МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ВЫСШЕЕ УЧЕБНОЕ ЗАВЕДЕНИЕ
«ДОНЕЦКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
АВТОМОБИЛЬНО-ДОРОЖНЫЙ ИНСТИТУТ

СБОРНИК ЗАДАЧ ПОВЫШЕННОЙ ТРУДНОСТИ ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ ДЛЯ ПОДГОТОВКИ К СТУДЕНЧЕСКИМ ОЛИМПИАДАМ

Горловка – 2010

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ВЫСШЕЕ УЧЕБНОЕ ЗАВЕДЕНИЕ
«ДОНЕЦКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
АВТОМОБИЛЬНО-ДОРОЖНЫЙ ИНСТИТУТ

Кафедра «Высшая математика»

СБОРНИК ЗАДАЧ ПОВЫШЕННОЙ ТРУДНОСТИ ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ ДЛЯ ПОДГОТОВКИ К СТУДЕНЧЕСКИМ ОЛИМПИАДАМ

Учебное пособие

Утверждено:
учебно-методическая
комиссия факультета
«Экономика и управление»
Протокол № 9
от 16.06.2010 г.

Утверждено:
кафедра «Высшая математика»
Протокол № 13
от 13.06.2010 г.

Горловка - 2010

УДК 510 (076)
Сборник задач повышенной трудности по высшей математике для подготовки к студенческим олимпиадам / составитель: Л. И. Луценко. – Горловка: ГВУЗ «ДонНТУ» АДИ, 2010. – 95 с.

В данном учебном пособии предложены задачи повышенной трудности по высшей математике, которые могут быть использованы для подготовки к студенческим олимпиадам различного уровня. К решению большинства задач имеются указания. В отдельном разделе приведены задачи студенческих олимпиад (2006 – 2010 гг.) с решениями. В одном из разделов изложены теоретические сведения, которые могут быть использованы для решения задач.

Составитель: Луценко Л. И., канд. ф.-м. наук, доцент

Ответственный за выпуск: Вовк Л. П., докт. техн. наук, проф.

Рецензент: Королев Е. А., канд. ф.-м. наук, доцент кафедры «Высшая математика»

СОДЕРЖАНИЕ

СОВЕТЫ СТУДЕНТУ

«... Если вы хотите научиться плавать, то смело входите в воду, а если вы хотите научиться решать задачи, то решайте их!»
Джордж Пойа

Процесс решения задачи представляет собой поиск выхода из затруднения или пути обхода препятствия – это процесс достижения цели, которая не кажется сразу доступной. Решение задач является специфической особенностью интеллекта, а интеллект – это особый дар человека, поэтому решение задач может рассматриваться как одно из самых характерных проявлений человеческой деятельности.

Решение задач – практическое искусство подобное плаванию, катанию на лыжах или игре на фортепиано, научиться которому можно, только подражая хорошим образцам и постоянно практикуясь.

Стремясь извлечь из своих усилий максимальную пользу, старайтесь подмечать в задаче, которую вы решаете, то, что сможет пригодиться в будущем, при решении других задач. Решение, найденное в результате собственных усилий, или то, с которым вы познакомились в книге, или то, которое вы выслушали (но обязательно с живым интересом и стремлением проникнуть в суть дела), может превратиться в *метод*, в образец, которому с успехом можно следовать при решении других задач.

Конечно, подражать уже известному решению легко, если новая задача очень похожа на известную вам. Однако, если сходство задач невелико, то такое подражание может оказаться гораздо более трудным и даже едва ли осуществимым.

Над универсальным методом, пригодным для решения любых задач, размышляли многие великие математики. Однако поиски универсального, совершенного метода дали не больший эффект, чем поиски философского камня. Тем не менее стремление к таким недостижимым идеалам не остается бесполезным (пока никто не достиг Полярной звезды, но многие, глядя на нее, находили правильный путь).

Выдающийся математик и педагог *Джордж Пойа* писал: «Существенным ингредиентом процесса решения всякой задачи является желание, стремление, решимость ее решить. Задача, которой вы предполагаете заняться, которую вы достаточно хорошо поняли, – это еще не ваша задача. Она становится по-настоящему вашей, действительно овладевает вами, когда вы твердо решили заняться ею как следует и стремитесь решить ее.

Задача может увлечь вас больше или меньше, ваше желание решить ее может быть более или менее сильным. Но я утверждаю, что пока оно не станет очень сильным, ваши шансы решить по-настоящему трудную задачу будут ничтожны».

И далее он добавлял: «…В решении любой задачи присутствует крупица открытия: задача может быть скромной, но если она бросает вызов вашей любознательности и заставляет вас быть изобретательным и если вы решаете ее собственными силами, то вы сможете испытать ведущее к открытию напряжение ума и насладиться радостью победы. Такие эмоции, пережитые в молодом возрасте, могут пробудить вкус к умственной работе и на всю жизнь оставить свой отпечаток на уме и характере».

Одной из форм активизации научного творчества студентов являются студенческие олимпиады.

Предлагаемые на таких олимпиадах задачи носят нестандартный характер и требуют от студента не только прочных знаний по программе, но и известной независимости мышления, здравого смысла, оригинальности, изобретательности, умения логически рассуждать, т.е. всего того, что предполагает наличие достаточного уровня математической культуры.

Но трудность решения задачи входит в само понятие задачи: там, где нет трудности, нет и задачи.

Решить непривычную интересную задачу, отрешившись от заученных шаблонов – это уже маленькая творческая победа. Выдающийся математик и педагог *А.Я. Хинчин* сказал: «Тот, кто раз изведал благородную радость творческого достижения, никогда уже не пожалеет усилий, чтобы вновь ее испытать…».

Процесс решения нестандартной задачи можно разделить на два этапа: поиск идеи решения и ее реализацию. Наиболее трудным, но интересным и творческим является первый этап.

Вот несколько советов. Прочитав условие задачи, нужно постараться перейти от сложной формулировки к более простой и ясной, стараясь при этом сохранить эквивалентность старого условия новому. Иногда задача является нестандартной только по форме. Переформулировав ее, вы обнаружите, что имеете дело с хорошо вам знакомой задачей.

Если это не поможет, то попробуйте рассмотреть частный случай. Часто бывает полезным разбить задачу на несколько простых, а иногда, наоборот, начать с обобщения формулировки, попытки доказать или опровергнуть обратное утверждение.

Реализация идеи предполагает наличие доведенных до автоматизма навыков действий над векторами, матрицами, уравнениями, функциями и т.п. Иначе говоря, необходимо свободно владеть изученным в курсе высшей математики материалом.

Данное пособие содержит набор задач по всем темам для экономических специальностей. Ко всем задачам даны ответы и указания. В отдельной главе содержатся теоретические сведения, которые могут быть полезны при выборе решения.

Желаю Вам успеха!

1 УСЛОВИЯ ЗАДАЧ

1.1 Элементарная математика

1*[1]. Чему равна сумма $1\cdot 1!+2\cdot 2!+3\cdot 3!+....+n\cdot n!$?

Ответ: $(n+1)!-1$.

2*. Сколько отрицательных корней имеет уравнение
$x^4-5x^3-4x^2-7x+4=0$?

Ответ: ни одного.

3*. Упростить $\left(3^{2^0}+1\right)\left(3^{2^1}+1\right)\left(3^{2^2}+1\right)\cdots\left(3^{2^n}+1\right)$.

Ответ: $\frac{1}{2}\left(3^{2^{n+1}}-1\right)$.

