ОЦЕНКА СТРАТЕГИЙ ОРГАНИЗАЦИИ РЕМОНТНЫХ РАБОТ ДЛЯ ПРОМЫШЛЕННОГО АУТСОРСИНГА ОБОРУДОВАНИЯ

Румянцев Николай Васильевич, д.э.н., профессор, зав. кафедрой экономической кибернетики, Донецкий национальный технический университет

Медведева Марина Ивановна, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры математики и математических методов в экономике, Донецкий национальный университет

АННОТАЦИЯ. *В работе рассматриваются две возможные схемы организации ремонтных работ производственного оборудования гибкой логистической системы с переналадкой. Данная работа посвящена построению и анализу вероятностных моделей обслуживания и неидентичной переналадкой, т.е. время переналадки оборудования после восстановления системы и в процессе бесперебойной работы различны. Такие модели позволяют выбрать оптимальную стратегию функционирования, как основного, так и вспомогательного материального потока логистической системы, принимать решение о выводе ремонтных служб либо на аутсорсинг, либо на инсорсинг.*

Вопросы повышения конкурентоспособности предприятия, возможности своевременной реакции на изменяющуюся конъюнктуру рынка, стремление предприятия адаптироваться к меняющейся внешней среде обуславливают актуальность производственной логистики. Чаще всего можно говорить о том, что состояния внешней среды в будущих периодах времени Логистика производства занимается проблемами регулирования производственного процесса, а именно вопросами комплексного планирования реализации, управления, координации и контроля движения материальных потоков на пути его движения от склада материальных ресурсов до склада готовой продукции. Использование логистической концепции в управление хозяйственно-экономической деятельностью предприятия позволяет предприятию повысить конкурентоспособность своей продукции и расширить рынки ее сбыта. Однако кроме снижения логистических затрат, любое предприятие стремится снизить затраты на непрофильные функции и сконцентрироваться на приоритетных и конкурентоспособных направлениях деятельности. Это приводит к необходимости совершенствования инструментария управления предприятием, разработке новых форм хозяйствования. Стратегическое планирование производства, направленное на снижение издержек, уменьшение неэффективных непрофильных функций требует принятия управленческого решения о передаче части (как правило, не основных) производственных процессов и задач на аутсорсинг. При этом предполагается, что затраты аутсорсера на выполнение этих задач будут меньше, а качество, как минимум, такое же. Поэтому для оптимальной организации работы предприятия необходимо использовать гибкие производственно-логистические системы и при необходимости использовать вероятностные методы [1]**.** Анализ работ [2-4] и др., посвященных вопросам принятия решения о целесообразности использования аутсорсинга, показал, что на сегодняшней день недостаточно разработаны экономико-математические методы выбора стратегии поведения в отношении аутсорсинга.

Данная работа посвящена построению и анализу вероятностных моделей обслуживания производственного оборудования. В отличие от раннее исследовавшихся моделей [5-8], в данной работе рассматриваются системы с неидентичной переналадкой, т.е. интенсивности переналадки после восстановления системы и в процессе бесперебойной работы оборудования различны. Такие модели позволяют выбрать оптимальную стратегию функционирования, как основного, так и вспомогательного материального потока логистической системы, принимать решение о выводе ремонтных служб на аутсорсинг или инсорсинг.

Рассмотрим две схемы организации ремонтных работ промышленного оборудования.

<u>СХЕМА 1.</u> Пусть имеется производственно-экономическая система, которая может быть описана с помощью одноканальной системы массового обслуживания разомкнутого типа с простейшим входным потоком, интенсивность которого $\lambda > 0$. Оборудование независимо друг от друга обслуживают две бригады. При этом одна бригада осуществляет переналадку оборудования, вторая – его профилактику и ремонт. Предполагается, что время обслуживания (обработки) поступившего заказа имеет показательное распределение с параметром $\mu > 0$. После обслуживания всех заказов, находящихся в системе, оборудование немедленно отключается и переходит в состояние свободен-неготов; при поступлении нового заказа оборудование проходит переналадку на выпуск новой партии, после чего начинается выполнение поступившего заказа. Длительность переналадки имеет показательный закон распределения с параметром $\nu > 0$.

Предполагается, что выход оборудования из строя может произойти только во время выполнения заказа, т.е. если оно находится в рабочем состоянии. Момент выхода из строя имеет показательный закон распределения с параметром $\chi > 0$. Если в момент выхода из строя в системе была заявка, то она теряется. После того, как было выполнено последнее требование и в системе нет новых заявок, начинается профилактика оборудования, длительность которой имеет показательный закон распределения с параметром $\psi_1 > 0$. Время ремонта или время восстановления оборудования имеет показательный закон распределения с параметром $\psi_2 > 0$. Если после восстановления оборудования, в системе нет заявок, то оно переходит в состояние свободен-неготов. Если же в системе есть заявки, то для ее выполнения требуется переналадка, интенсивность которой υ_1. Следовательно, рассматривается система с неидентичной переналадкой.

Случайный процесс поступления заявок и их обслуживания может быть описан следующими возможными состояниями:

$(0, k)$ – прибор вышел из строя и восстанавливается, в системе $k \geq 0$ требований;

$(1, 0)$ – прибор свободен–неготов;

$(1, k)$ – прибор работает и в системе $k \geq 1$ требований;

$(0^*, k)$ – проводится переналадка оборудования и в системе $k \geq 1$ требований;

$\left(2, 0^{*}, k\right)$ проводится профилактика и переналадка оборудования и в системе $k \geq 1$ требований;

$\left(2, k\right)$ – проводится профилактика и в системе $k \geq 0$ требований:

$\left(0, 0^{*}, k\right)$ – проводится переналадка оборудования после его ремонта и в системе $k \geq 1$ требований.

Граф состояний описанной системы имеет вид (см. рис. 1).

