

Министерство образования и науки, молодежи и спорта Украины
Государственный университет информатики и искусственного интеллекта

А.С.Миненко, А.И.Шевченко

Методы исследования нелинейных математических моделей

Киев
Наукова думка
2011

УДК 517.988

Миненко А.С., Шевченко А.И.

Методы исследования нелинейных математических моделей. – Киев:

Наук. думка. 2011., - __ с.

Монография посвящена разработке методов исследования нелинейных математических моделей. При этом дается теоретическое обоснование целому ряду задач:

- 1) исследуется корректность соответствующих математических моделей и их численная реализация;
- 2) разрабатываются методы решения соответствующих дискретных задач, доказываются существование приближенных решений и их сходимости;
- 3) совершенствуются методы численного анализа;
- 4) изучается проблема оптимального управления свободной границей.

Рассмотренные математические модели естественным образом возникают при исследовании процессов в спецметаллургии (задачи типа Стефана) или в гидродинамических сооружениях (задачи типа Бернулли), чем обуславливается практическое значение результатов, изложенных в монографии.

Для специалистов, аспирантов и студентов в области математического моделирования, управления и нелинейного анализа.

Содержание

Предисловие	5
Введение	8
Глава 1. Математическое моделирование движения жидкости и теплофизических процессов в средах со свободной границей.	11
§1. Математическое моделирование нелинейных процессов в теплофизике и гидродинамике	11
1.1. О построении математических моделей	11
1.2. Математическое моделирование в спецметаллургии	18
§2. Математическое моделирование в гидродинамике и теплофизике	25
2.1. Краевые задачи со свободной границей в гидродинамике и теплофизике, имеющие вариационную природу	25
2.2. Математическое моделирование процесса конвективного теплообмена с учетом условия Стефана	31
Глава 2. Приближенный анализ стационарных нелинейных конвективных моделей типа Стефана	37
§1. Исследование конвективной задачи Стефана на плоскости	37
1.1. Постановка задачи	37
1.2. Линеаризация задачи по интенсивности вихря	39
1.3. Первое приближение	41
1.4. Построение нулевого приближения вариационным методом	42
1.5. Исследование первого приближения	48
1.6. Приближенный анализ влияния конвекции на фронте кристаллизации	50
§2. Приближенный анализ стационарной пространственной конвективной задачи Стефана	53
2.1. Постановка задачи	53
2.2. Разложение решения в ряд по степеням малого параметра Re	55
2.3. Первое приближение	59
2.4. Построение приближений $u_0(x)$ и $u_1(x)$ методом Ритца	62
2.5. Второе приближение	66
Глава 3. Исследование конвективного теплопереноса в пространственной нестационарной задаче Стефана	69
§1. Приближенный анализ конвективной задачи Стефана	69
1.1. Постановка задачи	69
1.2. Разложение решения в ряд по степеням малого параметра Re	71
1.3. Первое приближение	74
1.4. Второе приближение	77
§2. Конвективная задача Стефана с учетом примесей	80
2.1. Математическое моделирование процессов кристаллизации металла с учетом конвекции и примесей	80
2.2. Задача Стефана при наличии конвекции и примеси	84

2.3. Математическое моделирование фазовых превращений в двухкомпонентных средах	89
Глава 4. Исследование математических моделей со свободной границей в плоском и осесимметричном случаях	95
§1. Разрешимость задач со свободной границей типа Бернулли	95
1.1. Корректность классов математических моделей типа Бернулли в плоском случае	95
1.2. Осесимметрический случай	100
1.3. Квазистационарная задача типа Стефана	104
§2. Построение приближенных решений методом Ритца	106
2.1. О приближениях Ритца в вариационных задачах со свободной границей	106
2.2. Оптимальное управление свободной границей	110
Список литературы	114

Предисловие

Монография посвящена изучению проблем моделирования физических процессов, сопровождающихся возникновением свободных границ. При этом исследуется корректность рассматриваемого класса математических моделей. Строятся алгоритмы приближенного решения соответствующих краевых задач, доказываются их сходимости. Укажем, что проблема построения математических моделей на современном этапе является актуальной, так как изучение некоторых объектов экспериментальным путем не представляется возможным ввиду их сложного процесса функционирования.

Монография содержит в основном результаты исследований, полученные авторами за последние годы.

В первой главе излагаются основные подходы при моделировании процессов в спецметаллургии и гидродинамике.

Вторая глава посвящена математическому моделированию стационарных процессов кристаллизации металла с учетом конвективных движений в жидкой фазе, когда скорость конвективных движений описывается системой Навье-Стокса. Рассматривается плоский и пространственный случаи.

В третьей главе излагается материал по математическому моделированию нестационарных конвективных процессов с учетом условия Стефана. Изучается также случай конвективного теплообмена с учетом примесей. Предлагается метод решения соответствующих краевых задач, состоящий в разложении решения в ряд по степеням малого параметра. В нестационарном случае решения краевых задач для определения членов разложения строятся как неподвижные точки операторов.

В четвертой главе построены математические модели потенциального и вихревого течения в плоском и осесимметричном случаях в терминах функций тока. В качестве граничного условия на свободной границе берется условие Бернулли. Построенные математические модели имеют вариационный характер.

В конце главы излагается применение теории приближений Ритца к решению задач со свободной границей.

В монографии построен и исследован широкий класс нелинейных математических моделей со свободной границей, имеющих теплофизические или гидродинамические происхождения на плоскости и в пространстве. При исследовании математических моделей со свободными границами, имеющими вариационную природу предложен подход, позволяющий на единой методологической основе изучить широкий класс нелинейных задач: задачи типа Бернулли в плоском и осесимметрическом случаях, двумерные задачи типа Стефана в стационарном и квазистационарном режимах однофазные и двухфазные. При помощи разработанного математического аппарата устанавливаются свойства гладкости решений граничных задач и доказывается аналитичность свободных границ в случае, когда нормальная производная решения на свободной границе равна $V = V(x, y)$, где $V(x, y)$ -аналитическая функция переменных x и y . В основу доказательства положены результаты Гарабедяна, Леви и Шиффера для случая $V = \text{const}$. Доказательство аналитичности свободной границы следует из разрешимости системы двух интегральных уравнений, которая устанавливается методом последовательных приближений. Кроме того построены приближенные решения нелинейных краевых задач, изученных ранее в монографии, методом Ритца. Доказана сходимость приближений Ритца к точному решению в двухфазной стационарной задаче Стефана в W_2^1 (в однофазной задаче имеет место сходимость в C и W_2^1); построен алгоритм оценки скорости сходимости приближенного решения к точному решению в задачах Стефана. Метод Ритца существенно усложняется при минимизации нелинейных функционалов. Поэтому вначале доказывается разрешимость системы Ритца, а затем устанавливается сходимость приближений Ритца к точному решению в интегральных метриках и равномерная сходимость также. При доказательстве сходимости обобщены результаты Л.В. Канторовича по минимизации квадратичных функционалов.

Изучены также задачи, оптимального управления свободной границей в случае задач типа Стефана и Бернулли. Доказано существование оптимального управления на конечномерных приближениях Ритца и в общем случае, когда множество допустимых управлений есть компакт.

Исследовано также влияние конвекции на фронт кристаллизации. Разработан метод решения задач сопряжения, возникающих при исследовании стационарных и нестационарных задач Стефана на плоскости и в пространстве. Впервые применен метод малого параметра при приближенном решении конвективных задач Стефана на плоскости и в пространстве. Предполагая достаточно малой величину интенсивности вихря μ , получено уравнение свободной границей в зависимости от μ в плоском случае. Исследуется также пространственная стационарная и нестационарная задачи теплопроводности с учетом конвективного движения в жидкой фазе, описываемого уравнениями Навье-Стокса. Предложен метод изучения этой задачи, состоящий в разложении решения в ряд по степеням малого параметра числа Рейнольдса. В нестационарном случае решения соответствующих краевых задач для определения первого и второго члена разложения строятся как неподвижные точки сжимающихся параметров. Получено уравнение свободной поверхности в зависимости от числа Рейнольдса Re .

Каждая глава разбита на параграфы. Различные утверждения (теоремы, леммы), а также рисунки и формулы имеют последовательную двухзначную нумерацию. Нумерация замечаний в монографии последовательно однозначная.

Введение

Широкий класс задач математической физики содержит в качестве неизвестных функцию и область, в которой она определена, или часть границы этой области. Физическая природа изучаемых при этом проблем, очень обширна. Это могут быть задачи определения свободных струй, поверхностных волн, задачи кавитации и фильтрации в гидродинамике.

Проблема построения нелинейных моделей и их математическое исследование на современном этапе актуальны. При этом возникает необходимость дать теоретическое обоснование целому ряду задач:

- исследование корректности соответствующих математических моделей и их численная реализация;
- разработка методов решения дискретных задач, доказательство существования приближенных решений, сходимости их к точным решениям математических задач, исследование условий сохранения физического смысла приближенных решений;
- оценка скорости сходимости, аппроксимация и минимизация функций;
- совершенствование методов численного анализа.

Фундаментальные результаты решения указанных проблем получены в работах Л.В. Канторовича [1], О.А. Самарского [2], А.М. Тихонова [2], О.О. Ладыженской [3], Ж.Л. Лионса [4], Н.Н. Яненко [5], Г.И. Марчука [6], С.Н. Никольского [7], М.М. Лаврентьева [8].

Весомый вклад для решения этих проблем в Украине внесли И.В. Сергиенко и В.С. Дейнека [9].

Наиболее эффективным способом исследования проблем со свободной границей является вариационный подход и метод вариационных неравенств. Вариационный подход к задачам со свободными границами, основан на методе интегральных функционалов с переменной областью интегрирования.

Применительно к струйным течениям функциональный метод с успехом применил К. Фридрихс [10] для доказательства единственности решения. Обращение к вариационному методу позволило П. Гарабедяну, Г. Леви,

М. Шифферу [11], доказать существование и единственность решения задачи об осесимметричном кавитационном течении. С помощью этого же метода И.И. Данилюк [12] решил проблему существования в произвольном внешнем силовом поле.

Введение новой неизвестной функции позволило К. Байокки [13] редуцировать к эллиптическому вариационному неравенству задачу со свободной границей из теории фильтрации, а затем Г. Дюво [14] аналогичной заменой осуществил редукцию многомерной однофазной нестационарной задачи Стефана к параболическому вариационному неравенству. Примерно в эти же годы крупные результаты были получены в работах Л. Кафарелли [15], А. Фридмана [15], в изучении свойств свободной границы. Синтез этих достижений позволил Д. Киндерлеру и Л. Ниренбергу [16] доказать, что построенное методом вариационных неравенств обобщенное решение многомерной однофазной нестационарной задачи Стефана является на самом деле классическим решением.

Принципиально новую точку зрения на сущность задачи Стефана предложили А.Н. Тихонов и А.А. Самарский [2]. Основная идея этого подхода состоит во введении понятия «эффективной» теплоемкости, включающей в себя скрытую теплоту фазового перехода, сосредоточенно выделяющуюся на поверхности раздела фаз. Это позволяет с использованием δ -функции Дирака писать единое квазилинейное уравнение энергии сразу во всей области занятой теплоносящей средой, причем условие Стефана является следствием уравнения. На этом пути с помощью процесса сглаживания коэффициентов полученной математической модели был разработан эффективный метод численного анализа нестационарной многомерной задачи Стефана. Этот метод позволяет получить численное решение задачи Стефана с достаточной точностью.

В настоящее время исследования по теории задач со свободной границей, в частности, задач о фазовых переходах вещества стали важной и неотъемлемой частью математической физики. Достигнут определенный успех в исследовании так называемой задачи Стефана, важность которой, как теоретическая, так и практическая, общеизвестна. Учет конвективных движений при анализе задачи

Стефана составляет новую область исследований, важность которых определяется, однако, не только и не столько новизной задачи, сколько ее теоретической и практической актуальностью, в частности. Давно назревшей необходимостью дать теоретическое обоснование ряду имеющихся результатов численного анализа указанной задачи и экспериментальных наблюдений.

Глава 1. Математическое моделирование движения жидкости и теплофизических процессов в средах со свободной границей

§1. Математическое моделирование нелинейных процессов в теплофизике и гидродинамике

1.1. О построении математических моделей

Построение математических моделей начинается с выделения основных параметров, которые должны удовлетворять определенным законам. Все взаимосвязи, которым удовлетворяет изучаемый процесс, необходимо представить в виде математических соотношений. Если учесть, что количество параметров достаточно велико, а взаимосвязей между ними намного больше, то все это значительно усложняет процесс составления математической модели и ее разрешение.

Вначале, как правило, изучали проблемы, для описания которых использовались линейные модели. Очевидно, что далеко не каждый реальный процесс можно описать при помощи линейной модели. Такой подход не всегда дает требуемые результаты, кроме того, ряд факторов, которые на самом деле могли существенно повлиять на окончательный результат исследования, при построении математической модели не учитывались.

Появление суперкомпьютеров дает новые возможности для моделирования крупномасштабных проблем и проведения вычислительного эксперимента в прикладных и фундаментальных исследованиях. Это дает возможность широкого использования нелинейных моделей для описания реальных процессов. Проблема построения нелинейных моделей, их математическое исследование на данном этапе, стала актуальной в экономике, технике, механике, экологии и при решении задач управления. Здесь необходимо указать работы Л.В. Канторовича [18],

А.А. Самарского [19], И.В. Сергиенко [9], В.С. Дейнеки [9], а так же работы Ю.А. Белова [22], Е.Ф.Галбы [23] и Макаренко [24].

Наряду с построением математической модели, актуальным является выбор метода приближенного решения. В большинстве случаев такие задачи можно привести к решению нелинейных операторных уравнений или, как частный случай, к системе алгебраических или трансцендентных уравнений.

В данной работе основное внимание уделяется разработке методов решения нелинейных краевых задач и задач на экстремум функционалов. Идеи функционального подхода позволили существенно расширить класс задач со свободной границей подлежащих изучению и построить приближенные методы их решения. В общей теории приближенных методов известны фундаментальные результаты - классические труды Л.В.Канторовича [18], И.В.Сергиенко [21], Н.В.Крылова [25], С.Г.Михлина [26], В.С.Дейнеки [27], Г.И.Марчука [28], Н.Н.Яненко [29].

На данный момент является актуальным расширение класса задач, для решения которых с эффективностью можно использовать уже известные методы, и построение новых эффективных методов решения нелинейных задач и задач на экстремум.

Перейдем к математическим моделям в гидродинамике. Изучение движения жидкости может быть произведено с двух точек зрения. С точки зрения Лагранжа объектом изучения служит сама движущаяся жидкость, точнее говоря, отдельные ее частицы, рассматриваемые как материальные частицы, сплошным образом заполняющие некоторый движущийся объём, занятый жидкостью. Тогда при движении жидкого объёма можно трактовать координаты любой его частицы x , y , z как определённые функции от времени t и начальных координат той же частицы

$$\begin{cases} x = \varphi_1(t, x_0, y_0, z_0), \\ y = \varphi_2(t, x_0, y_0, z_0), \\ z = \varphi_3(t, x_0, y_0, z_0). \end{cases}$$

Переменные t, a, b, c носят название переменных Лагранжа. Следовательно, будем иметь

$$\begin{cases} x = f_1(a, b, c, t), \\ y = f_2(a, b, c, t), \\ z = f_3(a, b, c, t). \end{cases}$$

С другой точки зрения, развитой Эйлером, объектом изучения является, строго говоря, не сама жидкость, а неподвижное пространство, заполненное движущейся жидкостью, и рассматривается:

- изменение различных элементов движения в фиксированной точке пространства с течением времени;
- изменение этих элементов при переходе к другим точкам пространства.

Иначе говоря, различные векторные и скалярные элементы движения рассматриваются как функции точки и времени, то есть как функции четырёх аргументов x, y, z, t , называемых переменными Эйлера, например, $\vec{V} = \vec{F}(\vec{r}, t)$ или

$$\begin{cases} V_x = F_1(x, y, z, t), \\ V_y = F_2(x, y, z, t), \\ V_z = F_3(x, y, z, t). \end{cases}$$

Таким образом, с точки зрения Эйлера, объектами изучения являются различные векторные и скалярные поля, характеризующие движение жидкости (например, поле скоростей, поле плотностей, поле ускорений).

Рассмотрим векторное поле скоростей. Дифференциальные уравнения линий тока будут иметь вид $\frac{dx}{V_x(x, y, z, t)} = \frac{dy}{V_y(x, y, z, t)} = \frac{dz}{V_z(x, y, z, t)}$, $V = (V_x, V_y, V_z)$, где t играет роль параметра.

Вихрь скорости есть вектор $\Omega = \text{rot} \vec{V}$, определяемый проекциями:

$$\Omega_x = \frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z}; \quad \Omega_y = \frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x}; \quad \Omega_z = \frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y},$$

$$\text{rot}V = \begin{vmatrix} i & j & k \\ V_x & V_y & V_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{vmatrix}, \quad \vec{V} = V_r \vec{i} + V_\theta \vec{j} + V_z \vec{k} \text{ - в осесимметричном случае,}$$

$$\text{rot}\vec{V}\Big|_r = 0, \text{rot}\vec{V}\Big|_z = 0, \text{rot}\vec{V}\Big|_\theta = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right).$$

Рассмотрим уравнение неразрывности для несжимаемой жидкости $\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} = 0$ или $\frac{\partial V_x}{\partial x} = \frac{\partial(-V_y)}{\partial y}$. Если взять дифференциальное уравнение линии тока $\frac{dx}{V_x} = \frac{dy}{V_y}$ или $-V_y dx + V_x dy = 0$, то уравнение неразрывности показывает, что левая часть полученного уравнения представляет полный дифференциал некоторой функции $\psi(x, y)$ $d\psi = 0$, так, что $V_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}$, $-V_y = \frac{\partial \psi}{\partial x}$.

Функция $\psi(x, y)$ носит название функции тока, так как на каждой линии тока она сохраняет свое постоянное значение $\psi(x, y) = C$, различное вообще для различных линий тока.

Легко найти так же выражение для вихря через функцию тока. Именно по определению вихря: $\text{rot}\vec{V} = \Omega$, $\Omega = (\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z)$, $\Omega_x = \left(\frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z} \right)$, $\Omega_y = \left(\frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x} \right) = 0$, $\Omega_z = \left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} \right) = -\Delta \psi$.

Отсюда заключаем, что в случае безвихревого плоского движения функция тока должна удовлетворять уравнению Лапласа $\Delta \psi = 0$.

По определению, функция $W = \varphi + i\psi$ носит название комплексного потенциала, где ψ - функция тока, φ - потенциал скорости.

Рассмотрим произвольное движение некоего твердого тела вокруг неподвижной точки О. Как доказывается в кинематике, для любого момента времени поле скорости \vec{v} точек тела определяется формулой $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$, где $\vec{\omega}$ - мгновенная «угловая скорость», а \vec{r} - радиус-вектор, соединяющий точку О с произвольной точкой М тела. Проекции этого вектора на оси произвольной системы $Oxyz$ будут $\omega_y z - \omega_z y$, $\omega_z x - \omega_x z$, $\omega_x y - \omega_y x$.

Если подсчитать проекции вихря для этого поля, то получим $2\omega_x, 2\omega_y, 2\omega_z$, так что $\omega = \frac{1}{2} \text{rot} \vec{v}$.

Таким образом, с точностью до числового множителя, ротор поля скорости \vec{v} дает как раз мгновенную угловую скорость вращения; отсюда и само название «ротор».

Интегралом Бернулли называют выражение вида $V + \frac{1}{2}v^2 + P = \Gamma$, где Γ - величина, сохраняющая постоянное значение на данной линии тока, но, изменяющаяся при переходе от одной линии к другой; V - массовые силы.

Если массовые силы суть силы тяжести, то, направив ось Oz вертикально вверх, имеем $V = gz$ и интеграл Бернулли принимает вид $gz + \frac{1}{2}v^2 + P = \Gamma$. Для несжимаемой жидкости имеем $P = p/\rho$. Разделив на g и введя обозначение $\gamma = \rho g$ для удельного веса, запишем интеграл Бернулли в виде $z + \frac{v^2}{2g} + \frac{p}{\gamma} = \Gamma$.

В этом уравнение первое слагаемое z выражает высоту рассматриваемой жидкой частицы в данной трубке тока над некоторой горизонтальной плоскостью и называется геометрической высотой. Второе слагаемое $v^2/2g$ выражает высоту, на которую могла бы подняться в пустоте материальная точка, брошенная вертикально вверх с начальной скоростью v , - это слагаемое называется скоростной высотой; третье слагаемое p/γ - пьезометрической высотой (p - давление).

Таким образом, моделирование потенциального или вихревого течения жидкости можно осуществить с помощью функции тока. При этом, в случае использования условия Бернулли, построенная математическая модель становится нелинейной.

Исследуем, при каких условиях возникает отрыв течения от стенки. Если вдоль контура тела имеется область возрастающего давления, то в общем случае жидкость, заторможенная в пограничном слое и обладающая, поэтому небольшой кинетической энергией не в состоянии, слишком далеко продвинуться в область

высокого давления. Вместо этого она отклоняется в сторону от области высокого давления, отрываясь при этом от тела, и оттесняется от стенки во внешнее течение (рис. 1.1, рис. 1.2). Точку отрыва будем определять как границу между прямыми и возвратными течениями в прилегающем к стенке слое. При этом будем использовать рассуждения, изложенные в работе [30].

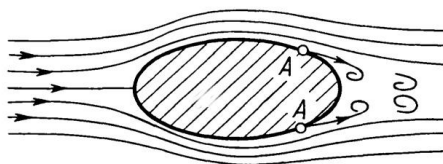


Рис. 1.1

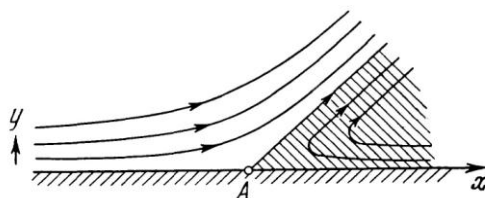


Рис. 1.2

Отрыв потока возникает также при течении жидкости в канале (сопле), резко расширяющемся в направлении течения (рис. 1.3). При достижении жидкости узкого поперечного сечения давление в направлении течения понижается. В этой части канала (сопла) поток полностью прилегает к стенкам. После узкого поперечного сечения расширение канала (сопла) приводит к возрастанию давления в направлении течения, вследствие чего происходит отрыв потока от обеих стенок с одновременным образованием вихрей. В результате в расширяющейся части канала (сопла) поток занимает только часть его поперечного сечения.

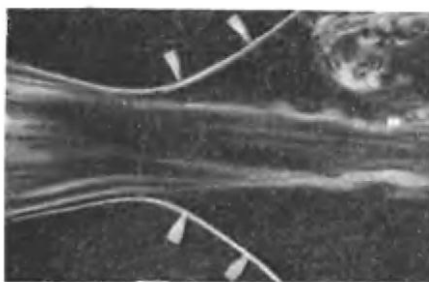


Рис. 1.3

Однако если на стенках производится отсасывание пограничного слоя, то отрыв не возникает (рис. 1.4, рис. 1.5).



Рис. 1.4

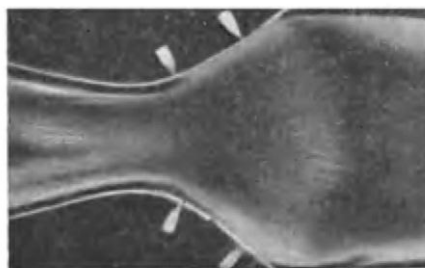


Рис. 1.5

Отрыв потока (пограничного слоя) играет важную роль при возникновении подъемной силы крыла. При небольших углах атаки (примерно до 10°) обтекание обеих сторон крыла происходит без отрыва [30] (рис. 1.6). При угле атаки равном приблизительно 15° , отрыв обязательно наступает, причем между оторвавшимся течением и поверхностью крыла образуется область, заполненная вихрями (рис. 1.7). Начало отрыва течения совпадает с достижением подъемной силы крыла своего наибольшего значения.

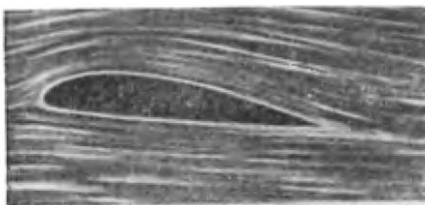


Рис. 1.6



Рис. 1.7

1.2. Математическое моделирование в спецметаллургии

Электрошлаковый переплав (ЭШП) является вторичным процессом рафинирования металлов. Он применяется для дальнейшей очистки после завершения первичных операций по удалению примесей и рафинированию. В качестве сходного материала обычно применяется сплошной расходуемый электрод из первинного металла, который может быть литым, полученным обработкой давлением или состоящим из лома. Шлаковая ванна, содержащаяся в охлажденном кристаллизаторе, нагревается и расплавляется электрическим током (электросопротивлением), текущим между электродом и охлажденным поддоном (рис. 1.8) [31].

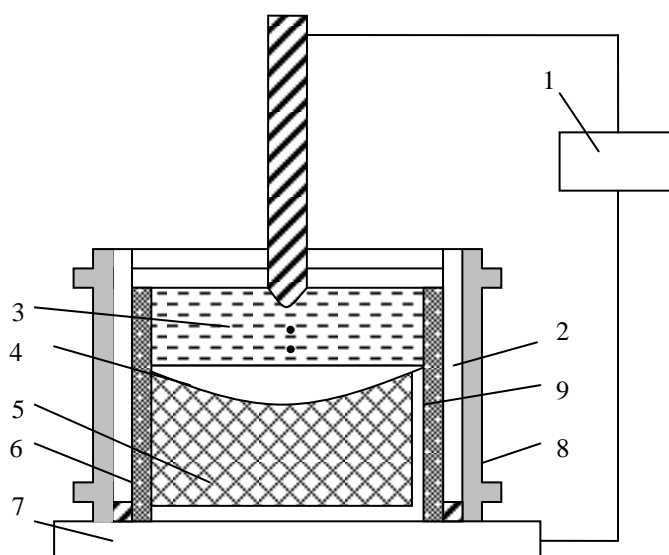


Рис. 1.8

Здесь: 1 – трансформатор; 2 – медный водоохлаждаемый кристаллизатор; 3 – шлаковая ванна; 4 – жидкий металл; 5 – затвердевший металл; 6 – слой твердого шлака; 7 – водоохлаждаемый поддон; 8 – вода; 9 – корочка твердого шлака.

Когда температура шлаковой ванны превышает температуру плавления металла, электрод начинает оплавляться; капли, стекающие с конца электрода, падают в шлаковую ванну, образуя на поддоне затвердевающий металлический слой. Электрод попадает в шлаковую ванну, при этом слиток, служащий вторым электродом, постепенно растёт. Жидкий шлак, таким образом, непрерывно

перемещается вверх. Там, где поднимающийся шлак встречается со стенками охлаждающегося кристаллизатора, он затвердевает, что обеспечивает наличие сплошной корочки твердого шлака между кристаллизатором и затвердевающим слитком. При извлечении слитка она отшелушивается с поверхности, характеризующейся прекрасным качеством. Процесс аналогичен вакуумно-дуговому переплаву (ВДП): сплошной слиток образуется в результате затвердевания металла в вертикальном направлении. При соответствующем снижении силы тока к концу операции обеспечивается полное отсутствие усадочной раковины и осевой пористости.

Рафинирование осуществляется вследствие реакции между металлом и шлаком, происходящей в 3-х случаях [32, 33]:

- 1) при образовании капли через шлак;
- 2) при прохождении отдельной капли металла в ванне, образующейся на поверхности части слитка;
- 3) после накопления жидкого металла в ванне, образующейся на верхней части слитка.

При соответствующем выборе шлаков химическая реакция может быть усилена. Возможно, например, снижение содержания серы до очень низкого уровня. Удалению неметаллических включений может способствовать их флотация и химическая реакция со шлаком. Шлаки могут быть подобраны таким образом, чтобы воспрепятствовать удалению ценных элементов.

При рафинировании металла шлаком наиболее важными параметрами, которые определяют требования к питанию электроэнергией, являются форма и глубина ванны расплавленного металла. Как правило, наиболее предпочтительной является мелкая ванна с большим радиусом кривизны.

Радикальная кристаллизация протекает, при высокой силе тока и низком напряжении, высокой скорости переплава и мелкой шлаковой ванне.

Доброкачественный слиток получается при условиях, обеспечивающих осевую кристаллизацию и отсутствие осевой пористости.

Математическая модель теплопереноса при ЭШП расходуемых электродов в расходуемые кристаллизаторы учитывает особенности этого процесса, суть которого состоит в следующем (рис. 1.9).

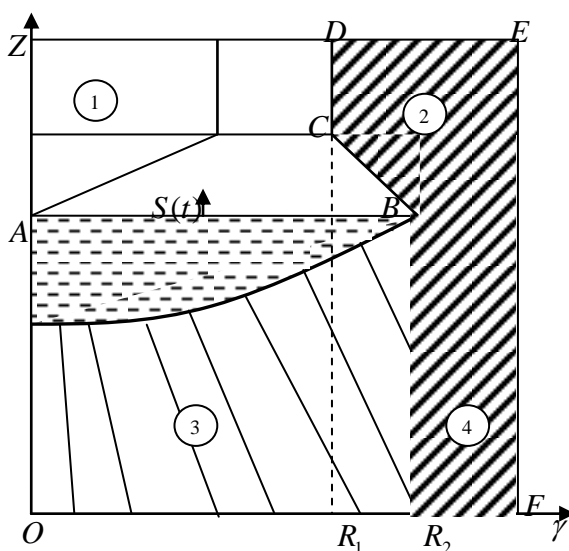


Рис. 1.9

Расходуемый электрод 1 плавится в расходуемом кристаллизаторе 2. Жидкий металл переплавляемого электрода и переплавившейся части расходуемого кристаллизатора образует электрошлаковый слиток 3, одетый в оболочку из нерасплавившегося металла 4. Глубина проплавления стенки расходуемого кристаллизатора регулируется режимом ЭШП и режимом охлаждения наружной поверхности слитка (кристаллизатора).

Математическое моделирование этого процесса имеет свои особенности, поскольку решение уравнения теплопроводности ищется в сложной области $\{OABCDEF\}$. Основные принципы и подходы, используемые при моделировании теплопереноса обычного процесса ЭШП, здесь сохранены. Модель, приведенная в работе, учитывает сложную область, в которой исследуется теплоперенос, и специфику условий теплообмена на внешних границах области, присущую изучаемому процессу.

Инженерные и технологические решения в спецметаллургии обнаруживают тенденцию к увеличению размеров и усложнению геометрических форм как оборудования, так и готовых видов продукции, вследствие чего экспериментальные исследования призваны облегчить и ускорить изучение упомянутых

процессов, выработать рекомендации по выбору рациональных режимов их протекания и, в конечном итоге, привести к созданию теории оптимального управления, обеспечивающего максимально благоприятную микро- и макро-структуру металла.

Математическое моделирование теплофизических процессов в спец металлургии оперирует такими усредненными величинами, как понятие сплошной среды, ее плотность, теплоемкость, температуро- и тепло проводность, вязкость и др., эти величины, опираясь на законы переноса массы, импульса и энергии, составляют основные дифференциальные уравнения для определения других усредненных характеристик: векторного поля скоростей, температурного поля и др. Все теплофизические параметры среды в той или иной степени зависят от температуры, а законы, управляющие этими зависимостями, носят экспериментально-эмпирический характер и до настоящего времени весьма неполны, особенно в области высоких температур, поэтому приходится рассматривать линейное приближение, применимое в случае малых перепадов температур, когда зависимостью упомянутых параметров от термодинамического состояния можно пренебречь. Адекватность математической модели физическому явлению возрастает вместе с уточнением упомянутых зависимостей, вследствие чего еще большее значение приобретают соответствующие эксперименты общепознавательного характера. Линеаризованная теория задач массо- и теплопереноса оперирует также с известным количеством безразмерных параметров изучаемого явления, таких как число Рейнольдса, Пекле, Нуссельта, Прандтля и др. Значения этих параметров для возможно большего диапазона материалов и режимов, также приобретают повышенное значение.

Теплофизические процессы, сопровождающиеся фазовыми переходами вещества, описываются математической моделью, в которой температура каждой из фаз удовлетворяет уравнению переноса тепла со своими теплофизическими коэффициентами, на границе раздела фаз, обе температуры постоянны и равны температуре фазового перехода (для химической однородной среды), а на заданных частях границы (стенках кристаллизатора, поддоне) поддерживается

определенный режим (теплопровод, теплоизоляция и др.). Поверхность раздела фаз (фронт кристаллизации) является неизвестной или «свободной» границей, и для ее определения дополнительно задается так называемое «условие Стефана», означающее, что тепловой поток через фронт кристаллизации в сторону твердой фазы равен тепловому потоку со стороны жидкой фазы плюс скрытая теплота фазового перехода. Условие фазового перехода на неизвестной заранее поверхности раздела фаз превращает рассматриваемую математическую модель, особенно в общей пространственной постановке, в нелинейную проблему большой трудности, не нашедшую до сих пор полного решения. Кроме общих качественных исследований задачи Стефана (теорем существования и единственности, асимптотического поведения фронта кристаллизации для больших отрезков времени, свойства гладкости неизвестной границы и др.) большую практическую важность и теоретическую трудность представляют методы приближенного и численного анализа рассматриваемой математической модели.

С целью получения приближенных аналитических формул для описания изотерм был рассмотрен квазистационарный режим процесса переплава, при котором в равномерно движущейся вверх системе координат геометрия изотерм и формы ванночки не меняется с течением времени, т.е. стационарна. Для упрощения кристаллизационной задачи была принята математическая модель при наличии только твердой фазы, тогда как тепловой поток со стороны жидкой фазы моделируется некоторой заданной функцией. Такая модель в случае кристаллизаторов произвольного поперечного сечения (круглых, прямоугольных и т.д.) имеет вариационную природу: отыскание ее решения редуцируется к проблеме минимума некоторого интегрального нелинейного функционала, область интегрирования которого и совпадает с твердой фазой слитка, следовательно, эта область заранее неизвестна. Изучение нелинейных интегральных функционалов с переменной областью интегрирования представляет весьма содержательный математический объект и стимулируется рядом важных нелинейных проблем естествознания: равновесием фигур вращения, струйными,

кавитационными и волновыми движениями жидкой среды, отмеченными выше теплофизическими процессами с фазовыми переходами и др. Создание основ вариационного исчисления для функционалов указанного класса пересекается с рядом магистральных направлений современной математики.

Вариационный характер предложенной модели имеет ряд важных следствий. Первое из них состоит в том, что на этом пути в классе свободных границ, взаимно однозначно проектирующихся на горизонтальную поверхность, удается положительно решить проблему единственности, отражающую известную адекватность математической модели в теплофизической задаче с одной стороны, и делающую корректной задачу численного анализа этой модели с другой. Второе следствие состоит в том, что на этом пути прямыми методами вариационного исчисления можно дать полное решение проблемы существования решения. Рассматриваемая модель характеризуется тремя безразмерными параметрами:

- числом Пекле ω , пропорциональным скорости протекания переплава и геометрическим размерам слитка;
- числом Нуссельта ω_0 , характеризующим теплопередачу через стенку кристаллизатора, геометрические размеры сечения слитка и его теплопроводность,
- параметром Q , описывающим интенсивность теплового потока со стороны жидкой фазы.

Перейдем к описанию гидродинамических явлений в металлической ванночке. Жидкая фаза рассматриваемого процесса заслуживает специального исследования из-за априорной возможности существования поля скоростей, вызывающего интенсивную теплопередачу путем конвекции. Само же поле скоростей возникает под действием объемных сил земного притяжения из-за разности плотностей жидкого шлака и металла, архимедовых сил из-за объемного расширения при значительных температурных градиентах, а также, в случае электрошлакового переплава, сильных электромагнитных сил, способных играть доминирующую роль и сообщать конвекции, наряду с силами тяжести, вынужденный, а не свободный характер. Усиленная циркуляция в расплавленной

шлаковой ванночке была обнаружена в исследованиях академиков Б.Е. Патона и Б.И. Медовара [31] и их сотрудников, а дальнейшее экспериментальное изучение этих явлений показало, что интенсивное перемешивание шлакового расплава имеет место по всему объему шлаковой ванночки и вызывается электромагнитными силами: под током средняя скорость перемешивания частиц шлака достигает 7-10 см/сек, тогда как после отключения тока, несмотря на сохранение теплоотвода через стенки кристаллизатора, скорости падают до 1 см/сек, т.е. уменьшаются на порядок. Отмеченные величины скорости вынужденной конвекции сравнимы с поперечными и продольными размерами шлаковой ванночки. Следовательно, конвективная теплоотдача в шлаковой ванночке значительно превосходит теплоотдачу через теплопроводность.

Основной темой дальнейшего изложения является гидро- и термодинамические явления в металлической, а не шлаковой ванночке, и поскольку их закономерности не менее сложны, а экспериментальные исследования отсутствуют, исходим из предположения, что существует по крайней мере три зоны со своими характеристиками кинематических и температурных полей:

- 1) зона перегретого металла, поступающего в виде капель или сплошной струйки;
- 2) пограничный слой вдоль фронта кристаллизации с заданной на нем постоянной температурой;
- 3) пограничный слой вдоль стенки кристаллизатора при наличии теплоотвода через нее.

Последняя зона из-за теплоотвода через известную часть границы и наличия фазового перехода вдоль неизвестной части границы придает модели температурного пограничного слоя большую теоретическую сложность, поэтому остановимся на результатах исследования первых двух зон.

Для описания поля скоростей в зоне поступления перегретого металла может использоваться математическая модель затопленной струи вязкой жидкости, основанная на известном в теоретической гидродинамике точном решении нелинейной системы дифференциальных уравнений Навье-Стокса.

