УДК 517.9

Член-корреспондент НАН Украины **А.И. Шевченко, А.С. Миненко**

Моделирование потенциально-вихревого течения со свободной границей с применением нечеткой логики

Доказана разрешимость краевой задачи со свободной границей. Построено приближенное решение методом Ритца. Доказана сходимость приближенного решения к точному решению в метрике C *и* W_2^1.

Член-кореспондент НАН України **А.І. Шевченко, О.С. Міненко**

Моделювання потенціально-вихорної течії з вільною межею з застосуванням нечіткої логіки

Доведена розв’язність краєвої задачі з вільною межею Побудовано наближене рішення методом Рітца. Доведена збіжність наближеного розв’язку до точного розв’язку в метриці C *і* W_2^1.

Corresponding Member of the NAS of Ukraine **A.I. Shevchenko, A.S. Minenko**

Modeling potentially – rotational current with free boundary and with using fuzzy logic.

Solvability of the boundary-value problem with free boundary is proved. The approximate solution is constructed using by Ritz method. The convergence of the approximate solution to the exact one in the metric C *and* W_2^1 *is proved.*

1. Постановка задачи. Обозначим через D- область, ограниченную снизу отрезком $A=(0\le x\le a, y=0)$, сверху кривой $P: y=g(x), 0\le x\le a$, где $g(0)=b_1, g(a)=b_2, b_1\le b_2$, а $g(x)$- аналитическая, монотонно возрастающая функция при $x\in[o,a]$, причем $g'(0)=0, g'(a)=0$. Боковую часть границы области D, состоящую из вертикалей, обозначим через $Q_1=(x=0,\ 0\le y\le b_1)$ и $Q_2=(x=a, 0\le y\le b_2)$. Пусть γ-жорданова дуга в D, концы которой лежат на вертикалях Q_1 и Q_2, причем все точки γ, включая и концы, расположены ниже кривой P. Кривая γ разбивает область D на две односвязные области G_γ, находящуюся выше γ и Ω_γ. Такие дуги будем называть допустимыми. Концы γ разбивают вертикали Q_1 и Q_2 на два открытых множества R_1 - боковую часть границы области G_γ и R_2 - боковую часть границы области Ω_γ.

Рассматривается задача. Требуется определить функции тока $\psi_1(x,y), \psi_2(x,y)$ и свободную границу γ по следующим условиям:

$$\Delta\psi_1=\omega,\ (x,y)\in G_\gamma, \tag{1}$$

$$\psi_{1x}=0, (x,y)\in R_1; \psi_1=C,\ \ (x,y)\in P; \psi_1=1, (x,y)\in\gamma, \tag{2}$$

$$\Delta\psi_2=0,\ (x,y)\in\Omega_\gamma, \tag{3}$$

$$\psi_{2x}=0, (x,y)\in R_2; \psi_2=0,\ \ (x,y)\in A; \psi_2=1, (x,y)\in\gamma, \tag{4}$$

$$|\nabla\psi_1|=|\nabla\psi_2|,\ (x,y)\in\gamma. \tag{5}$$

Здесь $\omega=const>0$, а $C=const>1$. Ранее, в работах [1] и [3] отдельно изучались случаи потенциального и вихревого течения, когда на свободной границе задавалось условие Бернулли в виде неравенства.

2. Вариационная постановка задачи. Рассмотрим функционал:

$$I(\psi_1,\psi_2,\gamma)=\iint\limits_{G_\gamma}[|\nabla\psi_1|^2+2\omega(\psi_1-1)]dxdy+\iint\limits_{\Omega_\gamma}|\nabla\psi_2|^2 dxdy \tag{6}$$

на множестве V допустимых троек (ψ_1,ψ_2,γ) обладающих следующими свойствами: γ - допустимая дуга; функция $\psi_1(x,y)$ определена и непрерывна в замыкании области G_γ, кусочно-непрерывно дифференцируема в G_γ, равна единице на γ и постоянной C при $(x, y) \in P$; функция $\psi_2(x, y)$ определена и непрерывна в замыкании области Ω_γ, кусочно-непрерывно дифференцируема в Ω_γ, равна единице на γ и нулю при $(x, y) \in A$, причем $Y(\psi_1, \psi_2, \gamma) < \infty$.

Лемма 1. Пусть тройка (ψ_1, ψ_2, γ) является классическим решением задачи (1) - (5). Тогда эта тройка будет стационарной для функционала (6) на множестве V. Обратно, каждая стационарная тройка (ψ_1, ψ_2, γ) функционала (6) на множестве V, где γ - достаточно гладкая кривая, является решением задачи (1) - (5).

