

УДК 531.8

© 1994 г. Л. Г. ЛОБАС, В. Г. ХРЕБЕТ

**БИФУРКАЦИЯ РОЖДЕНИЯ ПРЕДЕЛЬНОГО ЦИКЛА  
И ОЦЕНКА ОБЛАСТИ ПРИТЯЖЕНИЯ В МАЯТНИКОВЫХ  
ДВУХЗВЕННЫХ СИСТЕМАХ С КАЧЕНИЕМ**

Бифуркации рождения (генерации) и слияния (аннигиляции) стационарных состояний систем с качением, моделирующих одиночные и двухзвенные пневмоколесные машины, исследовались в [1—3]. В [4—9] с помощью приведения исходной системы к трехмерной системе на центральном многообразии, расщепления последней на одно- и двумерную подсистемы и удержания лишь главных частей нелинейностей (до третьего порядка включительно), выполнен постбифуркационный анализ связанных флаттерных и дивергентных движений в задаче о плоскопараллельном движении связки ведущего и одного ведомого звена. Случай двух последовательно соединенных ведомых звеньев при условии, что точка сцепки первого ведомого звена с ведущим звеном движется прямолинейно с постоянной скоростью  $v$ , рассмотрен в [10]. Основная идея работы связана с приведением уравнений кубического приближения исходной динамической системы к системе Ляпунова специального вида.

В данной работе для уравнений возмущенного движения, содержащих отклонения переменных до третьей степени включительно, методами Ляпунова и Пуанкаре построено приближенное периодическое решение в виде отрезка ряда, члены которого являются периодическими функциями времени. Приведены аппроксимации устойчивого и неустойчивого предельных циклов методом усреднения. Характерные случаи проиллюстрированы графиками.

1. Дифференциальные уравнения плоскопараллельного движения двухзвенника [10]. Пусть  $\vartheta_1, \vartheta_2$  — курсовые углы ведомых звеньев, определяющие их абсолютную ориентацию. Со стороны опорной плоскости на пневмоколеса действуют боковые реакции  $Y_3, Y_4$ , которые в рамках аксиоматики Рокара [11] определяются эмпирически. Примем для них кубические аппроксимации [1, 12]:

$$Y_3 = k_3\delta_3 - k_3'\delta_3^3 + \dots, \quad Y_4 = k_4\delta_4 - k_4'\delta_4^3 + \dots, \quad \delta_3 = \arctg \frac{v \sin \vartheta_1 + L_1\dot{\vartheta}_1}{v \cos \vartheta_1}$$

$$\delta_4 = \arctg \frac{v \sin \vartheta_2 + l_1\dot{\vartheta}_1 \cos(\vartheta_2 - \vartheta_1) + L_2\dot{\vartheta}_2}{v \cos \vartheta_2 - l_1\dot{\vartheta}_1 \sin(\vartheta_2 - \vartheta_1)}$$

В обозначениях [10] для определения углов  $\vartheta_1, \vartheta_2$  имеем следующие дифференциальные уравнения:

$$(J_1 + m_2 l_1^2) \ddot{\vartheta}_1 + m_2 d_2 l_1 \ddot{\vartheta}_2 \cos(\vartheta_2 - \vartheta_1) = -L_1 Y_3 - l_1 Y_4 \cos(\vartheta_2 - \vartheta_1) +$$

$$+ m_2 d_2 l_1 \dot{\vartheta}_2^2 \sin(\vartheta_2 - \vartheta_1), \quad J_2 \ddot{\vartheta}_2 + m_2 d_2 l_1 \dot{\vartheta}_1 \cos(\vartheta_2 - \vartheta_1) =$$

$$= -L_2 Y_4 - m_2 d_2 l_1 \dot{\vartheta}_1^2 \sin(\vartheta_2 - \vartheta_1)$$
(1.1)