§2 Математическое моделирование в гидродинамике и теплофизике

2.1. Краевые задачи со свободной границей в гидродинамике и теплофизике, имеющие вариационную природу

Рассмотрим двухфазную стационарную задачу Стефана в полосе $D = (-1 < x < 1, H < y < 0)$. Определим тройку $(u^+(x, y), u^-(x, y), \gamma)$ по следующим условиям:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u^\pm}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u^\pm}{\partial y^2} = 0, (x, y) \in D_\gamma^\pm, \\ u^+(x, 0) = v, -1 \leq x \leq 1, v = \text{const} > 1, \\ u_x^\pm(x, y) \pm \omega_0^\pm u(x, y) = 0, x = \pm 1, (x, y) \in \partial D_\gamma^\pm, \\ u^\pm(x, y) = 1, (x, y) \in \gamma, \\ u^-(x, H) = 0, -1 \leq x \leq 1, \\ |\nabla u^-|^2 - k^2 |\nabla u^+|^2 = 0, (x, y) \in \gamma, 0 < k \leq 1. \end{cases} \quad (1.1)$$

Эта задача допускает вариационную постановку. Действительно, рассмотрим функционал

$$J(u^+, u^-, \gamma) = \iint_{D_\gamma^-} |\nabla u^-|^2 dx dy + k^2 \iint_{D_\gamma^+} |\nabla u^+|^2 dx dy + k^2 \omega_0^+ \int_{\Gamma_\gamma^+} (u^{+2} - 1) dy + \omega_0^- \int_{\Gamma_\gamma^-} (u^{-2} - 1) dy,$$

где $\Gamma_\gamma^+ = \partial D_\gamma^+ \cap \{x = \pm 1\}$, $\Gamma_\gamma^- = \partial D_\gamma^- \cap \{x = \pm 1\}$ на множестве допустимых троек (γ, u^+, u^-) : γ - достаточно гладкая дуга, расположенная в D , один конец которой лежит на вертикали $x = 1$, а другой - на $x = -1$; функция $u^+(x, y)$ непрерывна в $\overline{D_\gamma^+}$, непрерывно дифференцируема в D_γ^+ и равна единице на γ и $u^+(x, 0) = v$ при $-1 \leq x \leq 1$; функция $u^-(x, y)$ непрерывна в $\overline{D_\gamma^-}$, непрерывно дифференцируема в D_γ^- и $u^-(x, H) = 0$, $x \in [-1, 1]$. Справедливо утверждение [34].

Лемма 1.1. Каждое классическое решение задачи (1.1) является стационарной тройкой (γ, u^+, u^-) функционала $J(u^+, u^-, \gamma)$. Обратно, если (γ, u^+, u^-) -

стационарная тройка функционала $J(u^+, u^-, \gamma)$ и кривая γ гладкая без самопересечений, то эта тройка является решением задачи (1.1).

Доказательство. Воспользуемся формулой для первой вариации функционала с переменной областью интегрирования D_γ . Имеем

$$I(u, \gamma) = \iint_{D_\gamma} F(x, y; u_x, u_y) dx dy,$$

$$\delta \iint_{D_\gamma} F(x, y, u_x, u_y) dx dy = \iint_{D_\gamma} \left[F_u - \frac{\partial}{\partial x} F_{u_x} - \frac{\partial}{\partial y} F_{u_y} \right] \overline{\delta u} dx dy +$$

$$+ \int_{\partial D_\gamma} \left(\frac{\partial F}{\partial u_x} \cos(n, x) + \frac{\partial F}{\partial u_y} \cos(n, y) \right) \overline{\delta u} ds + \int_{\partial D_\gamma} F \overline{n} \overline{\delta z} ds,$$

где $\overline{\delta u}$ – вариация функции u при неизменной области;

$\overline{\delta z} = (\delta x, \delta y)$ – вариации независимых переменных при переходе от области D_γ

к некоторой близкой к ней области;

ds – элемент дуги ∂D_γ ;

\overline{n} – внешняя нормаль относительно D_γ .

Далее пусть $F_+(x, y, u_x^+, u_y^+) = |\nabla u^+|^2$, а $F_- = |\nabla u^-|^2$. Имеем на γ $\delta u^\pm = \overline{\delta u}^\pm + \text{grad } u^\pm \overline{\delta z} = 0$, где $\overline{\delta u}^\pm$ – вариации искоемых функций при неизменной границе; $\overline{\delta z} = (\delta x, \delta y)$ – вариация независимых переменных.

Пусть \overline{n}_1 – единичный вектор внешней нормали относительно области D_γ^+ , а \overline{n}_2 – относительно D_γ^- . На общей границе γ областей D_γ^+ и D_γ^- , $\overline{n}_1 = -\overline{n}_2$.

Так как $\text{grad } u^+|_\gamma = |\text{grad } u^+| \overline{n}_1$, а $\text{grad } u^-|_\gamma = |\text{grad } u^-| \overline{n}_2 = -|\text{grad } u^-| \overline{n}_1$, то получим $\overline{\delta u}^+|_\gamma = -|\text{grad } u^+| \overline{n}_1 \overline{\delta z}, \overline{\delta u}^-|_\gamma = -|\text{grad } u^-| \overline{n}_2 \overline{\delta z} = |\text{grad } u^-| \overline{n}_1 \overline{\delta z}$.

Опираясь на полученные вариации искоемых функций $u^\pm(x, y)$ на свободной границе γ и обращаясь снова к формуле для первой вариации интегрального функционала с переменной областью интегрирования, получим

$$\begin{aligned}
\delta \iint_{D_\gamma^+} F_+ dx dy &= -2 \iint_{D_\gamma^+} \Delta u^+ \delta u^+ dx dy + 2 \int_{\Gamma_\gamma^+} \frac{\partial u^+}{\partial n} \delta u^+ dy + \int_\gamma |\nabla u^+|^2 \vec{n}_1 \delta z ds + \\
+ 2 \int_\gamma \frac{\partial u^+}{\partial n} \delta u^+ ds &= -2 \iint_{D_\gamma^+} \Delta u^+ \delta u^+ dx dy + 2 \int_{\Gamma_\gamma^+} \frac{\partial u^+}{\partial n} \delta u^+ dy + \int_\gamma |\nabla u^+|^2 \vec{n}_1 \delta z ds - \\
- 2 \int_\gamma |\nabla u^+|^2 \vec{n}_1 \delta z ds &= -2 \iint_{D_\gamma^+} \Delta u^+ \delta u^+ dx dy + 2 \int_{\Gamma_\gamma^+} \frac{\partial u^+}{\partial n} \delta u^+ dy - \int_\gamma |\nabla u^+|^2 \vec{n}_1 \delta z ds, \\
\delta \iint_{D_\gamma^-} F_2 dx dy &= -2 \iint_{D_\gamma^-} \Delta u^- \delta u^- dx dy + 2 \int_{\Gamma_\gamma^-} \frac{\partial u^-}{\partial n} \delta u^- dy + \int_\gamma |\nabla u^-|^2 \vec{n}_1 \delta z ds.
\end{aligned}$$

Итак, получим окончательно вариацию функционала $J(u^+, u^-, \gamma)$:

$$\begin{aligned}
\delta J(u^\pm, D_\gamma^\pm; \delta u^\pm, \delta z) &= -2 \iint_{D_\gamma^+} \Delta u^+ \delta u^+ dx dy + 2 \int_{\Gamma_\gamma^+} \left(\frac{\partial u^+}{\partial n} + \omega_0^+ u^+ \right) \delta u^+ dy - \\
- 2k^2 \iint_{D_\gamma^-} \Delta u^- \delta u^- dx dy &+ 2k^2 \int_{\Gamma_\gamma^-} \left(\frac{\partial u^-}{\partial n} + \omega_0^- u^- \right) \delta u^- dy + \int_\gamma \left[|\nabla u^-|^2 - k^2 |\nabla u^+|^2 \right] \vec{n}_1 \delta z ds.
\end{aligned}$$

Из последней формулы следует доказательство леммы. При этом

$$\delta \int_{\Gamma_\gamma^\pm} (u^{\pm 2} - 1) dy = 2 \int_{\Gamma_\gamma^\pm} u^\pm \delta u^\pm dy + \int_{\Gamma_\gamma^\pm} \frac{\partial}{\partial y} \left[(u^{\pm 2} - 1) \delta y \right] dy = 2 \int_{\Gamma_\gamma^\pm} u^\pm \delta u^\pm dy.$$

Рассмотрим осесимметрическое течение жидкости, когда ось Ox является осью симметрии потока, а на свободной границе задается условие Бернулли. Введем обозначения. Пусть G – область, ограниченная снизу отрезком $B = (0 \leq x \leq a, y = 0)$, по бокам вертикалями $\Gamma_1 = (x = 0, 0 \leq y \leq c)$, $\Gamma_2 = (x = a, 0 \leq y \leq b)$ и сверху кривой $S: y = g(x)$, $0 \leq x \leq a$, где $c < b$, $g(0) = a$, $g(a) = b$, а $g(x)$ – дважды непрерывно дифференцируемая, монотонно возрастающая функция, такая что $g'(0) = 0$ и $g'(a) = 0$. Далее пусть γ – достаточно гладкая кривая без самопересечений, расположенная в $G \cup S$. Предполагается, что одним концом γ является точка $(0, c)$, а другой лежит на Γ_2 . Наконец, через $G_\gamma \subset G$ будем обозначать область, ограниченную отрезком B , вертикалями Γ_1, Γ_2 и кривой γ .

Будем рассматривать следующую нелинейную краевую задачу со свободной границей γ . В односвязной области G_γ требуется определить функцию тока $\psi(x, y)$, удовлетворяющую следующим условиям:

$$\psi_{xx} + \psi_{yy} - y^{-1}\psi_y = \omega y, \quad (x, y) \in G_\gamma, \quad \omega = \text{const} > 0, \quad (1.2)$$

$$\psi(x, y) = 0, \quad (x, y) \in B, \quad (1.3)$$

$$\psi_x(x, y) = 0, \quad (x, y) \in \Gamma_1 \cup \Gamma_{2\gamma}, \quad (1.4)$$

$$\psi(x, y) = 1, \quad (x, y) \in \gamma, \quad (1.5)$$

$$\psi_x^2 + \psi_y^2 \geq \nu^2 y^2, \quad (x, y) \in \gamma, \quad \nu = \text{const} > 0, \quad (1.6)$$

причем на части γ , лежащей внутри G_γ , в условии (1.6) должно выполняться равенство.

Решение задачи (1.2) – (1.6) описывает осесимметричный поток, протекающий в достаточно длинной, но ограниченной области G .

Введем в рассмотрение функционал с неизвестной областью интегрирования

$$J(\psi, \gamma) = \iint_{G_\gamma} [\psi_x^2 + \psi_y^2 + \nu^2 y^2 + 2\omega y(\psi - 1)] \frac{dx dy}{y} \quad (1.7)$$

на множестве R допустимых пар, удовлетворяющих следующим условиям:

- γ – жорданова дуга, расположенная в $G \cup S$, концами которой служат точки $(0, c)$ и (a, b) , причем все точки γ , за исключением точки $(0, c)$, находятся выше горизонтали $y = c$;
- функция $\psi(x, y)$ непрерывна в замыкании области G_γ , равна единице на γ , нулю на отрезке B и имеет непрерывно дифференцируемые производные в G_γ , причем $J(\psi, \gamma) < \infty$.

Справедлива следующая лемма [34, 36].

Лемма 1.2. Пусть пара (ψ, γ) является классическим решением задачи (1.2) – (1.6). Тогда эта пара будет стационарной для функционала (1.7) на множестве R . Обратно, каждая стационарная пара (ψ, γ) функционала (1.7) на множестве R , где γ – достаточно гладкая кривая без самопересечений, является решением задачи (1.2) – (1.6).

Доказательство. Предположим вначале, что концы свободной границы γ проходят через точки $(0, c)$ и (a, b) . Тогда из формулы первой вариации интегрального функционала с неизвестной областью интегрирования следует

$$\begin{aligned} \delta J(\psi, G_\gamma; \delta\psi, \vec{\delta z}) = & -2 \iint_{G_\gamma} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{y} \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{y} \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) - \omega \right] \delta\psi dx dy + \\ & + 2 \int_{\Gamma_1 \cup \Gamma_2} \frac{1}{y} \frac{\partial \psi}{\partial n} \delta\psi ds + \int_\gamma [v^2 y^2 - \psi_x^2 - \psi_y^2] \frac{(\vec{n}, \vec{\delta z})}{y} ds, \end{aligned}$$

где $\delta\psi$ – вариация функции ψ при неизменной области интегрирования,

$\vec{\delta z} = (\delta x, \delta y)$ – вариация независимых переменных при переходе от области G_γ к некоторой близкой к ней области;

\vec{n} – внешняя нормаль.

Учитывая, что каждая из компонент пары (ψ, γ) может быть проварьирована независимо в пределах допустимости, получаем необходимое утверждение, так как на стационарной паре первая вариация либо обращается в нуль, либо принимает неотрицательные значения [10]. Заметим, что на части γ , совпадающей с S , обязательно выполняется условие $(\vec{n}, \vec{\delta z}) \leq 0$. Отсюда будет следовать, что в этом случае в условии (1.6) имеет место неравенство. Наконец, если концы γ проходят через точки $(0, c), (a, h)$, где $c < h < b$, то функционал (1.7) необходимо рассмотреть на множестве R_h . При этом R_h отличается от R лишь тем, что концы кривой γ проходят через точки $(0, c), (a, h)$ и все ее точки расположены ниже прямой $y = h$ за исключением правого конца (a, h) (величина h заранее неизвестна, более подробно этот случай рассмотрен при доказательстве теоремы существования).

Функционал $J(u^+, u^+, \gamma)$ в классе функций $u_y^\pm(x, y) > 0$ в D_γ^\pm можно представить в виде интегрального функционала, но уже с фиксированной областью интегрирования. Пусть $y_1(x, u)$ и $y_2(x, u)$ – решения уравнений $u^+(x, y) - u^+ = 0$,

$u^-(x, y) - u^- = 0$ соответственно в областях D_γ^+ и D_γ^- , тогда имеем два тождества

$$u(x, y_1(x, u)) = u \text{ и } u(x, y_2(x, u)) = u \text{ из которых находим } u_x = -\frac{y_{kx}}{y_{ku}}, u_y = -\frac{1}{y_{ku}}, k = 1, 2.$$

В терминах функций $y_1(x, u)$ и $y_2(x, u)$ получим

$$J_1(y_1, y_2) = \iint_{\Delta_1} \frac{1 + y_{1x}^2}{y_{1u}} dx dy + k^2 \iint_{\Delta_2} \frac{1 + y_{2x}^2}{y_{2u}} dx du + \\ + \omega_0^+ k^2 \int_1^v (u^2 - 1) [y_{2u}(1, u) + y_{2u}(-1, u)] du + \omega_0^- k^2 \int_0^1 (u^2 - 1) [y_{1u}(1, u) + y_{1u}(-1, u)] du,$$

где $\Delta_1 = (-1 < x < 1, 0 < u < 1)$ и $\Delta_2 = (-1 < x < 1, 1 < u < v)$, $J(u^+, u^-, \gamma) = J_1(y_1, y_2)$.

Далее, из формулы Фридрихса [10], следует

$$J_1(y_1, y_2) = J_1(y_1, y_2) + \frac{d}{d\varepsilon} J_1(y_{1\varepsilon}, y_{2\varepsilon}) \Big|_{\varepsilon=0} + \int_0^1 (1 - \varepsilon) \frac{d^2 J_1(y_{1\varepsilon}, y_{2\varepsilon})}{d\varepsilon^2} d\varepsilon,$$

причем

$$\frac{d^2 J_1(y_{1\varepsilon}, y_{2\varepsilon})}{d\varepsilon^2} = 2 \iint_{\Delta_1} \left[\delta y_{1u}^2 + (y_{1\varepsilon u} \delta y_{1x} - y_{1kx} \delta y_{1u})^2 \right] \frac{dx du}{y_{1\varepsilon u}^3} + 2k^2 \iint_{\Delta_2} \left[\delta y_{2u}^2 + (y_{2\varepsilon u} \delta y_{2x} - y_{2kx} \delta y_{2u})^2 \right] \frac{dx du}{y_{2\varepsilon u}^3},$$

где y_1, y_2 - произвольные допустимые элементы, $y_{1\varepsilon} = y_1 + \varepsilon(y_1 - y_1)$, $y_{2\varepsilon} = y_2 + \varepsilon(y_2 - y_2)$,

$0 \leq \varepsilon \leq 1$; $y_1(x, u)$ и $y_2(x, u)$ - функции, соответствующие классическому решению

(u^+, u^-, γ) задачи (1.1). Второе слагаемое в формуле Фридрихса, являющееся

первой вариацией функционала $J_1(y_1, y_2)$, обратится в ноль. Затем, ввиду того,

что $d^2 J_1(y_{1\varepsilon}, y_{2\varepsilon}) / d\varepsilon^2$ - положительно определённый функционал на вариациях

$\delta y_1 = y_1 - y_1$, $\delta y_2 = y_2 - y_2$, можно установить единственность решения (u^+, u^-, γ)

задачи (1.1) в классе функций $u_y^\pm(x, y) > 0$ в D_γ^\pm .

Далее наличие фиксированной области интегрирования у функционала

$J_1(y_1, y_2)$ позволяет минимизировать его прямыми методами математической

физики. Можно применить метод Ритца, так как нелинейное условие Стефана для

$J_1(y_1, y_2)$ является естественно выполнимым. Аналогичные результаты имеют

место и для задачи (1.2) - (1.6).

Итак, можно заключить, что краевые задачи со свободной границей γ , имеющие вариационную природу в классе функций $u_y(x, y) > 0$ в D_γ , где $u(x, y)$ - искомое решение, допускают построение приближенного решения методом Ритца, так как эти задачи сводятся к минимизации интегрального функционала с фиксированной областью интегрирования.

Вариационный подход позволяет изучить широкий класс задач математической физики на единой методологической основе.

2.2. Математическое моделирование процесса конвективного теплообмена с учетом условия Стефана

Осуществляется анализ проблемы существования гладких решений конвективной задачи Стефана. Пусть Ω – заданная область в R^3 , граница которой состоит из двух замкнутых связных гладких поверхностей Γ^+ и Γ^- , не имеющих пересечений. Пусть, далее, $\Gamma_t (t \in [0, T])$ – гладкие замкнутые поверхности, лежащие внутри Ω , такие, что Γ^+ лежит внутри ограниченной области, границей которой является $\Gamma_t (t \in [0, T])$. Поверхность Γ_t – граница раздела фаз в момент времени t – разбивает область Ω на две связные подобласти Ω_t^+ и Ω_t^- , в которых в каждый момент времени должны выполняться уравнения теплопроводности для неизвестных функций $v^+(x, t)$ и $v^-(x, t)$, описывающих распределение температуры в жидкой и, соответственно, твердой фазах:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v^+}{\partial t}(x, t) + \vec{V}(x, t) \nabla v^+(x, t) - a_+^2 \nabla^2 v^+(x, t) &= 0, \quad x \in \Omega_t^+, \\ \frac{\partial v^-}{\partial t}(x, t) - a_-^2 \nabla^2 v^-(x, t) &= 0, \quad x \in \Omega_t^-, \end{aligned} \tag{1.8}$$

где a_\pm^2 – заданные положительные постоянные, $\vec{V}(x, t)$ – скорость конвективных движений в жидкой фазе, описываемых уравнениями Навье – Стокса и уравнением неразрывности (жидкость предполагается несжимаемой):

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t}(x, t) + (\vec{V} \nabla) \vec{V}(x, t) + \nabla p(x, t) = \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 \vec{V}(x, t) + \vec{f}(v^+), \quad (1.9)$$

$$x \in \Omega_t^+, \quad \nabla \vec{V}(x, t) = 0, \quad x \in \Omega_t^+,$$

дополнительно к уравнениям (1.8) – (1.9) задаются начальные распределения температур $v_0^\pm(x)$ и скоростей $\vec{V}_0(x)$ и условия Дирихле на границах Γ^+ и Γ^- :

$$v^\pm(x, t) |_{x \in \Gamma^\pm} = b^\pm(x, t), \quad \vec{V}(x, t) |_{x \in \partial \Omega_t^+} = 0. \quad (1.10)$$

Кроме того на неизвестных поверхностях $\Gamma_t(t > 0)$ задаются условия изотермичности

$$v^\pm(x, t) |_{x \in \Gamma_t} = 0, \quad (1.11)$$

условие Стефана (закон сохранения энергии)

$$\lambda^- \frac{\partial v^-}{\partial \vec{n}} - \lambda^+ \frac{\partial v^+}{\partial \vec{n}} = Q v_n, \quad (1.12)$$

где v_n – скорость движения поверхности Γ_t по нормали, направленной внутрь области Ω_t^+ .

Схема доказательства существования гладкого решения следующая [34]. Пусть Γ_0 – поверхность раздела фаз в стационарном варианте задачи (1.8), (1.10) – (1.12) без конвекции, разделяющая область Ω на подобласти Ω_0^+ и Ω_0^- . Посредством некоторой замены переменных, обозначаемой e_ρ , зависящей от одного функционального параметра ρ и осуществляющей отображение известных областей Ω_0^\pm на искомые области Ω^\pm в стационарном варианте задачи (1.8) – (1.12), переходим от уравнений в неизвестных областях к уравнениям в фиксированных областях. Функция ρ , задающая упомянутую замену переменных (заранее неизвестная и подлежащая определению), войдет при этом в уравнения (1.8), (1.9) и соотношение (1.12) нелинейным образом. Определим оператор G , который каждой достаточно малой функции ρ , определенной на поверхности Γ_0 , ставит в соответствие функцию $v^\pm |_{\Gamma_0}$, где

v^\pm – решение стационарного варианта задачи (1.8) – (1.12) с заменой соотношения (1.11) на более слабое условие

$$v^+ |_{\Gamma_0} = v^- |_{\Gamma_0}. \quad (1.13)$$

В этом разделе доказываемся, во-первых, корректность такого определения: – существование описанного оператора в пространстве $C^{2+\alpha}(\Gamma_0)$ и $C^{3+\alpha}(\Gamma_0)$. Доказательство проводится в два этапа: сначала доказываемся наличие оператора, действующего в пространстве функций с обобщенными производными, а затем показывается гладкость. С учетом того факта, что стационарная задача Стефана без конвекции получается из стационарной задачи с конвекцией в случае бесконечно большой вязкости ($Re=0, \vec{V}=0$), и с целью применения теоремы о неявной функции изучается также непрерывность описанного отображения G и его гладкость при малых Re , ρ и при малой скорости квазистационарного режима. Непосредственные вычисления позволяют найти явный вид производной Фреше оператора G при $Re=0, \rho=0$ и установить ее обратимость. Из полученных свойств отображения G и теоремы о неявной функции вытекает существование гладкого решения задачи (1.8) – (1.12) [37].

Пусть Ω – заданная область R^3 , граница которой состоит из двух связных компонентов Γ^+ и Γ^- , причем замкнутая поверхность Γ^+ ограничивает непустую область, замыкание которой лежит внутри ограниченной области, границей которой является Γ^- . Поверхности Γ^\pm предполагаются принадлежащими классу $C^{3+\alpha}$ и не имеющими самопересечений.

В области Ω рассмотрим стационарную задачу Стефана с конвекцией

$$\beta(\vec{V}\nabla)v^+(y) = \chi\nabla^2v^+(y) \text{ в } \Omega^+, \quad 0 = \nabla^2v^-(y) \text{ в } \Omega^-, \quad (1.14)$$

где $y=(y_1, y_2, y_3)$, Ω^\pm – области жидкой и твердой фазы соответственно, на которые разбивает область Ω неизвестная («свободная») граница фаз Γ , причем $\partial\Omega^\pm = \Gamma \cup \Gamma^\pm$, т.е. Γ лежит между Γ^+ и Γ^- , ограничивая область, содержащую Γ^+ ,

и Γ предполагается такой, которая не имеет самопересечений и лежит внутри области Ω . Функция $\vec{V}(y) = (V_1(y), V_2(y), V_3(y))$ в (1.14) – скорость конвективных движений в жидкой фазе, описываемых стационарными уравнениями Навье–Стокса и уравнением неразрывности (жидкость предполагается несжимаемой):

$$(\vec{V}\nabla)\vec{V}(y) + \nabla p(y) = \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 \vec{V}(y) + \vec{f}(v^+) \quad \text{в } \Omega^+, \quad \nabla \vec{V}(y) = 0 \quad \text{в } \Omega^+, \quad (1.15)$$

где $p(y)$ – давление, $\vec{f}(v^+) = (f_1(v^+), f_2(v^+), f_3(v^+))$ – сила, зависящая от температуры жидкой фазы $v^+(y)$, Re – число Рейнольдса.

Зададим на границе области Ω^+ условие прилипания для \vec{V}

$$\vec{V}|_{y \in \Gamma \cup \Gamma^+} = 0. \quad (1.16)$$

Граничные же условия для температуры $v^\pm(y)$ примем следующими:

$$v^\pm(y)|_{y \in \Gamma^\pm} = b^\pm(y), \quad (1.17)$$

где $b^\pm(y)$ – заданные функции на Γ^\pm соответственно, принадлежащие там классу $C^{3+\alpha}(\Gamma^\pm)$ и удовлетворяющие условию

$$\pm(b^\pm(y) - 1)|_{y \in \Gamma^\pm} \geq \varepsilon_0 > 0. \quad (1.18)$$

Кроме того, на неизвестной границе Γ должно выполняться условие изотермичности

$$v^\pm(y)|_{\Gamma} = 1, \quad (1.19)$$

а также условие Стефана (закон сохранения энергии)

$$\frac{\partial v^-}{\partial \vec{n}}|_{\Gamma} - \chi \frac{\partial v^+}{\partial \vec{n}}|_{\Gamma} = 0, \quad (1.20)$$

где \vec{n} – единичная нормаль к Γ , направленная в сторону Ω^+ (по направлению градиента $v^+(y)$).

Параметры задачи χ , Re , β предполагаются заданными положительными постоянными, $\vec{f}(v)$ – принадлежащей классу $C^2(R^1)$, т.е. $\vec{f}(v)$ непрерывна в R^1 вместе со своей второй производной, причем считаем $\vec{f}'(v)$ ограниченной. Считаем также, не ограничивая общности, что $\vec{f}(1) = 0$, так как общий случай сводится к указанному путем замены $p(y) = \tilde{p}(y) + (\vec{f}(1), y)$, при этом $\nabla p = \nabla \tilde{p} + \vec{f}(1)$ и вместо $\vec{f}(v)$ в (1.20) имеем функцию $\tilde{\vec{f}}(v) = \vec{f}(v) - \vec{f}(1)$. Заметим также, что замена

$$\tilde{v}^\pm(y) = \begin{cases} \chi v^+(y), & y \in \Omega^+ \quad (v^+ > 1), \\ v^-(y) + \chi - 1, & y \in \Omega^- \quad (v^- < 1), \end{cases}$$

сводит задачу (1.14) – (1.20) к случаю $\chi = 1$, поэтому в дальнейшем можно считать это условие выполненным.

Наряду со стационарной задачей Стефана (1.14) – (1.20), учитывающей конвективные движения в жидкой фазе, рассмотрим задачу Стефана без учета конвекции:

$$\nabla^2 W^\pm(x) = 0 \text{ в } \Omega_0^\pm, \quad x = (x_1, x_2, x_3), \quad (1.20)$$

где Ω_0^\pm – области, на которые разбивает Ω граница раздела фаз Γ_0 ,

$$W^\pm(x)|_{x \in \Gamma^\pm} = b^\pm(x), \quad (1.21)$$

$$W^+|_{\Gamma_0} = w^-|_{\Gamma_0} = 1, \quad (1.22)$$

$$\frac{\partial W^+}{\partial \vec{n}_0}|_{\Gamma_0} - \frac{\partial W^-}{\partial \vec{n}_0}|_{\Gamma_0} = 0, \quad (1.23)$$

где \vec{n}_0 – нормаль к Γ_0 , направленная в сторону Ω_0^+ .

Нетрудно видеть, что сформулированная задача (1.20) – (1.23) получается из задачи (1.14) – (1.20) в случае $\vec{V} = 0$, т.е. в случае бесконечно большой вязкости ($\text{Re} = 0$). Поэтому в дальнейшем под решением задачи (1.14) – (1.20) при $\text{Re} = 0$ будем понимать функции $\vec{V}(x) = 0$ в Ω_0^+ и $v^\pm = W^\pm(x)$ в Ω_0^\pm .

Из условий (1.22) и (1.23) следует, что Γ_0 – не что иное, как линия уровня функции

$$W(x) = \begin{cases} W^+(x), & x \in \Omega_0^+, \\ W^-(x), & x \in \Omega_0^-, \end{cases}$$

удовлетворяющей в Ω уравнению (1.20) и граничным условиям (1.21), т.е. $\Gamma_0 = \{x \in \Omega : W(x) = 1\}$. В силу соотношения (1.18) Γ_0 лежит внутри области Ω , и предполагаем, что Γ_0 представляет собой гладкую поверхность класса $C^{4+\alpha}$, не имеющую самопересечений и располагающуюся относительно Γ^+ и Γ^- аналогично поверхности Γ в задаче (1.14) – (1.20). В этом случае, рассматривая функцию $W(x)$ в одной из областей Ω_0^\pm и принимая во внимание лемму о нормальной производной, видим, что

$$\frac{\partial W}{\partial \vec{n}_0} |_{\Gamma_0} \geq \varepsilon_0 > 0 \quad (1.24)$$

(на самом деле из (1.24) и теоремы о неявной функции следует, что Γ_0 будет принадлежать классу C^∞ , так как этому классу в окрестности Γ_0 принадлежит гармоническая функция $W(x)$).

Заметим, что сформулированные предположения о поверхности Γ_0 есть не что иное, как ограничения на область Ω и функции $b^\pm(x)$.

Глава 2. Приближенный анализ стационарных нелинейных конвективных моделей типа Стефана

§1. Исследование конвективной задачи Стефана на плоскости

1.1. Постановка задачи

Процессы кристаллизации, встречающиеся в природе, сопровождаются конвективными перемешиваниями в жидкой фазе. Ниже будет рассмотрена постановка задачи, в которой конвекция будет вызвана наличием заданного вихря. Основная цель исследования состоит в приближенном анализе свободной границы в зависимости от интенсивности вихря.

Будем рассматривать стационарный случай. Пусть $D = \{-1 < x < 1, H < y < 0\}$ обозначает полосу. Обозначим через γ кривую, отделяющую жидкую фазу D_γ^+ от твердой фазы D_γ^- . Будем считать, что температурное поле монотонно убывает вместе с вертикальной координатой y . Таким образом, в нижней части полосы будет расположена твердая фаза, а в верхней – жидкая. Обе области D_γ^+ и D_γ^- предполагаются односвязными и симметричными относительно оси y . Пусть $\psi(x, y)$ - функция тока удовлетворяющая уравнению

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \mu, \quad (x, y) \in D_\gamma^+, \quad \mu = const, \quad (2.1)$$

где μ считаем заданным достаточно малым численным параметром. Граничным условием для функции ψ является следующее

$$\psi = 0, \quad (x, y) \in \partial D_\gamma^+. \quad (2.2)$$

Если $\mu = 0$, то соответствующая функция тока тождественно исчезает, и таким образом в жидкой фазе никакой конвекции нет. Кроме того, в жидкой фазе, температуру которой обозначим через $u^+(x, y)$, должно выполняться уравнение конвективного теплопереноса

$$\lambda_+ \left(\frac{\partial^2 u^+}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u^+}{\partial y^2} \right) - \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial u^+}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial u^+}{\partial y} = 0, \quad (x, y) \in D_\gamma^+, \quad \lambda_+ = \text{const} > 0. \quad (2.3)$$

Будем предполагать выполненными следующие граничные условия на температуру u^+

$$u^+(x, 0) = \nu, \quad -1 \leq x \leq 1, \quad \nu = \text{const} > 1 \quad (2.4)$$

на вертикальной части границы жидкой фазы выполняется условие третьего рода

$$u_x^+ \pm \omega_0^+ u^+ = 0, \quad x = \pm 1, \quad (x, y) \in \partial D_\gamma^+, \quad (2.5)$$

на свободной границе γ удовлетворяется условие

$$u^+(x, y) = 1, \quad (x, y) \in \gamma. \quad (2.6)$$

Перейдем к описанию твердой фазы. Обозначим через u^- температуру твердой фазы. Она удовлетворяет следующему уравнению

$$\frac{\partial^2 u^-}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u^-}{\partial y^2} = 0, \quad (x, y) \in D_\gamma^-, \quad (2.7)$$

На вертикальной части границы твердой фазы зададим условие третьего рода

$$u_x^- \pm \omega_0^- u^- = 0, \quad x = \pm 1, \quad (x, y) \in \partial D_\gamma^-. \quad (2.8)$$

При $y = H$ будем считать, что

$$u^-(x, H) = 0, \quad (2.9)$$

тогда как на свободной границе

$$u^-(x, y) = 1, \quad (x, y) \in \gamma. \quad (2.10)$$

Если бы кривая γ была заданной, то выписанные соотношения корректно определяли бы задачу. В силу того, что γ подлежит определению, на ней задается еще одно условие, а, именно, закон сохранения энергии

$$\left| \nabla u^- \right|^2 - \kappa^2 \left| \nabla u^+ \right|^2 = 0, \quad (x, y) \in \gamma, \quad \kappa = \text{const}, \quad 0 < \kappa \leq 1. \quad (2.11)$$

Поставленная задача (2.1) – (2.11) нелинейна и «основное» неизвестное это граница γ . Разрешимость подобного класса задач изложена в [38].

Далее в этом разделе предложим метод решения задачи (2.1) – (2.11), состоящий в разложении решения в ряд по степеням малого параметра μ .

1.2. Линеаризация задачи по интенсивности вихря

Предположим, что неизвестные рассматриваемой задачи можно представить в виде степенного ряда по μ

$$\psi(x, y; \mu) = \sum_{\kappa=0}^{\infty} \mu^{\kappa} \psi_{\kappa}(x, y), \quad (2.12)$$

$$u^{+}(x, y; \mu) = \sum_{\kappa=0}^{\infty} \mu^{\kappa} u_{\kappa}^{+}(x, y), \quad (2.13)$$

$$u^{-}(x, y; \mu) = \sum_{\kappa=0}^{\infty} \mu^{\kappa} u_{\kappa}^{-}(x, y). \quad (2.14)$$

Будем считать, что свободная граница γ допускает явное представление

$$y = y(x; \mu), \quad -1 \leq x \leq 1, \quad (2.15)$$

причем

$$y(x, \mu) = \sum_{\kappa=0}^{\infty} \mu^{\kappa} y_{\kappa}(x), \quad -1 \leq x \leq 1. \quad (2.16)$$

Подставляя эти разложения в соотношения (2.1) – (2.11) и приравнивая друг другу члены при одинаковых степенях μ , получаем бесконечное число задач. Выпишем вначале нулевое приближение, соответствующее μ в нулевой степени. Прежде всего, из уравнения (2.1) получаем, что функция $\psi_0(x, y)$ гармонична. Так как она удовлетворяет нулевым граничным условиям Дирихле, то $\psi_0(x, y) \equiv 0$ в $\overline{D_{\gamma}^{+}}$.

Выпишем условия, определяющие u_0^{\pm}

$$\frac{\partial^2 u_0^{\pm}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_0^{\pm}}{\partial y^2} = 0, \quad (x, y) \in D_{\gamma_0}^{\pm}, \quad (2.17)$$

$$u_0^+(x, 0) = \nu, \quad -1 \leq x \leq 1, \quad (2.18)$$

$$u_{0x}^\pm(x, y) \pm \omega_0^\pm u_0^\pm(x, y) = 0, \quad x = \pm 1, \quad (x, y) \in \partial D_{\gamma_0}^\pm, \quad (2.19)$$

$$u_0^\pm(x, y) = 1, \quad (x, y) \in \gamma_0, \quad (2.20)$$

$$u_0^-(x, H) = 0, \quad -1 \leq x \leq 1, \quad (2.21)$$

$$|\nabla u_0^-|^2 - \kappa^2 |\nabla u_0^+|^2 = 0, \quad (x, y) \in \gamma_0. \quad (2.22)$$

Задача (2.17) – (2.22) была рассмотрена в статьях [38, 39]. Из результатов этих работ следует, что задача имеет и притом единственное классическое решение в классе функций $u_{0y}^+ > 0$ и $u_{0y}^- > 0$ в $D_{\gamma_0}^+$ и $D_{\gamma_0}^-$ соответственно. При этом граница γ_0 является аналитической кривой, монотонно возрастающей в правой половине, а функции $u_0^+(x, y)$, $u_0^-(x, y)$ непрерывны в $\overline{D_{\gamma_0}^+}$ и $\overline{D_{\gamma_0}^-}$ соответственно и непрерывно дифференцируемы всюду, за исключением угловых точек.

Рассмотрим частный случай нашей задачи

$$\kappa = 1, \quad \omega_0^+ = \omega_0^- = \omega_0. \quad (2.23)$$

При этом первое условие всегда выполнимо, если ввести замену

$$\tilde{u}^\pm = \begin{cases} \kappa u^+(x, y), & (x, y) \in D_\gamma^+ \\ u^-(x, y) + \kappa - 1, & (x, y) \in D_\gamma^-, \end{cases}$$

приводящую задачу (2.17) – (2.22) к случаю $\kappa = 1$. Тогда на γ_0 будут выполняться два условия $u_0^+ = u_0^- = 1$, $|\nabla u_0^+| = |\nabla u_0^-|$.