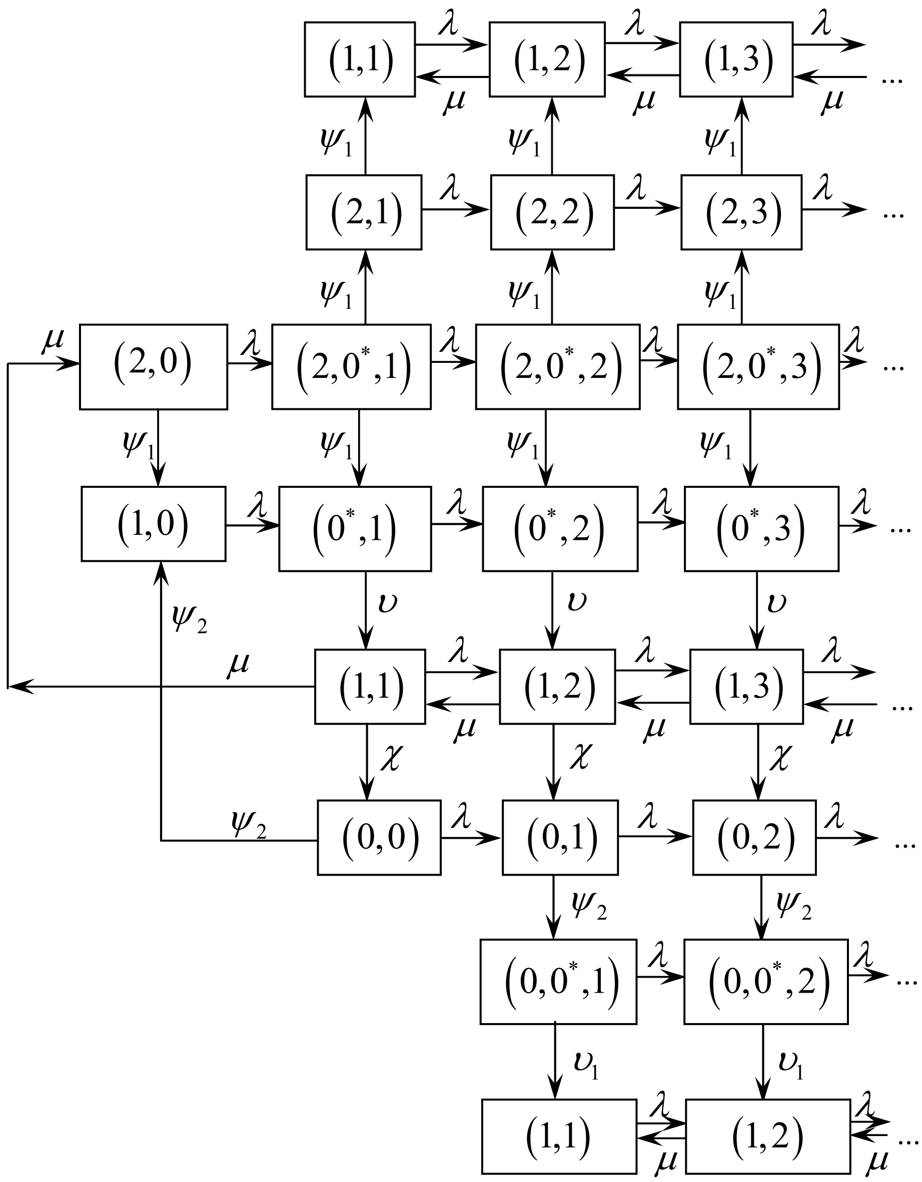

Рис. 1. Граф состояний системы массового обслуживания с ненадежным оборудованием

Найдем основные характеристики рассматриваемой системы– распределения совместных вероятностей того, что оборудование находится в определенном состоянии (переналадка, профилактика, восстановление или работа) и в системе имеется определенное количество требований. Для этого рассмотрим стационарный случайный процесс $\xi\left(t\right)$, описывающий состояние системы в момент времени t. Его фазовое пространство имеет вид:

$$E=\left\{\left(0,\,k\right),\left(1,\,k\right),\left(2,\,k\right),\,k\geq 0;\left(0^{*},\,l\right),\left(2,\,0^{*},\,l\right),\,l\geq 1;\left(0,\,0^{*},\,m\right),\,m\geq 1\right\}.$$

Рассмотрим стационарные вероятности состояний процесса $\xi\left(t\right)$:

$P_{ik}=\mathrm{P}\left\{\xi\left(t\right)=\left(i,\,k\right)\right\},\; i=0,1,2;\,k\geq 0$, $P_{0^{*}k}=\mathrm{P}\left\{\xi\left(t\right)=\left(0^{*},\,k\right)\right\},\; k\geq 1$,

$P_{20^{*}k}=\mathrm{P}\left\{\xi\left(t\right)=\left(2\,0^{*},\,k\right)\right\},\; k\geq 1$, $P_{00^{*}k}=\mathrm{P}\left\{\xi\left(t\right)=\left(0{,}0^{*},\,k\right)\right\},\; k\geq 1$.

С помощью графа состояний процесса $\xi\left(t\right)$, составляем системы однородных бесконечных алгебраических уравнений для вероятностей $P_{ik},\; i=0,1,2;\,k\geq 0$, $P_{0^{*}k},\; k\geq 1$, $P_{20^{*}k},\; k\geq 1$, $P_{00^{*}k},\; k\geq 1$:

$$\begin{cases}-\left(\lambda+\upsilon\right)P_{0^{*}1}+\lambda P_{10}+\psi_{1}P_{20^{*}k}=0,\\ -\left(\lambda+\upsilon\right)P_{0^{*}k}+\lambda P_{0^{*},k-1}+\psi_{1}P_{20^{*}k}=0,\; k>1;\end{cases} \tag{1}$$

$$\begin{cases}-\left(\lambda+\psi_{2}\right)P_{00}+\chi P_{11}=0,\\ -\left(\lambda+\psi_{2}\right)P_{0k}+\lambda P_{0,k-1}+\chi P_{1,k+1}=0,\,k\geq 1;\end{cases} \tag{2}$$