Приняв величины  $m_1, d_1, k_3$  в качестве базисных, запишем уравнения (1.1) в безразмерной форме, а затем при  $v \neq v_0$  представим их в виде [10]:

$$\dot{\xi}_1 = \varepsilon \xi_1 - \omega \xi_2 + \sum_{l, m, n} A_{lmn}^{(1)} \xi_l \xi_m \xi_n + \dots; \quad \dot{\xi}_2 = \omega \xi_1 + \varepsilon \xi_2 + \sum_{l, m, n} A_{lmn}^{(2)} \xi_l \xi_m \xi_n + \dots$$
(1.2)

$$\dot{\xi}_3 = \kappa \xi_3 - \omega_1 \xi_4 + \sum_{l, m, n} A_{lmn}^{(3)} \xi_l \xi_m \xi_n + \dots; \quad \dot{\xi}_4 = \omega_1 \xi_3 + \kappa \xi_4 + \sum_{l, m, n} A_{lmn}^{(4)} \xi_l \xi_m \xi_n + \dots$$

Здесь  $\omega > 0$ ,  $\kappa < 0$ ,  $\omega_1 > 0$  при  $\forall v$ ; знак  $\varepsilon$  зависит от выбранных значений  $l_1$  и  $v$ . С целью анализа локальной бифуркации Андронова — Хопфа, описывающей движения с малыми амплитудами для  $v > v_0$  (т. е.  $\varepsilon > 0$  [10]) вблизи границы  $v = v_0$  ( $l_1^0$ ), положим  $\xi_k = \sqrt{\varepsilon} \eta_k$  ( $k = 1, \dots, 4$ ). Вместо (1.2) получим

$$\begin{aligned} \dot{\eta}_1 &= -\omega \eta_2 + \varepsilon [\eta_1 + f(\eta_1, \dots, \eta_4)], & \dot{\eta}_2 &= \omega \eta_1 + \varepsilon [\eta_2 + F(\eta_1, \dots, \eta_4)] \\ \dot{\eta}_3 &= \kappa \eta_3 - \omega_1 \eta_4 + \varepsilon f_3(\eta_1, \dots, \eta_4), & \dot{\eta}_4 &= \omega_1 \eta_3 + \kappa \eta_4 + \varepsilon f_4(\eta_1, \dots, \eta_4) \\ \text{col}(f, F, f_3, f_4) &= \sum_{l, m, n} \text{col}(A_{lmn}^{(1)}, \dots, A_{lmn}^{(4)}) \eta_l \eta_m \eta_n + \dots \end{aligned}$$

**2. Построение периодического решения системы (1.3).** Учитывая автономность системы и периодичность искомого решения ее, начало отсчета времени выберем из условия  $\eta_2|_{t=0} = 0$ . Перейдем от  $t$  к  $\tau$  таким образом, чтобы решению с периодом  $2\pi\omega^{-1} + \alpha = 2\pi\omega^{-1}(1 + h_1\varepsilon + h_2\varepsilon^2 + \dots)$  по переменной  $t$  соответствовало  $2\pi$ -периодическое решение системы (1.3) по переменной  $\tau$  [13]. Систему, полученную из (1.3) заменой

$$t = \tau\omega^{-1}(1 + h_1\varepsilon + h_2\varepsilon^2 + \dots) \quad (2.1)$$

пытаемся удовлетворить формальными рядами

$$\eta_s(\tau) = \eta_s^{(0)}(\tau) + \varepsilon \eta_s^{(1)}(\tau) + \varepsilon^2 \eta_s^{(2)}(\tau) + \dots \quad (2.2)$$

$$\eta_s^{(j)}(\tau + 2\pi) = \eta_s^{(j)}(\tau) \quad (s = 1, \dots, 4, j = 1, 2, \dots)$$