4*. Вычислить $\left(\frac{1\cdot 2\cdot 4+2\cdot 4\cdot 8+3\cdot 6\cdot 12+...}{1\cdot 3\cdot 9+2\cdot 6\cdot 18+3\cdot 9\cdot 27+...}\right)^{\frac{1}{3}}$.

Ответ: $\frac{2}{3}$.

5*. Найти n, если $\frac{1^3+3^3+5^3+...+(2n-1)^3}{2^3+4^3+6^3+...+(2n)^3}=\frac{199}{242}$.

Ответ: $n=10$.

6*. Найти сумму бесконечного ряда

$$1+2x+3x^2+4x^3+.....;\quad |x|<1.$$

Ответ: $S=\frac{1}{(1-x)^2}$.

7*. Какая из двух величин больше: $a=\sqrt[8]{8!}$ или $в=\sqrt[9]{9!}$?

Ответ: $a<в$.

---

[1] **Примечание. К задачам, помеченным звездочкой, приведены указания (см. раздел 2).**

8*. Разложить функцию $f(x)=\dfrac{1}{(1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)}$ в степенной ряд

Ответ: $1-x+x^{16}-x^{17}+x^{32}-x^{33}+....$

9*. Вычислить сумму $2+2^2+2^3+....+2^n$.

Ответ: $2^{n+1}-2$.

10*. Доказать, что если a и b – положительные действительные числа: m – целое число; $m \geq 0$, то $\left(1+\dfrac{a}{b}\right)^m+\left(1+\dfrac{b}{a}\right)^m \geq 2^{m+1}$.

11*. Дано n положительных чисел $a_1, a_2, ..., a_n$ таких, что $a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_n = 1$. Доказать, что $(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n) \geq 2^n$.

12*. Доказать, что $1+\dfrac{1}{2^3}+\dfrac{1}{3^3}+...+\dfrac{1}{n^3}<\dfrac{5}{4}$.

13*. Найти все функции $f(x)$, определенные для каждого x и удовлетворяющие уравнению $x \cdot f(y)+y \cdot f(x)=(x+y)\cdot f(x)\cdot f(y)$ для произвольных x и у

Ответ: $f(x)\equiv 0$.

14*. Определить числа a, b и c так, чтобы выполнялось тождество

$$x^3-ax^2+bx-c=(x-a)(x-b)(x-c).$$

Ответ: c =0; b = 0; a – любое или $a = -1;\ b = -1;\ c = 1.$

15*. Доказать, что n^3+3n^2-n-3 при любом нечетном n делится на 48.

16*. Доказать, что если $n \geq 3$, то $\sqrt[n+1]{n+1} \leq \sqrt[n]{n}$.

17*. Пусть a, b и c обозначают три различных целых числа, а P – полином с целочисленными коэффициентами. Доказать невозможность одновременного выполнения равенств $P(a) = b;\ P(b) = c;\ P(c) = a$.

18*. Найти сумму

$$\frac{\sin 1}{\cos 0 \cdot \cos 1}+\frac{\sin 1}{\cos 1 \cdot \cos 2}+\frac{\sin 1}{\cos 2 \cdot \cos 3}+...+\frac{\sin 1}{\cos(n-1)\cdot \cos n},$$

где n – целое положительное число.

Ответ: $tg n$.

19*. Найти многочлен *P(x)* с целыми коэффициентами, обращающийся в нуль при: а) $\tilde{o} = \sqrt{2} + \sqrt{3}$; б) $\tilde{o} = \sqrt{2} + \sqrt[3]{3}$.

Ответ: а) $P(x) = x^4 - 10x^2 + 1$;

б) $P(x) = x^6 - 6x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 36x + 1$.

20*. Доказать, что $1 + 2 + ... + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

21*. Доказать, что $1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

22*. Доказать, что $1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$.

23*. Доказать, что $\sqrt[n]{n+1} \le 2;\quad n \ge 1$.

24*. Доказать, что при $n \ge 1\quad 3^n > n^2$.

25*. Доказать, что $\dfrac{n}{\dfrac{1}{a_1} + \dfrac{1}{a_2} + ... + \dfrac{1}{a_n}} \le \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_n}$.

26*. Доказать, что $\sqrt{a^2 + x} \approx a + \dfrac{x}{2a};\quad a > 0;\quad |x| < a$.

27*. Найти сумму $2 + 22 + 222 + ... + 222...2$.

Ответ: $\dfrac{2(10^{n+1} - 10 - 9n)}{81}$.

28*. Найти сумму $1 - 2^2 + 3^2 + ... + (-1)^n n^2$.

Ответ: $-\dfrac{n(n+1)}{2}$, если n четное; $\dfrac{n(n+1)}{2}$, если n нечетное.

29*. Найти сумму $1 - 2 + 3 - 4 + ... + (-1)^{n-1} n$.

Ответ: $-\dfrac{n}{2}$, если n четное; $\dfrac{n}{2}$, если n нечетное.

30*. Найти сумму $\left(x + \dfrac{1}{x}\right)^2 + \left(x^2 + \dfrac{1}{x^2}\right)^2 + ... + \left(x^n + \dfrac{1}{x^n}\right)^2$.

Ответ: $\dfrac{x^{4n+2} - 1}{x^{2n}(x^2 - 1)} + 2n - 1$.

31*. Найти сумму $x + 2x^2 + 3x^3 + ... + nx^n$.

Ответ: $\dfrac{x}{(x-1)^2}\left(nx^{n+1}-\left(n+1\right)x^n+1\right)$.

32[*]. Найти сумму $\dfrac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\dfrac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+...+\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}$.

Ответ: $\dfrac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$.

33[*]. В разложении бинома $\left(\sqrt{x}+\dfrac{1}{2\sqrt[4]{x}}\right)^n$ первые три коэффициента образуют арифметическую прогрессию. Найти все рациональные члены разложения.

Ответ: $\grave{O}_1,\grave{O}_5,\grave{O}_9$.

1.2 Комплексные числа

34[*]. При каких условиях произведение двух комплексных чисел является чисто мнимым?

Ответ: в том и только в том случае, когда:
1) ни один из сомножителей не равен нулю;
2) сомножители имеют вид $a+bi$ *и* $\lambda(b+ai)$, где λ *– действительное число.*

35[*]. Решить систему, считая *x, y, z, t* действительными числами:

$$(1+i)x+(1+2i)y+(1+3i)z+(1+4i)t=1+5i,$$
$$(3-i)x+(4-2i)y+(1+i)z+4it=2-i.$$

Ответ: x = -2; y = 3/2; z = 2; t = -1/2.

36[*]. Проверить тождество

$$x^4+4=(x-1-i)(x-1+i)(x+1+i)(x+1-i).$$

37[*]. Выполнить действия:

а) $\dfrac{1+i\cdot tg\alpha}{1-i\cdot tg\alpha}$; б) $\dfrac{(1+i)^9}{(1-i)^7}$; в) $\dfrac{(1+i)^n}{(1-i)^{n-2}}$, где n – целое положительное число.

Ответ: а) $\cos 2x + i\sin 2x$; б) 2; в) $2i^{n-1}$

38*. Решить уравнения:

а) $\tilde{o}^2-(2+i)x+(-1+7i)=0$;
б) $x^2-(3-2i)x+(5-5i)=0$;
в) $(2+i)x^2-(5-i)x+(2-2i)=0$.

Ответ: а) 3-i; -1+2i; б) 2+i; 1-3i; в) 1-i; (4-2i)/5.