$$\begin{cases}-\lambda P_{10}+\psi_{1}P_{20}+\psi_{2}P_{00}=0,\\ -\left(\lambda+\mu+\chi\right)P_{11}+\upsilon P_{0^{*}1}+\mu P_{12}+\psi_{1}P_{21}+\upsilon_{1}P_{0^{*}01}=0,\\ -\left(\lambda+\mu+\chi\right)P_{1k}+\lambda P_{1,k-1}+\upsilon P_{0^{*}k}+\mu P_{1,k+1}+\psi_{1}P_{2k}+\upsilon_{1}P_{0^{*}0k}=0,\,k\geq 2;\end{cases} \tag{3}$$

$$\begin{cases}-\left(\lambda+\psi_{1}\right)P_{20}+\mu P_{11}=0,\\ -\left(\lambda+\psi_{1}\right)P_{21}+\upsilon P_{20^{*}1}=0,\\ -\left(\lambda+\psi_{1}\right)P_{2k}+\upsilon P_{20^{*}k}+\lambda P_{2,k-1}=0,\,k\geq 2;\end{cases} \tag{4}$$

$$\begin{cases}-\left(\lambda+\upsilon+\psi_{1}\right)P_{20^{*}1}+\lambda P_{20}=0,\\ -\left(\lambda+\upsilon+\psi_{1}\right)P_{20^{*}k}+\lambda P_{20^{*},k-1}=0,\,k\geq 2;\end{cases} \tag{5}$$

$$\begin{cases}-\left(\lambda+\upsilon_{1}\right)P_{00^{*}1}+\psi_{2}P_{01}=0,\\ -\left(\lambda+\upsilon_{1}\right)P_{00^{*}k}+\lambda P_{00^{*},k-1}+\psi_{2}P_{0k}=0,\,k\geq 2.\end{cases} \tag{6}$$

Для решения систем уравнений (1)-(6) введем в рассмотрение производящие функции вида:

$$a_0(z)=\sum_{k\ge 0}P_{0k}z^k,\ a_0^*(z)=\sum_{k\ge 1}P_{0^*k}z^k,\ a_1(z)=\sum_{k\ge 0}P_{1k}z^k,$$

$$a_2(z)=\sum_{k\ge 0}P_{2k}z^k,\ a_1^*(z)=\sum_{k\ge 1}P_{00^*k}z^k,\ a_2^*(z)=\sum_{k\ge 1}P_{20^*k}z^k,$$

а так же параметры

$$\rho=\frac{\lambda}{\mu},\qquad \delta=\frac{\upsilon}{\mu},\qquad \delta_1=\frac{\upsilon_1}{\mu}\qquad \beta_1=\frac{\psi_1}{\mu},\qquad \beta_2=\frac{\psi_2}{\mu},\qquad \gamma=\frac{\chi}{\mu}.$$

Умножив уравнения системы (1) на z, z^k, $k>1$, суммируем их по k. Тогда после несложных преобразований, с учетом введенных обозначений, получаем уравнение

$$(\rho+\delta-\rho z)a_0^*(z)-\beta_1 a_2^*(z)=\rho z P_{10}. \tag{7}$$

Аналогично из систем бесконечных линейных уравнений (2)-(6) соответственно получаем

$$z(\rho+\beta_2-\rho z)a_0(z)-\gamma a_1(z)=-\gamma P_{10}, \tag{7}$$

$$z(\rho+\beta_2-\rho z)a_0(z)-\gamma a_1(z)=-\gamma P_{10}, \tag{8}$$

$$\begin{gathered}\left(\rho z^2-z(1+\rho+\gamma)+1\right)a_1(z)+\delta z a_0^*(z)+\beta_1 z a_2(z)+\delta_1 z a_1^*(z)=\\=\left(\rho z^2-z(1+\gamma)+1\right)P_{10}+zP_{11}-\beta_2 z P_{00},\end{gathered} \tag{9}$$

$$(\rho z-\rho-\beta_1)a_2(z)+\delta a_2^*(z)=\rho z P_{20}-P_{11}, \tag{10}$$

$$(\rho+\delta+\beta_1-\rho z)a_2^*(z)=\rho z P_{20}, \tag{11}$$

$$(\rho z-\rho-\delta_1)a_1^*(z)+\beta_2 a_0(z)=\beta_2 P_{00}. \tag{12}$$

Выразим неизвестные вероятности P_{00}, P_{11} и P_{20} через P_{10}. Для этого составим систему из первых уравнений систем (2), (3) и (4), предварительно проведя несложные преобразования. Получаем следующую систему алгебраических уравнений:

$$\begin{cases}-(\rho+\beta_2)P_{00}+\gamma P_{11}=0,\\-\rho P_{10}+\beta_1 P_{20}+\beta_2 P_{00}=0,\\-(\rho+\beta_1)P_{20}+P_{11}=0.\end{cases} \tag{13}$$

Обозначим

$$C = \frac{\rho}{\beta_1(\rho+\beta_2)+\gamma\beta_2(\rho+\beta_1)}.$$

Тогда несложно показать, что решение системы алгебраических уравнений (13) относительно P_{10} имеет вид:

$$\begin{cases} P_{11} = C(\rho+\beta_1)(\rho+\beta_2)P_{10}, & (14)\\ P_{00} = \gamma C(\rho+\beta_1)P_{10}, & (15)\\ P_{20} = C(\rho+\beta_2)P_{10}. & (16)\end{cases}$$

