

АНАЛИТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ИЗМЕНЕНИЯ СКОРОСТИ ТРАНСПОРТИРУЕМОГО МАТЕРИАЛА В КОЛЕНЕ ТРУБОПРОВОДА

Михаил Чальцев, Леонид Вовк

Аннотация. В работе обосновывается и предлагается математическая модель движения аэродисперсного потока в колене трубопровода. Получено решение этой модели при условиях, приближенных к реальным. Приведено сравнение результатов, полученных экспериментально, по данной модели и для некоторых упрощающих гипотез.

Ключевые слова: пневматический трубопровод, скорость потока, дифференциальные уравнения

Математическая модель движения транспортируемого материала при повороте потока.

Основной целью изучения гравитационных течений сыпучих материалов является математическое описание их закономерностей в зависимости от свойств частиц и условий формирования потока.

Разработке адекватного аналитического описания закономерностей быстрых гравитационных течений препятствует недостаток знаний о механизмах генерирования напряжений, являющихся сложной функцией скорости частиц. Особую проблему для процесса аналитического описания указанных процессов представляет формулировка граничных условий. Кроме того, для высоких скоростей пневмотранспортирования сыпучих сред характерна высокая неоднородность скорости сдвига концентрации твердой фазы. Все это в совокупности усугубляет проблему экспериментального и аналитического исследования процессов пневмотранспортирования.

Дополнительные трудности возникают при математическом моделировании пневматического транспортирования в коленах транспортного трубопровода. Это связано с тем, что при повороте потока на транспортируемый материал перпендикулярно направлению движения действует центробежная сила, которая во много раз больше веса материала [97]. Центробежная сила настолько велика, что вызывает движение частиц по направлению к наружной стенке колена. Силы, вызывающие витание частиц при движении в горизонтальном направлении, во много раз меньше центробежной силы, поэтому подавляющая часть частиц не возвращается от наружной стенки колена в поток транспортирующего газа, а осажается на ней (рис. 1). Небольшая часть очень мелких частиц удерживается под действием диффузии в потоке транспортирующего газа. Вследствие осаждения основной массы частиц на наружной стороне колена уменьшается поверхность касания частиц с потоком транспортирующего газа и падают воздействия сил сопротивления на материал, который практически уже движется по инерции.

Методики расчета колен, используемые в настоящее время при проектировании пневмотранспортных систем, построены на эмпирических зависимостях, используемых для однородных потоков [26, 72, 74, 116, 117]. Естественно, ввиду игнорирования сложной физической природы транспортирования двухкомпонентных потоков, расчеты по этим методикам дают значительные погрешности [93, 99]. Кроме того, в большинстве научных публикаций, посвященных данной тематике [74, 93, 96], принималось предположение о неизменности площади поперечного сечения. Однако последние экспериментальные исследования и наблюдения, выполненные с прозрачным коленом, выявили иную структуру потока частиц в изгибе трубопровода [98, 99].

Согласно этим источникам скорость скольжения осажденных в колене частиц постепенно снижается, а толщина слоя увеличивается к выходу из колена. Этот процесс проиллюстрирован на рис. 1 и 2, позаимствованными из указанных источников.

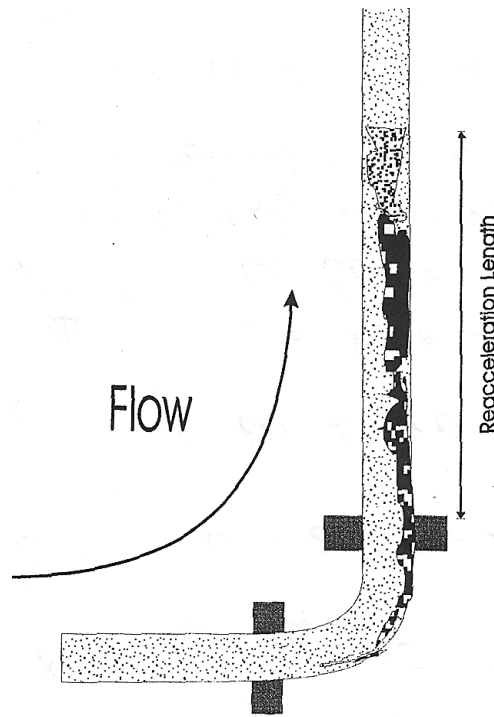


Рис. 1. Фотография аэродисперсного потока в колене [98]