Так как  $\eta_2^{(0)}(0) = 0$ , то порождающее решение есть  $\eta_1^{(0)} = M_0 \cos \tau$ ,  $\eta_2^{(0)} = M_0 \sin \tau$ ,  $\eta_3^{(0)} = 0$ ,  $\eta_4^{(0)} = 0$ . Для нахождения первого приближения имеем систему, распадающуюся на две подсистемы

$$\begin{aligned} d\eta_1^{(1)}/d\tau + \eta_2^{(1)} &= -h_1 M_0 \sin \tau + [M_0 \cos \tau + A_{111}^{(1)} \eta_1^{(0)^3} + 3A_{112}^{(1)} \eta_1^{(0)^2} \eta_2^{(0)} + 3A_{122}^{(1)} \eta_1^{(0)} \eta_2^{(0)^2} + \\ &+ A_{222}^{(1)} \eta_2^{(0)^3}] \omega^{-1}, \quad d\eta_2^{(1)}/d\tau - \eta_1^{(1)} = h_1 M_0 \cos \tau + [M_0 \sin \tau + A_{111}^{(2)} \eta_1^{(0)^3} + \\ &+ 3A_{112}^{(2)} \eta_1^{(0)^2} \eta_2^{(0)} + 3A_{122}^{(2)} \eta_1^{(0)} \eta_2^{(0)^2} + A_{222}^{(2)} \eta_2^{(0)^3}] \omega^{-1} \\ d\eta_3^{(1)}/d\tau &= (\kappa \eta_3^{(1)} - \omega_1 \eta_4^{(1)} + A_{111}^{(3)} \eta_1^{(0)^3} + 3A_{112}^{(3)} \eta_1^{(0)^2} \eta_2^{(0)} + 3A_{122}^{(3)} \eta_1^{(0)} \eta_2^{(0)^2} + A_{222}^{(3)} \eta_2^{(0)^3}) \omega^{-1}, \\ d\eta_4^{(1)}/d\tau &= (\omega_1 \eta_3^{(1)} + \kappa \eta_4^{(1)} + A_{111}^{(4)} \eta_1^{(0)^3} + 3A_{112}^{(4)} \eta_1^{(0)^2} \eta_2^{(0)} + \\ &+ 3A_{122}^{(4)} \eta_1^{(0)} \eta_2^{(0)^2} + A_{222}^{(4)} \eta_2^{(0)^3}) \omega^{-1} \end{aligned} \quad (2.3)$$

Периодическое решение этой системы существует тогда и только тогда, когда существует периодическое решение первых двух уравнений. Запишем их в виде

$$\begin{aligned} d\eta_1^{(1)}/d\tau + \eta_2^{(1)} &= (M_0 \omega^{-1} + a_1) \cos \tau + (-h_1 M_0 + b_1) \sin \tau + a_3 \cos 3\tau + b_3 \sin 3\tau, \\ d\eta_2^{(1)}/d\tau - \eta_1^{(1)} &= (h_1 M_0 + c_1) \cos \tau = \\ &= (M_0 \omega^{-1} + d_1) \sin \tau + c_3 \cos 3\tau + d_3 \sin 3\tau \end{aligned} \quad (2.4)$$

Из необходимых и достаточных условий периодичности решения системы (2.4):

$$M_0 \omega^{-1} + a_1 = -(M_0 \omega^{-1} + d_1), \quad -h_1 M_0 + b_1 = h_1 M_0 + c_1 \quad (2.5)$$

находим

$$M_0^2 = -2\pi [\omega \alpha_3(v)]^{-1}, \quad h_1 = Q M_0^2 (2\pi)^{-1} \quad (2.6)$$