Подставив найденные значения вероятностей P_{11}, P_{00} и P_{20} в соотношения (7), (9)-(12), соответственно получаем

$$(\rho+\delta-\rho z)a_0^*(z)-\beta_1 a_2^*(z)=\rho z P_{10}, \tag{17}$$

$$\begin{gathered}\left(\rho z^2 - z(1+\rho+\gamma)+1\right)a_1(z)+\delta z a_0^*(z)+\beta_1 z a_2(z)+\delta_1 z a_1^*(z)= \\ =\left[\rho z^2 - z(1+\gamma)+1+Cz(\rho+\beta_1)\cdot(\rho+\beta_2-\gamma\beta_2)\right]P_{10},\end{gathered} \tag{18}$$

$$(\rho z-\rho-\beta_1)a_2(z)=C(\rho+\beta_2)(\rho z-\rho-\beta_1)P_{10}-\delta a_2^*(z), \tag{19}$$

$$(\rho+\delta+\beta_1-\rho z)a_2^*(z)=C\rho z(\rho+\beta_2)P_{10}, \tag{20}$$

$$(\rho z-\rho-\delta_1)a_2^*(z)+\beta_2 a_0(z)=C\gamma\beta_2(\rho+\beta_1)P_{10}. \tag{21}$$

Для простоты изложения, введем следующие обозначения:

$d_1(z)=z(\rho+\beta_2-\rho z)$,

$d_2(z)=\rho z^2 - z(1+\rho+\gamma)+1$,

$d_3(z)=\rho+\delta-\rho z$,

$d_4(z)=\beta_1 a_2^*(z)+\rho z P_{10}$,

$d_5(z)=\left[\rho z^2 - z(1+\gamma)+1+Cz(\rho+\beta_1)(\rho+\beta_2-\gamma\beta_2)\right]P_{10}-\beta_1 z a_2(z)$,

$d_6(z)=\rho z-\rho-\delta_1$.

Из равенств (8), (17), (18) и (21) составляем новую систему алгебраических уравнений, которая, с учетом введенных обозначений, имеет вид:

$$\begin{cases} d_1(z)a_0(z)-\gamma a_1(z)=-\gamma P_{10}, \\ d_2(z)a_1(z)+\delta z a_0^*(z)+\delta_1 z a_1^*(z)=d_5(z), \\ d_3(z)a_0^*(z)-\beta_2 a_0(z)=d_4(z), \\ d_6(z)a_1^*(z)+\beta_2 a_0(z)=C_1, \end{cases} \tag{22}$$

где $C_1 = C\gamma\beta_2(\rho+\beta_1)P_{10}$.

Решая систему алгебраических уравнений (22) относительно стационарной вероятности P_{10}, можно выразить производящие функции $a_0(z)$, $a_0^*(z)$ и $a_1(z)$ через P_{10}.

Для определения P_{10}, а затем и вероятностей P_{11}, P_{00} и P_{20} воспользуемся условием нормировки

$$a_0(1)+a_0^*(1)+a_1(1)+a_1^*(1)+a_2(1)+a_2^*(1)=1.$$

Значения производящих функций $a_2(z)$ и $a_2^*(z)$ в точке $z=1$ находим непосредственно из равенств (19) и (20). В частности из равенства (20) находим

$$a_2^*(1)=\frac{C\rho(\rho+\beta_2)}{\delta+\beta_1}P_{10}. \tag{23}$$

Из равенств (19) и (23) следует, что

$$a_2(1)=C(\rho+\beta_2)\left(1+\frac{\delta\rho}{\beta_1(\delta+\beta_1)}\right)P_{10}. \tag{24}$$

Теперь из первого уравнения системы (22) при $z=1$ получаем следующее соотношение

$$a_1(1)=P_{10}+\frac{\beta_2}{\gamma}a_0(1). \tag{25}$$

Из третьего уравнения системы (22) при $z=1$ получаем соотношение вида:

$$a_0^*(1)=\frac{d_4(1)}{\delta}. \tag{26}$$

Наконец из четвертого уравнения системы (22) при $z=1$ следует справедливость равенства

$$a_1^*(1)=\frac{1}{\delta_1}\left(\beta_2 a_0(1)-A\right). \qquad (27)$$

Подставив соотношения (26) и (27) в условие нормировки, после несложных преобразований получаем

$$P_{10}+\frac{d_4(1)}{\delta}-\frac{A}{\delta_1}+\left(1+\frac{\beta_2}{\gamma}+\frac{\beta_2}{\delta_1}\right)a_0(1)+a_2(1)+a_2^*(1)=1. \qquad (28)$$

Таким образом, для вычисления стационарной вероятности P_{10} достаточно найти значение производящей функции

Из системы (22) находим:

$$a_0(z)=\gamma\frac{d_6(z)\left[d_3(z)d_5(z)-d_2(z)d_3(z)P_{10}-\delta z d_4(z)d_6\right]-\delta_1 z d_3(z)A(z)}{d_3(z)\left[d_1(z)d_2(z)d_6(z)-\gamma\beta_2\delta_1 z\right]}.$$

Тогда, можно показать справедливость следующего равенства

$$a_0(1)=\frac{\delta_1\rho\gamma\left[P_{10}+\frac{d_4(1)}{\delta}+a_2^*(1)+a_2(1)-\frac{A}{\delta_1}\right]}{\beta_2\delta_1(1+\gamma)-\rho\left(\gamma\delta_1+\beta_2\left(\delta_1+\gamma\right)\right)}.. \qquad (29)$$

Из равенства (29) находим условие существования стационарных вероятностей состояний системы, а именно

$$\rho<\frac{\beta_2\delta_1(1+\gamma)}{\gamma\delta_1+\beta_2\left(\delta_1+\gamma\right)}. \qquad (30)$$

Наконец, используя равенства (28) и (29), выписываем условие нормировки:

$$\left[P_{10}+\frac{d_4(1)}{\delta}-\frac{A}{\delta_1}+a_2(1)+a_2^*(1)\right]\left[1+\frac{\left[\gamma\delta_1+\beta_2\left(\delta+\gamma\right)\right]\rho\delta}{\beta_2\delta_1(1+\gamma)-\rho\left(\gamma\delta_1+\beta_2\left(\delta_1+\gamma\right)\right)}\right]=1.$$

