

Численный анализ одной нелинейной математической модели

Исследуется задача Стефана с учётом конвективного движения в жидкой фазе. Построено приближённое решение задачи с использованием метода малого параметра.

Досліджується задача Стефана з урахуванням конвекції в рідині. Використовуючи метод малого параметру, побудовано наближене рішення задачі.

Corresponding Member of the NAS of Ukraine **A.I.Shevchenko, A.S.Minenko, O.A.Zolotukhina**

Numerical analysis of a nonlinear mathematical model

The convection Stefan problem in liquid phase is investigated. The approximate solution is constructed by using the method of small parameter.

1. Постановка задачи. Пусть $\Omega \in R^3$ – заданная область, граница которой $\partial\Omega$ состоит из двух замкнутых, связных гладких поверхностей Γ^+ и Γ^- , не имеющих самопересечений, причем поверхности Γ^\pm предполагаются принадлежащими классу $H^{5+\alpha}$, $0 < \alpha < 1$. Пусть далее $\Gamma_t (t \in [0, T])$ – гладкие замкнутые поверхности, лежащие внутри Ω , такие, что Γ^+ лежит внутри ограничений области, границей которой является Γ_t . Свободная поверхность Γ_t – граница раздела фаз в момент времени t – разбивает область Ω на две связные подобласти Ω_t^- и Ω_t^+ , занимаемых твердой и жидкой фазами соответственно. Требуется определить вектор скорости $\vec{V}(x, t)$, давление $p(x, t)$, распределения температур твердой и жидкой фаз $u^-(x, t)$ и $u^+(x, t)$ и свободную поверхность Γ_t по следующим условиям:

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \nabla) \vec{V}(x, t) + \nabla p(x, t) = \frac{1}{Re} \nabla^2 \vec{V}(x, t) + \vec{f}(u^+), \nabla \vec{V}(x, t) = 0, (x, t) \in D_T^+; \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} u^+(x, t) + (\vec{V} \nabla) u^+(x, t) - a_+^2 \nabla^2 u^+(x, t) = 0, (x, t) \in D_T^+, \quad (2)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} u^-(x, t) - a_-^2 \nabla^2 u^-(x, t) = 0, \quad (x, t) \in D_T^-, \quad (3)$$

$$u^\pm(x, t)|_{t=0} = A^\pm(x), \quad u^\pm(x, t)|_{x \in \Gamma^+ \cup \Gamma^-} = B^\pm(x, t), \quad (4)$$

$$\vec{V}(x, t)|_{t=0} = \vec{C}(x), \quad \vec{V}(x, t)|_{x \in \Gamma^+ \cup \Gamma_t} = 0, \quad (5)$$

$$u^\pm(x, t)|_{x \in \Gamma_t} = 0, \quad \sum_{i=1}^3 \left[K_- \frac{\partial u^-}{\partial x_i} - K_+ \frac{\partial u^+}{\partial x_i} \right] \cos(n, x_i) + K \cos(n, t) = 0, \quad x \in \Gamma_t, \quad (6)$$

где $D_T^\pm = \{(x, t) : x \in \Omega_t^\pm, t \in (0, T)\}$, $\partial\Omega^\pm \Gamma_t \cup \Gamma^\pm$, $\nabla = (\partial/\partial x_1, \partial/\partial x_2, \partial/\partial x_3)$, \vec{n} - нормаль к Γ_t , направлена в сторону Ω_t . Предполагается, что $B^\pm(x, t) \in \mathbf{H}^{3+\beta, (3+\beta)/2}(\Gamma^\pm \times [0, T])$, $0 < \beta < \alpha$, $A^\pm(x) \in \mathbf{H}^{5+\alpha}(\overline{\Omega_0^\pm})$, $\vec{C}(x) \in \mathbf{H}^{2+\alpha}(\overline{\Omega^+})$, где Ω_0^\pm - области, на которые разбивает Ω граница раздела фаз Γ_0 в момент времени $t = 0$ и $B^\pm(x, t) \geq \varepsilon_0 > 0$ при $(x, t) \in \Gamma^\pm \times [0, T]$.