Следовательно, теперь (2.17) – (2.22) есть обычная задача о распределении температуры в области D без фазовых превращений вещества, значит можно построить функцию $u_0(x, y)$ по формуле

$$u_0(x, y) = \begin{cases} u_0^+(x, y), & (x, y) \in \overline{D_{\gamma_0}^+} \\ u_0^-(x, y), & (x, y) \in \overline{D_{\gamma_0}^-}, \end{cases} \quad (2.24)$$

которая является решением задачи:

$$\begin{aligned} \Delta u_0 = 0, \quad (x, y) \in D; \quad u_0(x, y) = \nu, \quad 0 \leq x \leq 1; \quad u_{0x}(0, y) = 0, \quad H \leq y \leq 0; \\ u_0(x, H) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1; \quad u_{0x}(1, y) + \omega_0 u_0(1, y) = 0, \quad H \leq y \leq 0. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Функция $u_0(x, y)$ может быть эффективно найдена, например, при помощи метода Фурье. Относительно функции $u_0(x, y)$ можно заключить, что $u_{0y}(x, y) > 0$ в D [40]. Следовательно, уравнение $u_0(x, y) - 1 = 0$, $(x, y) \in D$ всегда разрешимо в виде некоторой функции $y = y_0(x)$, которая задает кривую γ_0 , т.е. $\gamma_0 : y = y_0(x)$, $-1 \leq x \leq 1$.

Справедливо утверждение [40].

Лемма 2.1. Пусть выполнены условия (2.23). Тогда функция $u_0(x, y)$, определенная соотношениями (2.24), (2.25) является нулевым приближением (по интенсивности вихря μ) задачи (2.1) – (2.11). При этом $u_{0y}(x, y) > 0$ в D и $u_0(x, y)$ непрерывна вместе с производными при переходе через γ_0 , где $\gamma_0 : y = y_0(x)$, $-1 \leq x \leq 1$ - решение уравнения $u_0(x, y) - 1 = 0$.

1.3. Первое приближение

Выпишем сейчас ту краевую задачу, соответствующую множителю μ в первой степени. Из условий (2.1) - (2.11) и из разложений (2.12) - (2.16) для функций $\psi_1(x, y)$ и $u_1^\pm(x, y)$ вытекает задача

$$\psi_{1xx} + \psi_{1yy} = 1, \quad (x, y) \in D_{\gamma_0}^+, \quad (2.26)$$

$$\psi_1(x, y) = 0, \quad (x, y) \in \partial D_{\gamma_0}^+, \quad (2.27)$$

$$\lambda_+ (u_{1xx}^+ + u_{1yy}^+) - \psi_{1y} u_{0x}^+ + \psi_{1x} u_{0y}^+ = 0, \quad (x, y) \in D_{\gamma_0}^+, \quad (2.28)$$

$$u_1^+(x, 0) = 0, \quad -1 \leq x \leq 1, \quad (2.29)$$

$$u_{1x}^\pm \pm \omega_0^\pm u_1^\pm = 0, \quad x = \pm 1, \quad (x, y) \in \partial D_{\gamma_0}^\pm, \quad (2.30)$$

$$u_{0y}^\pm y_1(x) + u_1^\pm \Big|_{\gamma_0} = 0, \quad (2.31)$$

$$u_{1xx}^- + u_{1yy}^- = 0, \quad (x, y) \in D_{\gamma_0}^-, \quad (2.32)$$

$$u_1^-(x, H) = 0, \quad -1 \leq x \leq 1. \quad (2.33)$$

Кроме того, на γ_0 должно выполняться условие

$$y_1(x) \left[(u_{0x}^- u_{0xy}^- + u_{0y}^- u_{0yy}^-) - \kappa^2 (u_{0x}^+ u_{0xy}^+ + u_{0y}^+ u_{0yy}^+) \right] + \left[u_{0x}^- u_{1x}^- + u_{0y}^- u_{1y}^- \right] - \kappa^2 \left[u_{0x}^+ u_{1x}^+ + u_{0y}^+ u_{1y}^+ \right] = 0, \quad (x, y) \in \gamma_0. \quad (2.34)$$

Получившееся первое приближение имеет следующие характерные черты. Во-первых, эта задача линейна, во-вторых, ее нужно решать в известной области, соответствующей нулевому приближению. После того, когда функции $u_0^\pm(x, y)$ и $\psi_1(x, y)$ определены в областях $D_{\gamma_0}^\pm$ соответственно из соотношений (2.28) – (2.34) находим функции $u_1^\pm(x, y)$, заданные в тех же областях $D_{\gamma_0}^\pm$ и $y_1(x)$, $-1 \leq x \leq 1$.

1.4. Построение нулевого приближения вариационным методом

Задача (2.17) – (2.22) эквивалентна проблеме минимума следующего интегрального функционала

$$I(u^+, u^-, \gamma_0) = \iint_{D_{\gamma_0}^-} [u_x^{-2} + u_y^{-2}] dx dy + \kappa^2 \iint_{D_{\gamma_0}^+} [u_x^{+2} + u_y^{+2}] dx dy + \kappa^2 \omega_0^+ \int_{\Gamma_\gamma^+} [u^{+2} - 1] dy + \omega_0^- \int_{\Gamma_\gamma^-} [u^{-2} - 1] dy \quad (2.35)$$

на соответствующем множестве допустимых функций [41], где $\Gamma_\gamma^+ = \partial D_{\gamma_0}^+ \cap \{x = \pm 1\}$, $\Gamma_\gamma^- = \partial D_{\gamma_0}^- \cap \{x = \pm 1\}$. Следуя методике Фридрихса [10], представим функционал (2.35) в классе функций $u_y^\pm > 0$ в D_γ^\pm следующим образом [41]

$$I_1(y_1, y_2) = \iint_{\Delta_1} \frac{1 + y_{1x}^2}{y_{1u}} dx du + \kappa^2 \iint_{\Delta_2} \frac{1 + y_{2x}^2}{y_{2u}} dx du + \omega_0^+ \kappa^2 \int_1^v (u^2 - 1) [y_{2u}(1, u) + y_{2u}(-1, u)] du + \omega_0^- \int_0^1 (u^2 - 1) [y_{1u}(1, u) + y_{1u}(-1, u)] du, \quad (2.36)$$

где $\Delta_1 = (-1 < x < 1, 0 < u < 1)$, $\Delta_2 = (-1 < x < 1, 1 < u < v)$, $y_1(x, u)$ и $y_2(x, u)$ - решения уравнений $u_1(x, y) - u_1 = 0$, $u_2(x, y) - u_2 = 0$ соответственно. Функционал (2.35) будем минимизировать на множестве допустимых функций

$$\Omega = \Omega_1 \oplus \Omega_2, \quad (2.37)$$

$$\text{где } \Omega_1 = \left\{ y_1(x, u) : y_1(x, u) \in C^1(\bar{\Delta}_1), \min_{(x, u) \in \Delta_1} y_{1u} > 0, y_1(x, 0) = H, y_1(x, 1) = y_2(x, 1) \right\},$$

$$\Omega_2 = \left\{ y_2(x, u) : y_2(x, u) \in C^1(\bar{\Delta}_2), \min_{(x, u) \in \Delta_2} y_{2u} > 0, y_2(x, v) = 0, y_1(x, 1) = y_2(x, 1) \right\}.$$

Далее, пусть функции $y_1^*(x, u)$, $y_2^*(x, u)$ соответствуют классическому решению (u^+, u^-, γ) задачи (2.17) – (2.22). Справедлива лемма [40].

Лемма 2.2. Пара функций y_1^* , y_2^* доставляет наименьшее значение функционалу (2.35) на множестве (2.37).

Доказательство. Используя формулу Фридрихса [10], получим

$$I_1(y_1, y_2) = I_1(y_1^*, y_2^*) + \frac{d}{d\varepsilon} I_1(y_{1\varepsilon}, y_{2\varepsilon}) \Big|_{\varepsilon=0} + \int_0^1 (1-\varepsilon) \frac{d^2 I_1(y_{1\varepsilon}, y_{2\varepsilon})}{d\varepsilon^2} d\varepsilon,$$

$$\text{где } \frac{d^2 I_1(y_{1\varepsilon}, y_{2\varepsilon})}{d\varepsilon^2} = 2 \iint_{\Delta_1} [\delta y_{1u}^2 + (y_{1\varepsilon u} \delta y_{1x} - y_{1\varepsilon x} \delta y_{1u})^2] \frac{dx du}{y_{1\varepsilon u}^3} + 2 \iint_{\Delta_2} [\delta y_{2u}^2 + (y_{2\varepsilon u} \delta y_{2x} - y_{2\varepsilon x} \delta y_{2u})^2] \frac{dx du}{y_{2\varepsilon u}^3},$$

(y_1, y_2) - произвольный элемент из Ω , $y_{1\varepsilon} = y_1^* + \varepsilon(y_1 - y_1^*)$, $y_{2\varepsilon} = y_2^* + \varepsilon(y_2 - y_2^*)$, $0 \leq \varepsilon \leq 1$. Так как первая вариация функционала $I_1(y_1, y_2)$, вычисленная на элементе (y_1^*, y_2^*) , обращается в ноль, то пара (y_1^*, y_2^*) доставляет наименьшее значение функционалу (2.36) на множестве (2.37), так как $d^2 I_1 / d\varepsilon^2$ - положительно определенный функционал на вариациях $\delta y_1 = y_1 - y_1^*$, $\delta y_2 = y_2 - y_2^*$. Лемма доказана. Минимизируем функционал (2.36) на множестве (2.37) при помощи сумм

$$y_{1n}(x, u; a_{\kappa j}) = y_{1n}(x, u) = \sum_{j=0}^L \sum_{\kappa=1}^{T_j} a_{\kappa j} x^{2j} u^\kappa + H, \quad (x, u) \in \bar{\Delta}_1,$$

$$y_{2n}(x, u; b_{\kappa j}) = y_{2n}(x, u) = \frac{v-u}{v-1} \sum_{j=0}^L \sum_{\kappa=0}^{\Theta_j} b_{\kappa j} x^{2j} u^\kappa, \quad (x, u) \in \bar{\Delta}_2, \quad n = \sup_{0 \leq j \leq L} \{2j + T_j; 2j + \Theta_j\}. \quad (2.38)$$

Включение $(y_{1n}, y_{2n}) \in \Omega$ выделяет в евклидовом пространстве E_r коэффициентов $(a_{\kappa j}; b_{\kappa j})$ область допустимости Ω_r , где

$$r = \sum_{j=0}^L (T_j + \Theta_j + 1), \quad \Omega_r = \tilde{\Omega}_1 \oplus \tilde{\Omega}_2 \cap E^0, \quad \tilde{\Omega}_1 = \left\{ a_{\kappa j} : \min_{(x,u) \in \Delta_1} y_{1nu} > 0 \right\}, \quad \tilde{\Omega}_2 = \left\{ b_{\kappa j} : \min_{(x,u) \in \Delta_2} y_{2nu} > 0 \right\},$$

при этом коэффициенты $(a_{\kappa j}, b_{st})$ должны лежать в гиперплоскостях

$$E_0^0 : H + \sum_{\kappa=1}^{T_0} a_{\kappa 0} = \sum_{\kappa=0}^{\Theta_0} b_{\kappa 0}, \quad E_j^0 : \sum_{\kappa=1}^{T_j} a_{\kappa j} = \sum_{\kappa=0}^{\Theta_j} b_{\kappa j}, \quad \text{т.е. } E^0 = E_0^0 \oplus E_1^0 \oplus \dots \oplus E_L^0.$$

Неизвестные коэффициенты $(a_{\kappa j}, b_{st})$ и множитель Лагранжа λ_t определяются из нелинейной системы Ритца

$$\begin{aligned} \frac{\partial I_2(a_{\kappa j}, b_{\kappa j})}{\partial a_{pq}} + \lambda_q &= 0, \quad p = 1, 2, \dots, T_q; q = 0, 1, \dots, L, \\ \frac{\partial I_2(a_{\kappa j}, b_{\kappa j})}{\partial b_{st}} - \lambda_t &= 0, \quad s = 0, 1, \dots, \Theta_t; t = 0, 1, \dots, L, \\ \sum_{\kappa=1}^{T_0} a_{\kappa 0} - \sum_{\kappa=0}^{\Theta_0} b_{\kappa 0} + H &= 0, \quad \sum_{\kappa=1}^{T_j} a_{\kappa j} - \sum_{\kappa=0}^{\Theta_j} b_{\kappa j} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, L, \\ I_2(a_{\kappa j}, b_{\kappa j}) &= I_1 \left(\sum_{j=0}^L \sum_{\kappa=1}^{T_j} a_{\kappa j} x^{2j} u^\kappa + H; \frac{\nu - u}{\nu - 1} \sum_{j=0}^L \sum_{\kappa=0}^{\Theta_j} b_{\kappa j} x^{2j} u^\kappa \right). \end{aligned} \quad (2.39)$$

Можно установить, что функция $I_2(a_{\kappa j}, b_{\kappa j})$ принимает свое наименьшее значение в некоторой внутренней точке $(a_{\kappa j}^*, b_{\kappa j}^*)$ множества Ω_r , лежащей на конечном расстоянии от начала координат пространства E_r [42]. Следовательно, в точке $(a_{\kappa j}^*, b_{\kappa j}^*)$ частные производные первого порядка соответствующей функции Лагранжа обращаются в ноль. Таким образом, система уравнений (2.39) имеет решение.

Итак, решив систему уравнений (2.39) при каждом n , можно затем построить последовательность приближений (2.38) в виде $y_{1n}(x, u; a_{\kappa j}^*) = y_{1n}^*$, $y_{2n}(x, u; a_{\kappa j}^*) = y_{2n}^*$.

Лемма 2.3. Приближения y_{1n}^*, y_{2n}^* , построенные по методу Ритца, образуют минимизирующую последовательность для функционала (2.36) на множестве (2.37).

Доказательство. Пусть пара y_1^*, y_2^* доставляет наименьшее значение функционалу (2.36) на множестве (2.37). При этом справедливы представления

$y_1^*(x,u) = u\eta_1(x,u) + H$, $y_2^*(x,u) = (v-u)\eta_2(x,u) = \frac{v-u}{v-1}\tilde{\eta}_2(x,u)$, где $\eta_1 \in C^1(\bar{\Delta}_1)$, $\tilde{\eta}_2 \in C^1(\bar{\Delta}_2)$,

$\eta_1(x,0) \neq 0$, $\eta_2(x,v) \neq 0$. В силу теоремы Вейерштрасса функции $\eta_1(x,u)$ и $\tilde{\eta}_2(x,u)$ могут быть аппроксимированы многочленами в норме пространств $C^1(\bar{\Delta}_1)$ и $C^1(\bar{\Delta}_2)$ соответственно. Возьмем произвольное число $\varepsilon > 0$ и пусть $P_n(x,u)$, $Q_n(x,u)$ многочлены такие, что $\|\eta_1(x,u) - P_n(x,u)\|_{C^1(\bar{\Delta}_1)} < \varepsilon$, $\|\tilde{\eta}_2(x,u) - Q_n(x,u)\|_{C^1(\bar{\Delta}_2)} < \varepsilon$.

Тогда

$$\begin{aligned} \|y_1^*(x,u) - uP_n(x,u) - H\|_{C^1(\bar{\Delta}_1)} &= \|u[\eta_1(x,u) - P_n(x,u)]\|_{C^1(\bar{\Delta}_1)} < C\varepsilon, \\ \|y_2^*(x,u) - \frac{v-u}{v-1}Q_n(x,u)\|_{C^1(\bar{\Delta}_1)} &= \left\| \frac{v-u}{v-1}[\tilde{\eta}_2(x,u) - Q_n(x,u)] \right\|_{C^1(\bar{\Delta}_1)} < C\varepsilon, \end{aligned}$$

где C - некоторая положительная постоянная. Покажем, что функции

$f_1 = uP_n(x,u) + H$, $f_2 = \frac{v-u}{v-1}Q_n(x,u)$ можно считать допустимыми, т.е. $f_1 \in \Omega_1$,

$f_2 \in \Omega_2$. Действительно, если $f_1(x,1) \neq f_2(x,1)$, тогда положив

$$H + \sum_{\kappa=1}^{T_0} a_{\kappa 0} - \sum_{\kappa=0}^{\Theta_0} b_{\kappa 0} = \varepsilon_0, \quad \sum_{\kappa=0}^{T_j} a_{\kappa j} - \sum_{\kappa=1}^{\Theta_j} b_{\kappa j} = \varepsilon_j, \quad \tilde{a}_{T_j j} = a_{T_j j} - \varepsilon_j, \quad \tilde{a}_{T_0 0} = a_{T_0 0} - \varepsilon_0, \quad a_{\kappa j} = \tilde{a}_{\kappa j},$$

(если $\kappa \neq T_j$, $j=1,2,\dots,L$), построим многочлен $\tilde{P}_n(x,u)$ такой, что $\tilde{f}_1(x,1) = f_2(x,1)$, где

$$\tilde{f}_1(x,u) = u\tilde{P}_n(x,u) + H = \sum_{j=0}^L \sum_{\kappa=1}^{T_j} \tilde{a}_{\kappa j} x^{2j} u^\kappa + H, \quad \text{при этом норма } \|f_1 - \tilde{f}_1\|_{C^1(\bar{\Delta}_1)} \text{ достаточно}$$

мала, так как изначально все величины ε_j можно выбрать малыми.

Итак, получаем $f_1 \in \Omega_1$, $f_2 \in \Omega_2$.

Далее, действуя аналогично [40], построим цепочку неравенств $I_1(y_{1n}^*, y_{2n}^*) - d \leq I_1(y_{1n}, y_{2n}) - d \leq I_1(y_{1n}, y_{2n}) - I_1(y_1^*, y_2^*) < \tilde{\varepsilon}$, где d - наименьшее значение

функционала (2.36) на множестве (2.37), $y_{1n} = u\tilde{P}_n(x,u) + H$, $y_{2n} = \frac{v-u}{v-1}Q_n(x,u)$, а

$d = I_1(y_1^*, y_2^*)$ в силу леммы 2.1. Отсюда, ввиду произвольности числа $\tilde{\varepsilon}$, следует утверждение леммы [40].

Используя тождество $y \equiv y(x, u(x, y))$ получим формулы

$$u_x = -\frac{y_x}{y_u}, \quad u_y = \frac{1}{y_u}, \quad u_{xx} = -\left(\frac{y_x}{y_u}\right)'_x + \left(\frac{y_x}{y_u}\right)'_u \frac{y_x}{y_u}, \quad u_{yy} = \left(\frac{1}{y_u}\right)'_u \frac{1}{y_u}.$$

В терминах функций $y_1(x, u)$, $y_2(x, u)$ задача (2.1) – (2.11) переписется следующим образом:

$$\begin{aligned} -\left(\frac{y_{1x}}{y_{1u}}\right)'_x + \left(\frac{y_{1x}}{y_{1u}}\right)'_u \frac{y_{1x}}{y_{1u}} + \left(\frac{1}{y_{1u}}\right)'_u \frac{1}{y_{1u}} &= 0, \quad (x, u) \in \Delta_1; \quad y_1(x, \nu) = 0, \quad -1 \leq x \leq 1; \\ -\frac{y_{1x}}{y_{1u}} \pm \omega_0^+ u &= 0, \quad x = \pm 1, \quad 1 \leq u \leq \nu; \\ -\left(\frac{y_{2x}}{y_{2u}}\right)'_x + \left(\frac{y_{2x}}{y_{2u}}\right)'_u \frac{y_{2x}}{y_{2u}} + \left(\frac{1}{y_{2u}}\right)'_u \frac{1}{y_{2u}} &= 0, \quad (x, u) \in \Delta_2, \quad y(x, 0) = H, \quad -1 \leq x \leq 1; \\ -\frac{y_{2x}}{y_{2u}} \pm \omega_0^- u &= 0, \quad x = \pm 1, \quad 0 \leq u \leq 1; \quad y_1(x, 1) = y_2(x, 1), \quad \frac{y_{1x}^2}{y_{1u}^2} + \frac{1}{y_{1u}^2} = \kappa^2 \left(\frac{y_{2x}^2}{y_{2u}^2} + \frac{1}{y_{2u}^2} \right), \quad u = 1. \end{aligned}$$

Очевидно, что решение этой задачи будет зависеть от параметров ω^+ , ω^- и κ : $y_1 = y_1(x, u; \omega_0^+, \omega_0^-, \kappa)$, $y_2 = y_2(x, u; \omega_0^+, \omega_0^-, \kappa)$. Исследуем зависимость коэффициентов Ритца a_{kj} и b_{kj} от параметров ω_0^+ , ω_0^- и κ .

Лемма 2.4. Пусть система Ритца (2.39) имеет решение при некоторых значениях параметров $\omega_0^+ = \tilde{\omega}_0^+$, $\omega_0^- = \tilde{\omega}_0^-$, $\kappa = \tilde{\kappa}$. Тогда решения этой системы $a_{kj}(\omega^+, \omega_0^-, \kappa)$, $b_{kj}(\omega_0^+, \omega_0^-, \kappa)$ непрерывно зависят от параметров ω_0^+ , ω_0^- , κ в некоторой окрестности точки $(\tilde{\omega}_0^+, \tilde{\omega}_0^-, \tilde{\kappa})$.

Доказательство проводится аналогично тому, как это сделано в [34].

Последовательность функций $y_{1n}(x, u)$, $y_{2n}(x, u)$, построенная при помощи метода Ритца, позволяет приближенно для задачи (2.17) – (2.22) найти свободную границу γ_n и линии уровня $y_{1n}(x, c)$, $y_{2n}(x, c)$ функций $u_{1n}(x, y)$, $u_{2n}(x, y)$ соответственно. При этом имеем

$$\begin{aligned} y_{1n}(x, c) &= \sum_{j=0}^L \sum_{\kappa=1}^{T_j} a_{\kappa j} x^{2j} c^\kappa + H, \quad 0 \leq c \leq 1, \quad y_{2n}(x, c) = \frac{\nu - c}{\nu - 1} \sum_{j=0}^L \sum_{\kappa=0}^{\Theta_j} b_{\kappa j} x^{2j} c^\kappa, \quad 1 \leq c \leq \nu, \\ \frac{\partial u_{1n}}{\partial x} &= -\frac{\partial y_{1n}}{\partial x} \Big/ \frac{\partial y_{1n}}{\partial u}, \quad \frac{\partial u_{1n}}{\partial y} = 1 \Big/ \frac{\partial y_{1n}}{\partial u}, \quad \frac{\partial u_{2n}}{\partial x} = -\frac{\partial y_{2n}}{\partial x} \Big/ \frac{\partial y_{2n}}{\partial u}, \quad \frac{\partial u_{2n}}{\partial y} = 1 \Big/ \frac{\partial y_{2n}}{\partial u}, \end{aligned}$$

где $(u_{1n}, u_{2n}, \gamma_n)$ - приближенное решение задачи (2.17) – (2.22).

Построим в области D функции $u_n(x, y)$ следующим образом

$$u_n(x, y) = \begin{cases} u_{1n}(x, y), & (x, y) \in \overline{D_{\gamma_n}^+} \\ u_{2n}(x, y), & (x, y) \in D_{\gamma_n}^+. \end{cases} \quad (2.40)$$

Перейдем теперь к исследованию сходимости приближений (2.38) [40].

Теорема 2.1. Пусть выполнены предположения (2.23). Тогда последовательность приближений (2.40) сходится к решению $u_0(x, y)$ задачи (2.17) – (2.22) по норме в $W_2^1(D)$, $W_2^1(D_{\gamma_0}^+)$ и $W_2^1(D_{\gamma_0}^-)$.

Доказательство. Последовательность многочленов (2.38), коэффициенты которых удовлетворяют системе (2.39), образует минимизирующую последовательность y_{1n}, y_{2n} для функционала (2.36) на множестве (2.37). Следовательно, имеем $\varepsilon_n = I_1(y_{1n}, y_{2n}) - I_1(y_1^*, y_2^*) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, так как, согласно лемме 2.2, пара (y_1^*, y_2^*) доставляет наименьшее значение функционалу $I_1(y_1, y_2)$ на множестве Ω .

Далее, последовательности (y_{1n}, y_{2n}) в плоскости (x, u) соответствуют последовательности (u_{1n}, u_{2n}) в плоскости (x, y) . Тогда имеем

$$\tilde{I}(u_0 + \eta) = \tilde{I}(u_0) + \tilde{I}(\eta) + 2\tilde{I}(u_0, \eta), \quad \eta = u_n - u_0,$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{I}(u_0) &= \iint_D |\nabla u_0|^2 dx dy + \omega_0 \int_H^0 [(u_0^2(1, y) - 1) + (u_0^2(-1, y) - 1)] dy, \\ \tilde{I}(\eta) &= \iint_D |\nabla \eta|^2 dx dy + \omega_0 \int_H^0 [(\eta^2(1, y) - 1) + (\eta^2(-1, y) - 1)] dy, \\ \tilde{I}(u_0, \eta) &= 2 \iint_D (u_{0,x} \eta_x + u_{0,y} \eta_y) dx dy + 2\omega_0 \int_H^0 [u_0(1, y)\eta + u_0(-1, y)\eta] dy. \end{aligned}$$

Учитывая, что $\tilde{I}(u_0 + \eta) - \tilde{I}(u_0) = I_1(y_{1n}, y_{2n}) - I_1(y_1^*, y_2^*) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ и $I(u_0, \eta) = 0$, получим утверждение теоремы.

Замечание 1. Учитывая, что функции y_{1n} и y_{2n} в силу леммы 2.4 непрерывно зависят от ω_0^+, ω_0^- и κ в некоторой окрестности точки $\omega_0^+ = \omega_0, \omega_0^- = \omega_0$ и $\kappa = 1$, тогда и утверждение теоремы сохранит смысл в некоторой малой окрест-

ности $U(\omega_0, \omega_0, 1)$ в пространстве параметров $(\omega_0^+, \omega_0^-, \kappa)$. Следовательно, получим сходимость u_n по норме в $W_2^1(D), W_2^1(D_{\gamma_0}^+)$ и $W_2^1(D_{\gamma_0}^-)$ для всех $(\omega_0^+, \omega_0^-, \kappa) \in U(\omega_0, \omega_0, 1)$.

1.5. Исследование первого приближения

Далее рассмотрим первое приближение $(\psi_1, u_1^+, u_1^-, \gamma_1)$ задачи (2.1) – (2.11). В силу свойств непрерывности функции $u_0(x, y)$ и ее производных на γ условие (2.34) можно записать в виде

$$u_{0x}u_{1x}^- + u_{0y}u_{1y}^- = u_{0x}u_{1x}^+ + u_{0y}u_{1y}^+, \quad (x, y) \in \gamma_0. \quad (2.41)$$

Кроме того, на γ_0 как и раньше должно выполняться условие

$$u_1^+ = u_1^-, \quad (x, y) \in \gamma_0. \quad (2.42)$$

Покажем, что на γ_0 справедливы равенства

$$u_{1x}^+ = u_{1x}^-, \quad u_{1y}^+ = u_{1y}^-, \quad (x, y) \in \gamma_0. \quad (2.43)$$

Действительно, дифференцируя соотношение (2.42) по x , получим $u_{1x}^- + u_{1y}^- y_0'(x) = u_{1x}^+ + u_{1y}^+ y_0'(x)$. Учитывая, что $u_{0x} + u_{0y} y_0'(x) = 0$, на γ_0 , получим

$$u_{0y}u_{1x}^- - u_{0x}u_{1y}^- = u_{0y}u_{1x}^+ - u_{0x}u_{1y}^+, \quad (2.44)$$

где воспользуемся непрерывностью функции $u_0(x, y)$ и ее производных на γ_0 .

Тогда из соотношений (2.41) и (2.44) следует

$$\begin{cases} u_{0x}(u_{1x}^- - u_{1x}^+) + u_{0y}(u_{1y}^- - u_{1y}^+) = 0 \\ u_{0y}(u_{1x}^- - u_{1x}^+) - u_{0x}(u_{1y}^- - u_{1y}^+) = 0. \end{cases}$$

Рассматривая эти равенства, как уравнения относительно $(u_{1x}^- - u_{1x}^+)$ и $(u_{1y}^- - u_{1y}^+)$, получим $u_{1x}^- - u_{1x}^+ = 0, u_{1y}^- - u_{1y}^+ = 0, (x, y) \in \gamma_0$, так как определитель этой системы $\Delta = -(u_{0x}^2 + u_{0y}^2)$ отличен от нуля в D . Следовательно, равенства (2.43) справедливы.

Таким образом, в силу соотношений (2.42) и (2.43) для первого приближения можно ввести функцию $u_1(x, y)$ по следующей формуле

$$u_1(x, y) = \begin{cases} u_1^+(x, y), & (x, y) \in \overline{D_{\gamma_0}^+} \\ u_1^-(x, y), & (x, y) \in D_{\gamma_0}^- \end{cases} \quad (2.45)$$

Очевидно, что эта функция является решением такой задачи

$$\begin{aligned} \Delta u &= f(x, y), \quad (x, y) \in D; \quad u(x, 0) = 0, \quad u(x, H) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1, \\ u_x(0, y) &= 0, \quad H \leq y \leq 0; \quad u_x + \omega_0 u = 0, \quad x = 1, \quad H \leq y \leq 0, \end{aligned} \quad (2.46)$$

где $f(x, y) = \psi_{1y} u_{0x} - \psi_{1x} u_{0y}$ при $(x, y) \in D_{\gamma_0}^+$ и $f(x, y) = 0$ при $(x, y) \in D_{\gamma_0}^-$. Итак, доказана лемма [40].

Лемма 2.5. Пусть выполнены условия (2.23). Тогда функция $u_1(x, y)$ является решением задачи (2.26) – (2.34). При этом функции $u_1(x, y)$, $u_1^+(x, y)$ и $u_1^-(x, y)$ связаны между собой равенством (2.45).

Зная функции $u_0(x, y)$ и $u_1(x, y)$, из соотношения (2.31) находим $y_1(x) = -\frac{u_1(x, y)}{u_{0y}(x, y)}$, $(x, y) \in \gamma_0$.

Следовательно, при малых μ получим представление

$$y(x, \mu) = y_0(x) + \mu y_1(x) + O(\mu) = y_0(x) - \mu \frac{u_1(x, y)}{u_{0y}(x, y)} + O(\mu), \quad (x, y) \in \gamma_0. \quad (2.47)$$

Соотношение (2.47) позволяет в первом приближении исследовать зависимость свободной границы γ от μ и выявить насколько существенно конвекция влияет на геометрию фронт кристаллизации [44].

Теорема 2.2. Пусть величина μ достаточно мала и пусть имеет место соотношение (2.23). Тогда справедливо представление (2.47), где функции $u_0(x, y)$ и $u_1(x, y)$ являются решениями задач (2.26) и (2.46) соответственно, а $y_0(x)$ - решение уравнения $u_0(x, y) - 1 = 0$ в классе функций $u_{0y} > 0$ в D .

Замечание 2. В общем случае, когда условие (2.23) не выполняется, вместо формулы (2.47) при малых μ применяется следующее представление

$$y(x, \mu) = y_0(x) + \mu y_1(x) + O(\mu) = y_0(x) - \mu \frac{u_1^\pm(x, y)}{u_{0y}^\pm(x, y)} + O(\mu), \quad (x, y) \in \gamma_0,$$

где $u_1^+(x) = u(x)$ при $x \in \overline{\Omega_0^+}$ и $u_1^-(x) = u(x)$ при $x \in \overline{\Omega_0^-}$, $u(x)$ - решение задачи

$$\Delta u = f(x, y), (x, y) \in D; u(x, 0) = 0, u(x, H) = 0; u_x(0, y) = 0, H \leq y \leq 0;$$

$$u_x + \omega_0^\pm u = 0; x = 1, (x, y) \in \partial D_\gamma^\pm \setminus \gamma.$$

1.6 Приближенный анализ влияния конвекции на фронте кристаллизации

Численный анализ не осуществляется на основании формулы (2.47). При этом будет исходить, что в некоторых реальных процессах, например, при ЭШП скорость конвекции и её вихрь являются достаточно малыми величинами, поэтому формула (2.47) применима. Далее в качестве функции $u_0(x, y)$, берется решение задачи (2.25), которое может быть эффективно построено методом Фурье:

$$u_0(x, y) = 2\omega_0 \nu \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos \lambda_n x \cdot \cos \lambda_n [e^{-\lambda_n(y-H)} - e^{\lambda_n(y-H)}]}{\lambda_n^2 \left[1 + \omega_0 \frac{\cos^2 \lambda_n}{\lambda_n^2} \right] [e^{\lambda_n H} - e^{-\lambda_n H}]},$$

где $\lambda_n = \omega_0 \operatorname{ctg} \lambda_n$. Функции $\psi_1(x, y)$ и $u_1(x, y)$ – решение соответственно задач (2.26), (2.27) и (2.46) находятся из условий минимума функционалов

$$I_1(\psi) = \iint_D (\psi_x^2 + \psi_y^2 + 2\psi) dx dy$$

и

$$I_2(u) = \iint_D (u_x^2 + u_y^2 + 2fu) dx dy + \omega_0 \int_H^0 u^2(1, y) dy$$

на множествах

$$T_1 = \left\{ \psi : \psi \in C^1(\overline{D}), \psi = 0, (x, y) \in \partial D_{\gamma_0}^+ \right\}$$

и

$$T_2 = \left\{ u : u \in C^1(\overline{D}), u(x, 0) = 0, u(x, H) = 0 \right\}$$

Проблема минимума эффективно решается при помощи метода Ритца. При этом приближения Ритца ψ_n и u_n строятся следующим образом

$$\psi_n(x, y) = y(y - H)(y - y_0(x))(x - 1) \sum_{k=0}^m \sum_{j=1}^{m_k} c_{kj} \cdot x^{2j} \cdot y^k$$

$$u_n(x, y) = y(y - H) \sum_{k=0}^m \sum_{j=1}^{m_k} a_{kj} \cdot x^{2j} \cdot y^k, n = \sup_{0 \leq k \leq m} (m + 2m_k)$$

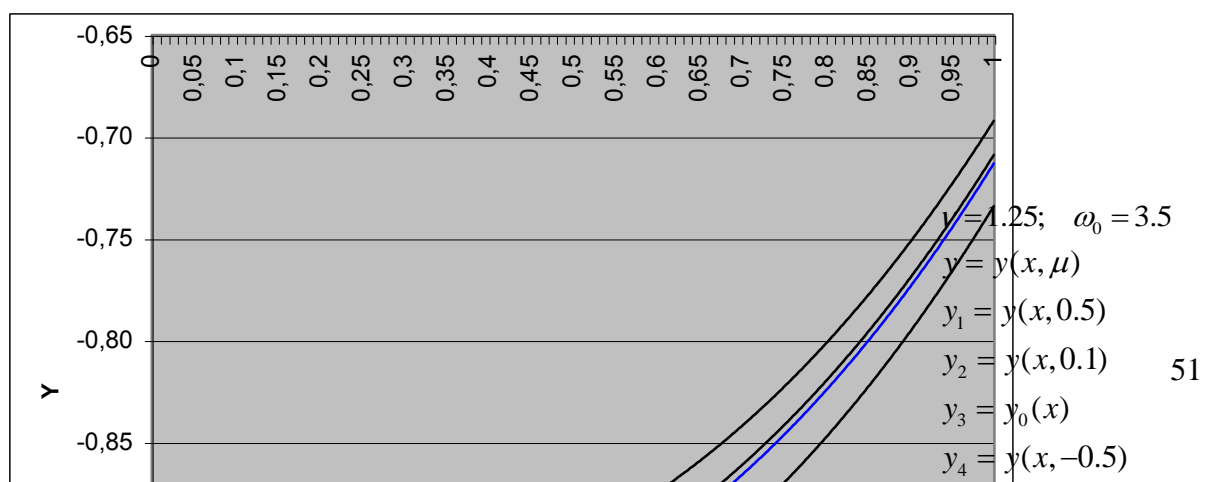
где $y_0(x)$ - решение уравнения $u_0(x, y) - 1 = 0$, $(x, y) \in D$ в классе функций $u_{0y}(x, y) > 0$ в D . Проблема сходимости приближенных решений к точным решениям соответствующих краевых задач изучено в [45]. Неизвестные коэффициенты a_{kj} и c_{kj} определяются из условий минимума функций $I_1(\psi_n) = \tilde{I}_1(c_{kj})$, $I_2(u_n) = \tilde{I}_2(a_{kj})$:

$$\frac{\partial \tilde{I}_1(c_{kj})}{\partial c_{kj}} = 0, \frac{\partial \tilde{I}_2(a_{kj})}{\partial a_{kj}} = 0, j = 1 \dots m_k, k = 0, 2 \dots m$$

Численный эксперимент осуществлялся при следующих значениях теплофизических параметров:

$$\omega_0 = 3,5, H = -10, \nu = 1,2, \mu = 0,1, \mu = 0,01$$

На рис.2.1 изображён график линий кристаллизации при различных значениях μ . Проведенный численный эксперимент подтверждает влияние конвективного теплообмена на процесс кристаллизации, что подтверждается также лабораторными исследованиями. Эксперимент сохранит свой смысл, если параметры, ω_0^+ и ω_0^- брать в некоторой окрестности числа $\omega_0 = 3,5$, а k - числа $k = 1$.



y_1 y_2 y_3 y_4

Рис.2.1

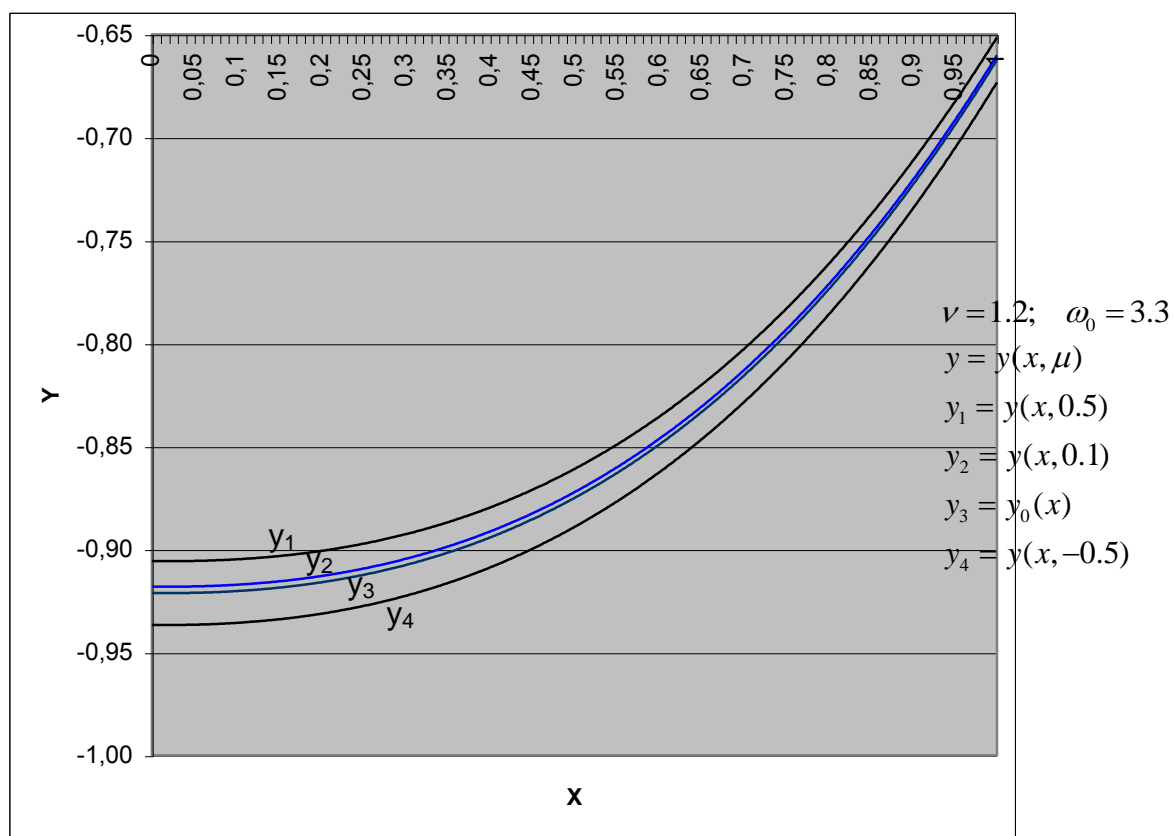


Рис.2.2

§2. Приближенный анализ стационарной пространственной конвективной задачи Стефана

2.1. Постановка задачи

Задачи о фазовых переходах вещества с учетом конвективных движений в жидкой фазе составляют ту область исследований, важность которой определяется ее теоретической и практической значимостью. При этом возникает необходимость дать теоретическое обоснование приближенному анализу указанного класса задач. В этом разделе приближенный анализ осуществлен методом Ритца. Ранее автор использовал этот метод при исследовании задач типа Стефана в теплофизике, а затем в гидродинамике для задач типа Бернулли.