39*. Вычислить:

а) $\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20}$; б) $\dfrac{(-1+i\sqrt{3})^{15}}{(1-i)^{20}}$; в) $(1+\tilde{n}os\alpha+i\sin\alpha)^n$.

Ответ: а) $2^9(1-i\sqrt{3})$; б) -64; в) $2^n\cos^n\dfrac{\alpha}{2}\left(\cos\dfrac{\alpha n}{2}+i\sin\dfrac{\alpha n}{2}\right)$.

40*. Доказать, что если $z+\dfrac{1}{z}=2\cos\theta$, то $z^m+\dfrac{1}{z^m}=2\cos m\theta$.

41*. Найти суммы:

а) $1-\tilde{N}_n^2+\tilde{N}_n^4-\tilde{N}_n^6+\ldots$;
б) $\tilde{N}_n^1-C_n^3+C_n^5-C_n^7+\ldots$;
в) $\tilde{N}_n^1-\dfrac{1}{3}C_n^3+\dfrac{1}{9}C_n^5-\dfrac{1}{27}C_n^7+\ldots$

Ответ: а) $2^{\frac{n}{2}}\cos\dfrac{\pi n}{4}$; б) $2^{\frac{n}{2}}\sin\dfrac{\pi n}{2}$; в) $\dfrac{2^n}{3^{\frac{n-1}{2}}}\sin\dfrac{\pi n}{6}$.

42*. Показать, что $\sin x+\sin 2x+\ldots+\sin nx=\dfrac{\sin\dfrac{n+1}{2}x\cdot\sin\dfrac{nx}{2}}{\sin\dfrac{x}{2}}$.

43*. Показать, что $\cos\dfrac{\pi}{11}+\cos\dfrac{3\pi}{11}+\cos\dfrac{5\pi}{11}+\cos\dfrac{7\pi}{11}+\cos\dfrac{9\pi}{11}=\dfrac{1}{2}$.

44*. Показать, что $\cos^2 x + \cos^2 2x + ... + \cos^2 nx = \frac{n}{2} + \frac{\cos(n+1)x \cdot \sin nx}{2\sin x}$.

45*. Показать, что $\sin^2 x + \sin^2 2x + ... + \sin^2 nx = \frac{n}{2} - \frac{\cos(n+1)x \cdot \sin nx}{2\sin x}$.

46*. Найти сумму $\cos^3 x + \cos^3 2x + ... + \cos^3 nx$.

Ответ: $\dfrac{3\cos\frac{n+1}{2}x \cdot \sin\frac{nx}{2}}{4\sin\frac{x}{2}} + \dfrac{\cos\frac{3(n+1)}{2}x \cdot \sin\frac{3nx}{2}}{4\sin\frac{3x}{2}}$.

47*. Найти $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^n$ при $\alpha = \grave{a} + \hat{a}i$.

Ответ: $e^a(\cos bx + i\sin bx)$.

1.3 Линейная алгебра (определители, матрицы, системы уравнений)

48*. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 13547 & 13647 \\ 28423 & 28523 \end{vmatrix}$.

Ответ: -1 487 600.

49*. Решить неравенство $\begin{vmatrix} \tilde{o} & 1+\tilde{o} & \tilde{o}^2 \\ 1+\tilde{o} & \tilde{o} & \tilde{o} \\ \tilde{o} & 1+\tilde{o} & \tilde{o} \end{vmatrix} < 0$.

Ответ: $x \in (-\infty; -\frac{1}{2}) \cup (0;1)$.

50*. Доказать, что для всех $x \in R$ определитель

$$\begin{vmatrix} 1+\tilde{o} & -\tilde{o} & \tilde{o} \\ \tilde{o} & 1-\tilde{o} & -\tilde{o} \\ -\tilde{o} & \tilde{o} & 1+\tilde{o} \end{vmatrix} > 0.$$

51*. Доказать, что для всех $x \in R$ определитель $\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ x^3 & x^2 & x \\ 1 & 2x & 3x^2 \end{vmatrix} \le 0$.

При каких x имеет место равенство?

Ответ: определитель равен 0 при $x = 0$ и при $x = \pm 1$.

52*. Доказать, что определитель $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix} \le 0$, где $a, b, c > 0$.

Когда имеет место равенство?

Ответ: $a = b = c$.

53*. Доказать, что при всех допустимых x справедливо неравенство

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 2 \\ 2x-1 & x & x-1 \\ 3x & 2+x & x \end{vmatrix}^{1/2} \le \sqrt{2}/2 .$$

54*. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} \alpha^2 & (\alpha+1)^2 & (\alpha+2)^2 & (\alpha+3)^2 \\ \beta^2 & (\beta+1)^2 & (\beta+2)^2 & (\beta+3)^2 \\ \gamma^2 & (\gamma+1)^2 & (\gamma+2)^2 & (\gamma+3)^2 \\ \delta^2 & (\delta+1)^2 & (\delta+1)^2 & (\delta+3)^2 \end{vmatrix}$, где $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in R$.

Ответ: *0.*

55*. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} x & a & a & . & . & . & a \\ a & x & a & . & . & . & a \\ a & a & x & . & . & . & a \\ . & . & . & . & . & . & . \\ a & a & a & . & . & . & x \end{vmatrix}$.

Ответ: $(x+(n-1)a)(x-a)^{n-1}$.

56*. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} \alpha & \beta & 1 \\ 1 & \alpha & \beta \\ \beta & 1 & \alpha \end{vmatrix}$, где α,β корни уравнения $x^2 + px + q = 0$.

Ответ: $-p^3 + 3pq - 3q + 1$.

57*. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \beta & \gamma & \alpha \\ \gamma & \alpha & \beta \end{vmatrix}$, где α,β,γ корни уравнения

$$x^3 + px^2 + qx + r = 0.$$

Ответ: $p^3 - 3pq.$

58*. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} \tilde{o}_1 & \tilde{o}_2 & \tilde{o}_3 \\ \tilde{o}_2 & \tilde{o}_3 & \tilde{o}_1 \\ \tilde{o}_3 & \tilde{o}_1 & \tilde{o}_2 \end{vmatrix}$, где $\tilde{o}_i (i = 1,2,3)$ корни уравнения $x^3 - 3x^2 + 1 = 0$.

Ответ: *-27*.

59*. Построить график функции $f(x) = \begin{vmatrix} x & x^2 & 1 \\ a & a^2 & 1 \\ b & b^2 & 1 \end{vmatrix}$, где $a \neq b$.

60*. Построить график функции

$$f(x) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ x+1 & 2 & x+3 & 4 \\ 1 & x+3 & x+4 & x+5 \\ 1 & -3 & -4 & -5 \end{vmatrix}.$$

61*. Пусть $\tilde{o}_1, \tilde{o}_2, \tilde{o}_3, \tilde{o}_4$ – корни уравнения $\tilde{o}^4 - 10\tilde{o} - 3 = 0$.

Вычислить определитель $\begin{vmatrix} \tilde{o}_1 & \tilde{o}_2 & \tilde{o}_3 & \tilde{o}_4 \\ \tilde{o}_4 & \tilde{o}_1 & \tilde{o}_2 & \tilde{o}_3 \\ \tilde{o}_3 & \tilde{o}_4 & \tilde{o}_1 & \tilde{o}_2 \\ \tilde{o}_2 & \tilde{o}_3 & \tilde{o}_4 & \tilde{o}_1 \end{vmatrix}$.

