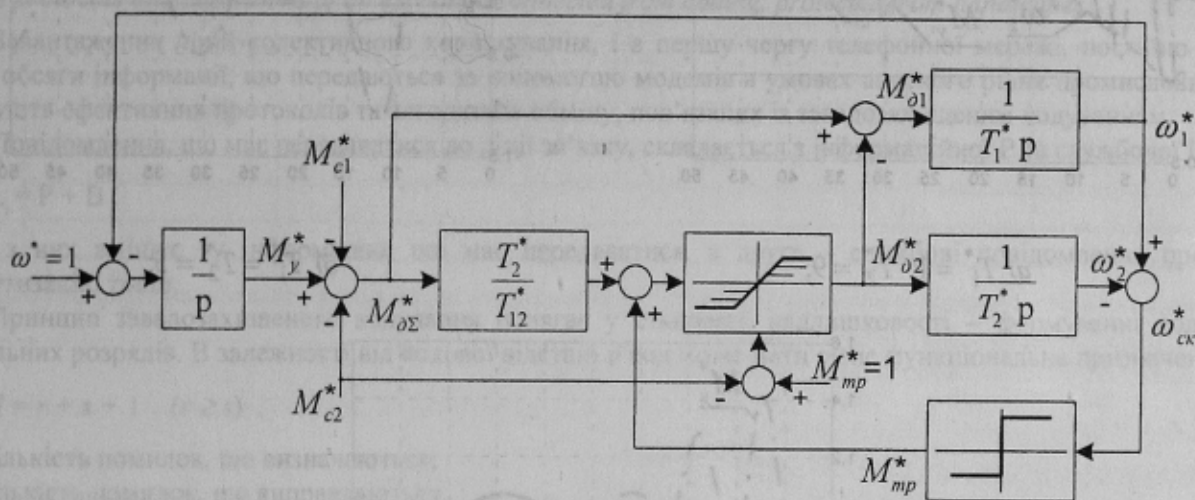


Рисунок 2 – Структурная схема нормированной модели ФМ с упругим входным валом

Во втором канале из сигнала $M_{\partial\Sigma}^*$ вычитается $M_{\partial 2}^*$, что позволяет получить динамический момент $M_{\partial 1}^*$, приложенный к ведущей полумуфте. Последующий интегратор воспроизводит ее частоту вращения ω_1^* , которая используется при вычислениях M_y^* и $\omega_{ск}^*$.

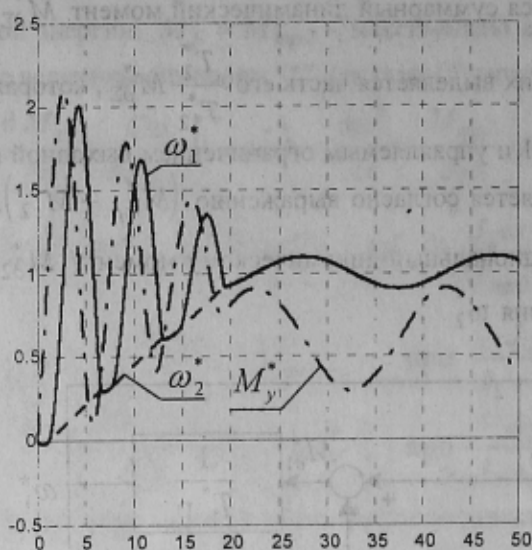
Участок схемы, состоящий из пропорционального звена с регулируемым ограничением и интегратора, охвачен положительной обратной связью по $\omega_{ск}^*$ через релейный элемент с уровнем ограничения M_{mp}^* . Это

сделано для того, чтобы независимо от величины сигнала $\frac{T_2^*}{T_{12}^*} M_{\partial\Sigma}^*$ пропорциональное звено удерживалось на уровне ограничения $(M_{mp}^* - M_{c2}^*)$ до тех пор, пока частота скольжения $\omega_{ск}^*$ не станет равной нулю.

