УДК 532.5

Чальцев М. Н., канд. тех. наук, проф.

Автомобильно-дорожный институт ДонНТУ

О МОДЕЛИРОВАНИИ ПНЕВМОТРАНСПОРТНЫХ ПОТОКОВ МЕТОДАМИ ТЕОРИИ ПОДОБИЯ

При моделировании сложных технологических процессов могут быть использованы методы теории подобия. Преимущества этих методов показаны на примере уравнения движения однородного пневмотранспортного потока.

At modeling complex technological processes methods of the theory of similarity can be used. Advantages of these methods are shown by the example of the equation of a homogeneous pneumotransport flow movement.

При моделировании сложных технологических процессов большое значение приобретает вопрос о существенных для исследуемого процесса числе переменных. При большом числе переменных найти скрытые между ними связи, построить определяющую систему уравнений и решить эту систему иногда не представляется возможным.

Известно, что влияние представленных различными величинами отдельных факторов проявляется не порознь, а совместно. По сути дела следует рассматривать не эти отдельные величины, а определенные для каждого данного процесса их совокупности. В теории подобия разработан метод построения таких совокупностей, позволяющий на основании анализа постановки задачи найти связь между отдельными группами величин и соединить их в безразмерные комплексы строго определенного вида. Являясь устойчивыми комбинациями из существенных для изучаемых процессов величин, комплексы получают значение особого рода переменных, характерных для этих процессов.

Переход от обычных физических величин к величинам комплексного типа создает важные преимущества. Достигается уменьшение числа переменных. При исследовании задачи в этих величинах, отражающих влияние отдельных факторов в совокупности, более отчетливо выступают характеризующие процесс внутренние связи. Новые переменные обладают еще одной важной особенностью: исследуется не единичный частный случай, а множество различных случаев, объединенных некоторой общностью свойств. Новые переменные по существу являются обобщенными. Их применение придает всему анализу обобщенный характер и создает возможности существенного усиления результатов исследования.

Показанные преимущества комплексных переменных создают благоприятные перспективы и в деле решения задач, связанных с анализом сложных пневмотранспортных процессов. Во-первых, в случаях, когда удается описать процесс системой дифференциальных уравнений, но эта система остается незамкнутой, замена входящих в систему простых переменных на комплексные позволяет уменьшить число параметров и этим облегчает решение проблемы. Во-вторых, если построить математическую модель процесса не представляется возможным, то при наличии перечня существенных переменных величин с помощью процедуры анализа размерностей возможно создание так называемых определительных уравнений процесса с комплексными переменными. И, наконец, теория подобия позволяет обобщить и распространить применение эмпирических зависимостей на более широкую группу процессов и условий, подобных тем, при которых выполнен эксперимент.

В качестве примера составим определительное уравнение потерь давления при пневмотранспортировании тонкодисперсного материала по горизонтальному трубопроводу в условиях постоянства температуры (изотермический процесс).

Возникающие при равномерном движении пыли потери давления, как показывают исследования, зависят от следующих факторов: массовый расход материала M_M^*, скорость движения воздуха V_B, плотность частиц материала ρ_M, плотность воздуха ρ_B, кинематическая вязкость воздуха ν, эквивалентный диаметр частиц $d_Э$, диаметр трубопровода D, длина участка трубопровода L, скорость витания частиц материала $V_{Вит}$, ускорение свободного падения g. В этом случае неявная зависимость между переменными будет выражена уравнением:

$$\Delta P = f\left(M_M^*, V_B, \rho_M, \rho_B, v, d_Э, D, L, V_{Bum}, g\right). \qquad (1)$$

Согласно π-теореме Бекингема всякое уравнение, связывающее между собой n физических величин (например, скорости, вязкости, плотности и т. п.), среди которых m величин обладают независимыми размерностями (например масса, длина, время), может быть преобразовано к уравнению, связывающему $(n-m)$ безразмерных комплексов (критериев) и симплексов, составленных из этих величин.