Ответ: *0.*

62*. Вычислить определитель $\Delta = |a_{ij}|$, где $a_{ij} = |i - j|$, $i = 1,\dots,5;\ j = 1,\dots,5$.

Ответ: *32.*

63*. Вычислить определитель $\Delta = |a_{ij}|$, где $a_{ij} = |i - j|$, $i = 1,..,n;\ j = 1,..,n$.

Ответ: $(-1)^{n-1}(n-1)\cdot 2^{n-2}$.

64*. Вычислить определитель $\Delta = |a_{ij}|$, где $a_{ij} = \grave{a} + |i - j|h$, $i = 1,..,n;\ j = 1,..,n$.

Ответ: $(-1)^{n-1}\cdot 2^{n-2}\cdot h^{n-1}(2a+(n-1)h)$.

65*. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} x^2 & x & 1 \\ y^2 & y & 1 \\ z^2 & z & 1 \end{vmatrix}$.

Ответ: $(x-z)(y-z)(x-y)$.

66*. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 1+\cos\alpha & 1+\sin\alpha & 1 \\ 1-\sin\alpha & 1+\cos\alpha & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

Ответ: 1.

67*. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 2\cos^2\alpha/2 & \sin\alpha & 1 \\ 2\cos^2\beta/2 & \sin\beta & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$.

Ответ: $\sin(\beta-\alpha)$.

68*. Числа 204, 527 и 255 делятся на 17. Доказать, что определитель

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \\ 4 & 7 & 5 \end{vmatrix}$$ делится на 17.

69*. Доказать, что $\begin{vmatrix} \frac{x_1+x_2}{2} & \frac{y_1+y_2}{2} & 1 \\ \frac{x_1-x_2}{2} & \frac{y_1-y_2}{2} & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$.

70*. Числа 1081, 1403, 2093 и 1541 делятся на 23. Не вычисляя определитель $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 8 & 1 \\ 1 & 4 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 9 & 3 \\ 1 & 5 & 4 & 1 \end{vmatrix}$ доказать, что он делится на 23.

71*. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} a^2+b^2-c^2-d^2 & 2bc-2ad & 2bd+2ac \\ 2bc+2ad & a^2-b^2+c^2-d^2 & 2cd-2ab \\ 2bd-2ac & 2cd+2ab & a^2-b^2-c^2+d^2 \end{vmatrix}.$$

Ответ: $(a^2+b^2+c^2+d^2)^3$.

72*. Девять положительных цифр можно расположить в виде определителя третьего порядка 9! способами. Найти сумму всех таких определителей.

Ответ: *0.*

73*. Решить уравнение $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 1 & x+1 & 3 & \dots & n \\ 1 & 2 & x+1 & \dots & n \\ . & . & . & . & . \\ 1 & 2 & 3 & \dots & x+1 \end{vmatrix} = 0$.

Ответ: $x=1; x=2; \dots, x=n-1$.

74*. Решить уравнение $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 2-x & \dots & 1 \\ . & . & . & . & . \\ 1 & 1 & 1 & \dots & n-1-x \end{vmatrix} = 0$.

Ответ: $x = 0; x = 1; \dots; x = n-2.$

75*. Вычислить определитель n-го порядка, элементы которого имеют вид $a_{ik} = 1 + x_i \cdot y_k$; *i, k = 1,..., n.*

Ответ: $\Delta_1 = 1 - x_1 y_1;$

$\Delta_2 = (y_2 - y_1)(x_2 - x_1);$

$\Delta_n = 0$ *ïðè* $n > 2.$

76*. Вычислить определитель n-го порядка, элементы которого имеют вид $a_{ik} = \min(i \cdot k)$; *i, k=1,..., n.*

Ответ: *1.*

77*. Вычислить определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ 1 & a_1 + b_1 & a_2 & \dots & a_n \\ 1 & a_1 & a_2 + b_2 & \dots & a_n \\ . & . & . & . & . \\ 1 & a_1 & a_2 & \dots & a_n + b_n \end{vmatrix}.$$

Ответ: $b_1 \cdot b_2 \cdots b_n.$

78*. Все элементы матрицы *A* размером *45x45* – целые числа. Известно, что остаток от деления на 9 равен единице у 1982-х элементов. В каком случае *detA* делится на 9?

Ответ: всегда.

79*. Вычислить определитель $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n \\ -1 & 0 & 3 & 4 & \dots & n \\ -1 & -2 & 0 & 4 & \dots & n \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ -1 & -2 & -3 & -4 & \dots & 0 \end{vmatrix}$.

Ответ: $n!$

80*. Вычислить определитель $\Delta_n = \begin{vmatrix} a & a & a & \dots & a \\ a & 0 & a & \dots & a \\ a & a & 0 & \dots & a \\ . & . & . & . & . \\ a & a & a & \dots & 0 \end{vmatrix}$.

Ответ: $(-1)^{n-1} a^n$.

81*. Вычислить определитель

$$\Delta_{\partial} = \begin{vmatrix} \alpha+\beta & \alpha\beta & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha+\beta & \dots & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \alpha+\beta \end{vmatrix}.$$

Ответ: $\dfrac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta}$.

82*. Вычислить определитель

$$\Delta_{n+1} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1/2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1/3 & \dots & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1/n \end{vmatrix}.$$

Ответ: $-\dfrac{n+1}{2(n-1)!}$.

83*. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & . & . & . & n-1 & n \\ 1 & 3 & 3 & . & . & . & n-1 & n \\ 1 & 2 & 5 & . & . & . & n-1 & n \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ 1 & 2 & 3 & . & . & . & 2n-3 & n \\ 1 & 3 & 3 & . & . & . & n-1 & 2n-1 \end{vmatrix}$.

Ответ: $(n-1)!$

84*. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & . & . & . & 2 \\ 2 & 2 & 2 & . & . & . & 2 \\ 2 & 2 & 3 & . & . & . & 2 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 2 & 2 & 2 & . & . & . & n \end{vmatrix}$.

Ответ: $-2(n-2)!$

85. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 1 & b_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ -1 & 1-b_1 & b_2 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1-b_2 & b_3 & \ldots & 0 & 0 \\ . & . & . & . & \ldots & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1-b_{n-1} & b_n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & -1 & 1-b_n \end{vmatrix}.$$

Ответ: 1.

86*. Вычислить $\grave{A}^{2007}$, если $\grave{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Ответ: $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

87*. Показать, что для матрицы A размерности 10×10

$$\grave{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & 0 & 1 \\ 10^{-10} & . & . & . & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

определитель $det(A-\lambda E) = \lambda^{-10} - 10^{-10}$.

88*. Доказать, что не существует матрица A размера 3×3 с действительными коэффициентами такая, что

$$3\grave{A}^2 + 2\grave{A} = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 3 \\ -2 & 1 & 2 \\ 0 & -4 & -3 \end{pmatrix}.$$

89*. Вычислить $\grave{A}^n$, если $A = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}^n$; $n \in Z$..

Ответ: $\begin{pmatrix} \tilde{n}\cos n\phi & -\sin n\phi \\ \sin n\phi & \cos n\phi \end{pmatrix}$.

90*. Вычислить A^{100}, если $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Ответ: $\begin{pmatrix} 2^{100} & 2^{100}-1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^{100} \end{pmatrix}$.

91*. Найти наименьшее $n \in N$, при котором выполняется равенство

$$\frac{1}{2^n}\begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $n = 12$.

92*. Сумма элементов каждой строки квадратной матрицы A равна S. Найти сумму всех элементов первой и последней строки матрицы $\grave{A}^{2005}$.

