

УДК 517.988

Член-корреспондент НАН Украины **А.И. Шевченко, А.С. Миненко, А.С. Гололобова**

Моделирование сложных теплофизических систем с применением нечёткой логики

Исследуется один класс задач типа Стефана, имеющий место в теплофизике. Построено приближенное решение этой задачи. Управление процессом кристаллизации осуществляется с использованием нечёткой логики

Член-корреспондент НАН України **А.І. Шевченко, О.С. Міненко, А.С. Гололобова**

Модельовання складних теплофізичних систем із застосуванням нечіткої логіки

Досліджується один клас задач типу Стефана, який має місце в теплофізиці. Побудовано наближений розв'язок цієї задачі. Управління цим процесом кристалізації здійснюється з використанням нечіткої логіки

Corresponding Member of NAS of Ukraine **A.I. Shevchenko, A.S. Minenko, A.S. Gololobova**

Modeling of the complex heat-physics system with using fuzzy logic

The Stephan problem is investigated. The approximate solution is instructed. The control this process with using fuzzy logic is realized

1. **Двумерная модель кристаллизации с конвекцией.** Процессы кристаллизации, которые встречаются в природе сопровождаются конвективным перемешиванием в жидкой фазе. В статье рассматривается постановка задачи, в которой конвекция вызвана наличием заданного вихря интенсивности μ . Исследование состоит в приближенном анализе свободной границы от интенсивности μ . Рассмотрим стационарный случай в полуполосе $D = \{ -1 < x < 1, H < y < 0 \}$. Обозначим через γ кривую, отделяющую жидкую фазу D_γ^+ от твердой D_γ^- , при этом концы γ лежат на вертикалях $x = \pm 1$. Обе области D_γ^+ и D_γ^- предполагаются односвязными и симметричными относительно оси y . Пусть $\psi(x, y)$ – функция тока, которая удовлетворяет условиям: $\Delta\psi = \mu, (x, y) \in D_\gamma^+, \mu = const > 0, \psi = 0, (x, y) \in \partial D_\gamma^+$. Тут μ считается достаточно малым численным параметром. Требуется определить кроме функции тока $\psi(x, y)$, тройку $(u^\pm(x, y), \gamma)$ по следующим условиям:

$$\begin{aligned} \lambda \Delta u^+ - \psi_y u_x^+ + \psi_x u_y^+ &= 0, (x, y) \in D_\gamma^+, \lambda = const, \\ u^+(x, 0) &= \vartheta, -1 \leq x \leq 1, \vartheta = const > 1, \\ u_x^\pm \pm \omega_0^\pm u^\pm &= 0, x = \pm 1, (x, y) \in \Gamma_\gamma^+ \cup \Gamma_\gamma^-, \\ \Delta \bar{u} &= 0, (x, y) \in D_\gamma^-, \bar{u}(x, H) = 0, -1 \leq x \leq 1, \\ \bar{u}(x, y) = u^+(x, y) = 1, \quad |\nabla u^-|^2 - k^2 |\nabla u^+|^2 &= 0, (x, y) \in \gamma, \end{aligned} \tag{1}$$

где $\Gamma_\gamma^+ = \partial D_\gamma^+ \cap \{x = \pm 1\}$, $\Gamma_\gamma^- = \partial D_\gamma^- \cap \{x = \pm 1\}$, ω_0^\pm – числа Нусельта.

Предложен метод изучения нелинейной задачи (1), состоящий в разложении решения в ряд по степеням малого параметра μ :

$$\begin{aligned} \psi(x, y; \mu) &= \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k \psi_k(x, y), \quad u^\pm(x, y; \mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k u_k^\pm(x, y), \\ y(x; \mu) &= \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k y_k(x), \quad \gamma: y = y(x; \mu), \quad -1 \leq x \leq 1. \end{aligned}$$

Изучим теперь нулевые и первые приближения задачи (1).

2. **Приближенное решение задачи (1).** Нулевое приближение $(u_o^\pm(x, y), \gamma_o)$ задачи (1) ищем из условия минимума функционала: $Y(u^+, u^-, \gamma_o) = \iint_{D_{\gamma_o}^-} [u_x^{-2} + u_y^{-2}] dx dy + k^2 \iint_{D_{\gamma_o}^+} [u_x^{+2} + u_y^{+2}] dx dy + k^2 \omega_0^+ \int_{\Gamma_{\gamma_o}^+} [u^{+2} - 1] dy + \omega_0^- \int_{\Gamma_{\gamma_o}^-} [u^{-2} - 1] dy$ на соответствующем множестве допустимых функций в классе $u_y^+ > 0$ в $D_{\gamma_o}^\pm$. Этот функционал может быть представлен следующим образом:

$$\begin{aligned} I(y_1, y_2) &= \iint_{\Delta_1} \frac{1+y_{1x}^2}{y_{1u}} dx du + k^2 \iint_{\Delta_2} \frac{1+y_{2x}^2}{y_{2u}} dx du + \omega_0^+ k^2 \int_1^\vartheta (u^2 - 1) [y_{2u}(1, u) + y_{2u}(-1, u)] du + \\ &+ \omega_0^- \int_0^1 (u^2 - 1) [y_{1u}(1, u) + y_{1u}(-1, u)] du, \end{aligned}$$