Наконец, подставив в последнее равенство найденные выше значения производящих функций $a_2(1)$ и $a_2^*(1)$, находим

$$P_{10}=\frac{1}{B(1+K)},$$

где

$$B=\frac{1}{\delta\delta_1\beta_1(\delta+\beta_1)}\Big[\beta_1(\delta+\beta_1)\big(\delta_1(\delta+\rho)+C\delta\delta_1(\rho+\beta_2)-C\gamma\delta\beta_2(\rho+\beta_1)\big)+$$
$$+C\rho\delta(\rho+\beta_2)\big(\delta^2+\beta_1^2+\beta_1\delta\big)\Big]$$

и

$$K=\frac{\big[\gamma\delta_1+\beta_2(\delta+\gamma)\big]\delta\rho}{\beta_2\delta(1+\gamma)-\rho\big(\gamma\delta+\beta_2(\delta+\gamma)\big)}.$$

Схема 2. Рассматривается некоторая производственно-экономическая система, которую можно интерпретировать как одноканальную систему массового обслуживания. Предполагается, что входящий поток заявок является пуассоновским с интенсивностью $\lambda>0$, время обслуживания (обработки) поступившего заказа имеет показательное распределение с параметром $\mu>0$. Выход оборудования из строя может произойти только в рабочем состоянии, т.е. во время обработки заказа. Момент выхода из строя имеет показательный закон распределения с параметром $\chi>0$. Заявка, находящаяся в системе в момент ее выхода из строя, теряется. Время ремонта или время восстановления оборудования также имеет показательный закон распределения, но с параметром $\psi_2>0$. Если после выполнения последнего требования в системе нет новых заявок, то проводится профилактика оборудования. Длительность профилактики имеет показательный закон распределения с параметром $\psi_1>0$. Если после завершения профилактики в системе нет требований на обслуживание, то прибор переходит в состояние «свободен-неготов». При этом поступившие в систему заявки начнут обслуживаться только после переналадки. После восстановления, если в системе нет требований, прибор также уходит на переналадку. Длительность переналадки имеет показательный закон распределения с параметром $\nu>0$.

Обслуживание оборудования занимаются две бригады. При этом одна бригада занимается восстановлением (ремонтом) вышедшего из строя оборудования, вторая бригада, независимо от первой, проводит профилактические работы. Переналадкой оборудования может заниматься как первая, так и вторая бригада. Однако если прибор находится в состоянии профилактики, то переналадку может проводить только первая бригада.

Случайный процесс поступления заявок и их обслуживание может быть описан следующими возможными состояниями, представленными ниже на размеченном графе:

(0) – прибор свободен–неготов;

$(0, k)$ – прибор вышел из строя и восстанавливается, в системе $k \geq 0$ требований;

$(1, 0)$ – прибор свободен–готов;

$(1, k)$ – прибор работает и в системе $k \geq 1$ требований;

$(0^*, k)$ – проводится переналадка оборудования и в системе $k \geq 1$ требований;

$(2, 0^*, k)$ проводится профилактика и переналадка оборудования и в системе $k \geq 1$ требований;

$(2, k)$ – проводится профилактика и в системе $k \geq 0$ требований:

$(0, 0^*, k)$ – проводится переналадка оборудования после его ремонта и в системе $k \geq 1$ требований.

Рассмотрим стационарный случайный процесс $\xi(t)$, описывающий состояние системы в момент времени t и фазовое пространство которого имеет вид:

$$E = \left\{(0); (0, k), (1, k), (2, k), k \geq 0; \left(0^*, l\right), \left(2, 0^*, l\right), l \geq 1\right\}.$$

Рассмотрим стационарные вероятности состояний процесса $\xi(t)$:

$P_0 = \mathrm{P}\{\xi(t) = (0)\}, P_{0^*k} = \mathrm{P}\left\{\xi(t) = \left(0^*, k\right)\right\},\ k \geq 1,$

$P_{ik} = \mathrm{P}\{\xi(t) = (i, k)\},\ i = 0,1,2;\ k \geq 0,\ P_{20^*k} = \mathrm{P}\left\{\xi(t) = \left(2 0^*, k\right)\right\},\ k \geq 1.$

С помощью графа состояний процесса $\xi(t)$ (см. рис. 1), составляем системы однородных бесконечных алгебраических уравнений для вероятностей состояний системы $P_{ik},\ i=0,1,2;\ k\geq 0,\ \ P_{0^*k},\ k\geq 1,\ \ P_{20^*k},\ k\geq 1,\ \ P_0$.

Имеем:

$$\begin{cases} -(\lambda+\upsilon)P_{0^*0}+\psi_2 P_{00}=0, \\ -(\lambda+\upsilon)P_{0^*k}+\lambda P_{0^*,k-1}+\psi_1 P_{20^*k}+\psi_2 P_{0k}=0,\ k\geq 1; \end{cases} \tag{31}$$

$$\begin{cases} -(\lambda+\psi_2)P_{00}+\chi P_{11}=0, \\ -(\lambda+\psi_2)P_{0k}+\lambda P_{0,k-1}+\chi P_{1,k+1}=0,\ k\geq 1; \end{cases} \tag{32}$$