Величины  $Q$  и  $\alpha_3(v)$  описаны в [10], причем  $\alpha_3(v)$  является продолжением по параметру  $v$  в область  $v > v_0$  первого ляпуновского коэффициента  $\alpha_3(v_0)$ , явное выражение которого для систем с кубическими нелинейностями получено в [14]. При условиях (2.5) система (2.4) имеет решение

$$\eta_1^{(1)} = M_1 \cos \tau + N_1 \sin \tau + A_3 \cos 3\tau + B_3 \sin 3\tau \quad (2.7)$$

$$\eta_2^{(1)} = M_1 \sin \tau - N_1 \cos \tau + C_3 \cos 3\tau + D_3 \sin 3\tau$$

$$A_3 = M_0^3 (A_{111}^{(2)} - 3A_{122}^{(2)} - 9A_{112}^{(1)} + 3A_{222}^{(1)})(32\omega)^{-1}$$

$$B_3 = M_0^3 (3A_{111}^{(1)} - 9A_{122}^{(1)} + 3A_{112}^{(2)} - A_{222}^{(2)})(32\omega)^{-1}$$

$$C_3 = M_0^3 (3A_{122}^{(1)} - A_{111}^{(1)} + 3A_{222}^{(2)} - 9A_{112}^{(2)})(32\omega)^{-1}$$

$$D_3 = M_0^3 (3A_{111}^{(2)} - 9A_{122}^{(2)} - 3A_{112}^{(1)} + A_{222}^{(1)})(32\omega)^{-1}$$

Из условия  $\eta_2^{(1)}(0) = 0$  находим  $N_1 = C_3$ . Другая произвольная постоянная  $M_1$  в (2.7), а также величина  $h_2$  в (2.1) определяются условиями периодичности второго приближения, которые дают  $M_1 = 0$ ,  $h_2 = h_1^2 - h_{20}$ .

Периодическое решение двух последних уравнений системы (2.3) имеет вид

$$\eta_3^{(1)} = T_1 \cos \tau + S_1 \sin \tau + T_2 \cos 3\tau + S_2 \sin 3\tau$$

$$\eta_4^{(1)} = T_3 \cos \tau + S_3 \sin \tau + T_4 \cos 3\tau + S_4 \sin 3\tau$$

причем величины  $T_1, S_1, \dots, S_4$  имеют тот же смысл, что и в [10].

Такова процедура отыскания первого приближения

$$\eta_1 = M_0 \cos \tau + \varepsilon \eta_1^{(1)}(\tau), \quad \eta_2 = M_0 \sin \tau + \varepsilon \eta_2^{(1)}(\tau) \quad (2.8)$$

$$\eta_3 = \varepsilon \eta_3^{(1)}(\tau), \quad \eta_4 = \varepsilon \eta_4^{(1)}(\tau)$$

решения системы (1.3). Аналогичным образом находятся сколь угодно высокие приближения искомого решения. Поскольку существование периодического решения системы (1.3) доказано в [10], должен существовать по крайней мере один ряд вида (2.2), формально удовлетворяющий (после возвращения к старой независимой переменной  $t$ ) системе (1.3). В силу того, что такой ряд оказался единственным, он с необходимостью представляет искомое решение и, следовательно, сходится.

**3. Явный вид периодического решения системы (1.1).** Первому приближению (2.8) решения системы (1.3) соответствует следующее решение системы (1.2):

$$\xi_1 = \xi_1' + \xi_1'', \quad \xi_2 = \xi_2' + \xi_2'', \quad \xi_3 = \xi_3'', \quad \xi_4 = \xi_4'' \quad (3.1)$$

$$\xi_1' = \sqrt{\varepsilon} M_0 \cos \tau, \quad \xi_2' = \sqrt{\varepsilon} M_0 \sin \tau, \quad \xi_1'' = \varepsilon \sqrt{\varepsilon} \eta_1^{(1)}(\tau), \quad \xi_2'' = \varepsilon \sqrt{\varepsilon} \eta_2^{(1)}(\tau)$$