где $\Delta_1 = (-1 < x < 1, 0 < u < 1)$, $\Delta_2 = (-1 < x < 1, 1 < u < \vartheta)$, $y_1(x, u)$ и $y_2(x, u)$ – решения уравнений $u_1(x, y) - u_1 = 0$, $u_2(x, y) - u_2 = 0$. Функционал $I(y_1, y_2)$ минимизируется методом Ритца [1].

Далее, пусть $u(x, y) = u_1^+(x, y)$ при $(x, y) \in \overline{D}_{\gamma_0}^+$, и $u(x, y) = u_1^-(x, y)$, если $(x, y) \in \overline{D}_{\gamma_0}^-$, где $u(x, y)$ – решение следующей задачи: $\Delta u = f(x, y)$, $(x, y) \in D$, $u(x, 0) = 0, u(x, H) = 0$, $u_x(0, y) = 0$, $H \leq y \leq 0$, $u_x + \omega_0^\pm u = 0$, $x = 1$, $(x, y) \in \partial D_\gamma^\pm \setminus \gamma$. Справедливо утверждение.

Теорема 1. Пусть μ – достаточно малая величина. Тогда справедливо следующее представление:

$$y(x; \mu) = y_0(x) - \mu \frac{u_1^\pm(x, y)}{u_{0y}^\pm(x, y)} + o(\mu), \quad (x, y) \in \gamma_0,$$

где $y_0(x)$ – решение уравнения $u_0(x, y) - 1 = 0$ в классе функций $u_{0y} > 0$ в D .

3. Пространственная модель кристаллизации. Пусть Ω – заданная область в R^3 , представляющая собой цилиндр $\Omega = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1^2 + x_2^2 < R^2\}$, и пусть Q – боковая поверхность Ω . Обозначим через Γ – достаточно гладкую поверхность (поверхность кристаллизации, отделяющую жидкую часть металла D_γ^+ от твердой D_γ^-). Поверхность Γ разбивает боковую поверхность Q на два куска Γ^+ и Γ^- , т.е. $Q = \Gamma^+ \cup \Gamma^-$. Задача Стефана при наличии конвективных движений в жидкой фазе, состоит в нахождении поля скоростей в жидкой фазе $\vec{V}(x) = (V_1(x), V_2(x), V_3(x))$, давления $p(x)$, распределения температур $u^\pm(x)$ и свободной поверхности по следующим условиям:

$$\lambda(\vec{V} \cdot \vec{\nabla})u^+(x) = k \nabla^2 u^+(x), \quad x \in \Omega_\gamma^+,$$

$$\nabla^2 \bar{u}(x) = 0, \quad x \in \Omega_\gamma^-$$

$$(\vec{V} \cdot \vec{\nabla})\vec{V}(x) + \nabla p(x) = \frac{1}{Re} \nabla^2 \vec{V}(x) + \vec{f}(u^+),$$

$$\operatorname{div} \vec{V}(x) = 0, \quad x \in \Omega^+, \quad \vec{V}|_{\partial \Omega^+} = 0, \quad \frac{\partial u^+}{\partial n}|_{x \in H} = h(x), \quad \left[\frac{\partial}{\partial n} u^\pm + \omega_0^\pm u^\pm \right] = 0, \quad u^+ = u^- = 1, \quad \frac{\partial u^-}{\partial u} - k \frac{\partial u^+}{\partial u} = 0,$$

$x \in \Gamma$, где $x = (x_1, x_2, x_3)$, Ω^\pm – области соответственно жидкой и твердой фаз. H – верхнее основание цилиндра Ω .

В задаче (2) параметры k , λ , Re допускаются постоянными величинами, $\nabla = (\partial/\partial x_1, \partial/\partial x_2, \partial/\partial x_3)$, функция $\vec{f}(u^+)$ принадлежит классу $C^2(R^1)$, $\vec{f}'(u)$ – ограничена в R^1 . При малых числах Рейнольдса Re задача (2) имеет решение, при этом $u^\pm \in C^{3+\alpha}(\overline{\Omega}^\pm)$, $\vec{V}(x) \in C^{1+\alpha}(\overline{\Omega}^+)$, а Γ принадлежит классу $C^{3+\alpha}$ [2].