π-теорема позволяет находить связь не между отдельными физическими переменными, а между их безразмерными соотношениями (π), составленными по определенным законам. При этом число переменных уменьшается на число использованных основных единиц измерения.

Доказано также, что выразить явную функциональную связь между величинами, входящими в уравнение (1), можно только в форме произведения степеней входящих в него переменных [1, 2]:

$$\Delta P = M_M^{*a_1} \cdot V_B^{a_2} \cdot \rho_M^{a_3} \cdot \rho_B^{a_4} \cdot v^{a_5} \cdot d_Э^{a_6} \cdot D^{a_7} \cdot L^{a_8} \cdot V_{Bum}^{a_9} \cdot g^{a_{10}}. \qquad (2)$$

Функция (2) методами анализа размерностей может быть преобразована в зависимость безразмерных переменных вида:

$$\pi = C \cdot \Delta P^a \cdot M_M^{*b} \cdot V_B^c \cdot \rho_M^d \cdot \rho_B^e \cdot v^f \cdot d_Э^i \cdot D^k \cdot L^m \cdot V_{Bum}^n \cdot g^q, \qquad (3)$$

где C – безразмерная константа;

$a, b, c, d, f, i, k, m, n, q$ – показатели степени.

Размерность всех входящих в зависимость (3) величин можно выразить с помощью трех основных переменных M, L и T (масса, длина, время). Температуру мы в расчет не принимаем, т.к. процесс является изотермическим.

Рассмотрим размерности переменных

$$[\Delta P] = \left[\frac{\text{кг}}{\text{с}^2\text{м}}\right]; \quad [\nu] = \left[\frac{\text{м}^2}{\text{с}}\right]; \quad [g] = \left[\frac{\text{м}^2}{\text{с}}\right]; \quad [\rho_M] = \left[\frac{\text{кг}}{\text{м}^3}\right];$$

$$[M_M^*] = \left[\frac{\text{кг}}{\text{с}}\right]; \quad [d_Э] = [\text{м}]; \quad [V_{Bum}] = [\text{м}]; \quad [L] = [\text{м}];$$

$$[V_B] = \left[\frac{\text{м}}{\text{с}}\right]; \quad [D] = [\text{м}]; \quad [\rho_B] = \left[\frac{\text{кг}}{\text{м}^3}\right].$$

Показатели степеней у размерностей переменных, входящих в зависимость (3), объединяются в матрицу размерностей:

	$[\Delta P]$	$[M_M^*]$	$[V_B]$	$[\rho_M]$	$[\rho_B]$	$[\nu]$	$[d_Э]$	$[D]$	$[L]$	$[V_{Bum}]$	$[g]$
$[M]$	1	1	–	1	1	–	–	–	–	–	–
$[L]$	–1	–	1	–3	–3	2	1	1	1	1	1
$[t]$	–2	–1	–1	–	–	–1	–	–	–	–1	–2
r	a	b	c	d	e	f	i	k	m	n	q

Примечание: r – показатель степени.

По элементам матрицы можно рассчитать показатель степени r, составив однородную линейную систему уравнений:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{для } [M] & a+b+d+e=0 \\ \text{для } [\mathrm{L}] & -a+c-3d-3e+2f+i+k+m+n+q=0 \\ \text{для } [t] & -2a-b-c-f-n-2q=0 \end{array}\right\} \qquad (4)$$

Согласно π-теореме число ожидаемых безразмерных комплексов равно разности между числом колонок матрицы размерностей и числом строк, то есть 11–3=8.

Поэтому, для нахождения вида каждого безразмерного комплекса в данном случае могут быть произвольно выбраны значения восьми показателей степени. Эти значения выбираются по целесообразности.