Ответ: $2 \cdot S^{2006}$.

93. Пусть $\grave{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$, где *a, b, c* – действительные числа. Найти такие *a, b, c*, что $\grave{A}^n$ – где $n \in N$, имеет вид $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Ответ: a = ± 1; c = ± 1; b – любое.

94. Доказать, что матрица $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ удовлетворяет уравнению

$$\tilde{O}^2 - (a+d)\tilde{O} \pm (ad - bc)E = 0`, \text{ где } E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

95*. Найти *X* из уравнения $\tilde{O}^3 + 2\tilde{O}^2 = 0$, если *X*– невырожденная матрица размера $n \times n$.

Ответ: *X* = *-2E*.

96. Пусть *A, B* – матрицы размерности $n \times n$; матрица $E - A \cdot B$ – обратима. Доказать, что матрица $E - B \cdot A$ также обратима.

97. Матрица *X* является решением матричного уравнения $AX^2 + BX = 0$, где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \; B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}. \text{ Доказать, что } \det X = 0.$$

98*. Решить матричное уравнение $A \cdot X \cdot B + A \cdot X = E$, где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}; \; B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}; \; E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $X = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$.

99*. Решить матричное уравнение $A \cdot X + X \cdot B = C$, где $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$;

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \; B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

100^*. Учитывая то, что предел матрицы равен матрице из пределов её элементов, найти:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & -3 & -6\\ 0 & 2 & 4\end{pmatrix}^n$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\begin{pmatrix}a & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & a\end{pmatrix}^n$; в) $\lim\limits_{n\to\infty}\begin{pmatrix}a & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & a\end{pmatrix}^n$;

г) $\lim\limits_{n\to\infty}\begin{pmatrix}1/2 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1/2\end{pmatrix}^n$.

Ответ: а) $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & -3 & -6\\ 0 & 2 & 4\end{pmatrix}$; б) *при* $|\grave{a}|\le 1$ $\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix}0 & \dfrac{1}{1-\grave{a}} & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix}0 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$.

101^*. Решить систему уравнений ($a,\ b,\ c\in R$) $\begin{cases}3x+4y+5z=a\\ 4x+5y+6z=b\\ 5x+6y+7z=c.\end{cases}$

Ответ: $\begin{aligned}&x=-5a+4b+t;\\ &y=4a-3b-2t;\\ &z=t.\end{aligned}$

102^*. Решить систему уравнений ($a,\ b\in R$) $\begin{cases}x^2+y+2z=a\\ 2x^2+y+z=b\\ x^2+2y+5z=2b.\end{cases}$

Ответ: $x=\pm\sqrt{t};\quad y=a-3t;\quad z=t.$

103^*. Решить систему $\begin{cases}ax+y+z=1\\ x+ay+z=a\\ x+y+az=a^2.\end{cases}$

Ответ: $\Delta=(a-1)(a+2)\neq 0$; $x=-\dfrac{a+1}{a+2}$; $y=\dfrac{1}{a+2}$; $z=\dfrac{(a+1)^2}{a+2}$.

При $a=1$ множество решений $z=1-x-y$; x,y – любые.

При $a=-2$ решения нет.

104. Решить систему $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3+4x_4=1 \\ x_2+2x_3+3x_4+4x_1=2 \\ x_3+2x_4+3x_1+4x_2=3 \\ x_4+2x_1+3x_2+4x_3=4. \end{cases}$

Ответ: $x_1=x_2=x_3=\dfrac{1}{2}$, $x_4=-\dfrac{1}{2}$.

105. При каких $a\in R$ система $\begin{cases} x^2+ay+z^2=3a \\ ax^2+3az^2=2 \\ 2x^2+3ay=a \end{cases}$ имеет решение?

Ответ: $\begin{array}{l} x=\pm\sqrt{1-3y}; z=\pm 0{,}5\sqrt{y+5}; \\ -5\le y\le \dfrac{1}{3}; a=0{,}5. \end{array}$

106*. Решить систему $\begin{cases} x+y+az=2 \\ x+ay+z=-1 \\ ax+y+z=-1. \end{cases}$

Ответ: $\Delta=-(a-1)^2(a+2)$;

при $a\neq 1; a\neq -2$ $x=y=\dfrac{1}{1-a}=-\dfrac{z}{2}$;

при $a=1$ нет решения;

при $a=-2$ $x=y=1=z; z\in R$.

107*. Найти целые решения системы уравнений

$$\begin{cases} \cos\pi x-2^y+3z^2=0 \\ 2\cos^2\dfrac{\pi x}{2}-2^{y+1}+z^2=-3 \\ 5\cos\pi x-2^{y+3}+9z^2=-12. \end{cases}$$

Ответ: $\begin{array}{l} x = 2n \pm 1; \quad n \in Z \\ y = 1; \quad z = \pm 1. \end{array}$

108*. Решить систему $\begin{cases} x_2 + x_3 + x_4 + \ldots + x_{n-1} + x_n = 1 \\ x_1 + x_3 + x_4 + \ldots + x_{n-1} + x_n = 2 \\ x_1 + x_2 + x_4 + \ldots + x_{n-1} + x_n = 3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_{n-1} = n. \end{cases}$

Ответ: $x_i = \dfrac{(1+n)n}{2(n-1)} - i.$

109*. Решить систему $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + \ldots + nx_n = 1 \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 + \ldots + (n-1)x_n + nx_1 = 2 \\ x_3 + 2x_4 + 3x_5 + \ldots + (n-1)x_1 + nx_2 = 3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{n-1} + 2x_n + 3x_1 + \ldots + nx_{n-1} = n-1 \\ x_n + 2x_1 + 3x_2 + \ldots + nx_{n-1} = n. \end{cases}$

Ответ: $x_i = \dfrac{2}{n}; \;\; i = 1,..,n-1; \;\; x_n = \dfrac{2-n}{n}.$

1.4 Векторная алгебра

110*. Доказать, что, если $\overline{\grave{A}\grave{I}}$, $\overline{\hat{A}\grave{I}}$, $\overline{\tilde{N}\text{Đ}}$ – медианы треугольника $\grave{A}\hat{A}\tilde{N}$, то $\overline{\grave{A}\grave{I}} + \overline{\hat{A}\grave{I}} + \overline{\tilde{N}\text{Đ}} = 0$.

111*. Доказать, что, если точка M – точка пересечения медиан треугольника $\grave{A}\hat{A}\tilde{N}$, то $\overline{\grave{I}\,\grave{A}} + \overline{\grave{I}\,\hat{A}} + \overline{\grave{I}\,\tilde{N}} = 0$.

112*. Определить вид треугольника $\grave{A}\hat{A}\tilde{N}$, если $\overline{\grave{A}\hat{A}} \cdot \overline{\grave{A}\tilde{N}} = \overline{\grave{A}\tilde{N}^2}$.

Ответ: прямоугольный.

113*. Определить вид треугольника $\grave{A}\hat{A}\tilde{N}$, если $\overline{\grave{A}\hat{A}} \cdot \overline{\grave{A}\tilde{N}} + \overline{\grave{A}\tilde{N}^2} = 0$.

Ответ: тупоугольный.

114*. Определить вид треугольника $\grave{A}\hat{A}\tilde{N}$, если $\overline{\grave{A}\tilde{N}} \cdot \overline{\hat{A}\tilde{N}} + \overline{\grave{A}\hat{A}} \cdot \overline{\hat{A}\tilde{N}} = 0$.

Ответ: равнобедренный.