Параметры a_\pm , K_\pm , K , Re , ε_0 - считаются положительными постоянными, а $\vec{f}(u^+)$ - принадлежащей классу $C^2(R^1)$ $f'(u^+)$ - ограниченной в R^1 . Задача (1)-(6) при малых значениях t разрешима в классе гладких функций, при этом $u^\pm \in \mathbf{H}^{2+\alpha, (2+\alpha)/2}(\overline{D_T^\pm})$, $\vec{V} \in \mathbf{H}^{2+\beta, (2+\beta)/2}(\overline{D_T^\pm})$, а свободная поверхность Γ_t принадлежит классу $\mathbf{H}^{2+\alpha, (2+\alpha)/2}$. [1]

Настоящая работа посвящена приближенному анализу задачи (1)-(6).

2. Приближенное решение задачи (1)-(6). Для точек поверхности Γ_0 введем координаты $\omega = (\omega_1, \omega_2)$, через $x(\omega) \in \Gamma_0$ или через ω будем обозначать также соответствующие точки в R^3 . Далее, пусть $\vec{n}(\omega)$ - нормаль к Γ_0 , направленная внутрь Ω_0^+ . В работе [1] установлено, что поверхность Γ_t можно представить в виде $\Gamma_t = \{x = x(\omega) + \vec{n}(\omega)\rho(\omega, t)\}$ с некоторой функцией $\rho(\omega, t)$ класса $\mathbf{H}^{2+\alpha, (2+\alpha)/2}(\Gamma_0 \times [0, T])$, так что $\rho(\omega, 0) = 0$.

Предположим, что при малых значениях Re неизвестные нашей задачи можно представить в виде степенного ряда:

$$u^\pm(x, t) = u_0^\pm(x) + V_i(x, t) = V_{i0}(x) + \sum_{K=1}^{\infty} (Re)^K V_{iK}(x, t), \quad i = 1, 2, 3; \quad \rho(\omega, t) = \sum_{K=1}^{\infty} (Re)^K \rho_K(\omega, t).$$

В работах [1-8] изучены нулевые и первые приближения задачи (1)-(6) для малых чисел Re . При этом установлено, что $u_0^\pm = A^\pm(x)$, $\vec{V}_0(x) = \vec{C}(x)$, $\rho_1(\omega, t) \in \mathbf{H}^{2+\alpha, (2+\alpha)/2}(\Gamma_0 \times [0, T])$, $u_1^\pm(x, t) \in \mathbf{H}^{2+\alpha, (2+\alpha)/2}(\overline{D_T^\pm})$, причем $\rho_1(\omega, t)$ находим как неподвижную точку сжимающегося оператора M_1 :

$$M_1 \rho_1 = \frac{1}{K} \int_0^t \left(K_- \frac{\partial u_1^-}{\partial n} - K_+ \frac{\partial u_1^+}{\partial n} + f(x, t) \right) dt, \quad x(\omega) \in [0, T],$$

а $f_1(x, t)$ - некоторая функция класса $\mathbf{H}^{2+\alpha, (2+\alpha)/2}$

3. Приближенное построение поверхности Γ_t . Рассмотрим случай, когда $B^\pm = B^\pm(x)$ и $\Omega = \{(x_1, x_2, x_3) : r^2 < x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < R^2\}$. Тогда нулевое приближение находим как решение

следующей задачи:

$$\begin{cases} \nabla^2 u^\pm(x) = 0, x \in \Omega_0^\pm, A^\pm(x)|_{\Gamma^\pm} = B^\pm(x), u^\pm(x)|_{\Gamma_0} = 0, \\ \vec{C}(x) = 0, x \in \overline{\Omega_0^\pm}, |\nabla u^-(x)| - |\nabla u^+(x)| = 0, x \in \Gamma_0 \end{cases} \quad (7)$$

Заметим, что замена $\tilde{u}^- = K_- u^-$ при $x \in \Omega^-$ и $\tilde{u}^+ = K_+ u^+$, если $x \in \Omega^+$ сводит задачу (7) к случаю $|\nabla u^-(x)| = |\nabla u^+(x)|$, $x \in \Gamma_0$. поэтому в дальнейшем будем считать, что это условие выполнено. Нулевое приближение $u_0^\pm(x)$, Γ_0 найдем из условия минимума функционала $Y(u_0^\pm, \Gamma_0) = \iiint_{\Omega} |\nabla u|^2 dx_1 dx_2 dx_3$, здесь $\Omega = \Omega_0^+ \cup \Omega_0^-$ и $u = u^-$ при $x \in \Omega^-$ и $u = u^+$, если $x \in \Omega^+$.