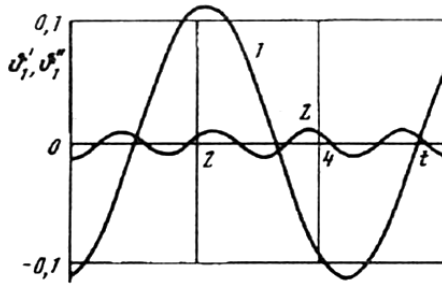
$$\xi_3'' = \varepsilon \sqrt{\varepsilon} \eta_3^{(1)}(\tau), \quad \xi_4'' = \varepsilon \sqrt{\varepsilon} \eta_4^{(1)}(\tau), \quad \tau = \Omega t, \quad \Omega = \omega [1 - h_1 \varepsilon + O(\varepsilon^2)] \quad (3.2)$$

$$\text{Так как [10]: } \text{col}(\vartheta_1, \vartheta_2) = \sum_{j=1}^4 \text{col}(\alpha_{1j}, \alpha_{2j}) \xi_j$$

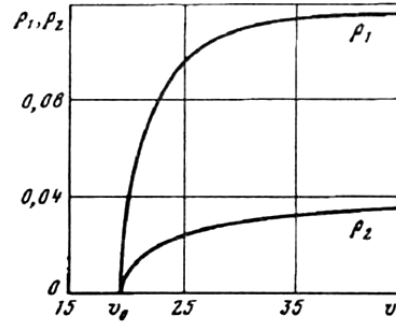
то с принятой степенью точности

$$\vartheta_1 = \vartheta_1' + \vartheta_1'', \quad \vartheta_2 = \vartheta_2' + \vartheta_2''$$

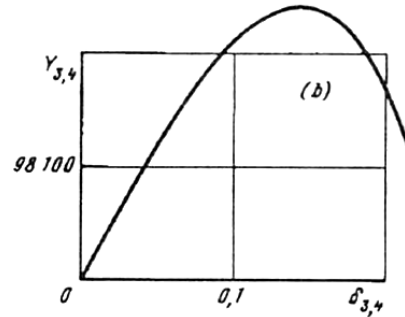
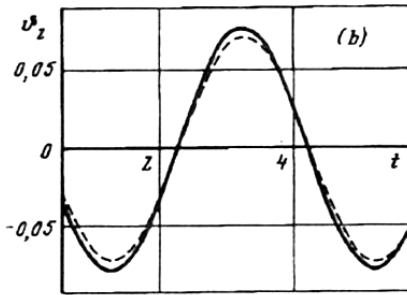
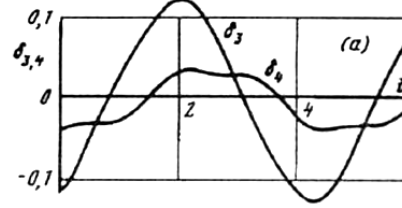
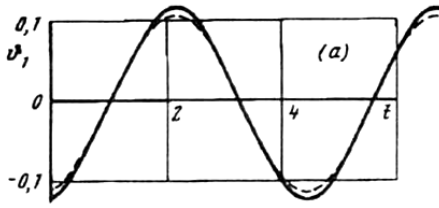
$$\vartheta_1' = \sqrt{\varepsilon} M_0 (a_{23} \cos \Omega t + \alpha_{12} \sin \Omega t)$$



Фиг. 1



Фиг. 3



Фиг. 2

Фиг. 4

$$\vartheta_2' = \sqrt{\varepsilon} M_0 [ - (\omega^2 + a_{21}) \cos \Omega t + \omega a_{22} \sin \Omega t ]$$

$$\vartheta_1'' = \varepsilon \sqrt{\varepsilon} [ (a_{24}M_0 - \alpha_{12}N_1 + \alpha_{13}T_1 + \alpha_{14}T_3) \cos \Omega t + (a_{23}N_1 + \alpha_{13}S_1 + \alpha_{14}S_3) \sin \Omega t + (\alpha_{12}C_3 + a_{23}A_3 + \alpha_{13}T_2 + \alpha_{14}T_4) \cos 3\Omega t + (\alpha_{12}D_3 + a_{23}B_3 + \alpha_{13}S_2 + \alpha_{14}S_4) \sin 3\Omega t ],$$

