УДК 517.988

Член-корреспондент НАН Украины **А.И. Шевченко, А.С. Миненко**

Математическое моделирование одного класса сложных систем с применением нечеткой логики

Строится трехмерная математическая модель кристаллизации металла с учетом конвективного теплообмена. При управлении этим процессом используется нечеткая логика. Методом Ритца строится приближенные решения, сходящиеся к точному решению в W_2^1 *и* C.

Член-кореспондент НАН України **А.І. Шевченко, О.С. Міненко**

Математичне моделювання одного класу складних систем з застосуванням нечіткої логіки.

Будується просторова математична модель кристалізації метала з урахуванням конвективного теплообміну. При управлінні цим процесом використовується нечітка логіка. Методом Рітца будується наближений розв'язок, збіжний до точного розв'язку в W_2^1 *і* C.

Corresponding Member of the NAS of Ukraine **A.I. Shevchenko, A.S. Minenko**

Mathematical modeling of the one class complex system with using fuzzy logic

The three-dimensional mathematical model with convection is build. The control this process with using fuzzy logic is realized. By using the Ritz method, an approximate solution convergent to an exact solution in W_2^1 *and* C.

1. Рассмотрим область $\Omega = \left\{(x_1, x_2, x_3 : r^2 < x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < R^2)\right\}$ и через Γ^- и Γ^+ обозначим следующие сферы:

$$\Gamma^- = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = r^2\}, \Gamma^+ = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = R^2\}.$$

Далее, пусть Γ_0 гладкая, связная поверхность без самопересечений, лежащая внутри Ω, которая разбивает ее на две подобласти Ω^+ и Ω^-, т.е. $\Omega = \Omega^+ \bigcup \Omega^-$, причем сфера Γ^- лежит внутри ограниченной области, границей которой является Γ_0. Рассмотрим краевую задачу со свободной границей Γ_0. Требуется определить тройку $(u^\pm(x), \Gamma_0)$ по следующим условиям:

$$\begin{aligned} &\nabla^2 u^\pm(x) = 0, x \in \Omega^\pm; u^\pm(x)\,|_{\Gamma^\pm} = B^\pm(x);\\ &u^\pm(x) = 1, |\nabla u^-(x)| - |\nabla u^+(x)| = 0, x \in \Gamma_{0.} \end{aligned} \tag{1}$$

При этом, $B^\pm(x) \in C^{3+\alpha}(\Gamma^\pm), u^\pm(x) \in C^{3+\alpha}(\overline{\Omega^\pm})$, а Γ_0 принадлежит классу C^∞[1].

Затем введем в рассмотрение функцию $u(x)$, заданную следующим образом $u = u^-(x)$, при $x \in \overline{\Omega^-}$ и $u = u^+(x)$, при $x \in \overline{\Omega^+}$. Тогда функцию $u(x)$ можно найти из условия минимума функционала $I(u, \Gamma_0) = \iiint\limits_\Omega |\nabla u|^2 \, dx_1 dx_2 dx_3$ на соответствующем множестве R допустимых функций [2]. Это следует из формулы первой вариации интегрального функционала с неизвестной областью интегрирования [2].

Далее, удобно представить функционал I в сферических координатах:

$$I(u, \Gamma_0) = \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{\pi} \int\limits_r^{R} \left(u_\rho^2 + \frac{1}{\rho^2} u_\theta^2 + \frac{1}{\rho^2 \sin^2\theta} u_\varphi^2 \right) \rho^2 \sin\theta d\varphi d\theta d\rho. \tag{2}$$

Лемма 1. *Пусть тройка $(u^\pm(x), \Gamma_0)$ является классическим решением задачи (1). Тогда эта тройка будет стационарной для функционала (2) на множестве R. Обратно, каждая стационарная тройка $(u^\pm(x), \Gamma_0)$ функционала (2) на множестве R, где Γ_0- достаточно гладкая, связная поверхность, является решением задачи (1).*