115*. Дан правильный треугольник со стороной *a = 1*. Найти величину $m = \overline{\grave{A}\hat{A}} \cdot \overline{\hat{A}\tilde{N}} + \overline{\hat{A}\tilde{N}} \cdot \overline{\tilde{N}\grave{A}} + \overline{\tilde{N}\grave{A}} \cdot \overline{\grave{A}\hat{A}}$.

Ответ: $m = -\dfrac{3}{2}.$

116*. В треугольнике $\grave{A}\hat{A}\tilde{N}$ даны длины сторон *BC=5; CA=6; AB=7*. Найти $\overline{\grave{A}\hat{A}} \cdot \overline{\hat{A}\tilde{N}}$.

Ответ: *-19*.

117*. Векторы $\overline{\grave{A}\hat{A}}(4;2;-1)$ и $\overline{\grave{A}\tilde{N}}(2;-2;0)$ совпадают со сторонами треугольника $\grave{A}\hat{A}\tilde{N}$. Определить координаты и длину вектора $\overline{BD}$, совпадающего с высотой треугольника $\grave{A}\hat{A}\tilde{N}$.

Ответ: $\overline{BD}(-3;-3;1)$; $\left|\overline{BD}\right| = \sqrt{19}.$

118*. Векторы $\overline{\grave{A}\hat{A}} = \overline{c}$ и $\overline{\grave{A}\tilde{N}} = \overline{b}$ совпадают со сторонами треугольника $\grave{A}\hat{A}\tilde{N}$. Найти разложение вектора $\overline{BD}$ – высоты.

Ответ: $\overline{BD} = \dfrac{\overline{c} \cdot \overline{b}}{\overline{b}^2} \cdot \overline{b} - \overline{c}.$

119*. Даны две противоположные вершины квадрата $\grave{A}(-3;2)$ и $\tilde{N}(5;-4)$. Найти две другие его вершины *B* и *D*.

Ответ: $B(4;3)$; $D(-2;-5).$

120*. Даны две соседние вершины квадрата *A(-3;2)* и *B(2;4)*. Найти две другие вершины квадрата *C* и *D*.

Ответ: $C(0;9); D(-5;7)$ или $C(4;-1); D(-1;-3).$

121*. В единичный квадрат *ABCD* вписана окружность. Найти длину вектора $\overline{m} = \overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC} + \overline{MD}$, где *M* – произвольная точка окружности.

Ответ: $\left|\overline{m}\right| = 2.$

122. Как расположены векторы $\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3}, \overline{e_4}$, если $(\overline{e_1} \times \overline{e_2}) \times (\overline{e_2} \times \overline{e_3}) = \overline{e_4}$?

Ответ: $\overline{\mathring{a}_4} = \overline{\mathring{a}_2}$, если $\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3}$ образуют правую тройку; $\overline{\mathring{a}_4} = -\overline{\mathring{a}_2}$, если $\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3}$ образуют левую тройку.

123. Пусть $\overline{a}$ и $\overline{b}$ – неколлинеарные векторы, S – площадь параллелограмма, построенного на $\overline{a}$ и $\overline{b}$. Доказать, что $S = \frac{|\overline{a}|}{|\overline{c}|}(\overline{b},\overline{c})$, где $\overline{c} = (\overline{a} \times \overline{b}) \times \overline{a}$.

124. Даны три попарно перпендикулярных вектора $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ и некоторый вектор $\overline{x}$. Доказать, что

$$\cos(\overline{a},\overline{x}) + \cos(\overline{b},\overline{x}) + \cos(\overline{c},\overline{x}) > -2 .$$

125. Вектор $\overline{a}(x;y;z)$ имеет координаты: $x = \cos\phi \cdot \cos\frac{\phi}{2}$; $y = \sin\phi \cdot \cos\frac{\phi}{2}$; $z = \sin\frac{\phi}{2}$, где $\phi \in R$. Доказать, что длина вектора постоянна для любого $\phi \in R$ и его изменения сводятся к одним поворотам.

1.5 Аналитическая геометрия на плоскости

126. Найти центр правильного шестиугольника, зная две смежные его вершины: *A(2;0)* и *B(5;* $3\sqrt{3}$ *)*.

Ответ: $M_1(8;0)$ или $M_2(-1;3\sqrt{3})$.

127. Зная две противолежащие вершины ромба *A(8;-3)* и *C(10;11)* и длину его стороны *AB = 10*, определить координаты остальных вершин ромба.

Ответ: $B(2;5)$ и $D(16;3)$.

128. Проверив, что точки *A(-2;8)*, *B(1;5)* и *C(4;1)* могут служить тремя вершинами ромба, вычислить его площадь.

Ответ: $AB = BC$; $S = 7$ *кв. ед.*

129. Вычислить площадь пятиугольника, вершинами которого служат точки *A(-2;0), B(0;-1), C(2;0), D(3;2)* и Е*(-1;3)*.

Ответ: $S = 12{,}5$ *кв. ед.*

130. Даны две точки *M(-1;3)* и *N(5;-3)*. Составить уравнение прямой, перпендикулярной к отрезку *MN* и делящей его в отношении $\lambda = 2$.

Ответ: $x - y + z = 0$.

131. Найти геометрическое место вершин всех треугольников, имеющих общее основание $a = 12$ и равные суммы квадратов двух других сторон $b^2 + c^2 = 100$.

Ответ: $x^2 + y^2 = 14$.

132. Составить уравнение геометрического места центров окружностей, касающихся оси X и проходящих через точку (3;4).

Ответ: парабола $x^2 - 6x - 8y + 25 = 0$.

133. На медиане *AM* треугольника *A(0;5), B(2;2), C(4;6)* найти такую точку *D*, чтобы площадь четырехугольника *ABCD* равнялась 14 кв. ед.

Ответ: $D\,(6;3)$.

134. Найти те касательные к окружности $x^2 + y^2 = 29$, которые проходят через точку P(7;-3).

Ответ: $5x + 2y - 29 = 0$ и $2x - 5y - 29 = 0$.

135*. Составить уравнения катетов прямоугольного треугольника *ABC* (угол *C* – прямой), если заданы вершина *A(1; -1)*, уравнение описанной около треугольника окружности $x^2 + y^2 - 4y - 6 = 0$ и площадь $S_{\Delta ABC} = 10$.

Ответ: $x + 2y - 9 = 0;\ \ y - 2x + 3 = 0$

и $2x - y + 7 = 0;\ \ x + 2y + 1 = 0$.

136*. Найти площадь прямоугольного треугольника *ABC* (угол *C* прямой), если заданы: вершина *A(1; -1)*, точка *M(-3;1)* прямой, на которой лежит катет *BC* и уравнение окружности $x^2 + y^2 - 4y - 6 = 0$, описанной около треугольника.

Ответ: $S = 10$.

137*. В треугольнике *ABC* заданы уравнения сторон *(AB):* $2x - y - 3 = 0$, *(AC):* $7x + 4y - 3 = 0$ и точка пересечения медиан *M (0; 2)*. Составить уравнение описанной около треугольника окружности.

Ответ: $\left(x + \dfrac{13}{6}\right)^2 + \left(y - \dfrac{11}{6}\right)^2 = \dfrac{325}{18}$; $A(1;-1), B(2;1), C(-3;6)$.

138. Прямая, параллельная прямой $3\tilde{o}+4\acute{o}-12=0$, пересекает положительные полуоси координат, образуя треугольник площадью $S=54$. Написать уравнение этой прямой.