4. Приближенное решение задачи (2)

Пусть $u_0^\pm(x)$ – решение стационарной задачи (2) без конвекции в области Ω_0^\pm с теми же условиями из (2) при $Re = 0$, а Γ_0 – свободная поверхность. Для точек поверхности Γ_0 введем криво-

линейные координаты $\omega = (\omega_1, \omega_2)$. Свободную поверхность Γ будем искать в следующем виде $\Gamma = \{x = x(\omega) + \vec{n}(\omega)\rho(\omega), x(\omega) \in \Gamma_0\}$ с некоторой функцией $\rho(\omega)$ класса $C^{3+\alpha}(\Gamma_0)$. Допустим, что неизвестные величины нашей задачи можно искать в следующем виде: $u^\pm(x; Re) = \sum_{k=0}^{\infty} (Re)^k u_k^\pm(x)$, $V_i(x; Re) = \sum_{k=0}^{\infty} (Re)^k V_{ik}(x)$, $p(x; Re) = \sum_{k=0}^{\infty} (Re)^k p_k(x)$, $p(\omega; Re) = \sum_{k=1}^{\infty} (Re)^k p_k(\omega)$, $i = 1, 2, 3$. Справедливо утверждение.

Теорема 2. Пусть $u_1^\pm(x)$ и $u_2^\pm(x)$ – решения следующих задач:

$$(\vec{V}_2 \nabla) \vec{V}_1 + \nabla p_1 = \nabla^2 \vec{V}_2 + \vec{f}'(u_0^+) u_1^+, \operatorname{div} \vec{V}_2 = 0, x \in \Omega_0^+, \vec{V}_2 \Big|_{\partial \Omega_0^+} = 0,$$

$$\lambda(\vec{V}_1 \nabla) u_1^+ + \lambda(\vec{V}_2 \nabla) u_0^+ = \nabla^2 u_2^+, x \in \Omega_0^+; \nabla^2 u_2^- = 0,$$

$$x \in \Omega_0^-; \left(\frac{\partial u_2^\pm}{\partial n} + \omega_0^\pm u_2^\pm \right) \Big|_{x \in \Gamma^+ \cup \Gamma^-} = 0, \frac{\partial u_2^\pm}{\partial n} = 0, x \in H;$$

$$\nabla^2 u_1(x) = F_1(x), x \in \Omega; \frac{\partial u_1}{\partial n} \Big|_H = 0, \left(\frac{\partial u_1}{\partial n} + \omega_0^\pm u_1 \right) \Big|_{x \in \Gamma} = 0,$$

где $F_1(x) = \lambda(\vec{V}_1 \nabla) u_0^+$ при $x \in \bar{\Omega}_0^+$ и $F_1(x) = 0$ при $x \in \bar{\Omega}_0^-$. Тогда при малых числах Re , справедлива формула:

$$\Gamma : x = x(\omega) - \vec{n}(\omega) Re \frac{u_1^\pm(x(\omega))}{|\nabla u_0^\pm(x(\omega))|} - \vec{n}(\omega) (Re)^2 \frac{u_2^\pm(x(\omega)) - f_1(x(\omega))}{|\nabla u_0^\pm(x(\omega))|}, x(\omega) \in \Gamma_0.$$

5. Управление процессом кристаллизации с применением нечеткой логики. Рассмотрим процесс кристаллизации металла, который имеет место в спецметаллургии [3]. Пусть u^* – температура, при которой происходит отделение слитка от стенок кристаллизатора. Эта температура будет достигаться при воздействии потоков мощности w^1, w^2, w^3 , причем поток w^3 равномерно распределен в центре слитка. Далее рассматриваются все факторы X_1, X_2, \dots, X_n , которые влияют на процесс кристаллизации, а также условия Y_1, Y_2, \dots, Y_n , при которых происходит появление нового слитка. Затем строится нечеткое управление с помощью метода Мамдани, который позволяет осуществить процесс управления в задаче кристаллизации. Числовые параметры, участвующие в построении управления задачи выбираются из [3].

Литература

1. Миненко А.С. Исследование одной конвективной задачи Стефана методом Рунге // Укр. мат. журнал. – 2007. – **59**, №11. – С. 1546 – 1556.
2. Миненко А.С. Вариационные задачи со свободной границей. – Киев: Наукова думка, 2005. – 354 с.
3. Патон Б.Е. Избранные труды. – Киев: Институт электросварки им. Е.О. Патона НАН Украины, 2008. – 893 с.

ДонНТУ, Институт информатики и искусственного интеллекта,

83050, г. Донецк, пр.Б.Хмельницкого, 84

Тел. (062) 304-92-58

Факс (062) 337-78-66

e-mail: minenko@iai.donetsk.ua

Поступила в редакцию