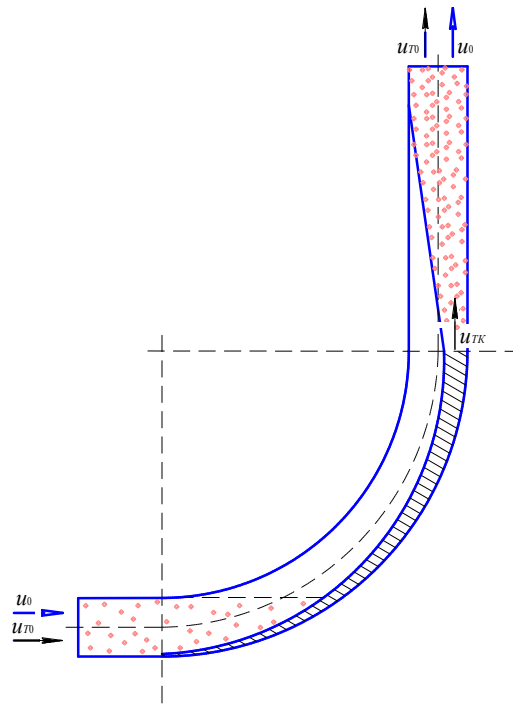


Рис. 2. Схема аэродисперсного потока в колене согласно [99]

Целью работы является построение математической теории утонченного расчета кинематических характеристик транспортируемой массы в колене трубопровода и получение расчетных формул определения скорости аэродисперсного потока на выходе из колена.

Предлагаемая ниже математическая модель движения сыпучего материала при повороте потока основывается на следующих предложениях:

1. Пневмотранспортирование в коленах транспортного трубопровода приводит к изменению скорости твердых частиц.

2. Поворот потока сопровождается изменением его структуры, что выражается в нарушении однородности потока (рис. 1, 2).

3. Весь материал осаждается в начале колена, при движении изменяет свою плотность, что дает основание принять закон изменения его массы вдоль траектории движения по колену в форме

$$m(\varphi) = m_0 + m_1(\varphi), \quad (1)$$

где φ – полярный угол, отсчитываемый от начала поворота транспортируемого материала для прямоугольного колена $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$);

m_0 – масса материала в начале колена;

$m_1(\varphi)$ – функция, определяемая в дальнейшем и учитывающая изменение массы материала вдоль траектории движения.

1. Против движения материала действует сила трения

$$T = f \cdot N \quad (2)$$

где N – реакция связи; f – коэффициент трения материала о стенку колена.

С учетом принятых допущений составлена схема взаимодействия сил, действующих на частицы материала в колене. К ним относятся силы тяжести G , центробежная сила C , реакция связи N и сила трения T (рис.3).

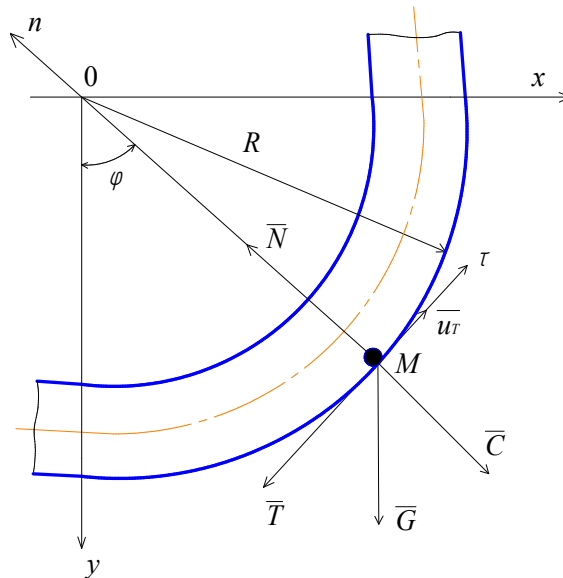


Рис. 3. Расчетная схема колена

Анализ силового взаимодействия в слое осажденных частиц

Спроектируем векторное уравнение движения частиц транспортируемого материала переменной массы на оси Эйлера системы координат Mtn (рис.3). Имеем