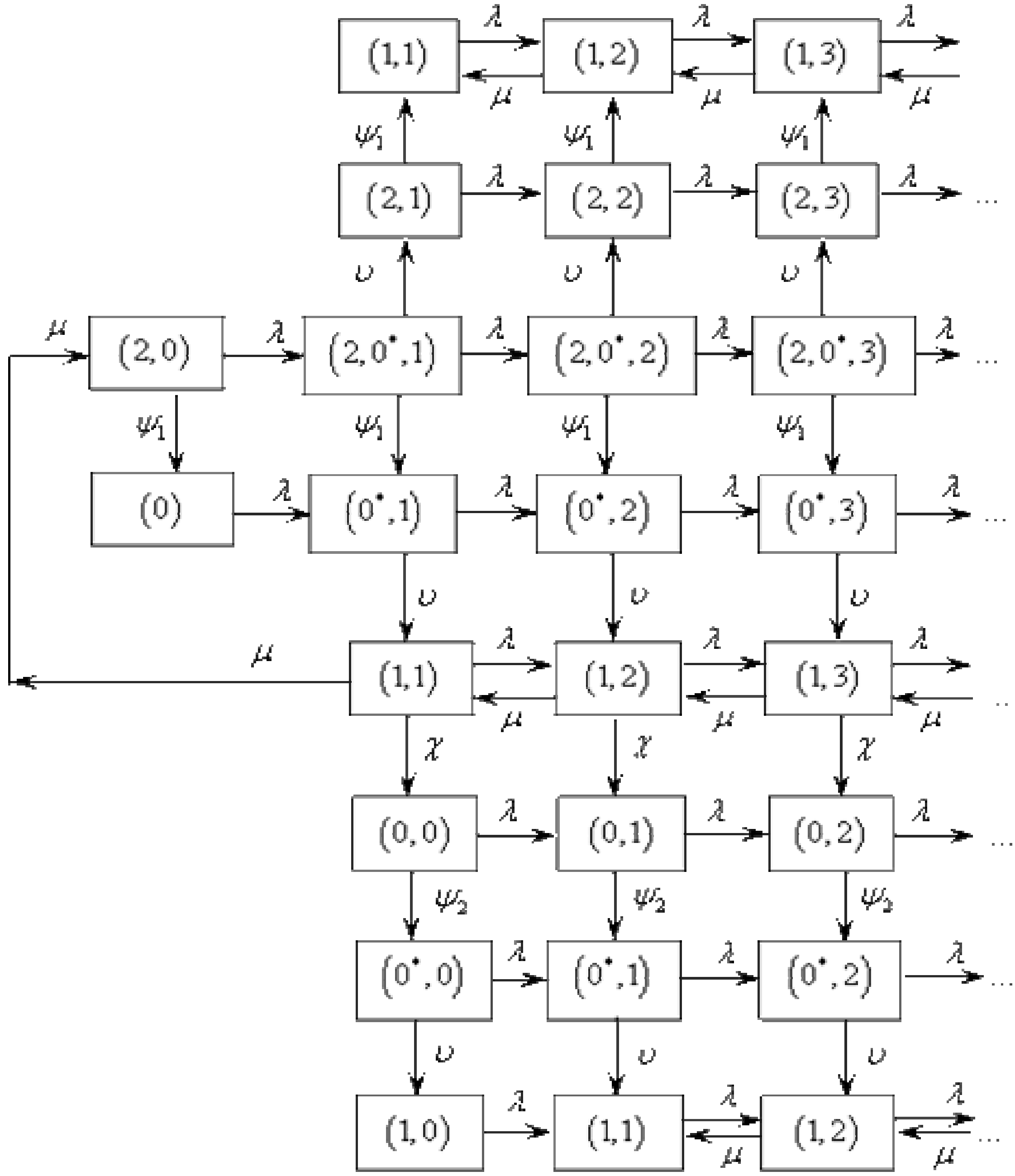

Рис. 2. Граф состояний системы массового обслуживания с ненадежным оборудованием

$$\begin{cases} -\lambda P_{10} + \upsilon P_{0^*0} = 0, \\ -(\lambda + \mu + \chi) P_{11} + \lambda P_{10} + \upsilon P_{0^*1} + \psi_1 P_{21} + + \mu P_{12} = 0, \\ -(\lambda + \mu + \chi) P_{1k} + \lambda P_{1,k-1} + \upsilon P_{0^*k} + \psi_1 P_{2k} + \mu P_{1,k+1} = 0,\ k \ge 2; \end{cases} \tag{33}$$

$$\begin{cases} -(\lambda + \psi_1) P_{20} + \mu P_{11} = 0, \\ -(\lambda + \psi_1) P_{21} + \upsilon P_{20^*1} = 0, \\ -(\lambda + \psi_1) P_{2k} + \upsilon P_{20^*k} + \lambda P_{2,k-1} = 0,\ k \ge 2; \end{cases} \tag{34}$$

$$\begin{cases} -(\lambda + \upsilon + \psi_1) P_{20^*1} + \lambda P_{20} = 0, \\ -(\lambda + \upsilon + \psi_1) P_{20^*k} + \lambda P_{20^*,k-1} = 0,\ k \ge 2; \end{cases} \tag{35}$$

$$-\lambda P_0 + \psi_1 P_{20} = 0. \tag{36}$$

Решения систем уравнений (31)-(35) и уравнения (36) найдем с помощью следующих производящих функций

$$a_0(z) = \sum_{k\ge 0} P_{0k} z^k,\ a_0^*(z) = \sum_{k\ge 1} P_{0^*k} z^k,\ a_1(z) = \sum_{k\ge 0} P_{1k} z^k,\ a_2(z) = \sum_{k\ge 0} P_{2k} z^k,$$

$$a_2^*(z) = \sum_{k\ge 1} P_{20^*k} z^k.$$

Кроме того, введем обозначения

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu}, \qquad \delta = \frac{\upsilon}{\mu}, \qquad \beta_1 = \frac{\psi_1}{\mu}, \qquad \beta_2 = \frac{\psi_2}{\mu}, \qquad \gamma = \frac{\chi}{\mu}.$$

Если уравнения системы (31) последовательно умножить на $z, z^2, ..., z^k, ...$ и полученные уравнения просуммировать по k, то после несложных преобразований, получим уравнение

$$(\rho + \delta - \rho z) a_0^*(z) - \beta_1 a_2^*(z) - \beta_2 a_0(z) = \rho z P_0. \tag{37}$$