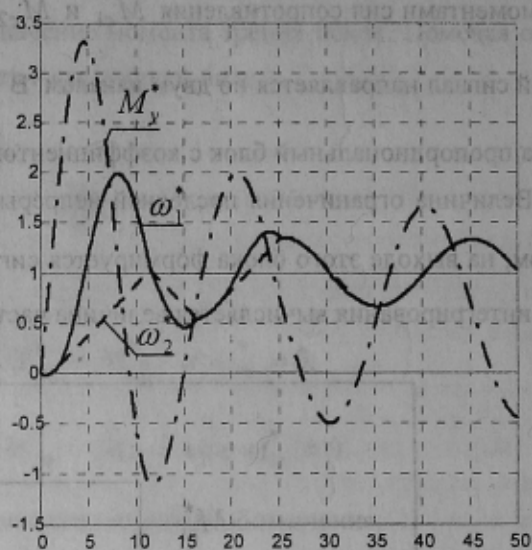
На рисунке 3 показаны результаты моделирования процесса разгона ФМ с $T_{12}^* = 10$ и активными $M_{c1}^* = 0,1$, $M_{c2}^* = 0,5$. На рис.3а) и 3б) изображены графики, соответствующие случаю, когда свободному концу входного вала скачком задается частота вращения $\omega^* = 1$, а на рис.3в) ω^* возрастает от $\omega^* = 0$ до $\omega^* = 1$ за $\tau = 30$.

Из сравнения рис.3а) и 3б) видно, что когда момент инерции ведущей полумуфты существенно меньше момента инерции ведомой ($T_1^* \ll T_2^*$), разгон происходит с пробуксовками. При этом частота скольжения в периоды буксования всегда одного знака $\omega_{ск}^* = \omega_1^* - \omega_2^* \geq 0$. Момент упругий M_y^* носит колебательный характер, но все время сохраняется $M_y^* > 0$. В случае равенства моментов инерции ведущей и ведомой полумуфт ($T_1^* = T_2^*$) существенно возрастает амплитуда колебаний упругого момента, причем он становится знакопеременным. Это приводит к тому, что в периоды буксования частота скольжения также приобретает знакопеременный характер.

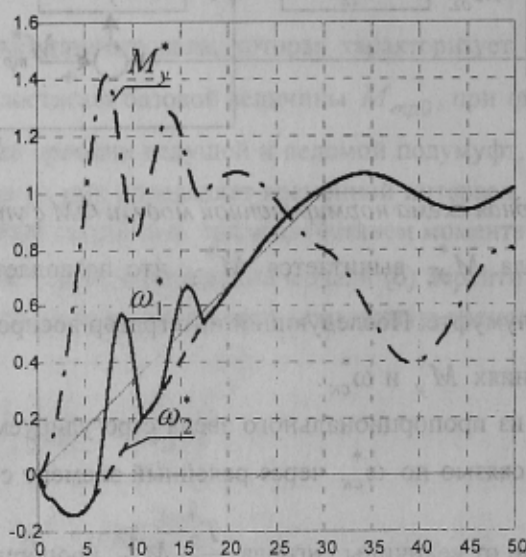
Как и следовало ожидать, при плавном изменении ω^* (рис.3в) колебательность процесса уменьшается, уменьшается и количество пробуксовок с одновременным уменьшением амплитудных значений частоты скольжения.



а) $T_1^* = 1; T_2^* = 9;$



б) $T_1^* = T_2^* = 5;$



а) $T_1^* = 1; T_2^* = 9;$

Рисунок 3 – Переходные процессы при моделировании ФМ

Приведенные графики, полученные с помощью разработанной модели, показывают ее отличную работоспособность и возможность достоверного воспроизведения процессов происходящих в ФМ с упругим входным валом. Это свидетельствует о возможности широкого ее использования при исследовании динамических режимов ЭМС, содержащих подобные кинематические связи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Чикалов В.И., Колчев Е.В., Писковатская О.В. Устройство для моделирования жесткой фрикционной муфты. А.с. СССР № 1817112, кл. G 06 G 7/48, 1990.