Лемма 1 позволяет свести разрешимость нелинейной задачи (1) - (5) к проблеме минимума функционала (6) на множестве V.

3. Симметризация областей G_γ и Ω_γ. Пусть V_γ - подмножество множества V, состоящее из всех троек (ψ_1, ψ_2, γ), где γ - фиксированная допустимая кривая. С помощью вариационного подхода доказывается лемма.

Лемма 2. Существует единственная тройка $(\psi_1, \psi_2, \gamma) \in V_\gamma$ на котором функционал (6) достигает своего наименьшего значения. При этом функции $\psi_1(x, y)$ и $\psi_2(x, y)$ являются единственными решениями соответственно задач (1), (2) и (3), (4).

Пусть теперь γ - произвольная допустимая кривая, $\psi_1(x, y)$ - решение задачи (1), (2) в заданной области G_γ, а $\psi_2(x, y)$ - решение задачи (3), (4) в Ω_γ. Введем в рассмотрение множества:

$$G_1 = \{(x, y) \in G_\gamma : \psi_1(x, y) < 1\},\ L_1 = \{(x, y) \in R_1 : \psi_1(x, y) < 1\},$$

$$G_2 = \{(x, y) \in G_\gamma : \psi_1(x, y) > 1\},\ L_2 = \{(x, y) \in R_1 : \psi_1(x, y) > 1\}.$$

Лемма 3. Пусть (ψ_1, ψ_2, γ) - допустимая тройка, причем $\psi_1(x, y)$ - решение задачи (1), (2), а $\psi_2(x, y)$ - решение задачи (3), (4). Просимметризуем область G_2 относительно осей координат. Полученную область обозначим через G^*, а ее свободную границу через γ^*. Пусть $\psi_1^*(x, y)$ - решение задачи (1) , (2) в G^*, а $\psi_2^*(x, y)$ - решение задачи (3), (4) в $\Omega^* = \mathrm{int}(D \setminus G^*)$. Тогда

$I(\psi_1^*,\psi_2^*,\gamma^*)\le I(\psi_1,\psi_2,\gamma)$, причем $\psi_{1y}^*>0$ в G^* ,а $\psi_{2y}^*>0$ в Ω^* и γ^* задается уравнением:

$$x=x(t),\ y=y(t),\ 0\le \mathrm{t}\le \mathrm{T}, \tag{7}$$

где $x(t)$ и $y(t)$ - неубывающие функции параметра t .

4. Теорема существования. Пусть d - точная нижняя грань функционала (6) на множестве V и $(\psi_{1n},\psi_{2n},G_n,\Omega_n)$ - минимизирующая последовательность. На основании леммы 3 можно считать, что G_n и Ω_n имеют свободную границу γ_n, заданную уравнениями типа (7). В силу леммы 2 в качестве функций ψ_{1n} и ψ_{2n} можно брать решения задач (1), (2) и (3), (4) соответственно в областях G_n и Ω_n. Применяя затем метод внутренних вариаций Шиффера и симметризацию Штейнера [1] докажем теорему.

Теорема 1. Пусть функция $g(x)$ монотонно возрастает в $[0,a]$, является аналитической функцией переменной x при $0\le x\le a$ и кроме того $g'(0)=0, g'(a)=a$. И пусть также выполнено условие $1-\omega b_2^2/2>0$. Тогда существует единственное решение (ψ_1,ψ_2,γ) задачи (1) – (5), удовлетворяющее условиям $\psi_{1y}>0$ в G_γ, а $\psi_{2y}>0$ в Ω_γ. При этом γ является монотонно-возрастающей дугой, аналитической в окрестности каждой своей внутренней точки, причем γ не имеет общих точек с кривой P и отрезком A. Функции $\psi_1(x,y)$ и $\psi_2(x,y)$ непрерывны в $\overline{G_\gamma}$ и $\overline{\Omega_\gamma}$, непрерывно дифференцируемы вплоть до границы всюду за исключением концевых точек γ.