Далее, рассматривая функционал Y в сферических координатах, получим

$$Y(u_0) = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_r^R \left(u_\rho^2 + \frac{1}{\rho^2} u_\theta^2 + \frac{1}{\rho^2 \sin^2 \theta} u_\varphi^2 \right) \rho^2 \sin \theta d\varphi d\theta d\rho.$$

Минимум функционала ищем в следующем виде

$$u = B^+ + \frac{R^2 - \rho^2}{R^2 - r^2} (B^- + B^+) + (R^2 - \rho^2)(\rho^2 - r^2) \sum_{K=0}^{\infty} C_K \rho_K^K.$$

Неизвестные коэффициенты C_K определяются методом Ритца. В частности, в случае нулевого приближения

$$u_0 = B^+ + \frac{R^2 - \rho^2}{R^2 - r^2} (B^- + B^+) + (R^2 - \rho^2)(\rho^2 - r^2) C_0,$$

из уравнения $\partial Y(u_0)/\partial C_0 = 0$ определим коэффициент C_0 . Справедлива следующая теорема.

Теорема. Поверхность Γ_0 представляет собой поверхность класса C^∞ , не имеющую самопересечений и расположенную относительно Γ^+ и Γ^- аналогично поверхности Γ_t в задаче (1)-(6).

Доказательство следует из принципа максимума, применённого к гармонической функции $\Psi(x) = -\frac{\partial u_0(x)}{\partial \vec{r}}$ оценок $-\frac{\partial u_0(x)}{\partial \vec{r}} \Big|_{\overline{\Omega}} \geq \tilde{\varepsilon}_0 > 0$ и теоремы о неявной функции, применённой к $\Psi(x)$. Здесь \vec{r} – радиус-вектор точки x .

Отсюда следует, что поверхность Γ_0 : $\rho = \rho_0(\varphi, \theta)$ можно найти из условия $u_0(\varphi, \theta, \rho_0(\varphi, \theta)) = 0$.

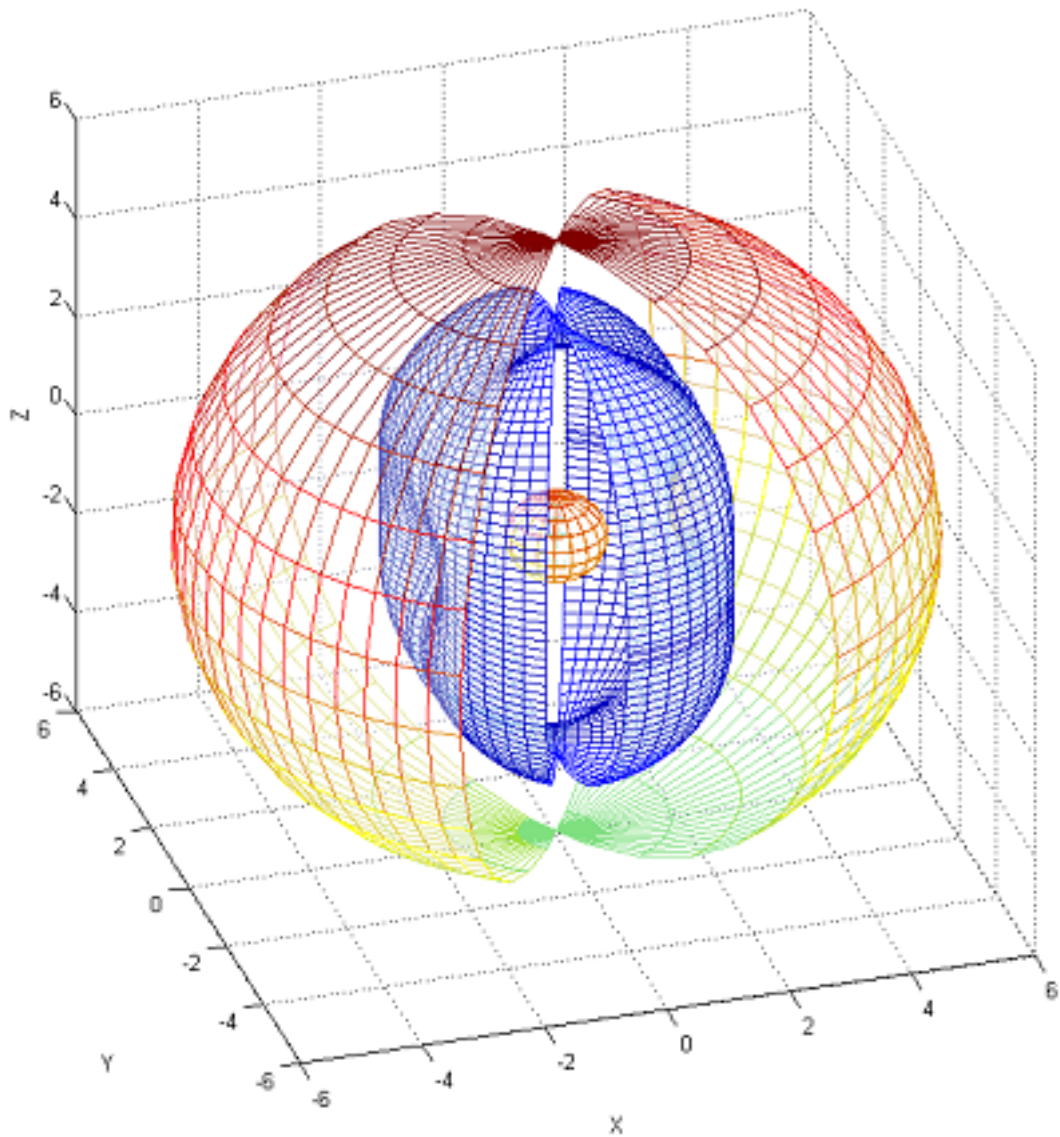
Тогда для поверхности Γ_t можно воспользоваться уравнением [2]:

$$\Gamma_t = \rho(\varphi, \theta, t) = \rho_0(\varphi, \theta) - Re \frac{u_1^\pm(\varphi, \theta, t)}{|\nabla A^\pm(\varphi, \theta)|} + o(Re).$$

На рисунке представлена поверхность Γ_t при следующих значениях параметров: $t = 200R = 6$, $r = 0,8$, $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}$, $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$, $B^+ = 3 [\cos^2 \theta + \cos^2 \varphi]$, $B^- = -0,35 [\cos^2 \theta + \cos^2 \varphi] - 0,1$.

Свободная поверхность Γ_t расположена между сферами радиусов R и r .

Предложенный алгоритм построения поверхности Γ_t позволяет исследовать эту поверхность в зависимости от параметров задачи (1)-(6).



Литература

1. Шевченко А.И., Миненко А.И. Задача Стефана при наличии конвекции // Доп. НАН України. – 2012. – №1. – С.20-25.
2. Миненко А.С. Вариационные задачи со свободной границей. – К.:Наукова думка, 2005. – 341с.
3. Шевченко А.И., Миненко А.С. Приближённый анализ многомерной конвективной задачи Стефана// Доп. НАН України. – 2010. – №4. – С.30-34.
4. Шевченко А.И., Миненко А.С. Приближённый анализ стационарной конвективной задачи Стефана// Доп. НАН України. – 2010. – №5. – С.36-40.
5. Шевченко А.И., Миненко А.С. Приближённый анализ пространственной конвективной задачи Стефана// Доп. НАН України. – 2010. – №10. – С.29-33.

6. Миненко А.С. Исследование одной конвективной задачи Стефана методом Ритца// Укр. мат. журн. – 2007. – **59**, №11. – С.1546-1556.
7. Миненко А.С. О минимизации одного интегрального функционала методом Ритца// Укр. мат. журн. – 2007. – **58**, №10. – С.1385-1394.
8. Шевченко А.И., Миненко А.С. Математическое моделирование процессов кристаллизации металла с учётом конвекции и примесей// Доп. НАН України. – 2011. – №6. – С.35-39.

ДонНТУ, Институт информатики

Поступила в редакцию

и искусственного интеллекта,

83050 г.Донецк, пр. Б.Хмельницкого, 84.

Тел. (062) 304-92-58

Факс (062) 337-78-66

e-mail: minenko@iai.donetsk.ua