Пусть Ω - заданная область в R^3 , граница которой состоит из двух связных компонент Γ^+ и Γ^- , причем замкнутая поверхность Γ^+ ограничивает непустую область, замыкание которой лежит внутри ограниченной области, границей которой является Γ^- . Поверхности Γ^\pm предполагаются принадлежащими классу $C^{3+\alpha}$ и не имеющими самопересечений.

В области Ω рассмотрим стационарную задачу с конвекцией [46]

$$\lambda(\vec{V}\nabla)u^+(x) = \kappa\nabla^2u^+(x), \quad x \in \Omega^+, \quad \nabla^2u^-(x) = 0, \quad x \in \Omega^-, \quad (2.48)$$

где $x = (x_1, x_2, x_3)$, Ω^\pm - области жидкой и твердой фазы на которые разбивает область Ω свободная граница раздела фаз Γ , причем $\partial\Omega^\pm = \Gamma \cup \Gamma^\pm$, т.е. Γ лежит между Γ^+ и Γ^- , ограничивая область, содержащую Γ^+ и Γ предполагается не имеющая самопересечений и лежащая внутри области Ω . Функция $\vec{V}(x) = (V_1(x), V_2(x), V_3(x))$ в (2.48) - скорость конвективных движений в жидкой фазе, описываемых стационарным уравнением Навье-Стокса и уравнением неразрывности

$$(\vec{V}\nabla)\vec{V}(x) + \nabla p(x) = \frac{1}{\text{Re}}\nabla^2\vec{V}(x) + \vec{f}(u^+), \quad x \in \Omega^+, \quad \text{div}\vec{V}(x) = 0, \quad x \in \Omega^+, \quad (2.49)$$

где $p(x)$ - давление, Re - число Рейнольдса, $\vec{f}(u^+) = (f_1(u^+), f_2(u^+), f_3(u^+))$ - сила, зависящая от температуры жидкой фазы $u^+(x)$, при этом жидкость предполагается несжимаемой.

Зададим на границе Ω^+ условие прилипания для \vec{V}

$$\vec{V}|_{x \in \Gamma \cup \Gamma^+} = 0. \quad (2.50)$$

Для температуры $u^\pm(x)$ граничные условия полагаются следующие

$$u^\pm(x)|_{x \in \Gamma^\pm} = B^\pm(x), \quad (2.51)$$

где $B^\pm(x)$ - заданные функции на Γ^\pm , принадлежащие классу $C^{3+\alpha}(\Gamma^\pm)$ и удовлетворяющие условию

$$\pm(B^\pm(x) - 1)|_{x \in \Gamma^\pm} \geq \varepsilon_0 > 0. \quad (2.52)$$

На свободной границе Γ выполняются условия

$$u^+ = u^- = 1, \quad x \in \Gamma, \quad (2.53)$$

а также закон сохранения энергии

$$\frac{\partial u^-}{\partial \bar{n}} \Big|_\Gamma - \kappa \frac{\partial u^+}{\partial \bar{n}} \Big|_\Gamma = 0, \quad (2.54)$$

где \bar{n} - единичная нормаль к Γ , направленная в сторону Ω^+ . В задаче (2.48) - (2.54) параметры $\kappa, \text{Re}, \lambda, \varepsilon_0$ предполагаются положительными постоянными, $\bar{f}(u)$ - принадлежащей классу $C^2(R^1)$, $\bar{f}'(u)$ - ограниченной в R^1 . Укажем, что при малых числах Рейнольдса Re задача (2.48) - (2.54) разрешима в классе гладких функций, при этом $u^\pm(x) \in C^{3+\alpha}(\bar{\Omega}^\pm)$, $\vec{V}(x) \in C^{1+\alpha}(\bar{\Omega}^+)$, а граница Γ принадлежит классу $C^{3+\alpha}$ [34]. Заметим также, что замена

$$\tilde{u}^\pm(x) = \begin{cases} \kappa u^+(x), & x \in \Omega^+ \\ u^-(x) + \kappa - 1, & x \in \Omega^- \end{cases}$$

сводит задачу (2.48) - (2.54) к случаю $\kappa = 1$, поэтому в дальнейшем будем считать это условие выполненным.

Настоящий раздел посвящен приближенному анализу задачи (2.48) - (2.54), в основу которого положено разложение решения в ряд, по степеням малых чисел Рейнольдса Re , при этом исследуется влияние конвекции на фронт кристаллизации.

2.2. Разложение решения в ряд по степеням малого параметра Re

Пусть Ω_0^\pm - области, на которые разбивает Ω граница раздела фаз Γ_0 . Для точек поверхности Γ_0 введем координаты $\omega = (\omega_1, \omega_2)$, через $x(\omega) \in \Gamma_0$ или через ω будем обозначать также соответствующие точки в R^3 . Пусть $\vec{n}_0(\omega)$ - нормаль к Γ_0 , направленная внутрь Ω_0^+ . Известно, что свободная граница Γ представима в виде $\Gamma = \{x = x(\omega) + \vec{n}_0(\omega)\rho(\omega)\}$ с некоторой функцией $\rho(\omega)$ класса $C^{3+\alpha}(\Gamma_0)$ [34].

Предположим, что неизвестные нашей задачи можно представить в виде степенного ряда

$$u^\pm(x; \text{Re}) = \sum_{\kappa=0}^{\infty} (\text{Re})^\kappa u_\kappa^\pm(x), \quad V_i(x; \text{Re}) = \sum_{\kappa=0}^{\infty} (\text{Re})^\kappa V_{i\kappa}(x), \quad p(x; \text{Re}) = \sum_{\kappa=0}^{\infty} (\text{Re})^\kappa p_\kappa(x), \quad (2.55)$$

$i = 1, 2, 3$ и будем считать, что

$$\rho(\omega; \text{Re}) = \sum_{\kappa=1}^{\infty} (\text{Re})^\kappa \rho_\kappa(\omega). \quad (2.56)$$

Подставляя эти разложения в соотношения (2.48) - (2.54), получаем бесконечное число задач. Выпишем вначале нулевое приближение. Прежде всего заметим, что из условий (2.49) и (2.50) следует $\vec{V}_0 = (V_{10}, V_{20}, V_{30}) \equiv 0$ в Ω_0^+ . Выпишем условия, определяющие u_0^\pm

$$\nabla^2 u_0^\pm(x) = 0, \quad x \in \Omega_0^\pm, \quad u_0(x)|_{\Gamma^\pm} = B^\pm(x), \quad u_0^\pm|_{\Gamma_0} = 1, \quad \frac{\partial u_0^-}{\partial \vec{n}_0} \Big|_{\Gamma_0} - \frac{\partial u_0^+}{\partial \vec{n}_0} \Big|_{\Gamma_0} = 0, \quad (2.57)$$

где Ω_0^\pm - области, на которые разбивает Ω граница раздела фаз Γ_0 , \vec{n}_0 - нормаль к Γ_0 , направленная в сторону Ω_0^+ .

Заметим, что задача (2.57) получается также из задач (2.48) - (2.54), если положить в (2.48) $\vec{V}(x) \equiv 0$, что соответствует случаю бесконечно большой вязкости ($\text{Re} = 0$).

Итак, на Γ_0 будут выполняться два условия: $u_0^+ = u_0^- = 1$, $|\nabla u_0^+| = |\nabla u_0^-|$. Поэтому можно построить функцию $u_0(x)$ по формуле

$$u_0(x) = \begin{cases} u_0^+(x), & x \in \Omega_0^+ \\ u_0^-(x), & x \in \Omega_0^-, \end{cases} \quad (2.58)$$

которая является решением следующей задачи:

$$\nabla^2 u_0 = 0, \quad x \in \Omega; \quad u_0|_{\Gamma^\pm} = B^\pm(x). \quad (2.59)$$

Следовательно, Γ_0 есть поверхность уровня гармонической в Ω функции $u_0(x)$, т.е. $\Gamma_0 = \{x \in \Omega: u_0(x) = 1\}$.

Далее предположим дополнительно, что поверхности Γ^\pm являются звездными. Тогда, рассматривая функцию $u_0(x)$ в одной из областей Ω_0^\pm и применяя лемму о нормальной производной, заключаем, что

$$\left. \frac{\partial u_0(x)}{\partial \vec{n}_0} \right|_{x \in \Gamma_0} \geq \tilde{\varepsilon}_0 > 0, \quad (2.60)$$

где $\tilde{\varepsilon}_0$ - некоторая положительная постоянная. Отсюда и из теоремы о неявной функции следует, что Γ_0 принадлежит классу C^∞ , так как этому классу в окрестности Γ_0 принадлежит гармоническая функция $u_0(x)$ [34].

Лемма 2.6. Пусть функция $u_0(x)$ является решением задачи (2.58). Тогда приближение $u_0^\pm(x)$ можно задать формулой (2.58). При этом Γ_0 представляет собой поверхность класса C^∞ (в предположении звездности поверхностей Γ^\pm), не имеющую самопересечений и расположенную относительно Γ^+ и Γ^- аналогично поверхности Γ в задаче (2.48) - (2.54).

Доказательство. Действительно, вначале отметим, что поверхности Γ^\pm являются звездными в следующем смысле. Существует точка O , которую будем считать началом координат, лежащая в ограниченной компоненте области $R^3 \setminus \overline{\Omega}$, такая, что всякий луч, исходящий из O пересекает каждую из поверхностей Γ^\pm ровно в одной точке, причем направление этого луча не является касательным в точках его пересечения с Γ^+ и Γ^- . Затем введем в

рассмотрение функцию $w(x) = -\frac{\partial u_0(x)}{\partial \vec{r}} = -\sum_{i=1}^3 x_i \frac{\partial u_0(x)}{\partial x_i}$, определенную в Ω . Внутри

области Ω имеем $\nabla^2 w(x) = -\sum_{i=1}^3 x_i \nabla^2 \frac{\partial u_0(x)}{\partial x_i} - 2 \sum \frac{\partial^2 u_0(x)}{\partial x_i \partial x_k} \cdot \frac{\partial x_i}{\partial x_k} - \sum_{i=1}^3 x_i \frac{\partial u_0(x)}{\partial x_i} \nabla^2 x_i = -2 \nabla^2 u_0(x) = 0$.

Тогда на $\partial\Omega$ будет выполнено условие $w(x)|_{\Gamma^\pm} = -\frac{\partial u_0(x)}{\partial \vec{r}}|_{\Gamma^\pm} \geq \tilde{\varepsilon}_0 > 0$, (где $\tilde{\varepsilon}_0$ - некоторая положительная постоянная), что следует из условия (2.52) ($\pm(B^\pm(x,t) - 1) \geq \varepsilon_0 > 0$ при $x \in \Gamma^+ \cup \Gamma^-$) леммы о нормальной производной, примененной к функции $u_0(x)$, и того факта, что радиус-вектор \vec{r} точки x нигде не ортогонален нормали к Γ^\pm , когда $x \in \Gamma^\pm$ (это следует из предположений о поверхностях Γ^+ и Γ^-). Применяя принцип максимума к гармонической функции $w(x)$, получаем

$$-\frac{\partial u_0(x)}{\partial \vec{r}}|_{\bar{\Omega}} \geq \tilde{\varepsilon}_0 > 0.$$

Из последнего соотношения и соотношения (6.52) следует, что на каждом луче, выходящем из точки O лежит ровно одна точка x , где $u_0(x) = 0$, причем $|\nabla u_0(x) \geq \tilde{\varepsilon}_0 > 0|$. Ввиду этого, из теоремы о неявной функции, заключаем, что Γ_0 представляет собой гладкую поверхность, не имеющую самопересечений и $\partial u_0(x) / \partial \vec{n}_0 \geq \tilde{\varepsilon}_0 > 0$ на Γ_0 , причем, в силу свойств гармонических функций, Γ_0 будет поверхностью класса C^∞ .

Замечание 3. Ради простоты рассмотрим случай двух геометрических переменных x и y . Положим

$$\Delta_1 = \cos(n \wedge x), \Delta_2 = \cos(n \wedge y),$$

$$x = x(\omega) + \Delta_1 \rho_1 \operatorname{Re} + \Delta_1 \rho_2 (\operatorname{Re})^2,$$

$$y = y(\omega) + \Delta_2 \rho_1 \operatorname{Re} + \Delta_2 \rho_2 (\operatorname{Re})^2.$$

Получим разложение условия Стефана (2.54), представленного в виде $|\nabla u^-|^2 - |\nabla u^+|^2 = 0$ на Γ , по степеням малых чисел Re . Имеем

$$\begin{aligned}
u_x &= u_{0x}(x, y) + \operatorname{Re} u_{1x}(x, y, t) + (\operatorname{Re})^2 u_{2x}(x, y, t), \\
u_x^2 &= u_{0x}^2 + (\operatorname{Re})^2 u_{1x}^2 + 2u_{0x} u_{1x} \operatorname{Re} + 2(\operatorname{Re})^2 u_{0x} u_{2x}, \\
u_x|_{\Gamma} &= u_{0x}(x + \Delta_1 \rho_1 \operatorname{Re} + \Delta_1 \rho_2 (\operatorname{Re})^2, y + \Delta_2 \rho_1 \operatorname{Re} + \Delta_2 \rho_2 (\operatorname{Re})^2) + \operatorname{Re} u_{1x} + (\operatorname{Re})^2 u_{2x} = \\
&= u_{0x} + u_{0xx} [\Delta_1 \rho_1 \operatorname{Re} + \Delta_1 \rho_2 (\operatorname{Re})^2] + u_{0xy} [\Delta_2 \rho_1 \operatorname{Re} + \Delta_2 \rho_2 (\operatorname{Re})^2] + \\
&+ \operatorname{Re} [u_{1x} + u_{1xx} (\Delta_1 \rho_1 \operatorname{Re} + \Delta_1 \rho_2 (\operatorname{Re})^2) + u_{1xy} (\Delta_2 \rho_1 \operatorname{Re} + \Delta_2 \rho_2 (\operatorname{Re})^2)] + (\operatorname{Re})^2 u_{2x} = \\
&= u_{0x} + u_{0xx} \Delta_1 \rho_1 \operatorname{Re} + u_{0xx} \Delta_1 \rho_2 (\operatorname{Re})^2 + u_{0xy} \Delta_2 \rho_1 \operatorname{Re} + u_{0xy} \Delta_2 \rho_2 (\operatorname{Re})^2 + \operatorname{Re} u_{1x} + \\
&+ (\operatorname{Re})^2 u_{1xx} \Delta_1 \rho_1 + (\operatorname{Re})^3 u_{1xx} \Delta_1 \rho_2 + u_{1xy} (\operatorname{Re})^2 \Delta_2 \rho_1 + (\operatorname{Re})^3 u_{1xy} \Delta_2 \rho_2 + (\operatorname{Re})^2 u_{2x} = \\
&= u_{0x} + u_{0xx} \Delta_1 \rho_1 \operatorname{Re} + u_{0xx} \Delta_1 \rho_2 (\operatorname{Re})^2 + u_{0xy} \Delta_2 \rho_1 \operatorname{Re} + u_{0xy} \Delta_2 \rho_2 (\operatorname{Re})^2 + \operatorname{Re} u_{1x} + \\
&+ (\operatorname{Re})^2 u_{1xx} \Delta_1 \rho_1 + u_{1xx} \Delta_1 \rho_2 (\operatorname{Re})^3 + u_{1xy} (\operatorname{Re})^2 \Delta_2 \rho_2 + (\operatorname{Re})^2 u_{2x} = u_{0x} + \\
&+ \operatorname{Re} \rho_1 \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} \right) + (\operatorname{Re})^2 \rho_2 \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} \right) + (\operatorname{Re})^2 \rho_1 \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} \right) + \operatorname{Re} \frac{\partial u_1}{\partial x} + (\operatorname{Re})^2 \frac{\partial u_2}{\partial x} = \\
&= u_{0x} + \operatorname{Re} \left[\rho_1 \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} \right) + \frac{\partial u_1}{\partial x} \right] + (\operatorname{Re})^2 \left[\rho_2 \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} \right) + \rho_1 \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} \right) + \frac{\partial u_2}{\partial x} \right], \\
u_x^2|_{\Gamma} &= u_{0x}^2 + \operatorname{Re}^2 \left[\rho_1 \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} \right) + \frac{\partial u_1}{\partial x} \right]^2 + 2u_{0x} \operatorname{Re} \left[\rho_1 \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} \right) + \frac{\partial u_1}{\partial x} \right] + \\
&+ 2u_{0x} (\operatorname{Re})^2 \left[\rho_2 \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} \right) + \rho_1 \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} \right) + \frac{\partial u_2}{\partial x} \right], \\
u_{1x} &= u_{1x}(x + \rho_1 \Delta_1 \operatorname{Re} + \rho_2 \Delta_1 (\operatorname{Re})^2, y + \rho_1 \Delta_2 \operatorname{Re} + \rho_2 \Delta_2 (\operatorname{Re})^2) = u_{1x} + u_{1xx} (\rho_1 \Delta_1 \operatorname{Re} + \\
&+ \rho_2 \Delta_1 \operatorname{Re}^2) = u_{1x} + \operatorname{Re} [u_{1xx} \Delta_1 \rho_1 + u_{1xy} \rho_1 \Delta_2] + \operatorname{Re}^2 [u_{1xx} \rho_2 \Delta_1 + u_{1xy} \rho_2 \Delta_2] = \\
&= u_{1x} + \operatorname{Re} \rho_1 \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} \right) + \operatorname{Re}^2 \rho_2 \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} \right).
\end{aligned}$$

Итак, получим при $(x, y) \in \Gamma_0$:

$$\begin{aligned}
u_x^2|_{\Gamma} &= u_{0x}^2 + (\operatorname{Re})^2 u_{1x}^2 + 2u_{0x} u_{1x} \operatorname{Re} + 2(\operatorname{Re})^2 u_{0x} u_{2x} = u_{0x}^2 (\operatorname{Re})^2 \left[\rho_1 \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} \right) + \frac{\partial u_1}{\partial x} \right]^2 + \\
&+ 2\operatorname{Re} u_{0x} \left[\rho_1 \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} \right) + \frac{\partial u_1}{\partial x} \right] + 2(\operatorname{Re})^2 u_{0x} \left[\rho_2 \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} \right) \rho_1 + \frac{\partial u_2}{\partial x} \right] + \\
&+ 2u_{0x} \left[u_{1x} + \operatorname{Re} \rho_1 \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} \right) + (\operatorname{Re})^2 \rho_2 \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} \right) \right] \operatorname{Re} + 2(\operatorname{Re})^2 u_{0x} u_{2x} + (\operatorname{Re})^2 u_{1x}^2 =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= u_{0x}^2 + 2\operatorname{Re} \left[\rho_1 u_{0x} \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} \right) + \frac{\partial u_1}{\partial x} \cdot \frac{\partial u_0}{\partial x} \right] + 2u_{0x} u_{1x} \operatorname{Re} + (\operatorname{Re})^2 \left[\left(\rho_1 \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} \right) + \frac{\partial u_1}{\partial x} \right)^2 + \right. \\
&\quad \left. + 2u_{0x} \left\{ \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} \right) \rho_2 + \rho_1 \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial u_2}{\partial x} \right\} + 2u_{0x} \rho_1 \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} \right) + u_{1x}^2 + 2u_{0x} u_{2x} \right].
\end{aligned}$$

Далее имеем

$$\begin{aligned}
u(x, y)|_{\Gamma} &= u_0 \left(x + \Delta_1 \rho_1 \operatorname{Re} + \Delta_1 \rho_2 (\operatorname{Re})^2, y + \Delta_2 \rho_1 \operatorname{Re} + \Delta_2 \rho_2 (\operatorname{Re})^2 \right) + \\
&\quad + \operatorname{Re} u_1 \left(x + \Delta_1 \rho_1 \operatorname{Re} + \Delta_1 \rho_2 (\operatorname{Re})^2, y + \Delta_2 \rho_1 \operatorname{Re} + \Delta_2 \rho_2 (\operatorname{Re})^2 \right) + \\
&\quad (\operatorname{Re})^2 u_2 \left(x + \Delta_1 \rho_1 \operatorname{Re} + \Delta_1 \rho_2 (\operatorname{Re})^2, y + \Delta_2 \rho_1 \operatorname{Re} + \Delta_2 \rho_2 (\operatorname{Re})^2 \right) = 1, (x, y) \in \Gamma_0.
\end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned}
u(x, y)|_{\Gamma} &= u_0(x, y) + \operatorname{Re} \left[|\nabla u_0(x, y)| \rho_1(\omega) + u_1(x, y) \right] + (\operatorname{Re})^2 \left[|\nabla u_0(x, y)| \rho_2(\omega) + \frac{\partial u_1(x, y)}{\partial \bar{n}} \rho_1(\omega) + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} \frac{d^2 u_0}{d\tau^2} (x + \tau \Delta_1 \rho_1, y + \tau \Delta_2 \rho_2) \Big|_{\tau=0} + u_2(x, y) \right] + o(\operatorname{Re})^2 = 1, (x, y) \in \Gamma_0.
\end{aligned}$$

2.3. Первое приближение

Выпишем краевую задачу, которая соответствует множителю Re в первой степени. Из условий (2.48) - (2.54) и из разложений (2.55), (2.56) для функций $\vec{V}_1(x) = (V_{11}(x), V_{21}(x), V_{31}(x))$, $u_1^{\pm}(x)$ и $\rho_1(\omega)$ вытекает следующая задача:

$$\nabla p_0(x) = \nabla^2 \vec{V}_1(x) + \vec{f}(u_0^+), \operatorname{div} \vec{V}_1(x) = 0, x \in \Omega_0^+; \vec{V}_1(x) \Big|_{\partial \Omega_0^+} = 0, \quad (2.61)$$

$$\lambda (\vec{V}_1 \nabla) u_0^+(x) = \nabla^2 u_1^+(x), x \in \Omega_0^+, \quad (2.62)$$

$$\nabla^2 u_1^-(x) = 0, x \in \Omega_0^-, \quad (2.63)$$

$$u_1^{\pm}(x) \Big|_{\Gamma^{\pm}} = 0, \quad (2.64)$$

$$\left[|\nabla u_0(x(\omega))| \rho_1(\omega) + u_1(x(\omega)) \right] \Big|_{\Gamma_0} = 0. \quad (2.65)$$

Далее, рассмотрим не особую точку поверхности Γ_0 , тогда в каждой такой точке $\omega = (\omega_1, \omega_2) \in \Gamma_0$ хотя бы один из определителей второго порядка

функциональной матрицы $A = (\partial x_i / \partial \omega_k)$, $x_i = x_i(\omega_1, \omega_2)$, $i = 1, 2, 3$; $k = 1, 2$ всегда отличен от нуля. Пусть для определенности это будет определитель

$$\Delta = \frac{\partial x_1}{\partial \omega_1} \frac{\partial x_2}{\partial \omega_2} - \frac{\partial x_2}{\partial \omega_1} \frac{\partial x_1}{\partial \omega_2} \neq 0 \quad \text{в некоторой точке } \omega^* = (\omega_1^*, \omega_2^*) \in \Gamma_0. \quad \text{Тогда } \Gamma_0 \text{ в}$$

окрестности этой точки допускает явное задание $z = z(x_1, x_2; \text{Re})$ и аналогично

$$(2.56) \text{ имеем } z(x_1, x_2; \text{Re}) = \sum_{\kappa=0}^{\infty} (\text{Re})^{\kappa} z_{\kappa}(x_1, x_2). \text{ Из условия Стефана (2.54) следует, что в}$$

окрестности точки $x(\omega^*) \in \Gamma_0$ должно выполняться условие

$$\begin{aligned} z_1(x_1, x_2) & \left[\left(\frac{\partial u_0^-}{\partial x_1} \frac{\partial^2 u_0^-}{\partial x_1 \partial x_3} + \frac{\partial u_0^-}{\partial x_2} \frac{\partial^2 u_0^-}{\partial x_2 \partial x_3} + \frac{\partial u_0^-}{\partial x_3} \frac{\partial^2 u_0^-}{\partial x_3^2} \right) - \left(\frac{\partial u_0^+}{\partial x_1} \frac{\partial^2 u_0^+}{\partial x_1 \partial x_3} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{\partial u_0^+}{\partial x_2} \frac{\partial^2 u_0^+}{\partial x_2 \partial x_3} + \frac{\partial u_0^+}{\partial x_3} \frac{\partial^2 u_0^+}{\partial x_3^2} \right) \right] + \left[\left(\frac{\partial u_0^-}{\partial x_1} \frac{\partial u_1^-}{\partial x_1} + \frac{\partial u_0^-}{\partial x_2} \frac{\partial u_1^-}{\partial x_2} + \frac{\partial u_0^-}{\partial x_3} \frac{\partial u_1^-}{\partial x_3} \right) - \right. \\ & \left. - \left(\frac{\partial u_0^+}{\partial x_1} \frac{\partial u_1^+}{\partial x_1} + \frac{\partial u_0^+}{\partial x_2} \frac{\partial u_1^+}{\partial x_2} + \frac{\partial u_0^+}{\partial x_3} \frac{\partial u_1^+}{\partial x_3} \right) \right] = 0. \end{aligned} \quad (2.66)$$

Получившаяся для первого приближения задача (2.61) - (2.66) имеет следующие характерные черты. Во-первых, эта задача линейна, во-вторых, ее нужно решать в известных областях Ω_0^{\pm} . После того, когда функции $u_0^{\pm}(x)$ и $\vec{V}_1(x)$ определены соответственно в областях Ω_0^{\pm} и Ω_0^+ из соотношений (2.62) - (2.66) находим функции $u_1^{\pm}(x)$, заданные в тех же областях Ω_0^{\pm} и $\rho_1(\omega(x))$.

Далее, рассмотрим первое приближение $(\vec{V}_1, u_1^{\pm}, z_1)$ задачи (2.48) - (2.54). В силу непрерывности функции $u_0(x)$ и ее производных на Γ_0 условие (2.66) можно записать в таком виде

$$\frac{\partial u_0}{\partial x_1} \frac{\partial u_1^-}{\partial x_1} + \frac{\partial u_0}{\partial x_2} \frac{\partial u_1^-}{\partial x_2} + \frac{\partial u_0}{\partial x_3} \frac{\partial u_1^-}{\partial x_3} = \frac{\partial u_0}{\partial x_1} \frac{\partial u_1^+}{\partial x_1} + \frac{\partial u_0}{\partial x_2} \frac{\partial u_1^+}{\partial x_2} + \frac{\partial u_0}{\partial x_3} \frac{\partial u_1^+}{\partial x_3}, \quad x \in \Gamma_0. \quad (2.67)$$

кроме того, должно выполняться условие

$$u_1^+ = u_1^-, \quad x \in \Gamma_0. \quad (2.68)$$

Покажем, что справедливы равенства

$$\frac{\partial u_1^+}{\partial x_1} = \frac{\partial u_1^-}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial u_1^+}{\partial x_2} = \frac{\partial u_1^-}{\partial x_2}, \quad \frac{\partial u_1^+}{\partial x_3} = \frac{\partial u_1^-}{\partial x_3}, \quad x \in \Gamma_0. \quad (2.69)$$

Действительно, дифференцируя равенство (2.68) соответственно по x_1 и x_2 , получим при $x \in \Gamma_0$

$$\frac{\partial u_1^+}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1^+}{\partial x_3} \frac{\partial z_0}{\partial x_1} = \frac{\partial u_1^-}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1^-}{\partial x_3} \frac{\partial z_0}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial u_1^+}{\partial x_2} + \frac{\partial u_1^+}{\partial x_3} \frac{\partial z_0}{\partial x_2} = \frac{\partial u_1^-}{\partial x_2} + \frac{\partial u_1^-}{\partial x_3} \frac{\partial z_0}{\partial x_2},$$

где $\Gamma_0 : z_0 = z_0(x_1, x_2)$. Учитывая, также что

$$\frac{\partial u_0}{\partial x_1} + \frac{\partial u_0}{\partial x_3} \frac{\partial z_0}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial u_0}{\partial x_2} + \frac{\partial u_0}{\partial x_3} \frac{\partial z_0}{\partial x_2} = 0, \quad x \in \Gamma_0.$$

получим для $x \in \Gamma_0$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_0}{\partial x_3} \frac{\partial u_1^+}{\partial x_1} - \frac{\partial u_0}{\partial x_1} \frac{\partial u_1^+}{\partial x_3} &= \frac{\partial u_0}{\partial x_3} \frac{\partial u_1^-}{\partial x_1} - \frac{\partial u_0}{\partial x_1} \frac{\partial u_1^-}{\partial x_3}, \\ \frac{\partial u_0}{\partial x_3} \frac{\partial u_1^+}{\partial x_2} - \frac{\partial u_0}{\partial x_2} \frac{\partial u_1^+}{\partial x_3} &= \frac{\partial u_0}{\partial x_3} \frac{\partial u_1^-}{\partial x_2} - \frac{\partial u_0}{\partial x_2} \frac{\partial u_1^-}{\partial x_3}. \end{aligned} \tag{2.70}$$

Тогда из соотношений (2.67) и (2.70) следует при $x \in \Gamma_0$

$$\begin{cases} \frac{\partial u_0}{\partial x_1} \left[\frac{\partial u_1^-}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1^+}{\partial x_1} \right] + \frac{\partial u_0}{\partial x_2} \left[\frac{\partial u_1^-}{\partial x_2} - \frac{\partial u_1^+}{\partial x_2} \right] + \frac{\partial u_0}{\partial x_3} \left[\frac{\partial u_1^-}{\partial x_3} - \frac{\partial u_1^+}{\partial x_3} \right] = 0 \\ \frac{\partial u_0}{\partial x_1} \left[\frac{\partial u_1^-}{\partial x_3} - \frac{\partial u_1^+}{\partial x_3} \right] + \frac{\partial u_0}{\partial x_3} \left[\frac{\partial u_1^+}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1^-}{\partial x_1} \right] = 0 \\ \frac{\partial u_0}{\partial x_2} \left[\frac{\partial u_1^-}{\partial x_3} - \frac{\partial u_1^+}{\partial x_3} \right] + \frac{\partial u_0}{\partial x_3} \left[\frac{\partial u_1^+}{\partial x_2} - \frac{\partial u_1^-}{\partial x_2} \right] = 0. \end{cases}$$

Рассматривая эти равенства, как систему линейных уравнений, получим

$$\frac{\partial u_1^-}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1^+}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial u_1^-}{\partial x_2} - \frac{\partial u_1^+}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial u_1^-}{\partial x_3} - \frac{\partial u_1^+}{\partial x_3} = 0, \quad x \in \Gamma_0,$$

так как определитель этой системы $\Delta = |\nabla u_0|^2 \cdot \frac{\partial u_0}{\partial x_3}$, $x \in \Gamma_0$ в силу (2.60) и леммы 2.6 отличен от нуля. Следовательно, равенства (2.69) справедливы. Таким образом, в силу соотношений (2.68) и (2.69) можно построить функцию $u_1(x)$ по следующей формуле

$$u_1(x) = \begin{cases} u_1^+(x), & x \in \Omega_0^+ \\ u_1^-(x), & x \in \Omega_0^-, \end{cases} \quad (2.71)$$

которая является решением такой задачи

$$\nabla^2 u_1(x) = F_1(x), \quad x \in \Omega; \quad u_1(x)|_{\Gamma^\pm} = 0, \quad (2.72)$$

где $F_1(x) = \lambda(\vec{V}_1 \nabla) u_0^+$ при $x \in \Omega_0^+$ и $F_1(x) \equiv 0$ при $x \in \Omega_0^-$. Итак, лемма доказана [46].

Лемма 2.7. Пусть функция $u_1(x)$ является решением задачи (2.72). Тогда приближение $u_1^\pm(x)$ можно задать формулой (2.71).

Зная функции $u_0(x)$ и $u_1(x)$, из соотношения (2.65) находим $\rho_1(\omega) = -u_1(x(\omega)) / |\nabla u_0(x(\omega))|$, $x \in \Gamma_0$.

Следовательно, при малых числах Рейнольдса Re получим такое представление

$$\Gamma: \quad x = x(\omega) - \vec{n}_0(\omega) \frac{Re u_1(x(\omega))}{|\nabla u_0(x(\omega))|} + o(Re), \quad x(\omega) \in \Gamma_0. \quad (2.73)$$

Из лемм 2.6 и 2.7 вытекает следующая теорема [46].

Теорема 2.3. Пусть функции $u_0(x)$ и $u_1(x)$ - решения задач (2.59) и (2.72) соответственно. Тогда при малых числах Рейнольдса справедлива формула (2.73).

2.4. Построение приближений $u_0(x)$ и $u_1(x)$ методом Ритца

Краевая задача (2.59), рассматриваемая в области Ω , эквивалентна проблеме минимума функционала

$$I_1(u) = \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 dx \quad (2.74)$$

на множестве допустимых функций

$$G_1 = \left\{ u(x) : u(x) \in C^1(\bar{\Omega}); u(x) = B(x), x \in \Gamma^+ \cup \Gamma^- \right\}, \quad (2.75)$$

где $B(x) = B^+(x)$ при $x \in \Gamma^+$ и $B(x) = B^-(x)$, если $x \in \Gamma^-$.

Лемма 2.8. Решение задачи (2.59) $u_0(x)$ доставляет наименьшее значение функционала (2.74) на множестве (2.75).

Доказательство. Пусть $u(x)$ - произвольная функция из G_1 и пусть $\eta(x) = u(x) - u_0(x)$, тогда имеем

$$I_1(u) = I_1(u_0 + \eta) = I_1(u_0) + 2I_1(u_0, \eta) + I_1(\eta), \quad (2.76)$$

где $I_1(u_0, \eta) = \int_{\Omega} (\nabla u_0, \nabla \eta) dx = 0$, так как $u_0(x)$ - решение (2.59). Отсюда следует, что

$I_1(u) \geq I_1(u_0)$ для любого $u \in G_1$, причем $u_0(x)$ определяется единственным образом.

Лемма доказана [37].

Далее, относительно области Ω будем предполагать, что она такова, что в каждой ее точке можно провести в пространстве R^3 шаровой сектор постоянного радиуса и формы с вершиной в этой точке, целиком лежащий внутри Ω . Класс областей такого вида будем обозначать C_H^3 , где H - обозначает величину наибольшего допустимого радиуса достигающего сектора [45]. И пусть также граница $\partial\Omega = \Gamma^+ \cup \Gamma^-$ задается уравнением $\omega(x_1, x_2, x_3) = 0$.

Будем минимизировать функционал (2.74) на множестве (2.75) методом Ритца, причем приближения Ритца $u_i(x)$ разыскиваются в форме

$$u_i(x) = \omega(x_1, x_2, x_3) \sum_{k,j,p=0}^i a_{kjp} x_1^k x_2^j x_3^p + B(x) = \omega Q_i + B. \quad (2.77)$$

Перейдем к исследованию сходимости приближений Ритца [45].