$$\vartheta_2'' = \varepsilon \sqrt{\varepsilon} \{ [-a_{22} (M_0 + \omega N_1) + \alpha_{33}T_1 + \alpha_{34}T_3] \cos \Omega t + [ -(\omega^2 + a_{21}) N_1 - 2\omega M_0 + \alpha_{33}S_1 + \alpha_{34}S_3 ] \sin \Omega t + [ -(\omega^2 + a_{21}) A_3 + \omega a_{22}C_3 + \alpha_{33}T_2 + \alpha_{34}T_4 ] \cos 3\Omega t + [ -(\omega^2 + a_{21}) B_3 + \omega a_{22}D_3 + \alpha_{33}S_2 + \alpha_{34}S_4 ] \sin 3\Omega t \}$$

Возьмём числовые значения параметров двухзвенника, которым соответствует фиг. 2, а работы [10], причём  $l_1 = 9$  м, тогда  $v_0 = 19,442$  м/с. При  $v = 30$  м/с период решения  $2\pi\Omega^{-1} = 4,5674$  с. Из фиг. 1 следует  $\vartheta_1'(t) \gg \vartheta_1''(t)$  (кривая 1 соответствует  $\vartheta_1'$ , а кривая 2 —  $\vartheta_1''$  [рад]). На фиг. 2 а, в, штриховыми линиями изображены графики функций  $\vartheta_1'(t)$ , сплошными —  $\vartheta_1(t)$ , различие между ними оказывается весьма незначительным при  $\forall v > v_0$ , т. е.  $\vartheta_1(t) \approx \vartheta_1'(t)$ . С ростом скорости движения  $v$  амплитуды колебаний

$$\rho_1 = M_0 [ \varepsilon (a_{23}^2 + a_{12}^2) ]^{1/2}, \quad \rho_2 = M_0 \{ \varepsilon [ (\omega^2 + a_{21})^2 + \omega^2 a_{22}^2 ] \}^{1/2}$$

возрастают (фиг. 3). Угол увода  $\delta_3$  колес первого ведомого звена находится в области нелинейной зависимости  $Y_3(\delta_3)$ , тогда как для колес второго ведомого звена допустима линеаризация функции  $Y_4(\delta_4)$  [Н] (фиг. 4, а, в).

4. Упрощенный подход с использованием оператора усреднения. Сравнение между собой кривых  $\vartheta_i = \vartheta_i'(t)$  и  $\vartheta_i = \vartheta_i''(t)$  однозначно указывает на то, что в данном случае несмотря на неаналитическую зависимость функций  $\vartheta_i(t)$  от  $\varepsilon$  имеет место общая ситуация [15] о наложении быстроосциллирующей составляющей  $\vartheta_i''(t)$  на основную медленно эволюционирующую составляющую  $\vartheta_i'(t)$  решения. Для нахождения эволюции системы эффективным, как известно, является метод усреднения. Рассмотрим первые два уравнения системы (1.2):

$$\dot{\xi}_1 = \varepsilon \xi_1 - \omega \xi_2 + A_{111}^{(1)} \xi_1^3 + 3A_{112}^{(1)} \xi_1^2 \xi_2 + 3A_{122}^{(1)} \xi_1 \xi_2^2 + A_{222}^{(1)} \xi_2^3 + \dots \quad (4.1)$$

$$\dot{\xi}_2 = \omega \xi_1 + \varepsilon \xi_2 + A_{111}^{(2)} \xi_1^3 + 3A_{112}^{(2)} \xi_1^2 \xi_2 + 3A_{122}^{(2)} \xi_1 \xi_2^2 + A_{222}^{(2)} \xi_2^3 + \dots$$