Ответ: $3\tilde{o}+4\acute{o}-36=0$.

1.6 Последовательности и пределы

139. Найти $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\ldots+\frac{n-1}{n^2}\right)$. Ответ: $\frac{1}{2}$.

140. Найти $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1^2}{n^3}+\frac{2^2}{n^3}+\ldots+\frac{(n-1)^2}{n^3}\right)$. Ответ: $\frac{1}{3}$.

141. Найти $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\sin\frac{ka}{n^2}$ Ответ: $\frac{a}{2}$.

142*. Найти $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot2\cdot3}+\frac{1}{2\cdot3\cdot4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}\right)$. Ответ: $\frac{1}{4}$.

143*. Найти $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{k^2+3k+1}{(k+2)!}$. Ответ: *2*.

144. Найти $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2^3-1}{2^3+1}\cdot\frac{3^3-1}{3^3+1}\cdots\frac{n^3-1}{n^3+1}\right)$. Ответ: $\frac{2}{3}$.

145. Доказать, что при $n>0$ $\sqrt{n}<\sqrt[n]{n!}<\frac{n+1}{2}$.

146. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}=0$.

147. Существует ли $\lim\limits_{n\to\infty}\sin n$, где $n\in N$? Ответ: *нет.*

148*. Найти $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k^3+6k^2+11k+5}{(k+3)!}$. Ответ: $\frac{5}{3}$.

149. Найти наибольший элемент последовательности $x_n=\frac{n^2}{2^n}$.

Ответ: $\frac{9}{8}$.

150. Найти $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+...+\frac{1}{(n-1)n}\right)$. Ответ: 1.

151. Найти x, если $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^{2006}}{n^x-(n-1)^x}=\frac{1}{2006}$.

152. Дано: $S_1=\sqrt{2}$; $S_{n+1}=\sqrt{2+S_n}$. Доказать, что последовательность $\{S_n\}$ имеет предел и найти его.

Ответ: $S=2$.

153. Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2^{\frac{1}{n}}}{n+1}+\frac{2^{\frac{2}{n}}}{n+\frac{1}{2}}+...+\frac{2^{\frac{n}{n}}}{n+\frac{1}{n}}\right)$. Ответ: $\ln 2$.

154. Числовая последовательность задана соотношением

$$U_1=b;\ \ U_{n+1}=U_n^2+(1-2a)U_n+a^2;\ \ n\geq 1.$$

При каких значениях a и b последовательность $\{U_n\}$ сходится? Чему равен предел?

Ответ: *a*.

1.7 Функции и их пределы

155*. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}(1+x^2e^x)^{\frac{1}{1-\cos x}}$. Ответ: e^2.

156*. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[x^2]{1-x+\sin x}$. Ответ: *1*.

157. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-e^{-x}}-\sqrt{1-\cos x}}{\sqrt{\sin x}}$. Ответ: *1*.

158. Определить λ и μ таким образом, чтобы

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt[3]{1-x^3}-\lambda x-\mu)=0$$

Ответ: $\lambda=-1$; $\mu=0$.

159*. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tg(tgx)-\sin(\sin x)}{tgx-\sin x}$. Ответ: *2*.

160*. Найти постоянные a и b из условия $\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{x^2+1}{x+1}-ax-b)=0$.

Ответ: $a=1$; $b=-1$.

161*. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[\sin x]{1+x^2e^{3x}}$. Ответ: *1*.

162*. Доказать, что $y_1=\frac{\pi}{2}-arctgx$ и $y_2=\frac{1}{x}$ эквивалентные бесконечно малые при $x\to\infty$.

163*. Решить уравнение

$$\lim_{n\to\infty} arctg(x+arctg(x+arctg(x+arctg(x+...+arctgx))))=\frac{\pi}{4}.$$

Ответ: $x=1-\frac{\pi}{4}$.

164*. Найти предел $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln(x-\sin x)}{\ln(x-\cos x)}$. Ответ: *1*.

165*. Найти предел $\lim\limits_{n\to\infty}\ln\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$. Ответ: *0*.

166*. Найти предел $\lim\limits_{n\to\infty}(\cos(\ln(x+1))-\cos(\ln x))$. Ответ: *0*.

167*. Найти предел $\lim\limits_{n\to\pm\infty}(\cos(e^x-e^{-x})-\cos(e^x+e^{-x}))$.

Ответ: *0*.

168*. Найти предел $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(\sin\frac{\pi\sqrt{x^2+2x+2}}{2}-\cos\frac{\pi x}{2})$.

Ответ: при $x\to\infty$ предел равен 0; при $x\to-\infty$ предел не существует.

169*. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{3+e^{-x}}-\sqrt{3+\cos x}}{\ln(1-x\cos 2x)}$. Ответ: $\frac{1}{4}$.

170*. Найти n из уравнения

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)(1+3x)\cdot\ldots\cdot(1+(2n-1)x)-1}{tgx+tg2x+...+tgnx}=\frac{7}{3}.$$

Ответ: n = *6*.

171*. Найти a и b, если $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(e^{ax}-\ln(e+bx))}{x^2}=1$.

Ответ: $a=1;\ \ b=e\ \ или\ \ a=-1;\ \ b=-1$.

172*. Найти a и b, если $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(e^{ax}-\sqrt{1+bx})}{x^2}=1$.

Ответ: (1; 2) или (-1; -2).

173*. Найти a и b, если $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{ax}-\cos bx}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-2x\sin x)}{1-\sqrt[5]{1+5x^2}}$.

Ответ: (0; 2) или (0; -2).

174*. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x})$. Ответ: *0*.

175*. Найти предел $\lim\limits_{x\to \infty}(\sin\ln(x+1)-\sin\ln x)$. Ответ: 0.

176*. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{1}{x}+3^{\frac{1}{x}})^{x}$. Ответ: *3*.

177*. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{\arcsin x}{x})^{\frac{1}{x^2}}$. Ответ: $\sqrt[6]{e}$.

178*. Найти n из уравнения $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgx+tg2x+...+tgnx}{arctgx}=10$.

Ответ: *4*.

179*. Найти n из уравнения $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\sqrt{1+x^2}+x)^n-(\sqrt{1+x^2}-x)^n}{\sin x+\sin 2x+...+\sin nx}=1$

Ответ: *3*.

180*. Найти предел $\lim\limits_{x\to \infty}(\cos\sqrt{x+1}-\cos\sqrt{x})$. Ответ: 0.

181. Найти предел $\lim\limits_{x\to \infty}x^3(arctg\dfrac{1}{x}-\arcsin\dfrac{1}{x})$. Ответ: $\dfrac{1}{2}$.

182*. Найти предел $\lim\limits_{n\to \infty}(\cos\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{4}\cdot...\cdot\cos\dfrac{x}{2^n})$. Ответ: *0*.

183*. Найти предел $\lim\limits_{n\to \infty}x^2\left(arctg\dfrac{x+1}{x^2+2}-arctg\dfrac{1}{x}\right)$. Ответ: *1*.

1.8 Функции одной переменной, их графики и исследование

184*. Построить график функции $f(x)=\begin{cases}|x|^{\frac{1}{|x|}}; & x\neq 0\\ 1; & x=0\end{cases}$.

185*. Построить график функции $y=\cos(2\arccos x)$.

186*. Построить график функции $y=\arcsin(\sin x)$.

187*. Построить график функции $y=x^x$; $x>0$.

188*. Найти многочлен наименьшей степени, принимающий максимальное значение *6* при *x = 1* и минимальное значение *2* при *x = 3*.