Теорема 2.4. Пусть выполнены условия леммы 2.6 и пусть $\Omega \in C_H^3$. Тогда последовательность приближений (2.77) сходится к решению задачи (2.59) $u_0(x)$ по норме $W_2^1(\Omega)$ и $C(\bar{\Omega})$.

Доказательство. Последовательность приближений (2.77), коэффициенты которых определяются методом Ритца, образуют минимизирующую последовательность для функционала (2.74) на множестве (2.75) [18]. Следовательно, имеем $\varepsilon_i = I_1(u_i) - I_1(u_0) \rightarrow 0$ при $i \rightarrow \infty$, так как, согласно лемме 2.8, функция $u_0(x)$ доставляет наименьшее значение функционалу $I_1(u)$ на множестве

G_1 . Воспользовавшись формулой (2.76) при $\eta(x) = u_i(x) - u_0(x)$, получим $\int_{\Omega} |\nabla(u_i(x) - u_0(x))|^2 dx \rightarrow 0$ при $i \rightarrow \infty$. При доказательстве сходимости в $C(\bar{\Omega})$ вначале рассмотрим случай $B(x) \equiv 0$, т.е. $u_0(x) = 0$ при $x \in \partial\Omega$. В дальнейшем понадобится следующая теорема И.Ю. Харрик [47].

Пусть $\bar{\Omega}$ - замкнутая область ограниченная границей Γ , $\omega(x)$ - функция определенная в открытой области, содержащей Ω , и удовлетворяющая условиям:

1) $\omega(x)$ - непрерывно дифференцируемая κ раз ($\kappa \geq 1$) функция и ее производная κ -го порядка, удовлетворяющая условию $Lip1$; 2) $\omega = 0$ на Γ ; 3) $\omega > 0$ в Ω ; 4) $|grad \omega| > 0$ на Γ . Тогда, если $u(x)$ - непрерывно дифференцируемая κ раз функция в $\bar{\Omega}$ и обращается в нуль на Γ , то существует последовательность полиномов $P_i(x)$ степени $\leq i$ относительно каждого из аргументов x_i , такая, что

$$\max_{\Omega} |u - \omega P_i| = O\left(\frac{\omega^{(\kappa)}\left(u; \frac{1}{i}\right)}{i^{\kappa}}\right), \quad \max_{\Omega} \left| \frac{\partial}{\partial x_j} u - \frac{\partial}{\partial x_j} \omega P_i \right| = O\left(\frac{\omega^{(\kappa)}\left(u; \frac{1}{i}\right)}{i^{\kappa-1}}\right),$$

где $\omega^{(\kappa)}\left(u; \frac{1}{i}\right)$ - максимальный модуль непрерывности производных порядка κ функции $u(x)$. Укажем, что если в качестве Ω взять, например шар радиуса R , $\omega(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - R^2$ и все условия сформулированной теоремы И.Ю. Харрик будут выполняться.

Пусть решение $u(x)$ и функция $\omega(x)$ непрерывно дифференцируемы соответственно κ и $(\kappa+1)$ раз, $\Omega \in C_H^3$ и, кроме того, выполнены все условия сформулированной выше теоремы. Тогда, так как $u_i(x) = \omega(x)Q_i(x)$ дает минимум интегралу (6.74) по сравнению со всеми другими функциями того же вида из G_1 , то $I_1(\omega Q_i) \leq I_1(\omega P_i)$, где ωP_i - функция, построенная в теореме И.Ю. Харрик. Итак, получим

$$I_1(\omega Q_i) - I_1(u_0) \leq I_1(\omega P_i) - I_1(u_0) = \int_{\Omega} |\nabla(\omega P_i - u_0)|^2 dx \leq C \left[\frac{\omega^{(\kappa)}\left(u_0; \frac{1}{i}\right)}{i^{\kappa-1}} \right],$$

где C - некоторая постоянная. Используя эту оценку и рассуждения, предложенные в [45], заключаем, что если

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \left[\omega^{(\kappa)} \left(u_0; \frac{1}{i} \right) \right] i^{-\kappa-1+n} (\ln i)^{1+\varepsilon} = 0, \quad \varepsilon > 0,$$

то последовательность $\{u_i(x)\}$ сходится к $u_0(x)$ равномерно при $x \in \bar{\Omega}$. В нашем случае $u_0(x) \in C^{3+\alpha}(\bar{\Omega})$ [46]. Поэтому имеем $\kappa=3, n=3, 0 < \alpha < 1$ и

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \left[\omega^{(\kappa)} \left(u_0; \frac{1}{i} \right) \right] i^{-3-1+3} (\ln i)^{1+\varepsilon} \leq \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{(\ln i)^{1+\varepsilon}}{i^{1-\alpha}} = 0.$$

В общем случае, когда $u_0(x) = B(x), x \in \partial\Omega$, необходимо рассмотреть функцию $\tilde{u}_0(x) = u_0(x) - B(x)$ и повторить проделанные выше рассуждения. Итак, теорема доказана.

Далее, если функция $\vec{V}_1(x)$, как решение задачи (2.61), известна, тогда первое приближение $u_1(x)$ разыскиваем, как минимум функционала $I_2(u) = \int_{\Omega} (|\nabla u|^2 + 2Fu) dx$ на множестве допустимых функций $G_2 = \{u(x) : u(x) \in C^1(\bar{\Omega}), u(x) = 0, x \in \partial\Omega\}$.

Очевидно, что решение задачи (2.72) доставляет наименьшее значение функционалу $I_2(u)$ на множестве G_2 . При этом минимум ищется при помощи сумм

$$u_i(x_1, x_2, x_3) = \omega(x_1, x_2, x_3) \sum_{\kappa, j, p=0}^i c_{\kappa jp} x_1^{\kappa} x_2^j x_3^p, \quad (2.78)$$

где $\omega(x) = 0$ при $x \in \partial\Omega$, а неизвестные коэффициенты $c_{\kappa jp}$ определяются методом Рунца. Также как это сделано в теореме 2.4, доказываем сходимость приближений $u_i(x)$ к решению задачи (2.72) $u_1(x)$ в норме $W_2^1(\Omega)$ и $C(\bar{\Omega})$.

Относительно разрешимости задачи (2.61) отметим следующее. Пусть $\overset{\circ}{H}^1(\Omega)$ - гильбертово пространство, являющееся замыканием множества финитных в Ω гладких функций по норме, задаваемой скалярным произведением $(u, V)_{\overset{\circ}{H}^1} = \int_{\Omega} \nabla u(x) \nabla V(x) dx$.

И пусть $J_{0,1}(\Omega_0^+)$ - подпространство пространства $\overset{o}{H}^1(\Omega_0^+) \times \overset{o}{H}^1(\Omega_0^+) \times \overset{o}{H}^1(\Omega_0^+)$, состоящее из соленоидальных вектор-функций $\vec{V}(x) = (V_1(x), V_2(x), V_3(x))$, $\nabla \vec{V} = 0$ со скалярным произведением $(\vec{V}, \vec{W})_{J_{0,1}} = \int_{\Omega_0^+} \nabla \vec{V} : \nabla \vec{W} dx$, где $\nabla \vec{V} : \nabla \vec{W} = \sum_{i=1}^3 (\nabla V_i, \nabla W_i)$.

Слабым решением задачи (2.61) будем называть функцию $\vec{V}(x) \in J_{0,1}(\Omega_0^+)$, удовлетворяющую соотношению $\int_{\Omega_0^+} \nabla \vec{V} : \nabla \bar{\eta} dx = \int_{\Omega_0^+} \vec{f}(u_0^+) \bar{\eta} dx$, которое должно выполняться для любой функции $\bar{\eta}(x) \in J_{0,1}(\Omega_0^+)$, причем считаем $\vec{V}(x)$ продолженной нулем в область Ω_0^- .

Существование вначале слабого, а затем гладкого решения подобной задачи доказано в [46], при этом решение определяется единственным образом.

Таким образом, построенные приближения Ритца (2.77), (2.78) и формула (2.73) позволяют в первом приближении исследовать зависимость поверхности Γ от чисел Рейнольдса Re и выяснить, насколько существенно конвекция влияет на геометрию фронта кристаллизации.

2.5. Второе приближение

Рассмотрим второе приближение $(\vec{V}_2, u_2^\pm, \rho_2)$ задачи (2.48) - (2.54) для малых чисел Рейнольдса. Имеем

$$\begin{aligned} (\vec{V}_2 \nabla) \vec{V}_1 + \nabla p_1 &= \nabla^2 \vec{V}_2 + \vec{f}'(u_0^+) u_1^+, \quad \nabla \vec{V}_2 = 0, \quad x \in \Omega_0^+; \quad \vec{V}_2 \Big|_{\partial \Omega_0^+} = 0, \\ \lambda (\vec{V}_1 \nabla) u_1^+ + \lambda (\vec{V}_2 \nabla) u_0^+ &= \nabla^2 u_2^+, \quad x \in \Omega_0^+; \quad \nabla^2 u_2^- = 0, \quad x \in \Omega_0^-, \quad u_2^\pm(x) \Big|_{\Gamma^\pm} = 0; \quad x(\omega^*) \in \Gamma_0. \end{aligned} \quad (2.79)$$

Кроме того, при $x \in \Gamma_0$ справедливо представление

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial u^\pm}{\partial x_\kappa} \right)^2 \Big|_\Gamma &= \left(\frac{\partial u_0^\pm}{\partial x_\kappa} \right)^2 + 2 \operatorname{Re} \left[z_1(x_1, x_2) \frac{\partial u_0^\pm}{\partial x_\kappa} \frac{\partial^2 u_0^\pm}{\partial x_\kappa \partial x_\kappa \partial x_3} + \frac{\partial u_0^\pm}{\partial x_\kappa} \frac{\partial u_1^\pm}{\partial x_\kappa} \right] + \\ + (\operatorname{Re})^2 &\left[\frac{\partial^2 u_0^\pm}{\partial x_\kappa \partial x_3} + \left(\frac{\partial u_1^\pm}{\partial x_\kappa} \right)^2 + 2z_2(x_1, x_2) \frac{\partial u_0^\pm}{\partial x_\kappa} \frac{\partial^2 u_0^\pm}{\partial x_\kappa \partial x_\kappa \partial x_3} + 2z_1(x_1, x_2) \frac{\partial u_0^\pm}{\partial x_\kappa} \frac{\partial^2 u_1^\pm}{\partial x_\kappa \partial x_\kappa \partial x_3} + \right. \\ &\left. + 2 \frac{\partial u_0^\pm}{\partial x_\kappa} \frac{\partial u_2^\pm}{\partial x_\kappa} + 2z_1(x_1, x_2) \frac{\partial u_1^\pm}{\partial x_\kappa} \frac{\partial^2 u_0^\pm}{\partial x_\kappa \partial x_\kappa \partial x_3} \right] + o((\operatorname{Re})^2), \end{aligned}$$

где $\kappa=1,2,3$.

Учитывая непрерывность функции $u_0(x)$ и ее производных при переходе через Γ_0 , а также соотношения (2.65), (2.67), (2.69) из условия Стефана (2.54) получим, что на Γ_0 должно выполняться следующее условие

$$\frac{\partial u_0}{\partial x_1} \frac{\partial u_2^-}{\partial x_1} + \frac{\partial u_0}{\partial x_2} \frac{\partial u_2^-}{\partial x_2} + \frac{\partial u_0}{\partial x_3} \frac{\partial u_0^-}{\partial x_3} = \frac{\partial u_0}{\partial x_1} \frac{\partial u_2^+}{\partial x_1} + \frac{\partial u_0}{\partial x_2} \frac{\partial u_2^+}{\partial x_2} + \frac{\partial u_0}{\partial x_3} \frac{\partial u_2^+}{\partial x_3}$$

и, кроме того, $u_1^+ = u_1^-, x \in \Gamma_0$. Отсюда, аналогично тому, как это сделано для приближения $u_1^\pm(x)$, следует что $\frac{\partial u_1^+}{\partial x_1} = \frac{\partial u_1^-}{\partial x_1}$, $\frac{\partial u_2^+}{\partial x_2} = \frac{\partial u_2^-}{\partial x_2}$, $\frac{\partial u_2^+}{\partial x_3} = \frac{\partial u_2^-}{\partial x_3}$, $x \in \Gamma_0$.

Это позволяет ввести в рассмотрение функцию $u_2(x)$ по формуле

$$u_2(x) = \begin{cases} u_2^+(x), & x \in \Omega_0^+ \\ u_2^-(x), & x \in \Omega_0^-, \end{cases}$$

для определения которой снова можно применить метод Ритца. Далее, пусть функция $u_2(x)$ - решение задачи $\nabla^2 u_2(x) = F_2(x), x \in \Omega, u_2(x)|_{\Gamma^\pm} = 0$, где $F_2(x) = 0$ при $x \in \overline{\Omega_0^-}$ и $F_2(x) = \lambda(\overline{V}_1 \nabla) u_1^+ + \lambda(\overline{V}_2 \nabla) u_0^+$ при $x \in \overline{\Omega_0^+}$. Тогда $u_2^+(x) = u_2(x)$ при $x \in \overline{\Omega_0^+}$ и $u_2^-(x) = u_2(x)$, если $x \in \overline{\Omega_0^-}$.

Таким образом, доказана теорема [48].

Теорема 2.5. Пусть функции $u_0(x), u_1(x)$ и $u_2(x)$ - решения соответственно задач (6.59), (6.72) и (6.79). Тогда при малых числах Рейнольдса справедлива формула

$$\Gamma : x = x(\omega) - \bar{n}_0(\omega) \frac{\operatorname{Re} u_1(x(\omega))}{|\nabla u_0(x(\omega))|} - \frac{(\operatorname{Re})^2 \bar{n}_0(\omega)}{|\nabla u_0(x(\omega))|} \left[\rho_1(\omega) \frac{\partial u_1(x(\omega))}{\partial \bar{n}_0} + \frac{1}{2} \frac{d^2 u_0}{dt^2}(x(\omega)) + \right. \\ \left. + t \bar{n}_0(\omega) \rho_1(\omega) \right]_{t=0} + u_2(x(\omega)) + o((\operatorname{Re})^2), \rho_1(\omega) = -u_1(x(\omega)) / |\nabla u_0(x(\omega))|, \omega \in \Gamma_0.$$

Эта формула позволяет исследовать зависимость Γ от чисел Re , причем функции $u_0(x)$, $u_1(x)$ и $u_2(x)$, заданные в $\bar{\Omega}$, можно построить методом Рунца.

Глава 3. Исследование конвективного теплопереноса в пространственной нестационарной задаче Стефана

§.1. Приближенный анализ конвективной задачи Стефана

1.1. Постановка задачи

Этот раздел посвящен изучению процессов кристаллизации, когда распространение тепла связано не только с теплопроводностью, но и с конвективным переносом, присутствующим в жидкой фазе. Предложен метод исследования этой пространственной, нестационарной задачи, состоящий в разложении решения в ряд по степеням малого параметра числа Рейнольдса. Ранее автор использовал этот метод при исследовании стационарной задачи. Укажем, что используемые в работе пространства функций определены в [49].

Пусть Ω - заданная область в R^3 , граница которой состоит из двух замкнутых связных гладких поверхностей Γ^+ и Γ^- , не имеющих самопересечений. Поверхности Γ^\pm предполагаются принадлежащими классу $H^{4+\alpha}$, $0 < \alpha < 1$. Пусть далее $\Gamma_t (t \in [0, T])$ - гладкие замкнутые поверхности, лежащие внутри Ω , такие, что Γ^+ лежит внутри ограниченной области, границей которой является Γ_t . Поверхность Γ_t - граница раздела фаз в момент времени t - разбивает область Ω на две связные подобласти Ω_t^+ и Ω_t^- , в которых в каждый момент времени должны выполняться уравнения теплопроводности для неизвестных функций $u^+(x, t)$ и $u^-(x, t)$, описывающих распределение температуры в жидкой и, соответственно, твердой фазах [50]

$$\frac{\partial u^+(x, t)}{\partial t} + (\bar{\nabla} u^+(x, t) - a_+^2 \nabla^2 u^+(x, t)) = 0, (x, t) \in D_T^+, \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial u^-(x, t)}{\partial t} - a_-^2 \nabla^2 u^-(x, t) = 0, (x, t) \in D_T^-, \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial \vec{V}(x,t)}{\partial t} + (\vec{V}\nabla)\vec{V}(x,t) + \nabla p(x,t) = \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 \vec{V}(x,t) + \vec{f}(u^+), \quad (x,t) \in D_T^+; \quad (3.3)$$

$$\nabla \vec{V}(x,t) = 0, \quad (x,t) \in D_T^+,$$

где $D_T^\pm = \{(x,t) : x \in \Omega_t^\pm, t \in (0,T)\}$, $x = (x_1, x_2, x_3)$, a_\pm - заданные положительные постоянные, Re - число Рейнольдса, $\vec{V}(x,t) = (V_1(x,t), V_2(x,t), V_3(x,t))$ - скорость конвективных движений в жидкой фазе, описываемых уравнениями Навье-Стокса и уравнением неразрывности (жидкость предполагается несжимаемой), $\nabla = (\partial/\partial x_1, \partial/\partial x_2, \partial/\partial x_3)$.

Дополнительно к уравнениям задаются начальные и граничные условия

$$u^\pm(x,t)|_{t=0} = A^\pm(x), \quad (3.4)$$

$$\vec{V}(x,t)|_{t=0} = \vec{C}(x), \quad (3.5)$$

$$u^\pm(x,t)|_{x \in \Gamma^+ \cup \Gamma^-} = B^\pm(x,t), \quad (3.6)$$

$$\vec{V}(x,t)|_{x \in \Gamma^+ \cup \Gamma_t} = 0, \quad (3.7)$$

$$u^\pm(x,t)|_{x \in \Gamma_t} = 0, \quad (3.8)$$

$$\sum_{i=1}^3 \left[k_- \frac{\partial u^-}{\partial x_i} - k_+ \frac{\partial u^+}{\partial x_i} \right] \cos(n, x_i) + \kappa \cos(n, t) = 0, \quad x \in \Gamma_t, \quad (3.9)$$

где \vec{n} - нормаль к Γ_t , направленная в сторону Ω_t^+ , параметры k_\pm, κ , предполагаются положительными постоянными, $\vec{f}(u^+)$ - принадлежащей классу $C^2(R^1)$, $\vec{f}'(u^+)$ ограниченной в R^1 . Предполагается также, что

$B^\pm(x,t) \in H^{3+\beta, \frac{3+\beta}{2}}(\Gamma^\pm \times [0,T])$, $0 < \beta < \alpha$, $\vec{C}(x) \in H^{2+\alpha}(\bar{\Omega}_0^+)$, $A^\pm(x) \in H^{5+\alpha}(\bar{\Omega}_0^\pm)$, где Ω_0^\pm - области, на которые разбивает Ω граница раздела фаз Γ_0 , и $\pm B^\pm(x,t) \geq \varepsilon_0 > 0$ при $(x,t) \in \Gamma^\pm \times [0,T]$, кроме того выполнены условия согласования до первого порядка включительно [51]. Укажем, что при малых t задача (3.1) - (3.9) разрешима в классе гладких функций. При этом $u^\pm \in H^{2+\alpha, \frac{2+\alpha}{2}}(\bar{D}_T^\pm)$, $\vec{V} \in H^{2+\beta, \frac{2+\beta}{2}}(\bar{D}_T^+)$, а граница раздела фаз принадлежит классу $H^{2+\alpha, \frac{2+\alpha}{2}}$ [50].

Заметим, наконец, что замена

$$\tilde{u}^\pm(x,t) = \begin{cases} k_+ u^+, (x,t) \in D_T^+ \\ k_- u^-, (x,t) \in D_T^- \end{cases}$$

позволяет записать условие (3.9) в виде

$$|\nabla \tilde{u}^-|^2 - |\nabla \tilde{u}^+|^2 = -\kappa \left(\frac{\partial \tilde{u}^-}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{u}^+}{\partial t} \right) \quad x \in \Gamma_t. \quad (3.10)$$

1.2. Разложение решения в ряд по степеням малого параметра Re

Пусть Ω_0^\pm - области, на которые разбивает Ω граница раздела фаз Γ_0 . Для точек поверхности Γ_0 введем координаты $\omega = (\omega_1, \omega_2)$, через $x(\omega) \in \Gamma_0$ или через ω будем обозначать также соответствующие точки в R^3 . Далее, пусть $\vec{n}(\omega)$ - нормаль к Γ_0 , направленная внутрь Ω_0^\pm . Известно, что свободную границу Γ_t можно представить в виде $\Gamma_t = \{x = x(\omega) + \vec{n}(\omega) \cdot \rho(\omega, t)\}$ с некоторой функцией $\rho(\omega, t)$ класса $H^{2+\alpha, \frac{2+\alpha}{2}}(\Gamma_0 \times [0, T])$, так что $\rho(\omega, 0) = 0$ [51].

Предположим, что неизвестные нашей задачи можно представить в виде степенного ряда

$$\begin{aligned} u^\pm(x, t; \text{Re}) &= u_0^\pm(x) + \sum_{k=1}^{\infty} (\text{Re})^k u_k^\pm(x, t), \\ p(x, t; \text{Re}) &= p_0(x) + \sum_{k=1}^{\infty} (\text{Re})^k p_k(x, t), \end{aligned} \quad (3.11)$$

$$V_i(x, t; \text{Re}) = V_{i0}(x) + \sum_{k=1}^{\infty} (\text{Re})^k V_{ik}(x, t), \quad i = 1, 2, 3$$

$$\rho(\omega, t; \text{Re}) = \sum_{\kappa=1}^{\infty} (\text{Re})^\kappa \rho_\kappa(\omega, t), \quad \rho_\kappa(\omega, 0) = 0. \quad (3.12)$$

Далее, пусть выполняются следующие условия

$$\begin{aligned} \nabla^2 A^\pm(x) &= 0, \quad x \in \Omega_0^\pm; \quad A^\pm(x)|_{\Gamma^\pm} = B^\pm(x, 0), \quad A^\pm(x)|_{\Gamma_0} = 0, \quad \vec{C}(x) = 0, \quad x \in \bar{\Omega}_0^\pm \\ k_- |\nabla A^-(x)|_{\Gamma_0} &= k_+ |\nabla A^+(x)|_{\Gamma_0}, \quad |\nabla A^\pm(x)|_{\Gamma_0} \geq \tilde{\varepsilon} > 0. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Выпишем теперь условия, определяющие нулевое приближение $\vec{V}_0(x), u_0^\pm(x)$

$$\begin{cases} \nabla^2 \vec{V}_0(x) = 0, \nabla \vec{V}_0(x) = 0, x \in \Omega_0^+, \vec{V}_0(x) \Big|_{\partial \Omega_0^+} = 0, \nabla^2 u_0^\pm(x) = 0, x \in \Omega_0^\pm, \\ u_0^\pm(x) \Big|_{\Gamma^\pm} = B^\pm(x, 0), u_0^\pm(x) \Big|_{\Gamma_0} = 0, k_- \frac{\partial u_0^-(x)}{\partial n} \Big|_{\Gamma_0} - k_+ \frac{\partial u_0^+(x)}{\partial n} \Big|_{\Gamma_0} = 0, \end{cases} \quad (3.14)$$

\vec{n}_0 - нормаль к Γ_0 , направленная в сторону области Ω_0^+ . Тогда в качестве нулевого приближения $u_0^\pm(x)$ можно взять функции $A^\pm(x)$, т.е. $u_0^\pm(x) = A^\pm(x)$, $x \in \bar{\Omega}_0^\pm$.

Замечание 4. Заметим, также, что из условий (3.13) следует $\vec{V}_0 = (V_{10}, V_{20}, V_{30}) \equiv 0$ в Ω_0^+ . Далее, на Γ_0 в силу (3.10) будут выполняться два условия: $u_0^+ = u_0^- = 0, |\nabla u_0^+| = |\nabla u_0^-|$. Поэтому можно построить функцию $u_0(x)$ по формуле

$$u_0(x) = u_0^+ \text{ при } x \in \bar{\Omega}_0^+ \text{ и } u_0(x) = u_0^- \text{ при } x \in \bar{\Omega}_0^-, \quad (3.14)$$

которая в силу условий (3.13) является решением следующей задачи

$$\nabla^2 u_0 = 0, x \in \Omega; u_0 \Big|_{\Gamma^\pm} = B^\pm(x). \quad (3.15)$$

Следовательно, Γ_0 есть поверхность уровня гармонической в Ω функции $u_0(x)$, т.е. $\Gamma_0 = \{x \in \Omega : u_0(x) = 0\}$.

Далее предположим дополнительно, что поверхности Γ^\pm являются звездными. Тогда, рассматривая функцию $u_0(x)$ в одной из областей Ω_0^\pm и применяя лемму о нормальной производной, заключаем, что $\frac{\partial u_0(x)}{\partial \vec{n}_0} \Big|_{x \in \Gamma_0} \geq \tilde{\varepsilon}_0 > 0$, где $\tilde{\varepsilon}_0$ - некоторая положительная постоянная. Отсюда, на самом деле, и из теоремы о неявной функции следует, что Γ_0 принадлежит классу C^∞ , так как этому классу в окрестности Γ_0 принадлежит гармоническая функция $u_0(x)$ (см. лемму 2.6).

Замечание 5. Разложения (3.1) означают, что решение задачи (3.1) - (3.9) исследуется в окрестности решения задачи (3.14), являющейся стационарной по отношению к (3.1) - (3.9).

Замечание 6. Положим

$$\Delta_1 = \cos(n \wedge x), \quad \Delta_2 = \cos(n \wedge y),$$

$$x = x(\omega) + \Delta_1 \rho_1 \operatorname{Re} + \Delta_1 \rho_2 (\operatorname{Re})^2,$$

$$y = y(\omega) + \Delta_2 \rho_1 \operatorname{Re} + \Delta_2 \rho_2 (\operatorname{Re})^2.$$

Составим разложение условия Стефана по степеням малых чисел Re . Имеем при $(x, y) \in \Gamma_0$

$$\begin{aligned}
u_x &= u_{0x}(x, y) + \text{Re}u_{1x}(x, y, t) + (\text{Re})^2u_{2x}(x, y, t), \\
u_x^2|_{\Gamma} &= u_{0x}^2 + (\text{Re})^2u_{1x}^2 + 2u_{0x}u_{1x}\text{Re} + 2(\text{Re})^2u_{0x}u_{2x} + o(\text{Re})^2, \\
u_x|_{\Gamma} &= u_{0x}(x + \Delta_1\rho_1\text{Re} + \Delta_1\rho_2(\text{Re})^2, y + \Delta_2\rho_1\text{Re} + \Delta_2\rho_2(\text{Re})^2) + \text{Re}u_{1x} + (\text{Re})^2u_{2x} = \\
&= u_{0x} + u_{0xx}[\Delta_1\rho_1\text{Re} + \Delta_1\rho_2(\text{Re})^2] + u_{0xy}[\Delta_2\rho_1\text{Re} + \Delta_2\rho_2(\text{Re})^2] + \\
&+ \frac{1}{2}[u_{0xxx}(\Delta_1\rho_1\text{Re} + \Delta_1\rho_2(\text{Re})^2)^2 + 2u_{0xy}(\Delta_1\rho_1\text{Re} + \Delta_1\rho_2(\text{Re})^2)(\Delta_2\rho_1\text{Re} + \\
&+ \Delta_2\rho_2(\text{Re})^2) + u_{0yy}(\Delta_2\rho_1\text{Re} + \Delta_2\rho_2(\text{Re})^2)^2] + \text{Re}[u_{1x} + u_{1xx}(\Delta_1\rho_1\text{Re} + \Delta_1\rho_2(\text{Re})^2) + \\
&+ u_{1xy}(\Delta_2\rho_1\text{Re} + \Delta_2\rho_2(\text{Re})^2)] + (\text{Re})^2u_{2x} = u_{0x} + u_{0xx}\Delta_1\rho_1\text{Re} + u_{0xx}\Delta_1\rho_2(\text{Re})^2 + \\
&+ u_{0xy}\Delta_2\rho_1\text{Re} + u_{0xy}\Delta_2\rho_2(\text{Re})^2 + \frac{1}{2}u_{0xxx}\Delta_1^2\rho_1^2(\text{Re})^2 + u_{0xy}\Delta_1\Delta_2\rho_1^2(\text{Re})^2 + \\
&+ \frac{1}{2}\Delta_2^2\rho_1^2(\text{Re})^2u_{0yy} + \text{Re}u_{1x} + (\text{Re})^2u_{1xx}\Delta_1\rho_1 + (\text{Re})^3u_{1xx}\Delta_1\rho_2 + u_{1xy}(\text{Re})^2\Delta_2\rho_1 + \\
&+ (\text{Re})^3u_{1xy}\Delta_2\rho_2 + (\text{Re})^2u_{2x} = u_{0x} + u_{0xx}\Delta_1\rho_1\text{Re} + u_{0xx}\Delta_1\rho_2(\text{Re})^2 + u_{0xy}\Delta_2\rho_1\text{Re} + \\
&+ u_{0xy}\Delta_2\rho_2(\text{Re})^2 + \frac{1}{2}u_{0xxx}\Delta_1^2\rho_1^2(\text{Re})^2 + u_{0xy}\Delta_1\Delta_2\rho_1^2(\text{Re})^2 + \frac{1}{2}u_{0xy}\Delta_2^2\rho_1^2(\text{Re})^2 + \\
&+ \text{Re}u_{1x} + (\text{Re})^2u_{1xx}\Delta_1\rho_1 + u_{1xy}(\text{Re})^2\Delta_2\rho_1 + (\text{Re})^2u_{2x} = u_{0x} + \text{Re}\rho_1\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{\partial u_0}{\partial x}\right) + \\
&+ (\text{Re})^2\rho_2\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{\partial u_0}{\partial x}\right) + (\text{Re})^2\rho_1\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x}\right) + \text{Re}\frac{\partial u_1}{\partial x} + (\text{Re})^2\frac{\partial u_2}{\partial x} + \\
&+ \frac{\text{Re}}{2}\frac{d^2u_{0x}}{d\tau^2}(z(\omega) + \tau\vec{n}\rho_1)|_{\tau=0} = u_{0x} + \text{Re}\left[\rho_1\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{\partial u_0}{\partial x}\right) + \frac{\partial u_1}{\partial x}\right] + (\text{Re})^2\left[\rho_2\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{\partial u_0}{\partial x}\right) + \right. \\
&\left. + \rho_1\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x}\right) + \frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{1}{2}\frac{d^2u_{0x}}{d\tau^2}(z(\omega) + \tau\vec{n}\rho_1)\right]_{\tau=0}.
\end{aligned}$$

Итак, получим

$$u_x^2|_{\Gamma} = u_{0x}^2 + (\text{Re})^2 \left[\rho_1 \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} \right) + \frac{\partial u_1}{\partial x} \right]^2 + 2u_{0x} \text{Re} \left[\rho_1 \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} \right) + \frac{\partial u_1}{\partial x} \right] +$$

$$+ 2(\text{Re})^2 u_{0x} \left[\rho_2 \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} \right) + \rho_1 \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} \right) + \frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{d^2 u_{0x}}{d\tau^2} (z(\omega) + \tau \vec{n} \rho_1) \right]_{\tau=0}.$$

Далее, имеем

$$u_t|_{\Gamma} = \text{Re} u_{1t}(x, y, t) + (\text{Re})^2 u_{2t}(x, y, t),$$

$$u_t|_{\Gamma} = \text{Re} u_{1t}(x + \rho_1 \Delta_1 \text{Re} + \rho_2 \Delta_1 (\text{Re})^2, y + \rho_1 \Delta_2 \text{Re} + \rho_2 \Delta_2 (\text{Re})^2, t) + (\text{Re})^2 u_{2t} =$$

$$= \text{Re} \left[u_{1t}(x, y) + u_{1tx}(\rho_1 \Delta_1 \text{Re} + \rho_2 \Delta_1 (\text{Re})^2) + u_{1ty}(\rho_1 \Delta_2 \text{Re} + \rho_2 \Delta_2 (\text{Re})^2) \right] + (\text{Re})^2 u_{2t}(x, y, t) =$$

$$= \text{Re} u_{1t}(x, y, t) + (\text{Re})^2 \left[u_{1tx} \Delta_1 \rho_1 + u_{1ty} \rho_1 \Delta_2 \right] + (\text{Re})^3 \left[u_{1tx} \rho_2 \Delta_1 + u_{1ty} \rho_2 \Delta_2 \right] + (\text{Re})^2 u_{2t}(x, y, t) =$$

$$= \text{Re} u_{1t}(x, y, t) + (\text{Re})^2 \rho_1 \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{\partial u_1}{\partial t} \right) + (\text{Re})^2 \frac{\partial u_2}{\partial t} = \text{Re} \frac{\partial u_1}{\partial t} + (\text{Re})^2 \left[\rho_1 \frac{\partial}{\partial n} \frac{\partial u_1}{\partial t} + \frac{\partial u_2}{\partial t} \right].$$

Имеем также условие на Γ_0

$$|\nabla u_0(x(\omega))|_{\rho_2(\omega)} + \frac{\partial u_1(x(\omega), t)}{\partial \vec{n}_0} \rho_1(\omega) + \frac{1}{2} \frac{d^2 u_0}{d\tau^2} (x(\omega) + \tau \vec{n}_0(\omega) \rho_1(\omega, t)) \Big|_{\tau=0} + u_2(x(\omega), t) = 0.$$

1.3. Первое приближение

Пусть по прежнему Γ_0 - граница раздела фаз Ω_0^{\pm} стационарной задачи (3.14) и пусть далее $\tilde{D}_T^{\pm} = \Omega_0^{\pm} \times (0, T)$, $\Gamma_T^{\pm} = \Gamma^{\pm} \times [0, T]$, $\tilde{\Gamma}_T = \Gamma_0 \times [0, T]$, $\Gamma_T = \Gamma_t \times [0, T]$. Для функций $\vec{V}_1(x, t) = (V_{11}(x, t), V_{21}(x, t), V_{31}(x, t))$, $u_1^{\pm}(x, t)$, $\rho_1(\omega, t)$ из условий (3.1) - (3.9) и разложений (3.11), (3.12) вытекает следующая задача

$$\frac{\partial \vec{V}_1(x, t)}{\partial t} + \nabla p_0(x) = \nabla^2 \vec{V}_1(x, t) + \vec{f}(u_0^+), \nabla \vec{V}_1(x, t) = 0 \text{ в } \tilde{D}_T^+, \quad (3.16)$$

$$\vec{V}_1(x, t) \Big|_{\Gamma_T^+ \cup \tilde{\Gamma}_T} = 0, \vec{V}_1(x, t) \Big|_{t=0} = 0; \quad (3.17)$$

$$\frac{\partial u_1^{\pm}(x, t)}{\partial t} - a_{\pm}^2 \nabla^2 u_1^{\pm}(x, t) = F_1^{\pm}(x, t) \text{ в } \tilde{D}_T^{\pm}, u_1^{\pm}(x, t) \Big|_{t=0} = 0, \quad (3.18)$$

$$u_1^{\pm}(x, t) \Big|_{\Gamma_T^{\pm}} = 0, \left[|\nabla u_0(x(\omega))|_{\rho_1(\omega, t)} + u_1^{\pm}(x(\omega), t) \right] \Big|_{\Gamma_0} = 0, \quad (3.19)$$

где $F_1^\pm(x,t) = -(\vec{V}_1(x,t)\nabla)u_0^\pm(x)$ при $(x,t) \in \tilde{D}_T^+$ и $F_1^-(x,t) = 0$ при $(x,t) \in \tilde{D}_T^-$. Кроме того, на Γ_0 должно выполняться условие

$$\begin{aligned}
& 2\rho_1(\omega,t) \left[k_-^2 \left(\frac{\partial u_0^-}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{\partial u_0^-}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial u_0^-}{\partial x_2} \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{\partial u_0^-}{\partial x_2} \right) + \frac{\partial u_0^-}{\partial x_3} \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{\partial u_0^-}{\partial x_3} \right) \right) - k_+^2 \left(\frac{\partial u_0^+}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{\partial u_0^+}{\partial x_1} \right) + \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{\partial u_0^+}{\partial x_2} \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{\partial u_0^+}{\partial x_2} \right) + \frac{\partial u_0^+}{\partial x_3} \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{\partial u_0^+}{\partial x_3} \right) \right) \right] + 2 \left[k_-^2 \left(\frac{\partial u_0^-}{\partial x_1} \frac{\partial u_1^-}{\partial x_1} + \frac{\partial u_0^-}{\partial x_2} \frac{\partial u_1^-}{\partial x_2} + \frac{\partial u_0^-}{\partial x_3} \frac{\partial u_1^-}{\partial x_3} \right) - \right. \\
& \left. - k_+^2 \left(\frac{\partial u_0^+}{\partial x_1} \frac{\partial u_1^+}{\partial x_1} + \frac{\partial u_0^+}{\partial x_2} \frac{\partial u_1^+}{\partial x_2} + \frac{\partial u_0^+}{\partial x_3} \frac{\partial u_1^+}{\partial x_3} \right) \right] = -\kappa \left(k_- \frac{\partial u_1^-}{\partial t} + k_+ \frac{\partial u_1^+}{\partial t} \right), \quad (3.20)
\end{aligned}$$

где $u_0^\pm = u_0^\pm(x(\omega))$, $u_1^\pm = u_1^\pm(x(\omega),t)$.