Сформулированная задача (1) получается из задачи, изученной в [1] в случае $\overrightarrow{V} = 0$, т.е. в случае бесконечно большой вязкости, $\mathrm{Re} = 0$. Поэтому в дальнейшем под решением задачи (1) при $\mathrm{Re} = 0$ будем понимать функции $\overrightarrow{V}(x) = 0, u^+(x)$ и $u^-(x)$, заданные в $\Omega^\pm$. Из условий (1) следует, что Γ_0 - не что иное, как линия уровня функции $u(x)$, т.е:

$$\Gamma_0 = \{x \in \Omega : u(x) = 1\}.$$

Далее, если предположить выполнение следующего условия:

$$\pm(B^\pm(x) - 1) \geq \varepsilon_0 > 0, x \in \Gamma^\pm,$$

где ε_0–некоторая постоянная, тогда поверхность Γ_0 лежит внутри области Ω и представляет собой поверхность класса $C^{4+\alpha}$, не имеющую самопересечений и располагающуюся относительно Γ^+ и Γ^-аналогично поверхности Γ_t (свободная поверхность), изученной в [1]. Следовательно, рассматривая функцию $u(x)$в одной из областей $\Omega^\pm$, и принимая во внимание лемму о нормальной производной, находим что:

$$\frac{\partial u}{\partial n} = |\nabla u| \geq \varepsilon > 0, x \in \Gamma_0,$$

где n – нормаль к Γ_0, направленная в сторону Ω_0^+, а ε - некоторая постоянная. Отсюда, применяя теорему о неявной функции, следует, что Γ_0 принадлежит классу C^∞, так как этому классу в некоторой окрестности Γ_0 принадлежит гармоническая функция $u(x)$.

2. Минимум функционала (2) на множестве R будем искать при помощи сумм:

$$u_n = B^+ + \frac{R^2-\rho^2}{R^2-r^2}(B^- - B^+) + (R^2-\rho^2)(\rho^2-r^2)\sum_{k=0}^{n} C_k \rho^k y_k(\varphi,\theta),$$

где $y_k(\varphi,\theta)$–сферические функции. Неизвестные коэффициенты C_k определяют при помощи метода Ритца. Тогда поверхность $\Gamma_0 : \rho = \rho_0(\varphi,\theta)$ определяется из уравнения $u_n(\varphi,\theta,\rho_0(\varphi,\theta)) = 1$.

При этом, необходимо учесть, что $|\nabla u(x)| \geq \varepsilon_0 > 0$,в $\overline{\Omega}$, где ε_0– некоторая постоянная [2].

Лемма 2. *При малых t справедливо представление:*

$$\Gamma_t : \rho(\varphi,\theta,t) = \rho_0(\varphi,\theta) - Re\frac{u_1^\pm(\varphi,\theta,t)}{|\nabla A^\pm(\varphi,\theta)|} + 0(Re), (\varphi,\theta) \in \Gamma_0. \qquad (3)$$

Здесь Re – число Рейнольдса, а $u_1^\pm(\varphi,\theta,t)$ – первое приближение исходной задачи, изученной в [1].

В частности для нулевого приближения $u_0(\varphi,\theta)$ из уравнения: $u_o = B^+ + \frac{R^2-\rho^2}{R^2-r^2}(B^- - B^+) + (\rho^2-r^2)(R^2-\rho^2)C_0 = 1$. легко найти поверхность $\rho_0(\varphi,\theta)$.

Далее, рассмотрим величину $\varepsilon_n = I(u_n,\Gamma_o) - I(u,\Gamma_0)$, где u – точное решение задачи (1). Тогда, можно установить, что $\varepsilon_n \to 0$ при $n \to \infty$, если C_k– коэффициенты Ритца. Используя затем результаты Канторовича Л.В. по минимизации квадратичных функционалов, аналогично тому как это сделано в [1], можно доказать следующее утверждение.

Теорема. *Последовательность приближений Ритца u_n сходится к решению задачи (1) и по норме в W_2^1и C, причем $\varepsilon_n = \mathrm{O}\left(\omega^{(3)}(u,\frac{1}{n})/n^2\right)$, и если $\lim\limits_{n\to\infty}\omega^{(3)}(u,\frac{1}{n})n^{-1}(\ln n)^{1+\varepsilon} = 0$, тогда: $\|u-u_n\|_{C(\overline{\Omega})} \leq C_1\omega^{(3)}(u,\frac{1}{n})\cdot n^{-1} + C_2\sum\limits_{S=m}^{\infty}\omega^{(3)}(u,\frac{1}{2^s})\cdot 2^{-s}$,* где C_1 и C_2 – некоторые постоянные, $\omega^{(3)}(u,\frac{1}{n})$- максимальный модуль непрерывности производных третьего порядка функции $u(x)$и $2^{m-1} < n \leq 2^m$.