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(mu_{\dot{\varphi}}) = -T - G\sin\varphi \\ m \frac{u_{\dot{\varphi}}^2}{R} = N - G\cos\varphi \end{cases} \quad (3)$$

Определяем реакцию N из второго уравнения системы (3) и подставляем в первое. Далее, принимая во внимание связь между углом поворота φ и скоростью u_T , можем свести систему (3) к дифференциальному уравнению относительно функции $u_T(\varphi)$

$$\frac{d}{d\varphi}(mu_T) = -m \left(f \cdot u_T + g \frac{R}{u_T} (f\cos\varphi + \sin\varphi) \right)$$

Для корректного решения этого уравнения нужно конкретизировать зависимость (1) и из физических соображений определить функцию $m_1(\varphi)$.

Предположим, что площадь, занимаемая материалом при движении вдоль колена, занимает область D в продольном сечении колена трубопровода, изображенного на рис. 4.

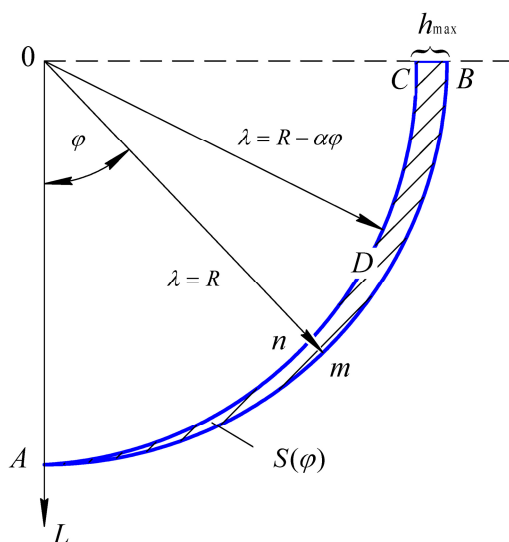


Рис. 4. Схема слоя осажденных в колене частиц

Введем полярную систему координат (ρ', φ) с полюсом O и полярной осью l . В этой системе координат уравнение внешнего обода колена A_mB имеет вид $\rho' = R$, а уравнение внутренней границы области D – кривой A_nC –

$$\rho' = R - a\varphi, \quad (5)$$

где

$$a = \frac{2h_{\max}}{\pi} \quad (6)$$

Находим при помощи двойного интеграла $\int_0^\varphi d\varphi \int_0^{R-a\varphi} \rho' d\rho'$ площадь области A_nDA , определяемую текущим значением угла φ . Тогда искомая площадь $S(\varphi)$ области $A_{mn}A$ будет равна

$$S(\varphi) = \frac{a\varphi^2}{6} (3R - a\varphi) \quad (7)$$

Обозначая через ρ массу слоя транспортируемого материала, соответствующую фиксированному значению $S(\varphi)$, определим изменение его массы при движении вдоль колена – функцию $m_1(\varphi)$ в формуле (1)

$$m_1(\varphi) = \rho S(\varphi) = \frac{1}{6} \rho a \varphi^2 (3R - a\varphi) \quad (8)$$

Для определения параметра a в формуле (8) учтем, что относительный объем C_V материала в колене, как и концентрация потока, определяется как отношение

$$\tilde{N}_V = \frac{V_T(h_{\max})}{V_T} \quad (9)$$

где – объем, занимаемый материалом при движении в колене трубопровода;

V_T – объем всего колена, который представляет собой часть тороидальной оболочки.

Если удастся определить зависимость $V_T(h_{\max})$, то уравнение (9) может рассматриваться как уравнение для определения h_{\max} , а следовательно, и параметра a .

Определение объема материала в колене трубопровода

Рассмотрим четвертую часть тороидальной оболочки и предположим, что материал при транспортировании вдоль колена занимает часть ее объема $ABCNA$ (рис. 5).