Далее, так как $k_- |\nabla u_0^-| = k_+ |\nabla u_0^+|$ на Γ_0 , то условие (3.9) может быть представлено в виде

$$\begin{aligned}
& 2k_-^2 \left[\frac{\partial u_0^-(x)}{\partial x_1} \frac{\partial u_1^-(x,t)}{\partial x_1} + \frac{\partial u_0^-(x)}{\partial x_2} \frac{\partial u_1^-(x,t)}{\partial x_2} + \frac{\partial u_0^-(x)}{\partial x_3} \frac{\partial u_1^-(x,t)}{\partial x_3} \right] - \\
& - 2k_+^2 \left[\frac{\partial u_0^+(x)}{\partial x_1} \frac{\partial u_1^+(x,t)}{\partial x_1} + \frac{\partial u_0^+(x)}{\partial x_2} \frac{\partial u_1^+(x,t)}{\partial x_2} + \frac{\partial u_0^+(x)}{\partial x_3} \frac{\partial u_1^+(x,t)}{\partial x_3} \right] = \\
& = -\kappa \left[k_- \frac{\partial u_1^-(x,t)}{\partial t} + k_+ \frac{\partial u_1^+(x,t)}{\partial t} \right], \quad x \in \Gamma_0.
\end{aligned}$$

Воспользовавшись теперь условием (3.9) получим

$$k_+ \frac{\partial u_1^+(x,t)}{\partial n} - k_- \frac{\partial u_1^-(x,t)}{\partial n} = \kappa \frac{\partial \rho_1}{\partial t}, \quad x \in \Gamma_0, \quad (3.21)$$

где вновь необходимо учесть, $k_- |\nabla u_0^-| = k_+ |\nabla u_0^+|$ на Γ_0 .

Далее, учитывая, что условие согласования предполагаются выполненными [51], имеем на Γ_0 $\frac{\partial u_1^+(x,t)}{\partial t} \Big|_{t=0} = \left[-(\vec{V}_1(x,t)\nabla)u_0^+(x) + a_+^2 \nabla^2 u_1^+(x,t) \right]_{t=0} = 0$, так как $\vec{V}_1(x,0) = 0$, $u_1^+(x,0) = 0$ и $\frac{\partial u_1^-(x,t)}{\partial t} \Big|_{t=0} = a_-^2 \nabla^2 u_1^-(x,t) \Big|_{t=0} = 0$ на Γ_0 , ввиду того, что $u_1^-(x,0) = 0$.

Следовательно, получим

$$\frac{\partial u_1^+(x,0)}{\partial t} \Big|_{x \in \Gamma_0} = \frac{\partial u_1^-(x,0)}{\partial t} \Big|_{x \in \Gamma_0} = 0. \quad (3.22)$$

Затем, используя равенство (3.22), аналогично тому, как это сделано в лемме 2.7 можно показать, что

$$\frac{\partial u_1^+(x,0)}{\partial x_1} = \frac{\partial u_1^-(x,0)}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial u_1^+(x,0)}{\partial x_2} = \frac{\partial u_1^-(x,0)}{\partial x_2}, \quad \frac{\partial u_1^+(x,0)}{\partial x_3} = \frac{\partial u_1^-(x,0)}{\partial x_3} \quad (3.23)$$

при $x \in \Gamma_0$. Таким образом, в силу равенств (3.22) и (3.23) заключаем, что условие (3.21) при $t = 0$ на решении $u^\pm(x, t)$ задачи (3.16) - (3.21) будет выполняться.

Далее, учитывая, что $u_1^\pm(x,0) = 0$ и $\vec{V}_1(x,0) = 0$ получим из уравнений (3.18) что $u_{1t}^\pm(x,0) = 0$. Очевидно, что $F_1^\pm \in H^{2+\alpha, \frac{2+\alpha}{2}}(\overline{D_T^\pm})$. Задача (3.18), (3.19), (3.21) фактически изучена в [49], при этом $u_1^\pm \in H^{2+\alpha, \frac{2+\alpha}{2}}(\overline{D_T^\pm})$ и $\rho_1 \in \hat{H}^{2+\alpha, \frac{2+\alpha}{2}}(\overline{D_T^\pm})$.

При заданном $\rho_1(\omega, t) \in H^{2+\alpha, \frac{2+\alpha}{2}}(\Gamma_T)$ найдем функцию $u_1^\pm(x, t; \rho_1) \in H^{2+\alpha, \frac{2+\alpha}{2}}(D_T^\pm)$, как единственное решение задачи (3.18) [47].

Построим теперь оператор M_1 следующим образом

$$M_1 \rho_1 = \frac{1}{k} \int_0^t \left(k_+ \frac{\partial u_1^+}{\partial n}(x(\omega), t; \rho_1) - k_- \frac{\partial u_1^-}{\partial n}(x(\omega), t; \rho_1) \right) dt, \quad x(\omega) \in \Gamma_0,$$

который действует из $H^{2+\alpha, \frac{2+\alpha}{2}}(\Gamma_T)$ в $H^{2+\alpha, \frac{2+\alpha}{2}}(\Gamma_T)$. Действительно, при $x(\omega) \in \Gamma_0$ функция $\left[k_+ \frac{\partial u_1^+}{\partial n} - k_- \frac{\partial u_1^-}{\partial n} \right]$ имеет достаточную гладкость, так как Γ_0 лежит внутри D_T^\pm .

Далее, для решения $u_1^\pm(x, t; \rho_1)$ справедливы оценки $|u_1^\pm|_{D_T^\pm}^{(\alpha+2)} \leq c \left(|F_1^\pm|_{D_T^\pm}^{(\alpha)} + |\rho_1|_{\Gamma_T}^{(\alpha+2)} \right)$, где c – некоторая постоянная [49].

Рассмотрим теперь функцию $\rho_1(\omega, t) \in H^{2+\alpha, \frac{2+\alpha}{2}}(\Gamma_T)$ и построим соответствующие решения $u_1^\pm = u_1^\pm(x, t; \rho_1)$. Тогда получим

$$\left| u_1^\pm - u_1^\pm \right|_{D_T^\pm}^{(\alpha+2)} \leq c \left(\left| \rho_1 - \rho_1 \right|_{\Gamma_T}^{(\alpha+2)} \right).$$

Отсюда с учетом того, что

$$M \rho_1 - M \rho_1 = \frac{1}{k} \int_0^t \left[k_+ \frac{\partial(u_1^+ - u_1^+)}{\partial n} - k_- \frac{\partial(u_1^- - u_1^-)}{\partial n} \right] dt, x(\omega) \in \Gamma_0$$

следует

$$\left| M_1 \rho_1 - M_1 \rho_1 \right|_{\Gamma_T}^{(\alpha+2)} \leq c \left| \rho_1 - \rho_1 \right|_{\Gamma_T}^{(\alpha+2)},$$

где $0 < c < 1$ (это достигается за счет выбора параметров k_\pm и k). Итак, оператор M_1 сжимающий. Следовательно, он имеет единственную неподвижную точку в $H^{2+\alpha, \frac{2+\alpha}{2}}(\Gamma_T)$, т.е. $M_1 \rho_1 = \rho_1$ [50].

Лемма 3.1. Пусть выполнены условия (3.13). Тогда $u_0^\pm(x) = A^\pm(x)$ при $x \in \bar{\Omega}^\pm$, а в качестве приближения $u_1^\pm(x, t)$ можно взять решение задачи (3.16) - (3.19). При этом Γ_0 - поверхность класса C^∞ (в предположении звездности Γ^\pm), не имеющая самопересечений и расположенная относительно Γ^+ и Γ^- аналогично поверхности Γ в задаче (3.1) - (3.9).

Лемма 3.2 Оператор M , действующий из $H^{2+\alpha, \frac{2+\alpha}{2}}(\Gamma_T)$ в $H^{2+\alpha, \frac{2+\alpha}{2}}(\Gamma_T)$, имеет там неподвижную точку.

1.4. Второе приближение

Рассмотрим теперь второе приближение $(\vec{V}_2, u_2^\pm, p_2, \rho_2)$ задачи (3.1) - (3.9) для малых чисел Рейнольдса. Имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{V}_2}{\partial t} + (\vec{V}_2 \nabla) \vec{V}_1 + \nabla p_1 &= \nabla^2 \vec{V}_2 + \vec{f}'(u_0^+) u_1^\pm, \quad \nabla \vec{V}_2 = 0, \quad (x, t) \in \tilde{D}_T^+, \quad \vec{V}_2(x, t) \Big|_{\Gamma_T^+ \cup \tilde{\Gamma}_T} = 0, \quad \vec{V}_2(x, t) \Big|_{t=0} = 0; \\ \frac{\partial u_2^\pm}{\partial t} - a_\pm^2 \nabla^2 u_2^\pm &= F_2^\pm(x, t) \text{ в } \tilde{D}_T^\pm, \quad u_2^\pm(x, t) \Big|_{\Gamma_T^\pm} = 0, \quad u_2^\pm(x, t) \Big|_{t=0} = 0, \\ \left[\nabla u_0^\pm(x(\omega)) \Big|_{\rho_2(\omega, t)} + u_2^\pm(x(\omega), t) \right] \Big|_{\Gamma_0} &= f_1^\pm(x, t), \quad x \in \Gamma_0, \end{aligned} \quad (3.24)$$

где $F_2^+(x, t) = -(\vec{V}_1 \nabla) u_1^+ - (\vec{V}_2 \nabla) u_0^+$ при $(x, t) \in \tilde{D}_T^+$ и $F_2^-(x, t) = 0$ при $(x, t) \in \tilde{D}_T^-$ и $f_1^\pm(x, t) = -\frac{\partial u_1^\pm}{\partial n}(x(\omega), t) \rho_1(\omega, t) - \frac{1}{2} \frac{d^2 u_0^\pm(x(\omega) + \tau n(\omega) \rho_1(\omega, t))}{d\tau^2} \Big|_{\tau=0}$ при $x \in \Gamma_0$. Кроме того, при $x \in \Gamma_0$ справедливы представления

$$\begin{aligned} \frac{\partial u^\pm}{\partial t} \Big|_{\Gamma_r} &= \text{Re} \frac{\partial u_1^\pm}{\partial t} + (\text{Re})^2 \left[\rho_1 \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{\partial u_1^\pm}{\partial t} \right) + \frac{\partial u_2^\pm}{\partial t} \right] + o(\text{Re})^2, \\ \left(\frac{\partial u^\pm}{\partial x_k} \right) \Big|_{\Gamma_r} &= \left(\frac{\partial u_0^\pm}{\partial x_k} \right)^2 + 2 \text{Re} \left[\rho_1 \cdot \frac{\partial u_0^\pm}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{\partial u_0^\pm}{\partial x_k} \right) + \frac{\partial u_0^\pm}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial u_1^\pm}{\partial x_k} \right] + \\ &+ (\text{Re})^2 \left[\rho_1 \frac{\partial}{\partial n} \cdot \left(\frac{\partial u_0^\pm}{\partial x_k} \right) + \frac{\partial u_1^\pm}{\partial x_k} \right]^2 + 2(\text{Re})^2 \frac{\partial u_0^\pm}{\partial x_k} \left[\rho_2 \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{\partial u_0^\pm}{\partial x_k} \right) + \right. \\ &\left. + \rho_1 \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{\partial u_1^\pm}{\partial x_k} \right) + \frac{\partial u_2^\pm}{\partial x_k} + \frac{1}{2} \frac{d^2}{d\tau^2} \left(\frac{\partial u_0^\pm}{\partial x_k}(x(\omega) + \tau n \rho_1) \right) \right] \Big|_{\tau=0} + o((\text{Re})^2), \quad x \in \Gamma_0, \quad k = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

Имеем при $x \in \Gamma_0$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial u^\pm}{\partial x_k} \right) \Big|_{\Gamma_r} &= \left(\frac{\partial u_0^\pm}{\partial x_k} \right)^2 + 2 \text{Re} \frac{\partial u_0^\pm}{\partial x_k} \frac{\partial u_1^\pm}{\partial x_k} + 2(\text{Re})^2 \frac{\partial u_0^\pm}{\partial x_k} \frac{\partial u_2^\pm}{\partial x_k} + \Phi_\pm(u_0^\pm, u_1^\pm, \rho_1; \text{Re}) + O(\text{Re})^2, \quad \text{где} \\ \Phi_\pm(u_0^\pm, u_1^\pm, \rho_1; \text{Re}) &= 2 \text{Re} \rho_1 \frac{\partial u_0^\pm}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{\partial u_0^\pm}{\partial x_k} \right) + (\text{Re})^2 \left[\rho_1 \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{\partial u_0^\pm}{\partial x_k} \right) + \frac{\partial u_1^\pm}{\partial x_k} \right]^2 + \\ &+ 2(\text{Re})^2 \frac{\partial u_0^\pm}{\partial x_k} \left[\rho_2 \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{\partial u_0^\pm}{\partial x_k} \right) + \rho_1 \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{\partial u_1^\pm}{\partial x_k} \right) + \frac{1}{2} \frac{d^2}{d\tau^2} \left(\frac{\partial u_0^\pm}{\partial x_k}(x(\omega) + \tau n \rho_1) \right) \right] \Big|_{\tau=0} \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}
o &= \left[k_-^2 |\nabla u^-|^2 - k_+^2 |\nabla u^+|^2 + k \left(k_- \frac{\partial u^-}{\partial t} + k_+ \frac{\partial u^+}{\partial t} \right) \right] \Big|_{\Gamma} = \left[k_-^2 |\nabla u_0^-|^2 - k_+^2 |\nabla u_0^+|^2 \right] + \\
&+ \operatorname{Re} \left[k_+ \frac{\partial u_1^+}{\partial n} - k_- \frac{\partial u_1^-}{\partial n} + k \frac{\partial \rho_1}{\partial t} \right] + (\operatorname{Re})^2 \left[2k_-^2 \nabla u_0^- \nabla u_2^- - 2k_+^2 \nabla u_0^+ \nabla u_2^+ + k_-^2 \Phi_- - \right. \\
&\quad \left. - k_+^2 \Phi_+ + k k_- \rho_1 \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{\partial u_1^-}{\partial t} \right) + k k_- \frac{\partial u_2^-}{\partial t} + k k_+ \rho_1 \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{\partial u_1^+}{\partial t} \right) + k k_+ \frac{\partial u_2^+}{\partial t} \right] = \\
&= \left[k_-^2 |\nabla u_0^-|^2 - k_+^2 |\nabla u_0^+|^2 \right] + \operatorname{Re} \left[k_+ \frac{\partial u_1^+}{\partial n} - k_- \frac{\partial u_1^-}{\partial n} + k \frac{\partial \rho_1}{\partial t} \right] + \\
&+ (\operatorname{Re})^2 \left[k_+ \frac{\partial u_2^+}{\partial n} - k_- \frac{\partial u_2^-}{\partial n} + k \frac{\partial \rho_2}{\partial t} + f_2(x, t) \right] + o(\operatorname{Re})^2, \quad x \in \Gamma_0,
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
f_2(x, t) &= - \frac{k \rho_1}{k_+ |\nabla u_0^+| + k_- |\nabla u_0^-|} \frac{\partial}{\partial n} \left(k_+ \frac{\partial u_1^+}{\partial t} + k_- \frac{\partial u_1^-}{\partial t} \right) - \frac{k}{k_+ |\nabla u_0^+| + k_- |\nabla u_0^-|} \left(k_+ \frac{\partial f_1^+}{\partial t} + k_- \frac{\partial f_1^-}{\partial t} \right) - \\
&\quad - \frac{k_-^2 \Phi_- - k_+^2 \Phi_+}{k_+ |\nabla u_0^+| + k_- |\nabla u_0^-|},
\end{aligned}$$

так как

$$\begin{aligned}
2k_-^2 \nabla u_0^- \nabla u_2^- - 2k_+^2 \nabla u_0^+ \nabla u_2^+ + k_-^2 \Phi_- - k_+^2 \Phi_+ + k k_- \rho_1 \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{\partial u_1^-}{\partial t} \right) + k_- k \frac{\partial u_2^-}{\partial t} + k k_+ \rho_1 \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{\partial u_1^+}{\partial t} \right) + \\
+ k_+ k \frac{\partial u_2^+}{\partial t} = 0, \quad x \in \Gamma_0
\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}
k_- \frac{\partial u_2^-}{\partial t} + k_+ \frac{\partial u_2^+}{\partial t} = k_- \frac{\partial f_1^-}{\partial t} - k_- |\nabla u_0^-| \frac{\partial \rho_2}{\partial t} + k_+ \frac{\partial f_1^+}{\partial t} - k_+ |\nabla u_0^+| \frac{\partial \rho_2}{\partial t} = + \left(k_- \frac{\partial f_1^-}{\partial t} + k_+ \frac{\partial f_1^+}{\partial t} \right) - \\
- \left(k_- |\nabla u_0^-| + k_+ |\nabla u_0^+| \right) \frac{\partial \rho_2}{\partial t}, \quad x \in \Gamma_0.
\end{aligned}$$

Здесь необходимо учесть, что $k_+ \frac{\partial u_0^+}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{\partial u_0^+}{\partial x_k} \right) = k_- \frac{\partial u_0^-}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{\partial u_0^-}{\partial x_k} \right)$, $x \in \Gamma_0$.

Тогда разность $[k_-^2 \Phi_- - k_+^2 \Phi_+]$ на Γ_0 не будет зависеть от $\rho_2(\omega, t)$.

Итак, получим

$$\begin{aligned}
2k_-^2 \frac{\nabla u_0^-}{k_- |\nabla u_0^-| + k_+ |\nabla u_0^+|} \nabla u_2^- - 2k_+^2 \frac{\nabla u_0^+}{k_- |\nabla u_0^-| + k_+ |\nabla u_0^+|} \nabla u_2^+ + \frac{k_-^2 \Phi_- - k_+^2 \Phi_+}{k_- |\nabla u_0^-| + k_+ |\nabla u_0^+|} + \\
+ \frac{k k_- \rho_1 \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{\partial u_1^-}{\partial t} \right)}{k_- |\nabla u_0^-| + k_+ |\nabla u_0^+|} + \frac{k k_+ \rho_1 \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{\partial u_1^+}{\partial t} \right)}{k_- |\nabla u_0^-| + k_+ |\nabla u_0^+|} - k \frac{\partial \rho_2}{\partial t} + \frac{k_- \frac{\partial f_1^-}{\partial t} + k_+ \frac{\partial f_1^+}{\partial t}}{k_- |\nabla u_0^-| + k_+ |\nabla u_0^+|} = 0.
\end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$k_- \frac{\partial u_2^-}{\partial n} - k_+ \frac{\partial u_2^+}{\partial n} = k \frac{\partial \rho_2}{\partial t} - \frac{k_-^2 \Phi_- - k_+ \Phi_+}{k_- |\nabla u_0^-| + k_+ |\nabla u_0^+|} - \frac{k \rho_1}{k_- |\nabla u_0^-| + k_+ |\nabla u_0^+|} \frac{\partial}{\partial n} \left(k_+ \frac{\partial u_1^+}{\partial t} + k_- \frac{\partial u_1^-}{\partial t} \right) - \frac{k}{k_- |\nabla u_0^-| + k_+ |\nabla u_0^+|} \left(k_+ \frac{\partial f_1^+}{\partial t} + k_- \frac{\partial f_1^-}{\partial t} \right) = k \frac{\partial \rho_2}{\partial t} + f_2(x, t), \quad x \in \Gamma_0,$$

т.е.

$$k_+ \frac{\partial u_2^+}{\partial n} - k_- \frac{\partial u_2^-}{\partial n} = \kappa \frac{\partial \rho_2}{\partial t} + f_2(x, t), \quad x \in \Gamma_0. \quad (3.25)$$

Разрешимость задач (3.24), (3.25) и (3.16) - (3.21) установлена в [49].

Затем вводим в рассмотрение оператор M_2

$$M_2 \rho_2 = \frac{1}{k} \int_0^t \left[k_+ \frac{\partial u_2^+}{\partial n}(x(\omega), t; \rho_2) - k_- \frac{\partial u_2^-}{\partial n}(x(\omega), t; \rho_2) - f_2(x(\omega), t) \right] dt, \quad x(\omega) \in \Gamma_0,$$

относительно которого аналогично тому, как это сделано в лемме 3.2, можно

показать, что он имеет неподвижную точку в $H^{2+\alpha, \frac{2+\alpha}{2}}(\Gamma_T)$.

Теорема 3.1. Пусть выполнены условия леммы 3.1. Тогда при малых числах Re и достаточно малых значениях t справедлива формула

$$\Gamma_t : x = x(\omega) - \text{Re} \bar{n} \frac{u_1^\pm(x(\omega), t)}{|\nabla u_0^\pm(x(\omega))|} - (\text{Re})^2 \bar{n} \frac{u_2^\pm(x(\omega), t) - f_1^\pm(x(\omega), t)}{|\nabla u_0^\pm(x(\omega))|} + o((\text{Re})^2), \quad x(\omega) \in \Gamma_0,$$

где $u_2^\pm(x, t), \rho_2(\omega, t)$ - единственное решение задачи (3.24), (3.25).

Последняя формула позволяет исследовать Γ_t в зависимости от чисел Re .

§2. Конвективная задача Стефана с учетом примесей

2.1. Математическое моделирование процессов кристаллизации металла с учетом конвекции и примесей

Пусть Γ_0 - гладкая замкнутая поверхность, лежащая внутри заданной области Ω_0 из R^3 , граница которой состоит из двух замкнутых, связных, гладких

поверхностей Γ_0^+ и Γ_0^- , не имеющих самопересечений. При этом Γ_0^- лежит внутри ограниченной области, границей которой является Γ_0 . Поверхность Γ_0 разбивает Ω_0 на две подобласти Ω_0^+ и Ω_0^- , которые заняты жидкой и твердой фазами соответственно в момент $t=0$. Требуется определить области Ω_t^+ и Ω_t^- , занимаемые твердой и жидкой фазами соответственно в момент времени $t \in [0, T]$, вектор скорости $\vec{V}(x, t)$, давление $p(x, t)$, концентрацию примеси $c(x, t)$, температуру жидкой $u^+(x, t)$ и твердой $u^-(x, t)$ фазы по следующим условиям [52]:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \vec{V}(x, t)}{\partial t} + (\vec{V}\nabla)\vec{V}(x, t) + \nabla p(x, t) = \nu \nabla^2 \vec{V}(x, t) + \vec{f}(u^+, c), \nabla \vec{V}(x, t) = 0, (x, t) \in D_T^+, \\ \frac{\partial u^+(x, t)}{\partial t} + (\vec{V}\nabla)u^+(x, t) - a_+^2 \nabla^2 u^+(x, t) = 0, (x, t) \in D_T^+; \\ \frac{\partial u^-(x, t)}{\partial t} - a_-^2 \nabla^2 u^-(x, t) = 0, (x, t) \in D_T^-; \vec{V}(x, 0) = \vec{C}(x); T(\vec{V}, p)\vec{n} = -q(x, t)\vec{n}, (x, t) \in \Gamma_t^+; \\ V_n = -(1 - \frac{\rho^-}{\rho^+})W_n, V_r = 0, (x, t) \in \Gamma_t; u^\pm(x, t) = B^\pm(x, t), (x, t) \in \Gamma_t^+ \cup \Gamma_0^-; u^\pm(x, 0) = A^\pm(x); \\ u^+ = u^- = T^* - \varepsilon c, k_- \frac{\partial u^-}{\partial n} - k_+ \frac{\partial u^+}{\partial n} = \chi \rho^+ W_n, (x, t) \in \Gamma_t; \\ \frac{\partial c(x, t)}{\partial t} + (\vec{V}\nabla)c(x, t) - \gamma \nabla^2 c(x, t) = 0, (x, t) \in D_T^+, \\ c(x, 0) = g_0(x); c(x, t) = g(x, t), (x, t) \in \Gamma_t^+; -\alpha \frac{\partial c}{\partial n} = \beta c W_n, (x, t) \in \Gamma_t, \end{array} \right. \quad (3.26)$$

здесь $D_T^\pm = \{(x, t) : x \in \Omega_t^\pm, t \in (0, T)\}$, $x = (x_1, x_2, x_3)$, $\partial\Omega^+ = \Gamma_t \cup \Gamma_t^+$, $\partial\Omega^- = \Gamma_t^- \cup \Gamma_t$, \vec{n} – нормаль к Γ_t , направленная в сторону Ω_t^+ , $T(\vec{V}, p)$ – тензор напряжений с элементами $T_{ij} = -\delta_{ij}p + \nu(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i})$, V_n и V_r – нормальная и тангенциальная составляющие, W_n – скорость движения фронта кристаллизации в направлении нормалю \vec{n} ; T^* , ν , ε , χ , ρ^+ , ρ^- , α , β , γ , k_+ , k_- – известные положительные постоянные. Если $\Phi(x, t) = u^\pm(x, t) + \varepsilon c(x, t) - T^* = 0$ уравнение поверхности Γ_t , тогда $W_n = -\Phi_t / |\nabla\Phi|$.

Заметим, что условия Стефана можно представить в следующем виде:

$$L(u^+, u^-, \Gamma_t, \varepsilon) = k_-^2 |\nabla u^-|^2 - k_+^2 |\nabla u^+|^2 + \varepsilon(k_-^2 + k_+ k_-)(\nabla u^-, \nabla c) - \varepsilon(k_+^2 + k_+ k_-)(\nabla u^+, \nabla c) + \chi \rho^+ (k_- u_t^- + k_+ u_t^+) + \chi \rho^+ \varepsilon (k_+ + k_-) c_t = 0, (x, t) \in \Gamma_t \quad (3.27)$$

При некоторых предположениях на функции $A(x)$, $\bar{C}(x)$, $B^\pm(x,t)$, $\vec{f}(u^+,c)$, $g(x,t)$ и $g_0(x)$ задача (3.26) разрешима при малых значениях t в классе функций $u^\pm \in H^{2+\alpha, \frac{2+\alpha}{2}}(\bar{D}_+^\pm)$, $\vec{V} \in H^{2+\alpha, \frac{2+\alpha}{2}}(\bar{D}_+^\pm)$, $c \in H^{2+\alpha, \frac{2+\alpha}{2}}(\bar{D}_+^\pm)$, $\nabla p \in H^{\alpha, \frac{\alpha}{2}}(\bar{D}_+^\pm)$, а границы Γ_i^+ и Γ_i описываются функциями класса $H^{2+\alpha, \frac{2+\alpha}{2}}$.

Далее пусть $Q_T^\pm = \Omega_0^\pm \times [0, T]$, $\Gamma_{0T}^- = \Gamma_0^- \times [0, T]$, $\Gamma_{0T}^+ = \Gamma_0^+ \times [0, T]$, $\Gamma_{0T} = \Gamma_0 \times [0, T]$.

Отметим также, что решение задачи (3.27) моделирует процесс кристаллизации вещества с учетом конвективного теплообмена и переноса примеси в жидкой фазе.

Свободные границы Γ_i и Γ_i^+ можно представить в следующем виде $\Gamma_i = \{x = x(\omega) + \vec{n}(\omega) \cdot \rho(\omega, t)\}$, $\Gamma_i^+ = \{x = x(\theta) + \eta(\theta, t) \vec{n}(\theta)\}$, где $\omega = (\omega_1, \omega_2)$, $\theta = (\theta_1, \theta_2)$, $x(\omega) \in \Gamma_0$, $x(\theta) \in \Gamma_0^+$, $\rho(\omega, t)$ и $\eta(\theta, t)$ некоторые функции соответственно классов $H^{2+\alpha, \frac{2+\alpha}{2}}(\Gamma_0 \times [0, T])$ и $H^{2+\alpha, \frac{2+\alpha}{2}}(\Gamma_0^+ \times [0, T])$, $\rho(\omega, 0) = 0$ и $\eta(\theta, t) = 0$.

При достаточно малых значениях чисел ε предложен метод решения задачи (3.26), состоящий в разложении решения в ряд по степеням чисел ε :

$$\begin{aligned} u^\pm(x, t; \varepsilon) &= u_0^\pm(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k u_k^\pm(x, t), \quad p(x, t; \varepsilon) = p_0(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k p_k(x, t), \\ V_i(x, t; \varepsilon) &= V_{i_0}(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k V_{i_k}(x, t), \quad i = 1, 2, 3; \quad \rho(\omega, t; \varepsilon) = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \rho_k(\omega, t), \\ c(x, t) &= c_0(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k c_k(x, t). \end{aligned} \quad (3.28)$$

В работе [52] изучено нулевое $u_0^\pm(x)$, $\vec{V}_0(x) = (V_{10}, V_{20}, V_{30})$, Γ_0 , $c_0(x)$ и первое приближение $(\vec{V}_1, u_1^\pm, p_1, \rho_1, c_1)$ задачи (3.26) для малых чисел ε . При этом установлено, что $u_0^\pm(x) = A^\pm(x)$, $\vec{V}_0(x) = \vec{C}(x)$, $C_0(x) = g_0(x)$, $\rho_1(\omega, t) \in H^{2+\alpha, \frac{2+\alpha}{2}}(\Gamma_{0T})$, $u_1^\pm(x, t; \rho) \in H^{2+\alpha, \frac{2+\alpha}{2}}(\bar{Q}_T^\pm)$, $c_1(x, t; \rho) \in H^{2+\alpha, \frac{2+\alpha}{2}}(\bar{Q}_T^\pm)$, причем $\rho_1(\omega, t)$ находим как неподвижную точку сжимающегося оператора M_1 :

$$M_1 \rho_1 = \frac{1}{\chi \rho^+} \int_0^t (k_- \frac{\partial u_1^-}{\partial n} - k_+ \frac{\partial u_1^+}{\partial n} + f_1(x, t)) dt, \quad x(\omega) \in \Gamma_{0T}.$$

Из условия Стефана (3.27) для малых чисел ε следует разложение:

$$L(u^+, u^-, \Gamma_t, \varepsilon) = [k_-^2 |\nabla u_0^-|^2 - k_+^2 |\nabla u_0^+|^2] + \varepsilon [2k_-^2 (\nabla u_0^-, \nabla u_1^-) - 2k_+^2 (\nabla u_0^+, \nabla u_1^+) + f_1 + \chi \rho^+ (k_- u_{1t}^- + k_+ u_{1t}^+)] + \varepsilon^2 [2k_-^2 (\nabla u_0^-, \nabla u_2^-) - 2k_+^2 (\nabla u_0^+, \nabla u_2^+) + f_2 + \chi \rho^+ (k_- u_{2t}^- + k_+ u_{2t}^+)] + + 0(\varepsilon^2) = 0, (x, t) \in \Gamma_{0T}$$

Откуда следует, что

$$\begin{aligned} k_-^2 |\nabla u_0^-|^2 - k_+^2 |\nabla u_0^+|^2 &= 0, x \in \Gamma_0 \\ k_- \frac{\partial u_1^-}{\partial n} - k_+ \frac{\partial u_1^+}{\partial n} + f_1 &= \chi \rho^+ \frac{\partial \rho_1}{\partial t}, (x, t) \in \Gamma_{0T} \\ k_- \frac{\partial u_2^-}{\partial n} - k_+ \frac{\partial u_2^+}{\partial n} + f_2 &= \chi \rho^+ \frac{\partial \rho_2}{\partial t}, (x, t) \in \Gamma_{0T} \end{aligned}$$

здесь $f_1(x, t)$ и $f_2(x, t)$ известные гладкие функции.

Рассмотрим второе приближение $(\bar{V}_2, u_2^\pm, p_2, \rho_2, c_2, \eta_2)$ задачи (3.26) для малых чисел ε . Имеем:

$$\begin{cases} \frac{\partial \bar{V}_2}{\partial t} + (\bar{V}_0 \nabla) \bar{V}_2 + (\bar{V}_1 \nabla) \bar{V}_1 + (\bar{V}_2 \nabla) \bar{V}_0 + \nabla p_2 = \nu \nabla^2 \bar{V}_2 + [f_u' u_2 + f_c' c_2 + \frac{1}{2} f_{uu}'' u_1^2 + \frac{1}{2} f_{cc}'' c_1^2], \\ (x, t) \in Q_T^+, \nabla \bar{V}_2 = 0, (x, t) \in Q_T^+, T(\bar{V}_0, p_2) \bar{n} + T(\bar{V}_1, p_1) \bar{n} + T(\bar{V}_2, p_0) \bar{n} = 0, x \in \Gamma_0^+, \\ \bar{V}_2(x, 0) = 0, V_{2n} = (1 - \frac{\rho^-}{\rho^+}) [\frac{u_{2t}}{|\nabla u_0|} + f_3(x, t)], V_{2\tau} = 0, x \in \Gamma_0 \end{cases} \quad (3.29)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial u_2^+}{\partial t} + (\bar{V}_0 \nabla) u_2^+ + (\bar{V}_2 \nabla) u_0^+ + (\bar{V}_1 \nabla) u_1^+ = a_+^2 \nabla^2 u_2^+, (x, t) \in Q_T^+, \frac{\partial u_2^-}{\partial t} + a_-^2 \nabla^2 u_2^- = 0, \\ (x, t) \in Q_T^-, u_2^\pm(x, 0) = 0; u_2^\pm(x, t) = 0, (x, t) \in \Gamma_{0T}^- \cup \Gamma_{0T}^+, u_2^+ = u_2^-, \\ |\nabla u_0^\pm(x(\omega))| \rho_2(\omega, t) + u_2(x(\omega), t) + f(x(\omega), t) = 0, (x, t) \in \Gamma_{0T} \end{cases} \quad (3.30)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial c_2}{\partial t} + (\bar{V}_0 \nabla) c_2 + (\bar{V}_2 \nabla) c_0 + (\bar{V}_1 \nabla) c_1 - \gamma \nabla^2 c_2 = 0, (x, t) \in Q_T^+, c_2(x, 0) = 0; c_2(x, t) = 0, \\ (x, t) \in \Gamma_{0T}^+, -\alpha \frac{\partial c_2}{\partial n} = \frac{u_{2t}^+}{|\nabla u_0^+|} + f_4(x, t), (x, t) \in \Gamma_{0T}, \\ \frac{\partial c_0}{\partial n} \eta_2(\omega, t) + c_2(x, t) + f_5(x, t) = 0, (x, t) \in \Gamma_{0T}^+, \end{cases} \quad (3.31)$$

где $f_3(x, t)$, $f_4(x, t)$ и $f_5(x, t)$ – известные функции.

При заданных $\rho_2(\omega, t)$ и $\rho_2(\omega, t)$ из $H^{2+\alpha, \frac{2+\alpha}{2}}(\Gamma_{0T})$ найдем функции $u_2^\pm(x, t, \rho_2)$ и $u_2^\pm(x, t, \rho_2)$ как единственные решения задачи (3.30). Затем рассмотрим оператор,

действующий из $H^{2+\alpha, \frac{2+\alpha}{2}}(\Gamma_{0T})$ в $H^{2+\alpha, \frac{2+\alpha}{2}}(\Gamma_{0T})$ следующим образом

$$M_2 \rho_2 = \frac{1}{\chi \rho^+} \int_0^t (k_- \frac{\partial u_2^-}{\partial n} - k_+ \frac{\partial u_2^+}{\partial n} + f_2(x, t)) dt, \quad x(\omega) \in \Gamma_0. \quad \text{Справедливы оценки [49]:}$$

$$|u_2^\pm|_{Q_T^\pm}^{(\alpha+2)} \leq C (|F_2^\pm|_{Q_T^\pm}^{(\alpha)} + |\rho_2|_{\Gamma_{0T}}^{(\alpha+2)}), \quad \text{где } C \text{ некоторая постоянная, а } F_2^+ = -(\bar{V}_2 \nabla) u_0^+ - (\bar{V}_1 \nabla) u_1^+$$

при $(x, t) \in Q_T^+$ и $F_2(x, t) = 0$ при $(x, t) \in Q_T^-$. Отсюда следует, что $|M_2 \rho_2 - M_2 \rho_2|_{\Gamma_{OT}^{(\alpha+2)}} \leq C |\rho_1 - \rho_2|_{\Gamma_{OT}^{(\alpha+2)}}$, где $C = C(k_+ + k_-) / \chi \rho^+$. Следовательно, оператор M_2 сжимающий, если выполняется условие

$$\frac{C(k_+ + k_-)}{\chi \rho^+} < 1. \quad (3.32)$$

Имеют место следующие утверждения [52].

Лемма 3.3. Пусть выполнено условие (3.32). Тогда оператор M_2 , действующий из $H^{2+\alpha, \frac{2+\alpha}{2}}(\Gamma_{OT})$ в $H^{2+\alpha, \frac{2+\alpha}{2}}(\Gamma_{OT})$, имеет там неподвижную точку.

Лемма 3.4. В качестве второго приближения задачи (3.26) можно взять решение $u_2^\pm(x, t)$, $c_2(x, t)$, $\bar{V}_2(x, t)$, $\rho_2(x, t)$, $p_2(x, t)$, $\eta_2(x, t)$ задачи (3.29)-(3.31).

Теорема 3.2. Пусть $\frac{\partial g_0}{\partial n} \neq 0$ и $g_0(x) = g(x)$ на Γ_0^+ . Тогда при малых значениях t справедливы формулы

$$\begin{aligned} \Gamma_t^- : x = x(\omega) - \varepsilon n \frac{-u_1(x(\omega), t) + g_0(x(\omega))}{|\nabla u_0(x(\omega))|} - \varepsilon^2 n \frac{u_2(x(\omega), t) + f_3(x(\omega), t)}{|\nabla u_0(x(\omega))|} + 0(\varepsilon^2), \quad (x, t) \in \Gamma_{OT}^-; \\ \Gamma_t^+ : x = x(\theta) - \varepsilon n \frac{c_1(x(\theta), t)}{\frac{\partial g_0}{\partial n}(x(\theta))} - \varepsilon^2 n \frac{c_2(x(\theta), t) + f_5(x(\theta), t)}{\frac{\partial g_0}{\partial n}(x(\theta))} + 0(\varepsilon^2), \quad (x, t) \in \Gamma_{OT}^+, \end{aligned} \quad (3.33)$$

где $u_1^\pm(x, t)$, $c_1(x, t)$, $\rho_1(\omega, t)$, $\eta_1(\omega, t)$ – функции класса $H^{2+\alpha, \frac{2+\alpha}{2}}$ являющиеся первым приближением задачи (2.26).