5. Решение задачи (1) – (5) методом Ритца. Функционал (6) в классе функций $\psi_{1y}>0$ в $\overline{G_\gamma}$ и $\psi_{2y}>0$ в $\overline{\Omega_\gamma}$ представим следующим образом:

$$I_1(z_1,z_2)=\iint\limits_{\Delta_1}[(z_{1x}+\frac{g_x}{g}z_1)^2+\frac{1}{g^2}+2\omega(\varphi-1)z_{1\varphi}^2]\frac{g}{z_{1\varphi}}dxd\varphi+\iint\limits_{\Delta_2}[(z_{2x}+\frac{g_x}{g}z_2)^2+\frac{1}{g^2}]\frac{g}{z_{2\varphi}}dxd\varphi, \tag{8}$$

где $\Delta_1=(0<x<a,1<\varphi<C)$, $\Delta_2=(0<x<a,\ 0<\varphi<1)$, $z_1(x,\varphi)$ и $z_2(x,\varphi)$ - функции определенные соответственно в $\overline{\Delta_1}$ и $\overline{\Delta_2}$ и являющиеся решениями уравнений: $\varphi_1(x,z)-\varphi_1=0,\ \varphi_2(x,z)-\varphi_2=0$, $\psi_1(x,z\cdot g(x))=\varphi_1(x,z),\ \psi_2(x,z\cdot g(x))=\varphi$.

Функционал (8) будем минимизировать на множестве допустимых функций:

$$G_z=\{(z_1,z_2):z_1\in C^1(\overline{\Delta_1}),z_2\in C^1(\overline{\Delta_2}),z_2(x,0)=0,z_1(x,c)=1;z_1(x,1)=z_2(x,1),$$
$$\min_{(x,\varphi)\in\overline{\Delta_1}} z_{1\varphi}>0,\ \min_{(x,\varphi)\in\overline{\Delta_2}} z_{2\varphi}>0\ \}. \tag{9}$$

Обозначим через $w_1(x,\varphi),w_2(x,\varphi)$ - функции, соответствующие классическому решению (ψ_1,ψ_2,γ) задачи (1) – (4) и можно считать, что $(w_1,w_2)\in G_z$. Применим теперь формулу Фридрихса [1].

$$I_1(z_z,z_2)=I_1(w_1,w_2)+\frac{d}{d\varepsilon}I_1(z_{1\varepsilon},z_{2\varepsilon})\Big|_{\varepsilon=0}+\int_0^1(1-\varepsilon)\frac{d^2}{d\varepsilon^2}I_1(z_{1\varepsilon},z_{2\varepsilon})d\varepsilon\ , \tag{10}$$

где

$$\frac{d^2I_1}{d\varepsilon^2}(z_{1\varepsilon},z_{2\varepsilon})=2\iint_{\Delta_1}\left\{[z_{1\varepsilon}(\delta z_{1x}+\frac{g_x}{g}\delta z_1)-\delta z_{1\varphi}(z_{1x\varepsilon}+\frac{g_x}{g}z_{1\varepsilon})]^2+\frac{\delta z_{1\varphi}^2}{g^2}\right\}\frac{g}{z_{1\varphi\varepsilon}^3}dxd\varphi+$$
$$+2\iint_{\Delta_2}\left\{[z_{2\varepsilon}(\delta z_{2x}+\frac{g_x}{g}\delta z_{21})-\delta z_{2\varphi}(z_{2x\varepsilon}+\frac{g_x}{g}z_{2\varepsilon})]^2+\frac{\delta z_{2\varphi}^2}{g^2}\right\}\frac{g}{z_{2\varphi\varepsilon}^3}dxd\varphi \tag{11}$$

$z_{1\varepsilon}=w_1+\varepsilon(z_1-w_1),\ z_{2\varepsilon}=w_2+\varepsilon(z_2-w_2),\ \delta z_1=z_1-w_1,\delta z_2=z_2-w_2,0\le\varepsilon\le1,$ z_1,z_2 - произвольная пара из G_z. Тогда получим $I_1(w_1,w_2)\le I_1(z_1,z_2)$.

Лемма 4. Пара $(w_1,w_2)\in G_z$, соответствующая решению задачи (1) - (5), доставляет наименьшее значение функционалу (8) на множестве (9).