Введем декартову систему координат $OXYZ$, в которой уравнение сечения тора в плоскости xOy запишется как

$$x^2 + (y - (R - r))^2 = r^2$$

Тогда уравнение поверхности тора, как поверхности вращения вокруг оси Ox , будет [101]

$$x^2 + \left(\sqrt{z^2 + y^2} - (R - r) \right)^2 = r^2$$

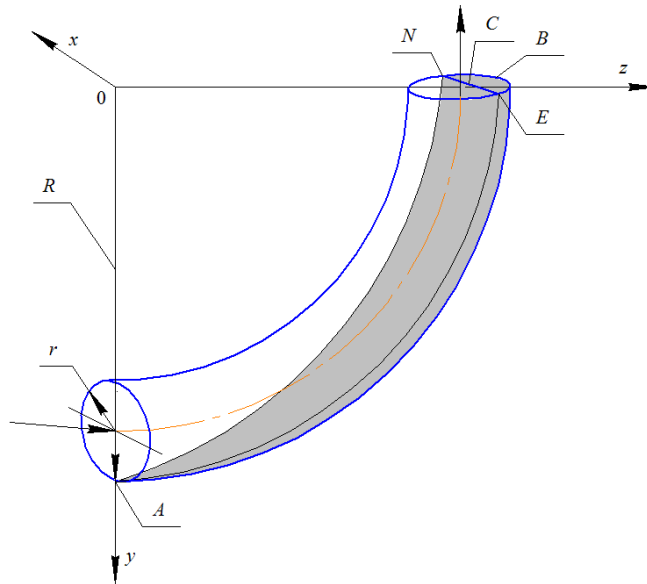


Рис. 5. К определению объема осажденных частиц в колене трубопровода

Обозначим через D продольную проекцию исследуемой поверхности на плоскость yOz (она изображена на рис. 4). Тогда искомый объем будет

$$V_T(h_{\max}) = 2 \cdot \iint_{(D)} dydz \int_0^{\sqrt{r^2 - \left(\sqrt{z^2 + y^2} - (R-r)\right)^2}} dx$$

Переходим в плоскости yOz к полярным координатам (ρ, φ) и используем табличные интегралы [102]. С их помощью находим первообразную функцию во внутреннем интеграле и после некоторых преобразований получим

$$V_T(h_{\max}) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi r^2 (R-r)}{2} + \frac{2}{3} \sqrt{(r^2 - (r-a\varphi)^2)^3} - (R-r)(r-a\varphi) \sqrt{r^2 - (r-a\varphi)^2} - (R-r)r^2 \arcsin\left(\frac{r-a\varphi}{r}\right) \right) d\varphi$$

Первое и третье слагаемые под интегралом в формуле (10) интегрируются элементарно, для интегрирования четвертого слагаемого применяем метод интегрирования по частям, а для второго – тригонометрическую подстановку. Собирая полученные результаты, окончательно получим

$$V_T(h_{\max}) = \frac{(R-r)r^2}{4} \left(\pi^2 + \frac{\sqrt{(4ra\pi - a^2\pi^2)^3}}{6r^2a} \right) + \frac{2}{a} \left(\pi r - \sqrt{4ra\pi - a^2\pi^2} - (2r - a\pi) \arcsin\left(\frac{2r - a\pi}{2r}\right) \right) + \frac{r^4}{24a} \left(3\pi - 6\arcsin\left(\frac{2r - a\pi}{2r}\right) - \frac{2r - a\pi}{r^4} \sqrt{4ra\pi - a^2\pi^2} \cdot \left(3r^2 + 2ra\pi - \frac{1}{2}a^2\pi^2 \right) \right)$$

Таким образом, принимая во внимания это выражение и выражение для четверти объема тора с характеристиками r и R [101]

$$V_T = \frac{1}{2} \pi^2 r^2 (R-r)$$

можно считать трансцендентное уравнение (9) для определения h_{\max} полностью сформированным. Следует отметить, что, как показывают экспериментальные исследования, корни этого уравнения необходимо искать в границах

$$0 < h_{\max} < r$$

Анализ скорости транспортируемого материала в колене трубопровода

Задача этого подраздела – определить скорость частиц материала для любого значения полярного угла φ (рис. 3). Для этого имеем задачу Коши: дифференциальное уравнение (4) с начальным условием

$$u_T \Big|_{\varphi=0} = u_{T0} \quad (11)$$

где u_{T0} – начальная скорость частиц транспортируемого потока на входе в колено.