Формулы (3.33) позволяют осуществить анализ свободных границ Γ_t^- и Γ_t^+ в зависимости от параметров задачи. Отметим также, что численная реализация подобного класса задач осуществлена в работе [44].

2.2. Задача Стефана при наличии конвекции и примеси

Изучается задача, моделирующая процесс кристаллизации вещества, с учетом конвективного переноса тепла. При этом задача содержит две свободные границы. Впервые при исследовании данного класса задач используется метод малого параметра. В разделе построено приближенное решение задачи и исследована его сходимость.

Будем обозначать через Ω_t^\pm область, занятую жидкой (твердой) фазой в момент времени t . При этом Ω_0 – заданная область в R^3 , граница которой состоит из двух замкнутых связанных поверхностей Γ_0^+ и Γ_0^- , не имеющих самопересечений, где Γ_0 – гладкая замкнутая поверхность, лежащая внутри Ω_0 , такая, что Γ_0^- лежит внутри ограниченной области, границей которой является Γ_0 . Требуется определить области Ω_t^+ и Ω_t^- (т.е. границы Γ_t^+ и Γ_t^-), вектор скорости $\vec{V}(x,t) = (\vec{V}_1(x,t), \vec{V}_2(x,t), \vec{V}_3(x,t))$, давление $p(x,t)$, концентрации примеси $c(x,t)$, температуру жидкой $u^+(x,t)$ и твердой $u^-(x,t)$ фаз по следующим условиям:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u^+(x,t)}{\partial t} + (\vec{V}\nabla)u^+(x,t) - a_+^2 \nabla^2 u^+(x,t) &= 0, \quad (x,t) \in D_T^+, \\
\frac{\partial u^-(x,t)}{\partial t} - a_-^2 \nabla^2 u^-(x,t) &= 0, \quad (x,t) \in D_T^-, \\
\frac{\partial \vec{V}(x,t)}{\partial t} + (\vec{V}\nabla)\vec{V}(x,t) + \nabla p(x,t) &= \nu \nabla^2 \vec{V}(x,t) + \vec{f}(u^+, c), \quad (x,t) \in D_T^+, \\
\nabla \vec{V}(x,t) &= 0, \quad (x,t) \in D_T^+, \quad \nabla \vec{V}(x,0) = \vec{C}(x); \\
T(\vec{V}, p)\vec{n} &= -q(x,t)\vec{n}, \quad (x,t) \in \Gamma_t^+; V_n = -(1 - \frac{\rho^-}{\rho^+})W_n; \\
V_\tau &= 0, \quad (x,t) \in \Gamma_t, \quad u^\pm(x,t) = B^\pm(x,t), \quad (x,t) \in \Gamma_t^+ \cup \Gamma_0^-; \\
u^\pm(x,0) &= A^\pm(x); u^+ = u^- = T^* - \varepsilon c, \quad k_- \frac{\partial u^-}{\partial n} - k_+ \frac{\partial u^+}{\partial n} = \chi p^+ W_n, \quad (x,t) \in \Gamma_t, \\
\frac{\partial c}{\partial t}(x,t) + (\vec{V}\nabla)c(x,t) - \gamma \nabla^2 c(x,t) &= 0, \quad (x,t) \in D_T^+; \\
c(x,0) &= g_0(x), \quad c(x,t) = g(x,t), \quad (x,t) \in \Gamma_t^+, \quad -\alpha \frac{\partial c}{\partial n} = \beta c W_n, \quad (x,t) \in \Gamma_t.
\end{aligned} \tag{3.34}$$

Здесь $x = (x_1, x_2, x_3)$, $D_T^\pm = \{(x,t) : x \in \Omega_t^\pm, t \in (0, T)\}$, Ω_t^\pm – области соответственно жидкой и твердой фаз, $\partial\Omega^+ = \Gamma_t \cup \Gamma_t^+$, $\partial\Omega^- = \Gamma_0^- \cup \Gamma_t$, \vec{n} – нормаль к Γ_t , направленная в сторону Ω_t^+ . Далее, $\nabla = (\partial/\partial x_1, \partial/\partial x_2, \partial/\partial x_3)$, $T(\vec{V}, p)$ – тензор напряжений с элементами $T_{ij} = -\delta_{ij}p + \nu(\partial V_i/\partial x_j + \partial V_j/\partial x_i)$, V_n и V_τ – нормальная и тангенциальная составляющие \vec{V} , W_n – скорость движения фронта кристаллизации в направлении нормали \vec{n} ; $T^*, \nu, \varepsilon, \chi, \rho^+, \rho^-, \alpha, \beta, \gamma, k_+, k_-$ – известные положительные постоянные.

Отметим также, что если $\Phi(x,t) = u^\pm(x,t) + \varepsilon c(x,t) - T^* = 0$ – уравнение поверхности Γ_t , тогда $W_n = -\Phi_t |\nabla\Phi|$.

В дальнейшем удобно условие Стефана представить в следующем виде:

$$L(u^+, u^-, \Gamma_t, \varepsilon) = k_-^2 |\nabla u^-|^2 - k_+^2 |\nabla u^+|^2 + \varepsilon(k_-^2 + k_- k_+) (\nabla u^-, \nabla c) - \varepsilon(k_-^2 + k_- k_+) (\nabla u^+, \nabla c) + \chi \rho^+ (k_- u^- + k_+ u^+) + \chi \rho^+ \varepsilon (k_+ + k_-) c_t = 0, \quad (x,t) \in \Gamma_t.$$

Предполагается, что $A(x) \in H^{4+\alpha}(\overline{\Omega_0^+})$, $\bar{C}(x) \in H^{2+\alpha}(\Omega_0^+)$, $B^\pm(x,t) \in H^{2+\alpha, \frac{2+\alpha}{2}}(\Gamma_t^+ \cup \Gamma_0^- \times [0, T])$, $\vec{f}(u^+, c) \in C^1(R^2)$, $g(x,t) \in H^{2+\alpha, \frac{2+\alpha}{2}}(\Gamma_t^+ \times [0, T])$, $g_0(x) \in H^{4+\alpha}(\overline{\Omega_0^+})$. При этом $g(x,t)$ и $g_{x_i}(x,t)$ должны быть функциями класса $H^{1+\alpha, \frac{1+\alpha}{2}}(R^3 \times [0, T])$. Считается также, что выполнены условия согласования до первого порядка включительно, которые формулируются аналогично [49, с.268, с.363].

Будем искать свободные границы Γ_t и Γ_t^+ в следующем виде $\Gamma_t = \{x = x(\omega) + \vec{n}(\omega)\rho(\omega, t)\}$, $\Gamma_t^+ = \{x = x(\theta) + \eta(\theta, t)\vec{n}(\theta)\}$, где $\omega = (\omega_1, \omega_2)$, $\theta = (\theta_1, \theta_2)$, $x(\omega) \in \Gamma_0$, $x(\theta) \in \Gamma_0^+$, $\rho(\omega, t)$ и $\eta(\theta, t)$ некоторые функции соответственно классов $H^{2+\alpha, \frac{2+\alpha}{2}}(\Gamma_0 \times [0, T])$ и $H^{2+\alpha, \frac{2+\alpha}{2}}(\Gamma_0^+ \times [0, T])$, $\rho(\omega, 0) = 0$ и $\eta(\theta, 0) = 0$. Введем также обозначения $Q_T^\pm = \Omega_0 \times [0, T]$, $\Gamma_{0T}^- = \Gamma_0^- \times [0, T]$, $\Gamma_{0T}^+ = \Gamma_0^+ \times [0, T]$, $\Gamma_{0T} = \Gamma_0 \times [0, T]$.

Далее, для достаточно малых чисел ε будем искать решение задачи (3.35) в виде следующих разложений:

$$\begin{aligned} u^\pm(x,t;\varepsilon) &= u_0^\pm(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k u_k^\pm(x,t), \quad p(x,t;\varepsilon) = p_0(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k p_k(x,t), \\ V_i(x,t;\varepsilon) &= V_{i0}(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k V_{ik}(x,t), \quad c(x,t) = c_0(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k c_k(x,t), \\ i=1,2,3; \rho(\omega,t;\varepsilon) &= \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \rho_k(\omega,t), \quad \eta(\theta,t;\varepsilon) = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \eta_k(\theta,t). \end{aligned} \quad (3.35)$$

В работах [44, 50, 52, 146] изучены нулевые и первые приближения задачи (3.34) для малых чисел ε . При этом установлено, что $u_0^\pm(x) = A^\pm(x)$, $\bar{V}_0(x) = \bar{C}(x)$,

$$c_0(x) = g_0(x), \quad \rho_1(\omega,t) \in H^{2+\alpha, \frac{2+\alpha}{2}}(\Gamma_{0T}), \quad \eta_1(\theta,t) \in \Gamma_{0T}^+, \quad u_1(x,t;\rho,\eta) \in H^{2+\alpha, \frac{2+\alpha}{2}}(\overline{Q_T^\pm}),$$

$c_1(x, t; \rho, \eta) \in H^{2+\alpha, \frac{2+\alpha}{2}}(\overline{Q_T^\pm})$ причем $\rho_1(\omega, t)$ находим как неподвижную точку

сжимающегося оператора M_1 : $M_1 \rho_1 = \frac{1}{\chi \rho^+} \int_0^t (k_- \frac{\partial u_1^-}{\partial n} - k_+ \frac{\partial u_1^+}{\partial n} + f_1(x, t)) dt$, $x(\omega) \in \Gamma_{0T}$.

Имеют место следующие формулы:

$$u_x|_{\Gamma_t} = u_{0x} + \varepsilon(\alpha_1 f_1 + \beta_1 u_1 + \frac{\partial u_1}{\partial x}) + \varepsilon^2(\alpha_2 f_2 + \beta_2 u_2 + \frac{\partial u_2}{\partial x}) + \dots + \varepsilon^k(\alpha_k f_k + \beta_k u_k + \frac{\partial u_k}{\partial x}) + o(\varepsilon^k),$$

$$(x, t) \in \Gamma_{0T}; \quad W_n|_{\Gamma_t} = -(\frac{u_{1t}}{|\nabla u_0|} + F_1)\varepsilon - (\frac{u_{2t}}{|\nabla u_0|} + F_2)\varepsilon^2 - \dots - (\frac{u_{kt}}{|\nabla u_0|} + F_k) + o(\varepsilon^k) = 0, \quad (x, t) \in \Gamma_{0T},$$

$$L(u^+, u^-, \Gamma_t, \Gamma_t^+, \varepsilon)|_{\Gamma_t} = [k_-^2 |\nabla u_0^-|^2 - k_+^2 |\nabla u_0^+|^2] + \varepsilon[2k_-^2 (\nabla u_0^-, \nabla u_1^-) - 2k_+^2 (\nabla u_0^+, \nabla u_1^+) + \Phi_1 + \chi \rho^+ (k_- u_{1t}^- + k_+ u_{1t}^+)] + \dots + \varepsilon^k [2k_-^2 (\nabla u_0^-, \nabla u_k^-) - 2k_+^2 (\nabla u_0^+, \nabla u_k^+) + \Phi_k + \chi \rho^+ (k_- u_{kt}^- + k_+ u_{kt}^+)] + o(\varepsilon^k) = 0, \quad (x, t) \in \Gamma_{0T},$$

где $\alpha_k(x, t)$, $\beta_k(x, t)$, $f_k(x, t)$, $F_k(x, t)$ и $\Phi_k(x, t)$ – известные функции.

Из последней формулы следует, что $k_-^2 |\nabla u_0^-|^2 - k_+^2 |\nabla u_0^+|^2 = 0$, $x \in \Gamma_0$,

$$k_- \frac{\partial u_k^-}{\partial n} - k_+ \frac{\partial u_k^+}{\partial n} + \Phi_k = \chi \rho^+ \frac{\partial \rho_k}{\partial t}, \quad (x, t) \in \Gamma_{0T}.$$

Введем следующие обозначения: $M_1(\vec{\xi}_i, \vec{\xi}_j) = (\vec{\xi}_0 \nabla) \vec{\xi}_k + (\vec{\xi}_1 \nabla) \vec{\xi}_{k-1} + \dots + (\vec{\xi}_k \nabla) \vec{\xi}_0$,

$$M_2(\vec{\xi}_i, \vec{\xi}_j) = (\vec{\xi}_0 \nabla) \vec{\xi}_k + (\vec{\xi}_1 \nabla) \vec{\xi}_{k-1} + \dots + (\vec{\xi}_k \nabla) \vec{\xi}_0, \quad N(\vec{V}_i, p_j) \vec{n} = T(\vec{V}_0, p_k) \vec{n} + T(\vec{V}_1, p_{k-1}) \vec{n} + \dots + T(\vec{V}_k, p_0) \vec{n}.$$

Затем рассмотрим k -ое приближение $(\vec{V}_k, u_k^\pm, p_k, \rho_k, \eta_k, c_k)$ задачи (3.34) для малых чисел ε . Имеем:

$$\begin{cases} \frac{\partial \vec{V}_k}{\partial t} + M_1(\vec{V}_i, \vec{V}_j) + \nabla p_k = v \nabla^2 \vec{V}_k + \frac{1}{k!} d^k f(u_k^+, c_k), \quad (x, t) \in Q_T^+ \\ \nabla \vec{V}_k = 0, \quad (x, t) \in Q_T^+; \quad N(\vec{V}_i, p_j) \vec{n} = 0, \quad (x, t) \in \Gamma_{0T}^+, \\ \vec{V}_k(x, 0) = 0, \quad V_{kn} = (1 - \frac{P^-}{\rho^+}) [\frac{u_{kt}^+}{|\nabla u_0^+|} + F_k(x, t)], \quad V_{k\tau} = 0, \quad (x, t) \in \Gamma_{0,T} \end{cases} \quad (3.36)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial u_k^+}{\partial t} + M_2(\vec{V}_i, u_k^+) = a_+^2 \nabla^2 u_k^+, \quad (x, t) \in Q_T^+, \\ \frac{\partial u_k^-}{\partial t} - a_-^2 \nabla^2 u_k^- = 0, \quad (x, t) \in Q_T^-, \\ u_k^\pm(x, 0) = 0, \quad u_k^\pm(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \Gamma_{0T}^- \cup \Gamma_{0T}^+, \quad u_k^+ = u_k^-, \\ |\nabla u_0^\pm(x(\omega))| \rho_k(\omega, t) + u_k(x(\omega), t) + f_k(x(\omega), t) = 0, \quad (x, t) \in \Gamma_{0T} \end{cases} \quad (3.37)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial c_k}{\partial t} + M_2(\bar{V}_i, c_j) - \gamma \nabla^2 c_k = 0, (x, t) \in Q_T^+, c(x, 0) = 0, c_k(x, t) = 0, \\ (x, t) \in \Gamma_{0T}^+; -\alpha \frac{\partial c_k}{\partial n} - \beta_k c_k = c_0(x) \frac{u_{kt}^+}{|\nabla u_0^+|} + F_k, (x, t) \in \Gamma_{0T}, \\ \frac{\partial c_0}{\partial n} \eta_k(\theta, t) + c_k(x(\theta), t) + g_k(x(\theta), t) = 0, (x, t) \in \Gamma_{0T}^+, \end{cases} \quad (3.38)$$

здесь $F_k(x, t)$, $f_{k(x, t)}$ и $F_k^*(x, t)$ – известные функции.

Зададим теперь $\bar{V} = \bar{V}_1(x, t)$. Затем решим задачу (3.37), (3.38) и найдем $u_1^\pm, c_1, \rho_1, \eta_1$. После чего решим задачу (3.36), являющуюся начально-краевой задачей для системы Навье-Стокса. Затем, используя новое значение $\bar{V}_2(x, t)$, снова решаем задачу (3.37) и (3.38) и т.д. Следовательно, получим процесс последовательных приближений $\bar{V}_k, u_k^\pm, c_k, \rho_k, \eta_k$. Доказательство сходимости этого процесса аналогично приведенному в [53] причем при заданном $\rho_k(\omega, t) \in H^{2+\alpha, \frac{2+\alpha}{2}}(\Gamma_{0T})$ найдем функции $u_k^\pm(x, t, \rho_k) \in H^{2+\alpha, \frac{2+\alpha}{2}}(Q_T^\pm)$, $c_k(x, t, \rho_k) \in H^{2+\alpha, \frac{2+\alpha}{2}}(Q_T^\pm)$ как единственное решение задачи (3.37)-(3.38), а $\rho_k(\omega, t)$ находим как неподвижную точку сжимающегося оператора M_k :

$$M_k \rho_k = \frac{1}{\chi \rho^+} \int_0^t (k_- \frac{\partial u_k^-}{\partial n} - k_+ \frac{\partial u_k^+}{\partial n} + f_k(x, t)) dt, (x(\omega), t) \in \Gamma_{0T}.$$

Справедливы следующие утверждения [52].

Лемма 3.4. Пусть выполнены условия $|\nabla A^+(x(\omega))| = \frac{\partial g_0}{\partial n}, x \in \Gamma_0; \frac{c(k_- + k_+)}{\chi \rho^+} < 1$, где c – некоторая постоянная [49, с.364] и пусть $\nabla^2 A^+(x) = 0, x \in \Omega_0^\pm, A^\pm(x)|_{x \in \Gamma_0^+ \cup \Gamma_0^-} = B^\pm(x, 0), A^\pm(x)|_{\Gamma_0} = 0, \bar{C}(x) = 0, x \in \bar{\Omega}_0^\pm, k_- |\nabla A^-(x)|_{\Gamma_0} = k_+ |\nabla A^+(x)|_{\Gamma_0}, |\nabla A^\pm(x)|_{\Gamma_0} \geq \varepsilon > 0$ (здесь ε некоторая положительная постоянная). Тогда оператор M_k , действующий из $H^{2+\alpha, \frac{2+\alpha}{2}}(\Gamma_{0T})$ в $H^{2+\alpha, \frac{2+\alpha}{2}}(\Gamma_{0T})$, имеет там неподвижную точку.

Лемма 3.5. В качестве k -го приближения задачи (3.34) можно взять решение $u_k^\pm(x, t), c_k(x, t), \bar{V}_k(x, t), \rho_k(\omega, t), \eta_k(\theta, t)$ задачи (3.37) - (3.38).

Теорема 3.3. Пусть выполнены условия леммы 3.4. Тогда приближения $V_k(x,t)$, $u_k^\pm(x,t)$, $c_k(x,t)$, $\rho_k(\omega,t)$, $\eta_k(\theta,t)$ сходятся к функциям $V(x,t)$, $u^\pm(x,t)$, $c(x,t)$, $\rho(\omega,t)$, $\eta_k(\theta,t)$ – класса $H^{2+\alpha, \frac{2+\alpha}{2}}$, являющимся решением задачи (3.34).

Лемма 3.6. Пусть $\frac{\partial g_0(x)}{\partial n} \neq 0$ на Γ_0^+ . Тогда при малых числах ε и достаточно малых значениях t справедливы формулы:

$$\Gamma_t^+ : x = x(0) - \vec{n} \sum_{i=1}^k \varepsilon^i \frac{c_i(x(\theta), t) + g_i(x(\theta), t)}{\frac{\partial c_0}{\partial n}} + o(\varepsilon^k), \quad x \in \Gamma_0^+,$$

$$\Delta = \{x_1, x_2, x_3\} : |x_i - x_i^0| < \delta_i / 2, \quad i = 1, 2, 3, \quad \Gamma_t : x = x(\omega) - \vec{n} \sum_{i=1}^k \varepsilon^i \frac{u_i(x(\omega), t) + f_i(x(\omega), t)}{|\nabla u_0^\pm(x(\omega))|} + o(\varepsilon^k), \quad x \in \Gamma_0.$$

Замечание 7. Доказанная теорема фактически устанавливает существование решения задачи (3.26) в классе функций $H^{2+\alpha, \frac{2+\alpha}{2}}$.

2.3. Математическое моделирование фазовых превращений в двухкомпонентных средах

В основу написания этого пункта положены результаты статьи [54]. Пусть $\Delta = \{x_1, x_2, x_3\} : |x_i - x_i^0| < \delta_i / 2, \quad i = 1, 2, 3$ – элементарный параллелепипед в области G , занятой рассматриваемой бинарной системой, то пусть $\mu_l(\Delta)$ (соотв. $\mu_s(\Delta)$) будет мерой той части Δ , которая занята жидкой (соотв. твердой) фазой. Получающиеся положительные конечно-аддитивные функции множеств («предмеры») допускают однозначное продолжение до счетно-аддитивных мер μ_l, μ_s , определенных на σ -алгебре измеримых подмножеств области G . Для наших целей достаточно предположить, что меры μ_l, μ_s абсолютно непрерывны относительно обычной меры Лебега $d\mu = dx_1 dx_2 dx_3$. Соответствующие плотности обозначим через ν_l, ν_s соответственно $d\mu_l = \nu_l d\mu, \quad d\mu_s = \nu_s d\mu$, причем. как легко видеть, $\nu_l + \nu_s = 1$, если система содержит только две фазы – жидкую (l) и твердую (s).

Пусть c обозначает весовую долю («концентрацию») одного из компонентов системы. При фиксированной температуре концентрация в твердой

фазе c_s , вообще говоря, не равна концентрации в жидкой фазе c_l . Нетрудно убедиться в том, что

$$c = c_l v_l + c_s v_s = c_s + v_l (c_l - c_s). \quad (3.39)$$

В общем случае все величины этих соотношений являются функциями переменных x_1, x_2, x_3 и времени t . Будем предполагать, что они обладают всеми встречающимися ниже производными и непрерывны вместе с ними.

При постоянном давлении плотность диффузионного потока равна

$$\vec{I} = -D \left(\overline{\nabla} c + \frac{k_T}{T} \overline{\nabla} T \right), \quad (3.40)$$

где T - температурное поле, D - «эффективный» коэффициент диффузии, $k_T D$ - «эффективный» коэффициент термодиффузии. В зоне твердой или жидкой фазы величина D принимает значения D_s или D_l соответственно, определяемые экспериментально. В двухфазной же зоне полагаем по определению

$$D = v_l D_l + v_s D_s = D_s + v_l (D_l - D_s). \quad (3.41)$$

Этой формулой задается коэффициент диффузии во всей области G как линейная функция плотности v_l распределения жидкой фазы. Величина k_T тоже должна быть снята с эксперимента, в первом приближении ее можно считать постоянной, в частности, равной нулю. Величины D_s, D_l и k_T в общем случае являются функциями от c и T .

Обозначим через I_0 плотность распределения массоисточников (или стоков) и используем уравнение неразрывности $(\rho c)_t + \operatorname{div} \vec{I} = I_0$. В силу формулы (3.40) получаем уравнение диффузии

$$\frac{\partial(\rho c)}{\partial t} - \operatorname{div} \left[D \left(\overline{\nabla} c + \frac{k_T}{T} \overline{\nabla} T \right) \right] = I_0 \quad (3.42)$$

в двухкомпонентной среде.

В соответствии с принятой нами концепцией бинарной среды такие ее параметры, как плотность ρ , теплоемкость c_p и теплопроводность λ имеют структуру вида (3.39) и (3.41):

$$\rho = \rho_l v_l + \rho_s v_s = \rho_s + v_l(\rho_l - \rho_s), \quad c_p = c_{pl} v_l + c_{ps} v_s = c_{ps} + v_l(c_{pl} - c_{ps}), \quad (3.43)$$

$$\lambda = \lambda_l v_l + \lambda_s v_s = \lambda_s + v_l(\lambda_l - \lambda_s)$$

Значение этих параметров в области отдельных фаз зависит в общем случае от состава c и температуры T и только в первом приближении являются некоторыми средними постоянными, определяемыми экспериментально.

Фазовые превращения первого рода сопровождаются выделением или поглощением теплоты с плотностью распределения интенсивности $-\chi \rho_{l,s} \partial v_l / \partial t$, где χ - скрытая теплота, отнесенная к единице массы. С учетом этого баланс тепловой энергии принимает вид

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} + \chi \rho_{l,s} \frac{\partial v_l}{\partial t} - \operatorname{div}(\lambda \nabla T) = f, \quad (3.44)$$

где f - плотность распределения теплоисточников. В случае одного геометрического аргумента $x = x_1$ предположения вида (3.43) и уравнение (3.44) рассмотрены в работе [55], для постоянных теплофизических параметров уравнения (3.44) в одномерном случае предложено в [56]. В работе [57] было сделано предположение, что в процессе кристаллизации бинарной системы существует переходная «двухфазная зона». Для описания этого явления в работах [55,56] кроме уравнения баланса теплоты использовалось также одномерное уравнение диффузии в одной только жидкой фазе. В рамках этой схемы в последующем была построена «квазиравновесная модель» двухфазной зоны [58], основанная на упрощенном интегрировании уравнения диффузии в жидкой фазе. «Равновесная модель» затвердевания бинарного сплава рассматривается в работе [59] (гл. II, гл.1).

Будем предполагать, что концентрация c_l, c_s и температура T связаны уравнением линий солидус и ликвидус соответственно

$$c_s = \varphi_s(T), \quad c_l = \varphi_l(T), \quad (3.45)$$

где функции φ_s, φ_l определяются по большей части экспериментально в равновесных условиях. Второе равенство (3.44) соответствует требованию

непереохлаждения жидкой фазы в процессе кристаллизации. Теперь из соотношения (3.39) для меры жидкой фазы v_l получаем формулу

$$v_l = \frac{c - c_s}{c_l - c_s} = \frac{c - \varphi_s(T)}{\varphi_l(T) - \varphi_s(T)} \stackrel{\text{def}}{=} v_l(c, T), \quad (3.46)$$

в соответствии с которой v_l является известной функцией не определенных пока величин c и T . Согласно формуле (3.41) коэффициент диффузии представляет собой известную функцию тех же переменных, а согласно соотношениям (3.43) теплофизические параметры среды обладают аналогичным свойством. Тем самым два уравнения (3.42), (3.44) образуют систему квазилинейных уравнений относительно пары неизвестных (c, T) .

Следует отметить, что формулой (3.46) функция $v_l(c, T)$ определена только в той части полосы $\{0 < c < 1, 0K < T < +\infty\}$, которая находится между линиями солидус и ликвидус на диаграмме плавкости. на остальной части указанной полосы полагаем

$$v_l(c, T) = \begin{cases} 0, & 0 \leq c \leq 1, T \leq \psi_s(c); \\ 1, & 0 \leq c \leq 1, T \leq \psi_l(c), \end{cases} \quad (3.47)$$

где ψ_s, ψ_l - функции, обратные к φ_s, φ_l соответственно.

Определенная по формулам (3.46), функция непрерывна по совокупности переменных (c, T) , $0 < c < 1$, но теряет свойство гладкости при переходе через линию солидус $T = \psi_s(c)$ и линию ликвидус $T = \psi_l(c)$. В связи с этим уравнения (3.42), (3.44) будут иметь кусочно-разрывные (по переменным c, T) коэффициенты, даже если функции (3.45) обладают достаточной степенью гладкости.

В упомянутой «равновесной» модели исключение v_l сделано на основании «правила рычага», в соответствии с которым $v_l : v_s = (c_0 - c_s) : (c_l - c_0)$, где c_0 - исходная концентрация примеси. Отсюда и из (3.34) следует, что $c = c_0$, что в реальных (неравновесных) процессах не соответствует действительности. В «квазиравновесной» модели не учитывается диффузионный перенос массы

примеси в жидкой фазе и баланс массы записывается в виде $\partial(v_i c_i) / \partial t = c_s \partial v_i / \partial t$. Игнорирование этого уравнения с учетом соотношений (3.45) позволяет выразить v_i как функцию c_i и исключать затем из уравнения баланса теплоты.

Равновесная диаграмма состояния бинарной системы, выраженная соотношениями (3.45), представляет единственную достоверную экспериментально устанавливаемую связь между составами сосуществующих фаз и температурой системы. Применение этой диаграммы для описания неравновесного в целом процесса фазовых превращений химически неоднородных систем можно оправдать тем, что применяется эта диаграмма локально, т.е. в окрестности (сколь угодно малого размера) произвольно расположенной точки, где неравновесный характер мало заметен.

Будем предполагать, что (конечная или нет) область G , занятая рассматриваемой бинарной средой, ограничена кусочно-гладкой поверхностью ∂G . Будем предполагать также, что в каждой гладкой точке температура T удовлетворяет краевому условию третьего рода:

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial n} + \alpha(T - T_0) = g(x, t), \quad x \in \partial G, \quad t > 0, \quad (3.48)$$

где n - внешняя (относительно G) нормаль к ∂G , T_0 - температура внешней среды, $g(x, t)$ - заданная функция, α - коэффициент теплопередачи, зависящий в общем случае от T . Второе граничное условие мы напишем с учетом формулы (3.40) для диффузного потока концентрации примеси:

$$D \left(\frac{\partial c}{\partial n} + \frac{k_T}{T} \frac{\partial T}{\partial n} \right) + \beta(c - c_0) = h(x, t), \quad x \in \partial G, \quad t > 0, \quad (3.49)$$

где c_0 - концентрация примесного элемента во внешней среде, β - коэффициент «массопередачи» стенки ∂G , $h(x, t)$ - заданная функция. в простейшем случае $k_T = 0$, $\beta = 0$, $h = 0$ условие (3.49) означает массопроницаемость границы.

Если бы мы выписали уравнение диффузии только в одной из фаз, то граничное условие на концентрацию выписать было бы невозможно, поскольку область, занятая каждой фазой, заранее неизвестна. Именно так, без учета каких-либо граничных условий на концентрацию, построена «квазиравновесная»

модель. Можно было бы привлечь одновременно уравнения диффузии в обеих фазах, и тогда мы пришли бы к задаче с неизвестной («свободной») границей (раздела фаз), на которой должны удовлетворяться три условия: два из них вытекают из соотношений (3.45), а третье должно выражать закон сохранения потока концентрации при переходе через межфазную границу. Ввиду сложного закона распределения зародышей и дендритного строения края твердой фазы предлагаемый в настоящей статье подход выглядит математически предпочтительнее.

В неустановившемся случае необходимо также задать начальные распределения температуры и концентрации:

$$T(x,0) = T_0(x), \quad c(x,0) = c_0(x), \quad x = (x_1, x_2, x_3) \in G + \partial G, \quad (3.50)$$

где T_0, c_0 - заданные функции.

В итоге рассматриваемая термодиффузионная задача редуцирована к смешанной (начально-краевой) задаче для пары (c, T) , удовлетворяющей системе параболического типа двух квазилинейных уравнений с кусочно-разрывными коэффициентами. Такие задачи к настоящему времени, как кажется, не исследовались. Случай одного уравнения теплопроводности с кусочно-разрывными коэффициентами изучен в работе [59] (см. также [60]).

Глава 4. Исследование математических моделей со свободной границей в плоском и осесимметричном случаях

§1. Разрешимость задач со свободной границей типа Бернулли

1.1. Корректность классов математических моделей типа Бернулли в плоском случае

В четвертом разделе построены математические модели потенциального и вихревого течения в плоском и осесимметричном случаях в терминах функции тока. В качестве граничного условия на свободной границе берется условие Бернулли. Так построенные нелинейные математические модели носят вариационный характер. Настоящий раздел посвящен доказательству классической разрешимости этих задач. При доказательстве используется методика, разработанная в работах [61-92]. Вначале изучаются задачи потенциального и вихревого течения на плоскости. Введем следующие обозначения:

$$A = (0 \leq x \leq a, y = 0), \quad Q_1 = (x = 0, 0 \leq y \leq c), \quad Q_2 = (x = a, 0 \leq y \leq b),$$

где $0 < c < b$. Далее, пусть P – дважды непрерывно дифференцируемая, монотонно возрастающая кривая, заданная уравнением $y = g(x), 0 \leq x \leq a$, причем $g(0) = c, g(a) = b, g'(0) = 0, g'(a) = 0$. Через D обозначим область, ограниченную отрезком A , кривой P и образующими Q_1 и Q_2 , а через γ – достаточно гладкую кривую без самопересечений, расположенную в $D \cup P$. При этом одним концом γ является точка $(0, c)$, а другой лежит на образующей Q_2 , разбивая ее на две части: верхнюю $Q_{1\gamma}$ и нижнюю $Q_{2\gamma}$, т.е. $Q_2 = Q_{1\gamma} \cup Q_{2\gamma}$. Через $D_\gamma \subset D$ будем обозначать область, ограниченную отрезком A , образующими Q_1 и $Q_{2\gamma}$ и кривой γ .

Рассмотрим следующую нелинейную краевую задачу со свободной границей γ . Требуется определить односвязную область D_γ и определенную в ней функцию тока $\psi(x, y)$ по следующим условиям:

$$\psi_{xx} + \psi_{yy} = 0, \quad (x, y) \in D_\gamma, \quad (4.1)$$

$$\psi(x, y) = 0, (x, y) \in A, \quad (4.2)$$

$$\psi_x(x, y) = 0, (x, y) \in Q_1 U Q_{2\gamma}, \quad (4.3)$$

$$\psi(x, y) = 1, (x, y) \in \gamma, \quad (4.4)$$

$$\psi_x^2(x, y) + \psi_y^2(x, y) \geq v^2, (x, y) \in \gamma, \quad v = const > 0 \quad (4.5)$$

причем на части γ , лежащей внутри D , в (4.5) всегда должно выполняться равенство.

Задача (4.1) – (4.5) возникает при изучении струйных течений жидкости в достаточно удлиненной, но конечной части D бесконечно длинного сопла.

Вариационная постановка задачи. Рассмотрим функционал с переменной областью интегрирования

$$I(\psi, D_\gamma) = \iint_{D_\gamma} (\psi_x^2 + \psi_y^2 + v^2) dx dy \quad (4.6)$$

на множестве R допустимых пар (ψ, D_γ) , удовлетворяющих следующим условиям: γ – жорданова дуга, расположенная в DUP , одним концом которой является точка $(0, c)$, а другим служит точка (a, b) , причем все точки γ , исключая конец $(0, c)$, расположены выше горизонтами $y = c$; функция $\psi(x, y)$ непрерывна в замыкании области D_γ , равна единице на γ , нулю на отрезке A и имеет непрерывно дифференцируемые производные в D_γ , при этом $I(\psi, D_\gamma) < \infty$ [35, 78].

Лемма 4.1. Пусть пара (ψ, D_γ) является классическим решением задачи (4.1) – (4.5), тогда эта пара является стационарной для функционала (4.6) на множестве R . Обратно, если допустимая пара (ψ, D_γ) является стационарной для функционала (4.6) на множестве R , причем γ – достаточно гладкая кривая, тогда эта пара является решением задачи (4.1) – (4.5).

Доказательство следует из формулы первой вариации интегрального функционала с переменной областью интегрирования:

$$\delta I(\psi, D_\gamma; \overline{\delta\psi}, \overline{\delta z}) = -2 \iint_{D_\gamma} (\psi_{xx} + \psi_{yy}) \overline{\delta\psi} dx dy + \int_\gamma (v^2 - \psi_x^2 - \psi_y^2) (\vec{n}, \overline{\delta z}) ds + 2 \int_{Q_1 \cup Q_{2\gamma}} \psi_x \overline{\delta\psi} dy$$

где $\overline{\delta\psi}$ - вариация функции ψ при неизменной области D_γ , $\overline{\delta z} = (\delta x, \delta y)$ - вариация независимых переменных, описывающая переход от γ к некоторой ”близкой”

допустимой кривой, а \vec{n} - внешняя нормаль. При этом следует учесть, что на части γ , совпадающей с P , всегда должно выполняться условие $(\vec{n}, \overline{\delta z}) \leq 0$ (это означает, что в данном случае в условии (4.5) всегда будет неравенство).

Перейдем теперь к описанию симметризации области D_γ относительно осей координат по Штейнеру. Определим симметризацию области D_γ относительно оси y следующим образом. Дополним $\Omega = \Pi \setminus D_\gamma$, где $\Pi = \{0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b\}$, областью, симметричной относительно оси y . Просимметризируем ее относительно этой оси и правую половину полученной области обозначим через Ω^* . Тогда $D_{y^*} = \Pi \setminus \Omega^*$ есть результат симметризации области D_γ относительно оси y .

Симметризацию области D_γ относительно оси x определим так. Дополним Ω областью, симметричной относительно прямой $y = b$. Просимметризируем ее относительно этой прямой и нижнюю половину полученной области обозначим через G^* . В результате этой симметризации получим новую область $D_x^* = \Pi \setminus G^*$, являющуюся результатом симметризации D_γ относительно оси x . Справедлива лемма о симметризации [35, 78].

Лемма 4.2. Пусть $\psi(x, y)$ – решение задачи (4.1) – (4.4) в области D_γ , а $\psi^*(x, y)$ – решение этой задачи в области D^* со свободной границей γ^* , полученной из D_γ при помощи симметризации относительно осей координат. Тогда $I(\psi^*, D^*) \leq I(\psi, D_\gamma)$, причем $\psi_{y^*}^*(x, y) > 0$ в D^* , а γ^* может быть задана уравнением

$$x = x(t), y = y(t), 0 \leq t \leq T,$$

где $x(t), y(t)$ – неубывающие функции при $t \in [0, T]$.

Используя вариационную природу задачи (4.1) - (4.5), лемму о симметризации и метод внутренних вариаций Шиффера, доказывается теорема [78].

Теорема 4.1. Пусть P – дважды непрерывно дифференцируемая, монотонно возрастающая кривая, заданная уравнением $y = g(x)$, $g = 0$, $0 \leq x \leq a$, $g(0) = c$, $g(a) = b$, $g'(0) = 0$, $g'(a) = 0$, и пусть выполнены условия: $\nu \cdot c < 1$, $\frac{a}{c \int_0^a \sqrt{1 + g_x^2} dx} < \nu$.

Тогда существует единственная пара (ψ, γ) , являющаяся классическим решением задачи (4.1) – (4.5). При этом пара (ψ, γ) удовлетворяет следующим условиям: γ – монотонно возрастающая дуга, аналитическая в окрестности каждой своей внутренней точки, лежащей внутри D и $\psi_y > 0$ в D_γ .