Аналогично из систем бесконечных линейных уравнений (32)-(35) соответственно получаем соотношения

$$z(\rho + \beta_2 - \rho z) a_0(z) - \gamma a_1(z) = -\gamma P_{10}, \tag{38}$$

$$\begin{aligned} &(\rho z^2 - z(1 + \rho + \gamma) + 1) a_1(z) + \delta z a_0^*(z) + \beta_1 z a_2(z) = \\ &= (1 - z - \gamma z) P_{10} + z P_{11} - \beta_1 z P_{20}, \end{aligned} \tag{39}$$

$$\left(\rho z-\rho-\beta_1\right)a_2\left(z\right)+\delta a_2^*\left(z\right)=\rho zP_{20}-P_{11}, \tag{40}$$

$$\left(\rho+\delta+\beta_1-\rho z\right)a_2^*\left(z\right)=\rho zP_{20}. \tag{41}$$

Равенства(37)-(41) содержат неизвестные вероятности P_{10}, P_0, P_{11} и P_{20}. Выразим вероятности P_0, P_{11} и P_{20} через P_{10}. Для этого из первых уравнений систем (31)-(34) и уравнения (36) составим новую систему уравнений:

$$\begin{cases} -\left(\rho+\delta\right)P_{0^*0}+\beta_2 P_{00}=0, \\ -\left(\rho+\beta_2\right)P_{00}+\gamma P_{11}=0, \\ -\rho P_{10}+\delta P_{0^*0}=0, \\ -\left(\rho+\beta_1\right)P_{20}+P_{11}=0, \\ -\rho P_0+\beta_1 P_{20}=0. \end{cases} \tag{42}$$

Решение системы уравнений (42) относительно вероятностей P_0, P_{11} и P_{20} имеет вид:

$$\begin{cases} P_{10}=\dfrac{\delta\beta_2\gamma\left(\beta_1+\rho\right)}{\beta_1\left(\delta+\rho\right)\left(\beta_2+\rho\right)}P_0, & (43) \\ P_{11}=\dfrac{\rho\left(\rho+\beta_1\right)}{\beta_1}P_0, & (44) \\ P_{20}=\dfrac{\rho}{\beta_1}P_0. & (45) \end{cases}$$

Для нахождения производящих функций $a_0\left(z\right), a_0^*, a_1\left(z\right)$, преобразуем равенства (38)-(41) с учетом соотношений (43)-(45).

Из равенств (38) и (43) находим

$$z\left(\rho+\beta_2-\rho z\right)a_0\left(z\right)-\gamma a_1\left(z\right)=-\frac{\delta\beta_2\gamma^2\left(\rho+\beta_1\right)}{\beta_1\left(\rho+\delta\right)\left(\rho+\beta_2\right)}P_0. \tag{46}$$

Из равенств (39) и (43)-(45) следует, что

$$\begin{gathered} \left(\rho z^2-z\left(1+\rho+\gamma\right)+1\right)a_1\left(z\right)+\delta z a_0^*\left(z\right)+\beta_1 z a_2\left(z\right)= \\ =\frac{1}{\beta_1}\left[\rho z\left(\rho+2\beta_1\right)+\frac{\left(1-z-z\gamma\right)\delta\beta_2\gamma\left(\rho+\beta_1\right)}{\left(\rho+\delta\right)\left(\rho+\beta_2\right)}\right]P_0. \end{gathered} \tag{47}$$

Из равенства (31), после подстановки в него равенств (44) и (45), находим

$$\left(\rho z-\rho-\beta_1\right)a_2\left(z\right)+\delta a_2^*\left(z\right)=\frac{\rho}{\beta_1}\left(\rho z-\rho-\beta_1\right)P_0. \tag{48}$$

Наконец равенство (41). После подстановки в него равенства (45) и преобразований принимает вид:

$$a_2^*\left(z\right)=\frac{\rho^2 z}{\beta_1\left(\rho+\delta+\beta_1-\rho z\right)}P_0. \tag{49}$$

Теперь из равенства (48), с учетом равенства (49), находим

$$a_2\left(z\right)=\frac{\rho}{\beta_1}\left[1-\frac{\delta\rho z}{\left(\rho+\delta+\beta_1-\rho z\right)}\right]P_0. \tag{50}$$

Из уравнений (37), (46) и (47)составляем еще одну систему уравнений:

$$\begin{cases}\left(\rho+\delta-\rho z\right)a_0^*\left(z\right)-\beta_2 a_0\left(z\right)=\rho z P_0+\beta_1 a_2^*\left(z\right),\\ z\left(\rho+\beta_2-\rho z\right)a_0\left(z\right)-\gamma a_1\left(z\right)=-\dfrac{\delta\beta_2\gamma^2\left(\rho+\beta_1\right)}{\beta_1\left(\rho+\delta\right)\left(\rho+\beta_2\right)}P_0,\\ \left(\rho z^2-z\left(1+\rho+\gamma\right)+1\right)a_1\left(z\right)+\delta z a_0^*\left(z\right)+\beta_1 z a_2\left(z\right)=\\ =\dfrac{1}{\beta_1}\left[\rho z\left(\rho+2\beta_1\right)+\dfrac{\left(1-z-z\gamma\right)\delta\beta_2\gamma\left(\rho+\beta_1\right)}{\left(\rho+\delta\right)\left(\rho+\beta_2-\gamma\beta_2\right)}\right]P_0.\end{cases} \tag{51}$$

Для упрощения дальнейших рассуждений, вводим обозначения:

$d_1\left(z\right)=z\left(\rho+\beta_2-\rho z\right)$, $d_2\left(z\right)=\rho z^2-z\left(1+\rho+\gamma\right)+1$,

$d_3\left(z\right)=\rho+\delta-\rho z$, $d_4\left(z\right)=\beta_1 a_2^*\left(z\right)+\rho z P_0$,

$$d_5\left(z\right)=\left[\frac{\rho z\left(\rho+2\beta_1\right)}{\beta_1}-\frac{\left(1-z-z\gamma\right)C}{\left(\rho+\delta\right)\left(\rho+\beta_2\right)}\right]P_0-\beta_1 z a_2\left(z\right).$$

где

$$C=-\frac{\delta\beta_2\gamma\left(\rho+\beta_1\right)}{\beta_1\left(\rho+\delta\right)\left(\rho+\beta_2\right)}.$$

Тогда система (51) принимает вид:

$$\begin{cases}d_3\left(z\right)a_0^*\left(z\right)-\beta_2 a_0\left(z\right)=d_4\left(z\right),\\ -\gamma a_1\left(z\right)+d_1\left(z\right)a_0\left(z\right)=\gamma C P_0,\\ d_2\left(z\right)a_1\left(z\right)+\delta z a_0^*\left(z\right)=d_5\left(z\right).\end{cases} \tag{52}$$

Очевидно. Система уравнений (52) позволяет выразить производящие функции $a_0(z)$, $a_0^*(z)$ и $a_1(z)$ через одну стационарную вероятность P_{10}.