Подставляем закон изменения массы (1) с учетом зависимости (8) в дифференциальное уравнение (4). После дифференцирования и группировки слагаемых это уравнение можно свести к нелинейному дифференциальному уравнению Бернулли [103] следующего вида

$$\frac{du_T}{d\varphi} + P(\varphi)u_T = \frac{1}{u_T}Q(\varphi), \quad (12)$$

где

$$\begin{aligned} P(\varphi) &= f + \frac{(6R - 3a\varphi)\varphi}{6M_0 + (3R - a\varphi)\varphi^2}; \\ Q(\varphi) &= -gR(f\cos\varphi + \sin\varphi); \\ M_0 &= \frac{m_0}{\rho a}. \end{aligned} \quad (13)$$

Решение уравнения (12) ищем стандартным образом в виде

$$y(\varphi) = u_T^2 = u(\varphi) \cdot e^{-2f\varphi - 2\bar{P}(\varphi)}, \quad (14)$$

где

$$\bar{P}(\varphi) = \int \frac{(6R - 3a\varphi)\varphi}{6M_0 + (3R - a\varphi)\varphi^2} d\varphi \quad (15)$$

Для нахождения первообразной функции в формуле (15) необходимо определить корни знаменателя подинтегральной функции, т.е. решить уравнение

$$\varphi^3 + a_1\varphi^2 + b\varphi + c = 0,$$

где $a_1 = 3R \cdot a^{-1} = -3R_8$; $b=0$; $c = -6M_0 a^{-1}$

Вычисляем дискриминантные выражения [104, 105]

$$\bar{Q} = \frac{a_1^2 - 3b}{9} = \frac{R^2}{a^2}, \quad \bar{R} = \frac{2a_1^3 - 9ab + 27c}{54} = \frac{1}{a^3} \left(R^3 + 3 \frac{m_0}{\rho} a \right)$$

и приходим к неравенству $\bar{R}^2 > \bar{Q}^3$. Следовательно, уравнение (16) имеет один действительный корень и два комплексносопряженных корня, которые вычисляются по формулам Кардано [100]

$$\varphi_1 = A + B - \frac{a_1}{3}; \quad \varphi_{2,3} = \frac{A+B}{2} - \frac{a_1}{3} \pm i\sqrt{3} \frac{A-B}{2},$$

где

$$\begin{aligned} A &= -\text{sign}(\bar{R}) \cdot \sqrt[3]{|\bar{R}| + \sqrt{\bar{R}^2 - \bar{Q}^3}} = \sqrt[3]{\frac{R^3}{a^3} + 3 \frac{m_0}{\rho a^2} + \sqrt{6 \frac{R^3 m_0}{\rho a^5} + 9 \frac{m_0^2}{\rho^2 a^4}}}, \\ B &= \frac{\bar{Q}}{A} = \frac{R^2}{a \cdot \sqrt[3]{R^3 + 3 \frac{m_0}{\rho} a + a \sqrt{6 \frac{R^3 m_0}{\rho a} + 9 \frac{m_0^2}{a^2}}}}. \end{aligned}$$

Раскладываем подинтегральное выражение в (15) на сумму простых дробей и применяем метод неопределённых коэффициентов. После интегрирования получаем функцию $\bar{P}(\varphi)$ в явном виде

$$\bar{P}(\varphi) = -3 \left(D \ln|\varphi - \varphi_1| + \frac{1}{2} E \ln(\varphi^2 + p\varphi + q) + \frac{2F - Ep}{2q - 0,5p^2} \arctg \left(\frac{2\varphi + p}{2q - 0,5p^2} \right) \right) \quad (16)$$

Здесь

$$P = -(A + B + 2R_8); \quad q = \left(\frac{A+B}{2} \right)^2 - 3 \left(\frac{A-B}{2} \right);$$

$$D = \frac{(2R_8 - \varphi_1)\varphi_1}{\varphi_1^2 + p\varphi_1 + q}; \quad E = -\frac{(2R_8 + p)\varphi_1 + q}{\varphi_1^2 + p\varphi_1 + q}; \quad F = \frac{(2R_8 - \varphi_1)q}{\varphi_1^2 + p\varphi_1 + q}.$$

Таким образом, для функции $u(\varphi)$ в (14) имеем уравнение

$$\frac{du}{d\varphi} \cdot e^{-2f\varphi - 2\bar{P}(\varphi)} = -2gR(f \cos \varphi + \sin \varphi),$$