Перейдя к полярным координатам заменой  $\xi_1 = r \cos \vartheta$ ,  $\xi_2 = r \sin \vartheta$ , представим уравнения (4.1) в виде

$$\dot{r} = \varepsilon r + r^3 f_1(\vartheta) + \dots, \quad \dot{\vartheta} = \omega + r^2 f_2(\vartheta) + \dots \quad (4.2)$$

Функции  $f_1(\vartheta)$  и  $f_2(\vartheta)$  являются  $2\pi$ -периодическими. Поставим в соответствие уравнениям (4.2) следующие:

$$\dot{\rho} = \varepsilon \rho + \alpha' \rho^3 + \dots, \quad \dot{\theta} = \omega + \gamma' r_0^2 + \dots \quad (4.3)$$

$$\alpha' = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_1(\vartheta) d\vartheta, \quad \gamma' = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_2(\vartheta) d\vartheta \quad (4.4)$$

Величину  $r_0 = \text{const}$  конкретизируем дальше. Каждое из уравнений (4.3) интегрируется независимо от другого и является уравнением с разделяющимися переменными. Из (4.4) следует  $\alpha' = \omega (2\pi)^{-1} \alpha_3(v)$ ,  $\gamma' = -\omega (2\pi)^{-1} Q$ .

1. *Аппроксимация устойчивого предельного цикла  $\Gamma^{4.1}$  для случая  $l_1 > l_1^*$ ,  $v > v_0$  [10].* Так как  $\varepsilon > 0$ ,  $\alpha_3(v) < 0$ , то первое уравнение (4.3) имеет одну неустойчивую особую точку  $r_0 = 0$  и две устойчивые особые точки  $r = \pm r_0$ , где  $r_0 = \sqrt{\varepsilon} M_0$ . Из второго уравнения (4.3) находим  $\theta = \Omega t$ ,  $\Omega = \omega [1 - \varepsilon Q (2\pi M_0^2)^{-1}]$ . Составив выражения  $\xi_1 = r_0 \cos \theta$ ,  $\xi_2 = r_0 \sin \theta$  и сравнив их с (3.2), заключаем, что  $r_0 \cos \theta = \xi_1'$ ,  $r_0 \sin \theta = \xi_2'$ , т. е. приведенная процедура усреднения дает приближенное решение системы (1.2):

$$\xi_1 = \sqrt{\varepsilon} M_0 \cos \Omega t, \quad \xi_2 = \sqrt{\varepsilon} M_0 \sin \Omega t, \quad \xi_3 = 0, \quad \xi_4 = 0 \quad (4.5)$$

которое получается из (3.1) отбрасыванием выражений с двумя штрихами.

2. *Аппроксимация неустойчивого предельного цикла  $\Gamma^{3.2}$  для случая  $l_1 < l_1^*$ ,  $v < v_0$  [10].* Так как  $\varepsilon < 0$ ,  $\alpha_3(v) > 0$ , то первое уравнение (4.3) имеет одну устойчивую особую точку  $r_0 = 0$  и две неустойчивые особые точки  $r = \pm r_0$ , где  $r_0 = \sqrt{-\varepsilon} M_0$ . Повторяя рассуждения п. 4.1, получим для неустойчивого предельного цикла аппроксимацию (4.5), в которой  $\varepsilon$  следует заменить на  $-\varepsilon$ . Он ограничивает область притяжения начала координат фазового пространства как устойчивой особой точки уравнений возмущенного движения маятниковых систем с качением.

Вытекающий из (3.1), а также из (4.5) результат о том, что амплитуда автоколебаний маятниковых систем с качением пропорциональна  $\sqrt{\varepsilon}$ , согласуется с теоремой Хопфа [16] в том, что радиус предельного цикла, родившегося из устойчивого фокуса, растет как  $\sqrt{\varepsilon}$ . При  $v = v_0$  величина  $\alpha_3(v)$  играет роль