Например, для выявления первого безразмерного комплекса следует принять a=1, так как $[\Delta P]$является искомой величиной. Примем также $b=d=f=i=m=n=q=0$. Тогда решение системы (4) дает $c=-2, e=-1$ и $k=0$.

Аналогично рассчитываются и остальные 7 комплексов.

В результате получаем матрицу решения:

	$[\Delta P]$	$[M_M^*]$	$[V_B]$	$[\rho_M]$	$[\rho_B]$	$[\nu]$	$[d_Э]$	$[D]$	$[L]$	$[V_{Bum}]$	$[g]$
π_1	1	0	–2	0	–1	0	0	0	0	0	0
π_2	0	1	–1	–1	–1	0	0	–2	0	0	0
π_3	0	0	1	0	0	–1	0	1	0	0	0
π_4	0	0	0	1	–1	0	0	0	0	0	0
π_5	0	0	0	0	0	0	1	–1	0	0	0
π_6	0	–1/2	1/2	1/2	0	0	0	0	1	0	0
π_7	0	–1	0	1	0	0	0	2	0	1	0
π_8	0	0	–2	0	0	0	0	1	0	0	1

По каждой строке матрицы решения получаем восемь безразмерных комплексов, в том числе:

$\pi_1 = \dfrac{\Delta P}{\rho_B V_B^2}$ – критерий Эйлера;

$\pi_2 = \dfrac{M_M^*}{\rho_B V_B D^2} = 0,785\mu$ – концентрация потока;

$\pi_3 = \dfrac{V_B D^2}{\nu}$ – критерий Рейнольдса;

$\pi_4 = \dfrac{\rho_M}{\rho_B} = \rho$ – относительная плотность частиц материала;

$\pi_5 = \dfrac{d_Э}{D} = d$ – относительная крупность частиц материала;

$\pi_6 = L \cdot \sqrt{\dfrac{V_M \rho_M}{M_M^*}} = \dfrac{L}{D} = l$ – относительная длина трубопровода;

$\pi_7 = \dfrac{V_{Bum} D^2 \rho_B}{M_M^*} = \dfrac{V_{Bum}}{V_M} = v$ – относительная скорость витания;

$\pi_8 = \dfrac{gD}{V_B^2}$ – критерий Фруда.

Таким образом, зависимость (1) в критериальной форме можно представить в виде

$$E_u = f\left(\mu, \mathrm{Re}, \rho, d, l, v, Fr\right). \quad (5)$$

Согласно теории групп зависимость (5) может быть преобразована следующим образом:

$$E_u = C \cdot \mathrm{Re}^{b_1} \cdot Fr^{b_2} \cdot \mu^{b_3} \cdot \rho^{b_4} \cdot d^{b_5} \cdot l^{b_6} \cdot v^{b_7}. \quad (6)$$

Численные значения константы C и показателей степени b_i невозможно определить методами теории подобия – их определяют экспериментально.

При решении конкретных задач, таких как проектирование ПТС, когда некоторые параметры, например ρ, d и l, входящие в уравнение (6), могут быть определены иными методами, количество независимых переменных может быть сокращено до четырех. В этом случае исследование пневмотранспортных потоков существенно упрощается.

Уравнение (6) может быть использовано для анализа процессов пневмотранспортирования в широком диапазоне изменения существенных параметров.

Список источников

1. Седов Л. И. Методы подобия и размерностей в механике / Л. И. Седов. – М.: Наука, 1965. – 320 с.
Sedov L. I. Metody podobiya i razmernostey v mekhanike (Similarity and Dimensional Methods in Mechanics) / L. I. Sedov. – M.: Nauka, 1965. – 320 s.

2. Гухман А. А. Введение в теорию подобия / А. А. Гухман. – М.: Высшая школа, 1973. – 296 с.
Gukhman A. A. Vvedeniye v teoriyu podobiya (Introduction to the Theory of Similarity) / A. A. Gukhman. – M.: Vysshayashkola, 1973. – 296 s.