решение которого элементарно. После определения постоянной интегрирования из начального условия (11) получим искомую зависимость скорости от угла φ в следующем виде

$$u_T(\varphi) = \sqrt{u_{T0}^2 \cdot e^{2(P(0) - f\varphi - \bar{P}(\varphi))} - 2gR \cdot e^{-2(f\varphi + 2\bar{P}(\varphi))} \cdot \Psi(\varphi)}, \quad (17)$$

где

$$\Psi(\varphi) = \int_0^\varphi (f \cos \varphi + \sin \varphi) e^{2f\varphi - 3 \left[D \ln|\varphi - \varphi_1| + 0,5 E \ln(\varphi^2 + p\varphi) + \frac{2F - Ep}{2q - 0,5p^2} \operatorname{arctg} \frac{2\varphi + p}{2q - 0,5p^2} \right]} d\varphi$$

Если получить в (17), (18) $m_0 = m$; $m_1(\varphi) = 0$, то выражение (17) примет вид

$$u_T(\varphi) = \sqrt{u_{T0}^2 e^{-2f\varphi} - \frac{2gR}{4f^2 + 1} \left((1 - 2f^2) e^{-2f\varphi} - (1 - 2f^2) \cos \varphi + 3f \sin \varphi \right)}, \quad (19)$$

что идентично формуле, полученной в [96] для условия постоянства массы материала в колене, расположенном в вертикальной плоскости типа «горизонталь-вертикаль».

Сравнение результатов расчёта потерь давления в изгибе трубопровода по различным методикам

По обеим приведенным методикам были проведены сравнительные расчёты потерь давления в колене трубопровода с поворотом трубы на угол $\varphi = 90^\circ$, радиусом изгиба колена $R = 0,3$ м, диаметром трубы $d = 0,05$ м, расположенном в вертикальной плоскости, при расходе материала 0,8; 1,7 и 3,3 кг/с. Скорость сыпучего материала u_{TK} на выходе из колена для случая равномерного распределения осажденных частиц определялась по формулам (17) и (18).

По результатам расчётов построены графики, представленные на рис. 6. Здесь сплошной линией обозначены экспериментальные графики, полученные на экспериментальном стенде АДИ ГВУЗ «ДонНТУ». Пунктиром и штрих-пунктиром изображены расчётные кривые для случаев постоянства массы слоя осажденных частиц и переменной массы, соответственно.

Согласно графикам, точность расчётов по методике, предусматривающей изменение массы слоя частиц вдоль колена, заметно повышает точность расчётов по упрощенному варианту. Следует отметить, однако, что в связи со сложностью формул (17) и (18), практическое использование их в инженерных расчётах может быть обеспечено лишь после разработки соответствующего программного обеспечения.

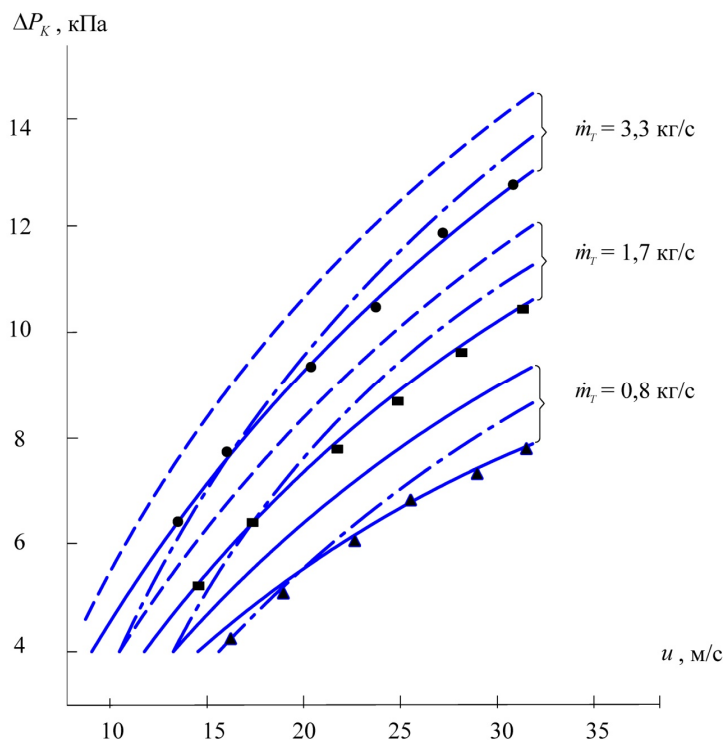





Рис. 6. Графики зависимости потерь давления в колене трубопровода

-  - экспериментальные;
-  - расчетные для случая равномерного распределения осажденных в колене частиц;
-  - расчетные для случая неравномерного распределения осажденных в колене частиц