«нелинейного декремента» (термин, введенный в [17] при исследовании бифуркаций фазового портрета системы дифференциальных уравнений второго порядка, в которой выделены резонансные мономы, в случае  $\lambda_1 = i\omega$ ,  $\lambda_2 = -i\omega$ ). Из (2.6) следует, что при  $v \neq v_0$  во-первых, величина  $\alpha_3(v)$  существенно влияет на радиус предельного цикла, во-вторых, частота соответствующего периодического решения определяется совокупностью значений коэффициентов  $A_{112}^{(1)}$ ,  $A_{222}^{(1)}$ ,  $A_{111}^{(2)}$ ,  $A_{122}^{(2)}$ , не входящих в  $\alpha_3$  (см. выражение для  $\alpha_3(v)$  и  $Q$  в [10]). Как отмечалось выше, величина  $\alpha_3(v)$  представляет собой продолжение по параметру  $v$  первого ляпуновского коэффициента  $\alpha_3(v_0)$ .

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лобас Л. Г., Вербицкий В. Г. Качественные и аналитические методы в динамике колесных машин. Киев: Наук. думка, 1990. 232 с.
2. Вербицкий В. Г., Лобас Л. Г. Бифуркация и устойчивость стационарных движений пневмоколесных машин в постоянных силовых полях//Изв. АН СССР. МТТ. 1991. № 1. С. 23—33.
3. Вербицкий В. Г., Лобас Л. Г. Бифуркация стационарных состояний связки абсолютно твердых и катящихся упругих тел//Изв. АН СССР. МТТ. 1991. № 3. С. 30—37.
4. Troger H., Zeman K. A nonlinear analysis of the generic types of loss of stability of the steady state motion of a tractor-semitrailer//Vehicle System Dynamics. 1984. V. 13. No. 4. P. 161—172.
5. Scheidl R., Stribersky A., Troger H., Zeman K. Driving behavior of a tractor-semitrailer vehicle in steady state downhill motion//Vehicle System Dynamics. 1985. V. 14. No. 1—3. P. 184—188.
6. Scheidl R., Stribersky A. Gekoppelte Divergenz- und Flatterinstabilität eines Sattelschleppzuges//ZAMM. 1986. V. 66. No. 4. P. 87—89.
7. Scheidl R., Stribersky A., Troger H., Zeman K. Nonlinear stability behaviour of a tractor-semitrailer in downhill motion//Vehicle System Dynamics. 1986. Suppl. V. 15. P. 509—522.
8. Kacani V., Stribersky A., Troger H. Maneuverability of a truck-trailer combination after loss of lateral stability//Vehicle System Dynamics. 1988. Suppl. V. 17. P. 186—198.
9. Kacani V. Anwendung der nichtlinearen Stabilitätstheorie zur Untersuchung der Fahrdynamik eines Lastkraftwagens mit Anhänger//Fortschritt — Berichte der VDI. 1988. R. 12. Nr. 100. S. 1—111.
10. Лобас Л. Г., Хребет В. Г. Существование и единственность периодического движения в маятниковых двузвенных системах с качением//Изв. АН СССР. МТТ. 1993. № 5. С. 23—31.
11. Рокар И. Неустойчивость в механике. Автомобили. Самолеты. Висячие мосты. М.: Изд-во иностр. лит., 1959. 287 с.
12. Эллис Д. Р. Управляемость автомобиля. Машиностроение, 1975. 216 с.
13. Малкин И. Г. Методы Ляпунова и Пуанкаре в теории нелинейных колебаний. Л.—М.: Гостехиздат, 1949. 244 с.
14. Баутин Н. Н. Поведение динамических систем вблизи границ области устойчивости. М.: Наука, 1984. 176 с.
15. Журавлев В. Ф., Климов Д. М. Прикладные методы в теории колебаний. М.: Наука, 1988. 326 с.
16. Марсден Дж., Мак-Кракен М. Бифуркация рождения цикла и ее приложения. М.: Мир, 1980. 368 с.
17. Арнольд В. И. Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978. 304 с.

Киев

Поступила в редакцию  
25.XI.1991