Будем минимизировать функционал (8) на множестве (9) при помощи сумм:

$$z_{1n}(x,\varphi)=1+\frac{c-\varphi}{c-1}\sum_{k=0}^{L}\sum_{j=0}^{M_j}b_{kj}x^j\varphi^k,\ z_{2n}(x,\varphi)=\sum_{k=1}^{L}\sum_{j=0}^{M_j}a_{kj}x^j\varphi^k\ , \tag{12}$$

где $n=\sup(j+M_j)$ при $0\le j\le L$. Включение $(z_{1n}z_{2n})\in G_z$ выделяет в евклидовом пространстве E_r коэффициентов a_{kj},b_{kj} область допустимости G_r где $r=\sum_{k=0}^{L}(1+2M_k),\ G_2=G_r^+\cap E_0,G_r^+=G_r^1\oplus G_r^2,\mathrm{E}_0=E_0^0\oplus E_1^0\oplus...\oplus E_L^0$.

$$G_r^1=\left\{b_{kj}:\min_{(x,\varphi)\in\overline{\Delta_1}} z_{1n\varphi}>0\right\},\quad G_r^2=\left\{a_{kj}:\min_{(x,\varphi)\in\overline{\Delta_2}} z_{2n\varphi}>0\right\},$$

$$E_0^0:\sum_{k=1}^{M_0}a_{ko}=\sum_{k=0}^{M_0}b_{ko}+1;\ \ E_j^0:\sum_{k=1}^{M_j}a_{kj}=\sum_{k=o}^{M_j}b_{\mathrm{kj}},\ j=1,2,...,L;\ L=\max_{0\le k\le M}L_k$$

Неизвестные коэффициенты $a_{kj};b_{kj}$ определяются из нелинейной системы Ритца [3,5]:

Теорема 2. Функция $I_2(a_{kj},b_{kj})$ принимает свое наименьшее значение в некоторой внутренней точке множества G_r, лежащей на конечном расстоянии от начала координат. При этом нелинейная система Ритца имеет по крайней мере одно решение на множестве G_r.

6. Сходимость приближений Ритца. Решив систему Ритца при каждом фиксированном n, можно затем построить последовательность приближений (12) в виде $z_{1n}(x,\varphi)=z_{1n}^*$, $z_{2n}(x,\varphi)=z_{2n}^*$.

Лемма 5. Приближенная (12), построенные по методу Ритца, образуют минимизирующую последовательность для функционала (8) на множестве (9).

Перейдем теперь непосредственно к доказательству сходимости приближений Ритца (12).

Лемма 6. Пусть $w_1(x,\varphi)\in W_2^l(\Delta_1), w_2(x,\varphi)\in W_2^l(\Delta_2),$ где $l\geq 4$. Тогда можно построить допустимые многочлены:

$$u_{1n}=1+\frac{c-\varphi}{c-1}\sum_{j=0}^{L}\sum_{k=0}^{M_j}b_{kj}x^j\varphi^k,\ u_{2n}=\sum_{j=0}^{L}\sum_{k=1}^{M_j}a_{kj}x^j\varphi^k,$$

такие, что

$$\|w_1-u_{1n}\|^2_{w_2^1(\Delta_1)}=\mathrm{O}(\frac{1}{n^{2(l-1)}}),\ \|w_2-u_{2n}\|^2=\mathrm{O}(\frac{1}{n^{2(l-1)}}).$$

Доказательство. В основу доказательства положена методика работы [6].

Теорема 3. Пусть выполнены все предположения теоремы 1 и леммы 6. Тогда последовательность приближений (12), построенные по методу Ритца сходится к точному решению w_1,w_2 по норме в $C(\overline{\Delta_1}),C(\overline{\Delta_2})$.

Замечание. Предложенный метод исследования задачи может быть использован при изучении морских проливов. В задачах управления свободной границей γ может применяться нечеткая логика.

Литература

1. Миненко А.С. Вариационные задачи со свободной границей. – Киев: Наукова думка, 2005. – 354 с.

2. Миненко А.С., Шевченко А.И. Методы исследования нелинейных математических моделей. – Киев: Наукова думка, 2012. – 130 с.

3. Миненко А.С. Осесимметричное течение со свободной границей // Укр. мат. журнал. – 1995. – **47**, №4. – С. 477 – 487.

4. Friedrich K.O Ube rein Minimumproblem fur Potential stromungen mit freiem Rande // Math. Ann. – 1933. – **109**, №1. – P. 60 – 82.

5. Данилюк И.И., Миненко А.С. О методе Ритца в одной нелинейной задаче со свободной границей // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1978. – №4. – С. 291 – 294.

6. Миненко А.С. О минимизации одного интегрального функционала методом Ритца // Укр. мат. журнал. 2006. – **58**, №10. – С. 1358 – 1394.

ДонНТУ, Институт информатики
и искусственного интеллекта,
83050, г.Донецк, пр.Б.Хмельницкого, 84
Тел. (062) 304–92–58
Факс (062) 337–78–66
e-mail:minenko@iai.donetsk.ua

Поступила в редакцию