Выводы по работе

2. Показано, что в изгибе пневмотранспортного трубопровода твердые частицы под действием центробежных сил осаждаются на стенку колена, образуя слой транспортируемого материала, толщина которого не постоянна, а изменяется вдоль колена по закону, зависящему от размера частиц, плотности несущей и транспортируемой среды, радиуса изгиба колена.

3. Разработана новая аналитическая модель колена, учитывающая переменную высоту слоя осажденных частиц; составлено нелинейное дифференциальное уравнение движения слоя; получен закон изменения скорости движения слоя частиц и изменения его удельной массы вдоль колена.

4. Разработана методика расчёта потерь давления в изгибе трубопровода, соответствующая принятой аналитической модели. Сравнение расчётных и экспериментальных данных показывает, что их расхождение не превышает 15 %.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Чальцев М.Н. Модель пневмотранспортного потока в изгибе трубопровода / М.Н. Чальцев // Промислова гідравліка та пневматика. – Вінниця: ВДАУ, 2005. – № 2(8). – С. 104-108.
2. Малевич И.П. Транспортировка и складирование порошкообразных строительных материалов / И.П. Малевич, В.С. Серяков, А.В. Мишин. – М.: Химия, 1972. – 240 с.
3. Ульяницкий А.В. Обоснование минимальных затрат энергии при горизонтальном пневмотранспортировании сыпучих материалов: дис. ... кандидата техн. наук / А.В. Ульяницкий. – Одесса, 1993. – 182 с.
4. Успенский В.А. Пневматический транспорт / В.А. Успенский. – Свердловск: Metallurgizdat, 1959. – 150с.
5. Bradley M. Pressure losses caused by bends in pneumatic conveying pipelines / M. Bradley // Powder handling and processing. – 1990. – V2. – № 4. – р. 315-321.
6. Чальцев М.Н. Запирающее свойство трубопроводного колена и опыт его практического использования / М.Н. Чальцев // Вестник национального технического университета Украины «Киевский политехнический институт». Машиностроение. – 2002. – Т.1, Вып. 42. – С. 90-93.
7. Зуев Ф.Г. Пневматическое транспортирование на зерноперерабатывающих предприятиях / Ф.Г. Зуев. – М.: Колос, 1976. – 344 с.
8. Solt P.E. Bend location and pressure drop: An in-depth study / P.E. Solt //
9. Powder and bulk engineering. – 2006. – №11. – Р. 3-6.
10. Чальцев М.Н. Модель пневмотранспортного потока в изгибе трубопровода / М.Н. Чальцев // Промислова гідравліка та пневматика. – Вінниця: ВДАУ, 2005. – № 2(8). – С. 104-108.
11. Klinzing G.E. Solids flow behavior in bends: assessing fine solids buildup / G.E. Klinzing // Powder technology. – 2000. №113, P. 124-131.
12. Александров П.С. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры / П.С. Александров. – М.: Наука, 1979. – 512 с.
13. Градштейн И.С. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений / И.С. Градштейн, И.М. Рыжик. – М.: Физматгиз, 1963 – 1100 с.
14. Егоров А.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения с приложениями / А.И. Егоров. – М.: Физматлит, 2005. – 384 с.
15. Энциклопедия элементарной математики. Книга вторая. Алгебра / Под ред. Александрова П.С., Маркушевича А.И., Хинчина А.Я. – М. – Л.: Гос. изд-во технико-теоретической литературы. – 1961. – 424 с.
16. Курош А.Г. Алгебраические уравнения произвольной степени / А.Г. Курош. – М.: Наука, 1975. – 33 с.
17. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления / Г.М. Фихтенгольц. – М.: Физматлит, 2001. – Т.3. – 622 с.