Для того, чтобы найти значение стационарной вероятности P_{10}, а, следовательно, и все производящие функции, воспользуемся следующим условием нормировки

$$a_0(1)+a_0^*(1)+a_1(1)+a_1^*(1)+a_2(1)+a_2^*(1)=1.$$

Значения производящих функций $a_2(z)$ и $a_2^*(z)$ в точке $z=1$ находим непосредственно из равенств (49) и (50):

$$a_2^*(1)=\frac{\rho^2 P_0}{\beta_1(\delta+\beta_1)}, \tag{53}$$

$$a_2(1)=\frac{\rho}{\beta_1}\left[1+\frac{\delta\rho}{\beta_1(\delta+\beta_1)}\right]P_0. \tag{54}$$

Кроме того, из первого и второго уравнений системы (52) при $z=1$ соответственно получаем следующие равенства:

$$a_0^*(1)=\frac{d_4(1)+\beta_2 a_0(1)}{d_3(1)}, \tag{55}$$

$$a_1(1)=-CP_0+\frac{\beta_2}{\gamma}a_0(1). \tag{56}$$

После подстановки соотношений (55) и (56) и несложных преобразований. Условие нормировки принимает вид:

$$\left(1+\frac{\beta_2}{\gamma}+\frac{\beta_2}{\delta_1}\right)a_0(1)+(1-C)P_0+\frac{d_4(1)}{\delta}+a_2(1)+a_2^*(1)=1. \tag{57}$$

Таким образом, вычисление стационарной вероятности P_0 сведено к вычислению значения производящей функции $a_0(z)$ в точке $z=1$.

Можно показать, что

$$a_0(1)=\frac{\delta\rho\gamma\left[P_0+\dfrac{d_4(1)}{\delta}-CP_0+a_2(1)+a_2^*(1)\right]}{\beta_2\delta(1+\gamma)-\rho\left(\gamma\delta+\beta_2(\delta+\gamma)\right)}. \tag{58}$$

Из равенства (58) находим условие существования стационарных вероятностей состояний данной системы, а именно

$$\rho < \frac{\beta_2 \delta_1 \left(1+\gamma\right)}{\gamma\delta + \beta_2 \left(\delta + \gamma\right)}. \tag{59}$$

Тогда из условия нормировки (57) находим

$$P_0 = \frac{\beta_2 \delta \left(1+\gamma\right) - \rho\left(\gamma\delta + \beta_2\left(\delta+\gamma\right)\right)}{\beta_2\left(1+\gamma\right)} \times$$

$$\times \frac{\beta_1\left(1+\beta_1\right)}{\beta_1\delta\left(\delta+\beta_1\right)\left(1-C\right) + \rho\left(\delta+\beta_1\right)^2 + \rho^2\left(\delta^2+\beta_1^2+\beta_1\delta\right)}.$$

Найденное значение вероятности P_0, а так же равенства (43)-(45) позволяют найти вероятности всех состояний рассматриваемой системы.

Выводы. Рассмотренные в работе характеристики дают возможность рассчитать основные показатели функционирования анализируемой системы, которые позволят оценить затраты по обслуживанию производственного оборудования. Следовательно, можно оценить целесообразность вывода ремонтных услуг на аутсорсинг.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лысенко Ю.Г., Румянцев Н.В. Повышение экономических показателей предприятия за счет оптимизации логистических процессов/ Ю.Г. Лысенко, Н.В. Румянцев //Міжнародний науковий журнал «Економічна кібернетика».- 2004.- 1-2 (25-26).- С 14-20.
2. Мухина И.С. К вопросу о целесообразности использования аутсорсинга организацией // Корпоративный менеджмент. – 2010. – № 3. – С. 143–148.
3. Первов П.А. Методика обоснования управленческих решений по целесообразности применения на предприятии механизма аутсорсинга / П.А Первов // Вопросы управления. – 2009. – № 11 (140).– С. 55–59.
4. Курбанов А.Х. Методика оценки целесообразности использования аутсорсинга/ А.Х. Курбанов // Современные проблемы науки и образования.

– 2012. – № 1: [электронный ресурс]. – Режим доступа: http://www.science-education.ru/101-5437.

5. Друкер П. Создание новой теории производства// Проблемы теории и практики управления. – 1991. - №1. С 5-11.
6. Промышленная логистика. Логистико-ориентированное управление организационно-экономической устойчивостью промышленных предприятий в рыночной среде / И.Н. Омельченко, А.А. Колобов, А.Ю. Ермаков, А.В. Киреев. Под ред. А.А. Колобова. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1997. – 204с.
7. Медведева М.И. Исследование системы обслуживания с ненадежным прибором и переналадкой в начале периода занятости / Н.В. Румянцев, М.И. Медведева //Науковий журнал «Бізнес Інформ», № 7(1), 2011. – Харків: ФОП Александрова К.М.; ВД «ИНЖЕК», 2011. – С. 10-13.
8. Медведева М.И. Гибкая производственная система с переналадкой, ненадежным оборудованием, восстановлением и профилактикой./ М.И. Медведева//Науковий журнал «Проблеми економіки», № 2, 2012. – Харків: ВД «ИНЖЕК», 2012. – С. 54-58.