Справедлива также теорема [35, 78].

Теорема 4.2. Пусть выполнены условия $\nu b < 1$, $\nu \int_{a_1}^{a_2} \sqrt{1 + g_x^2} dx + \frac{a - a_2}{b} > \frac{a - a_1}{c}$, и пусть $g(x) \in C^2[0, a]$, $g(x) = c$ при $x \in [0, a_1]$, $g(x) = b$ при $x \in [a_2, a]$, где $a_1 < a_2$, и, кроме того, $g(x)$ – монотонно возрастающая кривая при $x \in [0, a]$. Тогда существует единственная пара (ψ, γ) , являющаяся решением задачи (4.1) – (4.5) и удовлетворяющая следующим условиям: $\psi(x, y)$ – функция непрерывно дифференцируемая в \bar{G}_γ , $\psi_y(x, y) > 0$ в G_γ ; γ – монотонно возрастающая кривая, аналитическая в окрестности каждой своей точки, лежащей внутри G .

Вихревое течение со свободной границей. Изучается вихревое течение жидкости в достаточно длинной области в случае двух геометрических переменных, когда интенсивность вихря характеризуется величиной $\omega = const > 0$. Требуется определить односвязную область D_γ и определенную в ней функцию тока $\psi(x, y)$, удовлетворяющую уравнению

$$\psi_{xx} + \psi_{yy} = \omega, (x, y) \in D_\gamma \quad (4.7)$$

и условиям (4.2) - (4.5) [43].

Теорема 4.3. Пусть P – дважды непрерывно дифференцируемая, монотонно возрастающая кривая, заданная уравнением $y = g(x)$, $0 \leq x \leq a$, $g(0) = c$, $g(a) = b$, причем $g'(0) = 0$, $g'(a) = 0$, и пусть выполнены условия:

$$v < \frac{1}{c} + \frac{\omega}{2}c, \quad \frac{\omega \text{mes} D + \left(1 - \frac{\omega}{2}c^2\right) \frac{a}{c}}{\int_0^a \sqrt{1 + g_x^2} dx} < v.$$

Тогда существует единственная пара (ψ, γ) , являющаяся классическим решением задачи (4.2)-(4.5), (4.7). При этом пара (ψ, γ) удовлетворяет следующим условиям: γ – монотонно возрастающая дуга, аналитическая в окрестности каждой своей внутренней точки, лежащей внутри D , и $\psi_y > 0$ в D_γ .

Далее изучается осесимметрическое течение жидкости, когда ось Ox является осью симметрии потока, а на свободной границе задается условие Бернулли. Введем следующие обозначения. Пусть G – область, ограниченная снизу отрезком $B = (0 \leq x \leq a, y = 0)$, по бокам вертикалями $\Gamma_1 = (x = 0, 0 \leq y \leq c)$, $\Gamma_2 = (x = a, 0 \leq y \leq b)$ и сверху кривой $S: y = g(x)$, $0 \leq x \leq a$, где $c < b$, $g(0) = a$, $g(a) = b$, а $g(x)$ – дважды непрерывно дифференцируемая, монотонно возрастающая функция, такая, что $g'(0) = 0$ и $g'(a) = 0$. Далее, пусть γ – достаточно гладкая кривая без самопересечений, расположенная в $G \cup S$. Предполагается, что одним концом γ служит точка $(0, c)$, а другой лежит на Γ_2 . Наконец, через $G_\gamma \subset G$ будем обозначать область, ограниченную отрезком B , вертикалями $\Gamma_1, \Gamma_{2\gamma}$ и кривой γ .

Будем рассматривать следующую нелинейную краевую задачу со свободной границей γ . В односвязной области G_γ требуется определить функцию тока $\psi(x, y)$, удовлетворяющую следующим условиям:

$$\psi_{xx} + \psi_{yy} - y^{-1}\psi_y = \omega y, \quad (x, y) \in G_\gamma, \quad \omega = \text{const} > 0, \quad (4.8)$$

$$\psi(x, y) = 0, \quad (x, y) \in B, \quad (4.9)$$

$$\psi_x(x, y) = 0, \quad (x, y) \in \Gamma_1 \cup \Gamma_{2\gamma}, \quad (4.10)$$

$$\psi(x, y) = 1, \quad (x, y) \in \gamma, \quad (4.11)$$

$$\psi_x^2 + \psi_y^2 \geq v^2 y^2, \quad (x, y) \in \gamma, \quad v = \text{const} > 0, \quad (4.12)$$

причем на части γ , лежащей внутри G_γ , в условии (4.12) должно выполняться равенство.

Решение задачи (4.8) – (4.12) описывает осесимметричный поток, протекающий в достаточно длинной, но ограниченной области G .

1.2. Осесимметрический случай

Введем в рассмотрение функционал с неизвестной областью интегрирования

$$J(\psi, \gamma) = \iint_{G_\gamma} [\psi_x^2 + \psi_y^2 + v^2 y^2 + 2\omega y(\psi - 1)] \frac{dx dy}{y} \quad (4.13)$$

на множестве R допустимых пар, удовлетворяющих следующим условиям: γ – жорданова дуга, расположенная в $G \cup S$, концами которой служат точки $(0, c)$ и (a, b) , причем все точки γ , за исключением точки $(0, c)$, находятся выше горизонтали $y = c$; функция $\psi(x, y)$ непрерывна в замыкании области G_γ , равна единице на γ , нулю на отрезке B и имеет непрерывно дифференцируемые производные в G_γ , причем $J(\psi, \gamma) < \infty$. Справедливо следующее утверждение [82].

Лемма 4.3. Пусть пара (ψ, γ) является классическим решением задачи (4.8) – (4.12). Тогда эта пара будет стационарной для функционала (4.13) на множестве R . Обратно, каждая стационарная пара (ψ, γ) функционала (4.13) на множестве R , где γ – достаточно гладкая кривая без самопересечений, является решением задачи (4.8) – (4.12).

Теорема 4.4. Пусть S – дважды непрерывно дифференцируемая, монотонно возрастающая кривая, заданная уравнением $y = g(x)$, $0 \leq x \leq a$, $g(0) = c$, $g(a) = b$, причем $g'(0) = 0$, $g'(a) = 0$. И пусть выполнены условия

$$1 - \frac{\omega b^3}{3} > 0 \text{ и } v < \frac{1}{c^2} \left[2 + \frac{\omega c^3}{3} \right], \quad \omega m e s G + \frac{2a}{c^2} \left[1 - \frac{\omega c^3}{3} \right] < v \int_0^a \sqrt{1 + g_x^2} dx.$$

Тогда существует единственное решение задачи (4.8) – (4.12). При этом пара (ψ, γ) удовлетворяет следующим условиям: γ – монотонно возрастающая дуга, аналитическая в окрестности каждой своей точки, лежащей внутри G ; $\psi(x, y)$ –

функция, непрерывная в $\overline{G_\gamma}$, непрерывно дифференцируемая всюду в $\overline{G_\gamma}$, за исключением точки (a, h) , $c < h \leq b$, являющейся правым концом γ , и $\psi_y(x, y) > 0$ в G_γ .

Осесимметрическое течение в случае функции $V(x, y)$. Зададим в области G функцию, аналитическую по переменным x, y , непрерывную в \overline{G} и такую, что $V(x, y) > 0$ при $(x, y) \in \overline{G}$. Допустим также, что функция $V(x, y)$ при $(x, y) \in G$ удовлетворяет условиям

$$\frac{\partial}{\partial x} V(x, y) \leq 0, \quad \frac{\partial}{\partial y} (yV^2(x, y)) \geq 0, \quad (4.14)$$

при этом имеем

$$\psi_x^2(x, y) + \psi_y^2(x, y) \geq V^2(x, y) \cdot y^2, \quad (x, y) \in \gamma, \quad (4.15)$$

причем на части γ , лежащей внутри G , в последнем условии всегда должно выполняться равенство.

Лемма 4.4. Пусть выполнено условие (4.14) и справедливы неравенства

$$1 - \frac{\omega b^3}{3} > 0, \quad V(x, y) < \frac{1}{c^2} \left[2 + \frac{\omega c^3}{3} \right], \quad (x, y) \in G, \quad \omega \text{mes} G + \frac{2a}{c^2} \left[1 - \frac{\omega c^3}{3} \right] < \int_s V(x, y) ds.$$

Тогда существует пара (ψ, γ) , удовлетворяющая условиям: $I(\psi, \gamma) = d$, γ – монотонно возрастающая кривая, заданная уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $0 \leq t \leq T$; функция $\psi(x, y)$ является классическим решением задачи (8) – (11), а условие (4.15) на части γ , лежащей внутри G , выполняется почти всюду.

Доказательство теоремы изложено в [82].

Перейдем к доказательству аналитичности свободной границы γ . Схема доказательства следующая.

Рассматривается произвольная точка $z_0 = x_0 + iy_0 \in \gamma$, расположенная внутри G вместе с некоторым кругом K_r достаточно малого радиуса с центром в этой точке. С помощью предложенной методики устанавливается существование аналитической функции $g(t)$, $t = \xi + i\eta$, которая в области $G_\gamma \cap K_r$ непрерывна вплоть до границы γ и принимает на γ граничное значение $g(t) = \bar{t}$. Затем,

обозначая через $w(t)$ конформное отображение $G_\gamma \cap K_r$ на верхнюю полуплоскость, согласно принципу Шварца, функции $\Phi_1(t) = g(t) + t$ и $\Phi_2(t) = g(t) - t$ можно аналитически продолжить через те сегменты действительной оси w -плоскости, которые соответствуют γ . Поэтому функция $t(w) = (\Phi_1 - \Phi_2)/2$ также аналитически продолжима через эти сегменты, т.е. γ – аналитическая дуга.

Перейдем теперь к доказательству существования аналитической функции $g(t)$, которую можно рассматривать как решение некоторой системы функциональных уравнений. Такая система будет построена в следующем пункте, а ее разрешимость в классе аналитических функций доказывается в теореме 4.5.

Рассмотрим фундаментальное решение уравнения (4.8):

$$S(z, \bar{z}; \zeta, \bar{\zeta}) = A(z, \bar{z}; \zeta, \bar{\zeta}) \log(z - \zeta)(\bar{z} - \bar{\zeta}) + B(z, \bar{z}; \zeta, \bar{\zeta}),$$

где $z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$, $\zeta = \xi + i\eta$, $A(z, \bar{z}; z, \bar{z}) = 1$, функция B является регулярной в нуле по переменным x, y , а S , как функция этих переменных, удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} - \frac{1}{y} \frac{\partial S}{\partial y} = 0.$$

Для $\zeta \in G_\gamma \cap K_\rho$ определим аналитическую функцию следующим образом:

$$F(\zeta) = \int_{\gamma_\rho} \Psi(z, \bar{z}) S(z, \bar{z}; \zeta, \bar{\zeta}_0) ds - P(\zeta, \bar{\zeta}_0). \quad (4.16)$$

где $P(\zeta, \bar{\zeta}_0)$ – аналитическая функция переменных ξ, η , $\Psi(z, \bar{z}) = V\left(\frac{z + \bar{z}}{2}, \frac{z - \bar{z}}{2i}\right)$.

Справедливы следующие утверждения [80].

Лемма 4.5. Производная $F'(\zeta)$ ограничена всюду на γ_ρ , даже в тех точках, где t не существует.

Рассмотрим систему интегральных уравнений [80]

$$f(t) = -\frac{F'(t)}{2\pi i \Psi(t, g(t)) A(t, g(t); t, \bar{\zeta}_0)} - \int_{\gamma_\rho} \frac{\Psi(z, g(z)) A_t(z, g(z); t, \bar{\zeta}_0)}{\Psi(t, g(t)) A(t, g(t); t, \bar{\zeta}_0)} f(z) dz, \quad (4.17)$$

$$g(t) = \bar{z}_0 + \int_{z_0}^t f^2(z) dz \quad (4.18)$$

Для определения двух неизвестных аналитических функций $f(t)$ и $g(t)$ в $G_\gamma \cap (K_\rho + \gamma_\rho)$. Далее будет доказана разрешимость этой системы в классе аналитических функций и установлена единственность этого решения. Тогда решения системы (4.17), (4.18) должны согласовываться с известным решением \bar{t} и \bar{i} на γ_ρ . В основе доказательства аналитичности свободной границы положена разрешимость системы интегральных уравнений (4.17), (4.18). Методом последовательных приближений доказано существование и единственность решения $f(t), g(t)$ в классе аналитических функций комплексного переменного (доказательство напоминает метод Пикара в теории обыкновенных дифференциальных уравнений).

Получены оценки на приближенные решения $f_n(t), g_n(t)$ системы интегральных уравнений (4.17), (4.18), построенные методом итераций

$$|f_{n+1}(t) - f_n(t)| \leq R \frac{(Ms)^n}{n!}, |g_{n+1}(t) - g_n(t)| \leq M \int_{z_0}^t |f_{n+1}(z) - f_n(z)| |dz|,$$

где R, M, s – некоторые постоянные, s – малое число, $t = \xi + i\eta$ – комплексная переменная, $z_0 \in \gamma, t \in \gamma$.

Лемма 4.6. Пусть система (4.17), (4.18) имеет единственное решение $f(t)$ и $g(t)$ в классе аналитических функций. Тогда функция $g(t)$ имеет непрерывное граничное значение $g(t) = \bar{t}$ на γ_ρ .

Перейдем к разрешимости системы функциональных уравнений в классе аналитических функций [80].

Теорема 4.5 В окрестности каждой точки $z_0 \in \gamma_\rho$, $z_0 \in G$, существуют аналитические функции $f(t)$ и $g(t)$, являющиеся единственным решением системы (4.17), (4.18).

Теорема 4.6. Пусть $V(x, y)$ – функция аналитическая по переменным x и y в G , и пусть выполнены условия леммы 4.4. Тогда существует единственное решение задачи (4.8) – (4.11), (4.15). При этом (ψ, γ) удовлетворяет следующим

условиям: γ – дуга, аналитическая в окрестности каждой своей точки, лежащей внутри G ; $\psi(x, y)$ – функция, непрерывная в \overline{G}_γ , непрерывно дифференцируемая всюду в \overline{G}_γ , за исключением, может быть, точки (a, h) , $c < h \leq b$, являющейся правым концом γ , и $\psi_y(x, y) > 0$ в G_γ .

1.3. Квазистационарная задача типа Стефана

Этот раздел посвящен так же изучению свойств гладкости свободной границы при исследовании квазистационарной задачи типа Стефана, которая формулируется следующим образом. Пусть γ – достаточно гладкая кривая с концами, расположенными на прямых $x = \pm 1$, $-\infty < y \leq 0$. Требуется определить односвязную область $D_\gamma \subset D = (-1 < x < 1, -\infty < y < 0)$, расположенную ниже «свободной границы» γ , определенную в ней функцию $u(x, y)$ по следующим условиям: функция $u(x, y)$ в области D_γ удовлетворяет в классическом смысле уравнению

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(e^{\omega y} \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(e^{\omega y} \frac{\partial u}{\partial x} \right) = 0, \quad (x, y) \in D_\gamma, \quad (4.19)$$

она непрерывна в \overline{D}_γ , непрерывно дифференцируема в \overline{D}_γ , исключая, может быть, угловые точки, и удовлетворяет условиям

$$u(x, y) = 1, \quad (x, y) \in \gamma, \quad (4.20)$$

$$u_x \pm \omega_0 u = 0, \quad x = \pm 1, \quad (x, y) \in \partial D_\gamma \setminus \gamma, \quad (4.21)$$

$$u(x, -\infty) = 0, \quad (4.22)$$

$$|\nabla u| = Q(x, y), \quad (x, y) \in \gamma. \quad (4.23)$$

Задача (4.19) – (4.23) называется квазистационарной задачей типа Стефана. Эта задача является самосопряженной, что позволяет изучать ее вариационным методом. Заметим, что условие (4.23) в силу (4.20) можно заменить на следующее:

$$\frac{\partial u}{\partial n} = Q(x, y), \quad (x, y) \in \gamma,$$

где n – внешняя относительно D_γ нормаль.

Сформулируем теперь основные требования к функции $Q(x, y)$. Всюду в дальнейшем будем предполагать, что функция $Q(x, y)$ удовлетворяет условиям

$$Q(x, y) = Q(-x, y), \quad x \geq 0, \quad (x, y) \in D, \quad (4.24)$$

$$Q_x(x, y) \leq 0, \quad Q_y(x, y) \geq 0, \quad (x, y) \in D, \quad (4.25)$$

$$C_0 \omega \exp(\mu_0 y) \leq Q(x, y) \leq C_1 \omega \exp(\mu_0 y), \quad (x, y) \in D, \quad (4.26)$$

где $C_0 = \text{const} > 0$, $C_1 = \text{const} > 0$, $\mu_0 = -\frac{\omega}{2} + \sqrt{\lambda_0^2 + \frac{\omega^2}{4}}$, $\lambda_0 \text{tg} \lambda_0 = \omega_0$.

Вариационная природа квазистационарной задачи типа Стефана. Предположим, что концы свободной границы γ в задаче (4.19) – (4.23) проходят через точки $(-1, h)$, $(1, h)$, $-\infty < h \leq 0$. Рассмотрим функционал

$$J(u, \gamma) = \iint_{D_\gamma} e^{\omega y} \left(|\nabla u|^2 + Q^2(x, y) \right) dx dy + \omega_0 \int_{\partial D_\gamma \setminus \gamma} e^{\omega y} u^2 dy, \quad (4.27)$$

зависящий от переменной области интегрирования D_γ и определенной в ней функции $u(x, y)$. Предположим, что γ – достаточно гладкая кривая без самопересечения, расположенная в D , концы которой проходят через точки $(-1, h)$, $(1, h)$, $-\infty < h \leq 0$; функция $u(x, y)$ непрерывна в \bar{D}_γ , непрерывно дифференцируема в D_γ , равна единице на γ , нулю на бесконечности, причем $J(u, \gamma) < +\infty$. Множество всевозможных допустимых пар (u, γ) обозначим через $\tilde{\Omega}$.

Используя вариационный подход, симметризацию Штейнера метод внутренних вариаций Шиффера доказывается существование слабого решения.

Предположим теперь, что $Q(x, y)$ является аналитической функцией в D по вещественным аргументам x , y . Для установления аналитичности свободной границы γ вновь рассмотрим систему двух интегральных уравнений (4.17), (4.18) для определения двух неизвестных аналитических функций $f(t)$ и $g(t)$, в $D_\gamma \cap (K_\rho + \gamma_\rho)$ в случае, когда $S(z, \bar{z}; \zeta, \bar{\zeta})$ – фундаментальное решение уравнения

(4.19) и $\Psi(z, \bar{z}) = e^{\frac{\omega(z-\bar{z})}{2i}} Q\left(\frac{z+\bar{z}}{2}, \frac{z-\bar{z}}{2i}\right)$, $A(z, \bar{z}; \zeta, \bar{\zeta}) = e^{\frac{\omega[(z-\bar{z})-(\zeta-\bar{\zeta})]}{4i}}$. Вновь используя метод

последовательных приближений доказывается теорема [67].

Теорема 4.7. Пусть $Q(x, y)$ - функция аналитическая по переменным x и y в D . Тогда в окрестности каждой точки $z_0 \in \gamma_\rho$, лежащей внутри области $-1 < x < 1$, $-H < y < 0$ существуют аналитические функции $f(t)$ и $g(t)$, являющиеся единственным решением системы (4.17) - (4.18).

Отсюда следует, что γ аналитическая дуга.

§ 2. Построение приближенных решений методом Ритца

2.1. О приближениях Ритца в вариационных задачах со свободной границей

Эта глава посвящена также приближенному решению методом Ритца нелинейных краевых задач, изученных в главах 2 - 4.

Построение приближений Ритца. Согласно известной методике Фридрихса, представим функционал (4.6) следующим образом:

$$I_1(z) = \iint_{\Delta} \left[\left(z_x + \frac{g_x}{g} z \right)^2 + \frac{1}{g^2} + v^2 z_\varphi^2 \right] \frac{g}{z_\varphi} dx d\varphi, \quad (4.28)$$

где $\Delta = (0 < x < a, 0 < \varphi < 1)$, $\varphi(x, z) = \psi(x, zg(x))$, а $z(x, \varphi)$ - решение уравнения $\varphi(x, z) - \varphi = 0$. Функционал (4.28) будем минимизировать на множествах

$$D_z^1 = \{z : z \in C^1(\bar{\Delta}), z(a_1, 1) = 1, z(x, 0) = 0, \min_{(x, \varphi) \in \Delta} z_\varphi > 0\}$$

или

$$D_z^2 = \{z : z \in C^1(\bar{\Delta}), z(a_1, 1) = 1, z(a_2, 1) = 1, z(x, 0) = 0, \min_{(x, \varphi) \in \Delta} z_\varphi > 0\}$$

здесь множество D_z^1 используется в случае теоремы 4.1, а D_z^2 - для теоремы 4.2.

Будем минимизировать функционал (4.28) на множествах D_z^1 или D_z^2 при помощи сумм

$$z_n(x, \varphi; a_{kj}(g)) = z_n(x, \varphi; g) = z_n(x, \varphi) = \sum_{k=1}^m \sum_{j=0}^{m_k} a_{kj}(g) x^j \varphi^k, \quad \sup_{1 \leq k \leq m} (k + m_k) = n.$$

Выделим в пространстве E_r коэффициентов a_{kj} область допустимости D_r^1 и D_r^2 где

$$\begin{aligned} r &= \sum_{k=1}^m (m_k + 1), \quad D_r^1 = E_r^0 \cap G_r^+, \quad E_r^0 : \sum_{k=1}^m \sum_{j=0}^{m_k} a_{kj} a_1^j - 1 = 0, \\ G_r^+ &= \left\{ a_{kj} : \min_{(x, \varphi) \in \bar{\Delta}} z_{n\varphi}(x, \varphi) > 0 \right\}, \quad D_r^2 = E_r^1 \cap E_r^0 \cap G_r^+, \quad E_r^1 : \sum_{k=1}^m \sum_{j=0}^{m_k} a_{kj} a_2^j - 1 = 0. \end{aligned} \quad (4.29)$$

Неизвестные коэффициенты $a_{kj} \in D_r^1$ и множитель Лагранжа λ определяются из нелинейной системы Ритца:

$$\begin{aligned} \frac{\partial I_2(a_{kj})}{\partial a_{pq}} + \lambda a_1^q = 0, \quad q = 0, 1, 2, \dots, m_p, \quad p = 1, 2, \dots, m, \\ \sum_{k=1}^m \sum_{j=0}^{m_k} a_{kj} a_1^j - 1 = 0, \quad I_2(a_{kj}) = I_1 \left(\sum_{k=1}^m \sum_{j=0}^{m_k} a_{kj} x^j \phi^k \right). \end{aligned} \quad (4.30)$$

Аналогичным образом строится система Ритца в случае множества D_r^2 [78].

Теорема 4.8. Пусть выполнены условия теоремы 4.3. Тогда функция $I_2(a_{kj})$ принимает свое наименьшее значение в некоторой внутренней точке a_{kj}^* множества D_r , лежащей на конечном расстоянии от начала координат пространства E_r .

Тогда в точке a_{kj}^* все частные производные первого порядка соответствующей функции Лагранжа обращаются в ноль. Следовательно, система Ритца (4.30) разрешима. Исследуем теперь зависимость коэффициентов Ритца a_{kj} от $g(x)$ [91].

Лемма 4.7. Пусть система Ритца имеет решение при некотором $y = g_0(x) \in C^2[0, a]$. Тогда решение системы (4.30) $a_{kj}(g), \lambda(g)$ непрерывно зависит от $g(x)$ в некоторой окрестности элемента $g_0(x)$.

Установим теперь сходимость приближенных решений к точному решению $z_0(x, \gamma)$ соответствующему решению (ψ, γ) задачи (4.1) - (4.5). Справедлива лемма [78].

Лемма 4.8. Приближения z_n , построенные по методу Ритца, образуют минимизирующую последовательность для функционала (4.28) на множестве (4.29).

Лемма 4.9. Пусть функция $z_0(x, \varphi) \in W_2^l(\Delta)$, где $l \geq 6$. Тогда можно построить допустимый многочлен $v_n(x, \varphi) = \sum_{k=1}^n \sum_{j=0}^m a_{kj} x^j \varphi^k$, $n \leq m$, такой, что

$$\|z_0 - v_n\|_{W_2^1(\Delta)}^2 = O\left(\frac{1}{n^{2(l-2)}}\right).$$

Используя теперь результаты Л.В. Канторовича по минимизации квадратичных функционалов методом Ритца [147] и [78] получим.

Теорема 4.9. Пусть выполнены все предположения теоремы 4.2, и пусть $z_0(x, \varphi) \in W_2^l(\Delta)$, когда $l \geq 6$. Тогда последовательность приближений Ритца $z_n(x, \varphi)$ сходится к точному решению $z_0(x, \varphi)$ по норме в $C(\bar{\Delta})$ и $W_2^1(\Delta)$.

Замечание 8. В случае $g(x) = b$, $x \in [0, a]$, получим, что $z_0(x, \varphi; b) = \varphi \in W_2^l(\Delta)$, $l \geq 6$, хотя на самом деле l может быть любым целым числом, т. е. получим сходимость $z_n(x, \varphi; b)$ к $z_0(x, \varphi; b)$ по норме в $C(\bar{\Delta})$. Учитывая, что $z_n(x, \varphi; g)$ непрерывно зависит от $g(x) \in C^2[0, a]$ в некоторой окрестности элемента $g_0(x) = b$, тогда и предельная функция $z_0(x, \varphi; g)$ будет непрерывно зависеть от $g(x)$ в этой же окрестности. Следовательно, и неравенство $\sqrt{M_n} \leq A_1 \sqrt{\frac{1}{n^2} \ln n + \frac{1}{n^2} \ln M_n} + A_2 \cdot \frac{1}{n}$ из которого в теореме 4.9 следует сходимость сохранит смысл в некоторой малой окрестности $U(b; g)$ элемента $g_0(x) = b$. Итак, получим сходимость $z_n(x, \varphi; g)$ к $z_0(x, \varphi; g)$ по норме в $C(\bar{\Delta})$ для всех $g \in U(b; g)$, причем

$$\max_{(x, \varphi) \in \Delta} |z_n - z_0| = O\left(\frac{\ln n}{n^2}\right), \varepsilon_n = I_1(z_n) - I_1(z_0) = O\left(\frac{1}{n^{l-2}}\right).$$

Следуя известной методике Фридрикса, представим функционал (4.13) в классе функций $\psi_y(x, y) > 0$ в G_y следующим образом:

$$J_1(z) = \iint_{\Delta} \left[\left(z_x + \frac{g_x}{g} z \right)^2 + \frac{1}{g^2} + v^2 g^2 z^2 z_\varphi^2 + 2\omega g(\varphi - 1) z \cdot z_\varphi^2 \right] \frac{dxdy}{zz_\varphi}, \quad (4.31)$$

где $\Delta = (0 < x < a, 0 < \varphi < 1)$, $\varphi(x, z) = \psi(x, zg(x))$, $z(x, \varphi)$ – решение уравнения $\varphi(x, z) - \varphi = 0$. Функционал (4.31) будет минимизировать на множестве допустимых функций

$$D_z = \left\{ z : z \in C(\bar{\Delta}), \sqrt{\varphi} z_\varphi \in C(\bar{\Delta}), z(0, 1) = 1, z(x, 0) = 0, \min_{(x, \varphi) \in \Delta} \sqrt{\varphi} z_\varphi > 0 \right\}. \quad (4.32)$$

Через $z_0(x, \varphi)$ обозначим функцию, соответствующую решению задачи (4.8) – (4.12). Очевидно, что $z_0 \in D_z$ и z_0 может быть представлено в виде $z_0 = \sqrt{\varphi} \eta(x, \varphi)$, где $\eta(x, \varphi)$ – достаточно гладкая функция и $\eta(x, 0) \neq 0$ [82].

Лемма 4.10. Элемент $z_0(x, \varphi)$, соответствующий решению задачи (4.8) – (4.12), доставляет наименьшее значение функционалу (4.31) на множестве (4.32).

Построение минимизирующей последовательности методом Ритца. Будем минимизировать функционал (4.31) на множестве (4.32) с помощью сумм

$$z_n(x, \varphi, \alpha_{kj}) = z_n(x, \varphi) = \sqrt{\varphi} \sum_{k=0}^m \sum_{j=0}^{m_k} a_{kj} x^j \varphi^k, \quad n = \sup_{0 \leq k \leq m} (k + m_k). \quad (4.33)$$

Включение $z \in D_z$ выделяет в евклидовом пространстве E_r коэффициентов a_{kj} область допустимости D_r , где

$$r = \sum_{k=0}^m (m_k + 1), \quad D_r = E_0^r \cap D_r^+, \quad E_0^r : \sum_{k=0}^m a_{k0} - 1 = 0, \\ D_r^+ = \{ a_{kj} : z_n \in C(\bar{\Delta}), \sqrt{\varphi} z_{n\varphi} \in C(\bar{\Delta}), z_n(0, 1) = 1, z_n(x, 0) = 0, \min_{(x, \varphi) \in \Delta} \sqrt{\varphi} z_{n\varphi} > 0 \}.$$

Неизвестные коэффициенты a_{kj} и множитель Лагранжа λ определяются из нелинейной системы Ритца [82]:

$$\frac{\partial J_3(a_{kj})}{\partial a_{p0}} + \lambda = 0, \quad p = 0, 1, 2, \dots, m, \quad \frac{\partial J_3(a_{kj})}{\partial a_{pq}} = 0, \quad q = 1, 2, \dots, m_p; \quad p = 0, 1, \dots, m, \\ \sum_{k=0}^m a_{k0} - 1 = 0, \quad J_3(a_{kj}) = J_1 \left(\sqrt{\varphi} \sum_{k=0}^m \sum_{j=0}^{m_k} a_{kj} x^j \varphi^k \right). \quad (4.34)$$

Теорема 4.10. Пусть выполнены условия теоремы 4.4. Тогда функция $J_3(a_{kj})$ принимает свое наименьшее значение в некоторой внутренней точке a_{kj}^* множества D_r , лежащей на конечном расстоянии от начала координат пространства.

Сходимость приближений Ритца. Решив систему уравнений (4.34) при фиксированном n , можно затем построить последовательность приближений (4.33) в виде $z_n(x, \varphi; a_{kj}^*) = z_n^*$.

Справедливы утверждения [82].

Лемма 4.11. Приближения (4.33), построенные по методу Ритца, образуют минимизирующую последовательность для функционала (4.31) на множестве (4.32).

Последовательность функции $z_n(x, 1)$ позволяет приближенно найти свободную границу γ_n задачи (4.8) – (4.12) в виде $y_n(x, 1) = g(x)z_n(x, 1)$. Справедлива следующая теорема.

Теорема 4.11. Пусть выполнены условия теоремы 4.4. Тогда последовательность $z_n(x, 1)$ сходится по норме в $L_2(0, a)$ к $z_0(x, 1)$, где $z_0(x, \varphi)$ – элемент, соответствующий решению задачи (4.8) – (4.12).

2.2. Оптимальное управление свободной границей

Обозначим через U множество допустимых управлений, элементами которого являются функции $y = g(x)$ ($0 \leq x \leq a$), удовлетворяющие условиям теоремы 4.2. Очевидно, что коэффициенты Ритца a_{kj} , определяемые при решении системы (4.30), будут теперь зависеть от элемента $g \in U$, т. е. $a_{kj} = a_{kj}(g)$.

Далее, пусть γ_0 – заданная допустимая кривая. Введем в рассмотрение функционал

$$F(g) = \int_0^a [y(x; g) - y_0(x)]^2 dx, g \in U,$$

где $\gamma_0 : y = y_0(x)$, $\gamma(g) : y = y(x; g)$, $x \in [0; a]$. Задача состоит в нахождении элемента $g \in U$ (оптимальное управление), доставляющего наименьшее значение

функционалу $F(g)$ на множестве U . В терминах функции $z(x, \varphi; g)$ этот функционал имеет вид

$$F(g) = \int_0^a [g(x) \cdot z(x, 1; g) - y_0(x)]^2 dx \quad (4.35)$$

(здесь $\gamma(g): y = g(x) \cdot z(x, 1; g)$). Допустим, что U не только замкнутое, но и компактное множество. Так, например, если имеются две функции $g_1(x)$ и $g_2(x)$, удовлетворяющие условиям теоремы 4.2 и такие, что $g'_1(x) \geq g'_2(x)$ при $x \in [0, a]$, то в качестве U можно взять следующее множество:

$$U = U(\varepsilon) = \{g_\varepsilon(x) : g_\varepsilon(x) = g_1(x) + \varepsilon(g_2(x) - g_1(x)), 0 \leq \varepsilon \leq 1, 0 \leq x \leq a\}.$$

Множество U по теореме Арцела компактно в $C[0, a]$, так как оно равномерно ограничено и равномерно непрерывно. Выбирая теперь минимизирующую относительно функционала $F(g)$ последовательность $g_n \in U$, заметим, что в силу леммы 4.7 функционал (4.35) будет непрерывным по g .

Теорема 4.12. Пусть множество U является замкнутым и компактным. Тогда существует управление $g^* \in U$, доставляющее наименьшее значение функционалу (4.35) на множестве U для каждого конечномерного приближения, основанного на методе Ритца.

Перейдем к построению приближений Ритца. Функционал (4.27) в классе функций $u_y > 0$ в D_γ можно представить следующим образом:

$$\tilde{I}(w) = \frac{1}{\omega} \iint_{\Delta} \left(w_x^2 + \omega^2 w^2 + w_u^2 Q^2(x, \frac{1}{\omega} \ln w) \right) \frac{dx du}{w_u} + \frac{\omega_0}{\omega} \int_0^1 u^2 (w_u(1, u) + w_u(-1, u)) du, \quad (4.36)$$

где $\Delta = (-1 < x < 1, 0 < u < 1)$, $w(x, u) = \exp(\omega y(x, u))$, $(x, y) \in \bar{\Delta}$, $y(x, u)$ — решение уравнения $u(x, y) - u = 0$.

Рассмотрим теперь задачу о минимуме функционала (4.36) на множестве

$$\Omega_w = \{w : w \in C(\bar{\Delta}) \cap C^1(\Delta + l), w(1, 1) = 1, f_1(w) \geq 0, f_2(w) \leq 0, f_3(w) \leq 0, f_4(w) \leq 0\}, \quad (4.37)$$

$$f_1(w) = \inf_{(x,u) \in \Delta} [w_u(x,u) - \alpha], \quad f_2(w) = \max_{(x,u) \in \Delta} [w(x,u) - \beta u^{\frac{\omega}{\mu_0}}], \quad l = \partial\Delta - \{u \equiv 0\},$$

$$f_3(w) = \sup_{(x,u) \in \bar{\Delta}} [w_u(x,u) - \kappa u^{\frac{\omega}{\mu_0}-1}], \quad f_4(w) = \sup_{(x,u) \in \bar{\Delta}} [|w_x(x,u)| - \pi u^{\frac{\omega}{\mu_0}}].$$

Будем минимизировать функционал (4.36) на множестве (4.37) при помощи сумм

$$w^{(n)}(x, u; a_{kj}) = \sum_{k=1}^m \sum_{j=0}^{m_k} a_{kj} x^{2j} u^k, \quad n = \sup_{k=1,2,\dots,m} (k + 2m_k).$$

Неизвестные коэффициенты $\{a_{kj}\}$ определяются методом Ритца. Доказывается сходимость приближений Ритца к точному решению $w(x, u) = \exp(\omega y(x, y))$, $(x, u) \in \bar{\Delta}$ в $C(\bar{\Delta}_\lambda)$, $\Delta_\lambda = (-1 < x < 1, 0 < \lambda < 1)$, $\lambda \in (0, 1)$ [61].

Пусть функция $Q(x, y; v)$ зависит от управления $v \in U$ и пусть γ_0 - заданная допустимая кривая. Рассмотрим функционал $F(v) = \rho^2(\gamma(v); \gamma_0)$, где $\rho(\gamma_1, \gamma_2)$ - функция расстояния. Можно доказать существование оптимального управления, когда U замкнуто и компактно. В качестве U можно взять ограниченное множество ступенчатых функций с фиксированным числом ступенек.

Доказывается непрерывность функционала

$$F(v) = \int_{-1}^1 \left(\frac{1}{\omega} \ln w(x, 1; v) - y_0(x) \right)^2 dx, \quad \gamma_0 : y = y_0(x)$$

на конечномерных приближениях Ритца $w^{(n)}(x, u; a_{kj}(v))$ [91].

Теорема 4.13. Пусть выполнены предположения теоремы 4.12 и леммы 4.7, а множество допустимых управлений U компактно. Тогда оптимальное управление существует для всех конечных приближений, основанных на методе Ритца.

Замечание 9. Так как приближения $w^{(n)}(x, 1, v)$ сходятся равномерно к $w(x, 1)$ в $C[0, a]$ и каждая из функций $w^{(n)}$ непрерывно зависит от v то и предельная функция w будет непрерывной по v . Поэтому и функционал $F(v)$ также непрерывен по v . Следовательно теорема 4.13 верна и для функционала $F(v)$.

Замечание 10. Необходимо отметить, что существенное продвижение в области разрешимости многомерных задач Стефана связано с развитием новых методов, созданных в математической физике. Речь идет, прежде всего, о методе вариационных неравенств, возникших в начале шестидесятих годов в теории потенциалов и механике упруго-пластических сред и получившем в последующем десятилетии интенсивное развитие [93-135].

Принципиально новую точку зрения на сущность задачи Стефана предложили А.Н.Тихонов и А.А.Самарский [17]. На этом пути был разработан эффективный метод численного решения нестационарной многомерной задачи Стефана [136-145].