Замечание. В случае двух геометрических переменных имеют место оценки:

$$\varepsilon_n = \mathrm{O}(\frac{1}{n^{2(2+\alpha)}}), \|u_n - u\|_{C(\overline{\Omega})} \le C_1\sqrt{\varepsilon_n \ln\frac{n}{\varepsilon_n}} + C_2\sqrt{\varepsilon_n}, \qquad (4)$$

В работе [1] изучены k-е приближения $(\overrightarrow{V}, u_k^{\pm}, \rho_k)$ исходной задачи являющиеся функциями класса $H^{2+\alpha,(2+\alpha)/2}(\overline{\Omega^{\pm}})$, построены системы уравнений, решениями которых они являются. Формулы (3), (4) позволяют исследовать Γ_t в зависимости от чисел Рейнольдса Re.

3. Пусть T^*- температура, которую должна достичь поверхность $\partial\Omega$. Эта температура достигается за счет воздействия тепловых потоков мощности w_1, w_2, w_3, причем мощность одного из них w_3 равномерно распределена в центре $\partial\Omega$, а два других w_1 и w_2 сконцентрированы по краям $\partial\Omega$ [3]. Далее, будет предложен метод нечеткого управления в данном классе задач, который имеет место в спецметаллургии [4].

Пусть $X_1, X_2, ..., X_n$ – факторы, влияющие на процессе кристаллизации, а $Y_1, Y_2, ..., Y_n$ – условия, при которых происходит появление нового слитка. Тогда нечеткое управление в нашей модели можно представить в виде функционального отображения: $X = \{X_1, X_2, ..., X_n\} \to Y = \{Y_1, Y_2, ..., Y_n\}$.

В простейшем случае, например, в качестве терм-множества лингвистических переменных x_1, x_2, x_3, где x_1={“температура слитка”}, x_2 ={“способ нагрева”}, x_3={“слиток металла”} можно использовать соответственно множества: T = {“минимальная”, “средняя”, “максимальная”}, W = {“минимальный”, “средний”, “максимальный”}, L= {“минимальный”, “средний”, “максимальный”}. Следовательно, получим:

$$x = \{x_1, x_2, x_3\} \to y \in [a, b],$$

где a и b – некоторые числа, а для выходной лингвистической переменной y (температура поверхности слитка) будет использоваться терм-множество Q = {“минимальная”, “средняя”, “максимальная”}. Пределы a и b выбираются таким образом, чтобы произошло отделения слитка от стенок кристаллизации [3]. Далее, формируется база нечетких высказываний из 17 правил.

При численной реализации задачи использовались следующие значения параметров:

$$2500 \text{ МВт/м}^2 \le W \le 5000 \text{ МВт/м}^2 \text{ , } 600 \text{ мм} \le L \le 6000 \text{ мм.}$$

Численный расчет, позволяющий построить нечеткое управление, был осуществлен с помощью стандартного алгоритма Мамдани, а результаты получены в ходе эксперимента на объектах управления ЭШП [3].

Литература

1. Шевченко А.И., Миненко А.С. Задача Стефана при наличии конвекции//Доп. НАН України. – 2012. – №1. – С.25-29.

2. Миненко А.С. Вариационные задачи со свободной границей. – Киев: Наук.думка, 2005. – 341 с.

3. Патон Б.Е. Избранные труды. – Киев: Институт электросварки им. Е.О. Патона НАН Украины, 2008. – 893 с.

4. Шевченко А.И., Миненко А.С. Методы исследования нелинейных математических моделей. – Киев: Национальная академия наук Украины, ИПИИ, 2012 – 130 с.

ДонНТУ, Институт информатики
и искусственного интеллекта,
83050 г.Донецк, пр. Б.Хмельницкого, 84.
Тел. (062) 304-92-58
Факс (062) 337-78-66
e-mail: minenko@iai.donetsk.ua

Поступила в редакцию