Ответ: $p(x)=x^3-6x^2+9x+2$.

189*. Доказать, что ни для одного многочлена *P(x)* с целыми коэффициентами не могут выполняться равенства *P(7) = 5; P(15) = 9*.

190*. Пусть $f(x)=\sin x+\frac{\sin 3x}{4}+\frac{\sin 5x}{5}+\frac{\sin 7x}{7}$. Показать, что $f'\left(\frac{\pi}{9}\right)=\frac{1}{2}$.

191*. Найти производную десятого порядка при *x = 0* функции

$$f(x)=x^2\cos 2x.$$

Ответ: $\frac{2^8\cdot 10!}{8!}=23040.$

192*. Доказать, что $e^x>1+x$ для всех $x\neq 0$.

193*. Доказать, что $\sqrt{a^2+x}\approx a+\frac{x}{2a}$; $a>0,|x|<a.$

194*. Найти *f(x)*, если $f\left(\frac{1}{\tilde{o}}\right)=x+\sqrt{1+x^2};x>0.$

Ответ: $f(x)=\frac{1+\sqrt{x^2+1}}{x}.$

195*. Показать, что функция

$y=\cos^2 x+\cos^2(\frac{\pi}{3}+x)-\cos x\cos(\frac{\pi}{3}+x)$ есть постоянная. Найти её.

Ответ: $y=0,75.$

196*. При каких значениях *a* и *b* точка *M(1; 3)* служит точкой перегиба линии $y = ax^3 + bx^2$?

Ответ: $a = -\frac{3}{2}$; $b = \frac{9}{2}$.

197*. Найти все первообразные для функции
$$f(x) = \frac{106x^4 + 17x^2 - 1}{\sqrt{(x^2+3)^7}}.$$

Ответ: $\frac{2956x^5 + 705x^3 - 135x}{405\sqrt{(x^2+3)^5}} + C.$

198*. Имеет ли многочлен $1 + x + \frac{x^2}{2} + ... + \frac{x^n}{n!}$ кратные корни?

Ответ: *нет.*

199*. Пусть *y(x)* функция, заданная равенством $x + y = e^{-(x^2+y^2)}$. Найти область определения и асимптоты функции *y(x)*.

Ответ: $D(y) = R$; асимптота $y = -x$ при $x \to \pm\infty$.

200*. Функция f(x) определена и ограничена на $[-1;1]$, причем
$$f(x) + xf(x^2) = 2 \quad \forall x \in [-1;1].$$
Доказать, что в точке $x_0 = 0$ функция дифференцируема и найти

Ответ: $f'(0) = -2$.

201. Доказать, что функция f является периодичной, если существует $c \neq 0$, что для $\forall x \in D(f)$ $x + c \in D(f)$; $x - c \in D(f)$ и выполняется условие
$$f(x+c) = \frac{2005^2}{2005 - f(x)}.$$

202. Написать уравнение касательной к параболе $y = x^2$ в точке, ближайшей к точке $M_0(2; \frac{1}{2})$.

Ответ: $2x - y - 1 = 0$.

203. Найти кратчайшее расстояние от параболы $y = x^2$ до прямой $x - y + 2 = 0$.

Ответ: $R\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{7\sqrt{2}}{8}$.

204. Доказать, что если *f(x)* имеет производную при $x = a$, то

$$\lim_{x \to a} \frac{xf(a) - af(x)}{x - a} = f(a) - af'(a).$$

205. Убедиться в том, что функция *y,* определенная уравнением $xy - \ln y = 1$ удовлетворяет соотношению $y^2 + (xy - 1)y' = 0$.

206. Показать, что отрезок касательной к гиперболе $y = \frac{a}{x}$, заключенной между осями координат, делится в точке касания пополам.

207. Убедиться, что функция $y = \sin(n \arcsin x)$ удовлетворяет соотношению

$$(1 - x^2)y'' - xy' + n^2 y = 0.$$

208. Найти двадцатую производную функции $f(x) = (x^2 + 1)\sin x$.

Ответ: $(x^2 - 379)\sin x - 40x\cos x$.

209. Доказать, что $\left(x^{n-1} \cdot e^{\frac{1}{x}}\right)^{(n)} = (-1)^n \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^{n+1}}$.

210. При каком значении, *a* функция $f(x) = a\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x$ имеет экстремум при $x = \frac{\pi}{3}$?

Ответ: при $a = 2$ в точке $x = \frac{\pi}{3}$ функция имеет максимум.

211*. Показать, что функция

$y = \arccos\frac{a\cos x + b}{a + b\cos x} - 2arctg\left(\sqrt{\frac{a - b}{a + b}}tg\frac{x}{2}\right)$; $0 < b \le a$ является константой при $x \ge 0$. Найти её значение.

Ответ: *0*.

212*. Найти значение a и b, при которых функция $y = a\ln x + bx^2 + x$ имеет экстремумы в точках $x_1 = 1$ и $x_2 = 2$.

Ответ: $a = -\frac{2}{3}$; $b = -\frac{1}{6}$.

213*. Выбрать α и β так, чтобы линия $x^2 y + \alpha x + \beta y = 0$ имела точку *A(2;2,5)* точкой перегиба.

Ответ: $\alpha = -\frac{20}{3}; \beta = \frac{4}{3}$.

214*. Показать, что линия $y = \frac{x+1}{x^2+1}$ имеет три точки перегиба, лежащие на одной прямой.

215. Проверить, исходя из определения, что прямая $y = 2x + 1$ есть асимптота линии $y = \frac{2x^4 + x^3 + 1}{x^3}$.

216. Доказать, что график функции $f(x) = 4\cos 7x + 3\sin 5x + 3$ бесконечное число раз пересекает ось *OX*.

217. Найти все непрерывные функции *f(x)* такие, что $f(x) = f\left(\frac{\tilde{o}}{3}\right)$ для любого $x \in R$.

Ответ: $f(x) = const$.

218. При каких $a \in R$ функция $f(x) = ax^3 + (a^2 - 1)x^2 - 7x - 3$ имеет максимум в точке $x = 1$?

Ответ: *-3*.

219. При каких a функция *f(x)* возрастает на всей оси, если $f(x) = ax + 3\sin x + 4\cos x$.

Ответ: $a \geq 5$.

220. Найти все асимптоты графика функции $f(x) = \ln(1 + e^{2x})$.

Ответ: $y = 2x$ при $x \to \infty$; $y = 0$ при $x \to -\infty$.

221. Найти a, b и c, если для $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ выполняются условия $f(0) = 1$, $f'(1) = 0$, $f(\infty) = -\infty$.

Ответ: $c = 1$; $b = -2a$; $a < 0$.

222. При каких значениях a среди множества значений $f(x)=\frac{4ax}{x^2+1}+a^2-2$ содержится отрезок $[0;1]$?

Ответ: $1\le|a|\le 1+\sqrt{3}$.

223. Найти все непрерывно дифференцируемые функции *f(x)*, $x\in R, y\in R$ из функционального уравнения $f(x+y)=f(x)+(1-f(x))f(y)$; $f(0)=0$; $f'(0)=2006$.

Ответ: $f(x)=1-e^{-2006x}$.

224. Точка с координатами $(x(t);y(t))$ движется в плоскости так, что в каждый момент времени $y'(t)=\frac{1}{x(t)}$; $x'(t)=-\frac{1}{y(t)}$. Известно, что в некоторый момент времени точка имела координаты (12; 3). Может ли точка в некоторый другой момент времени иметь координаты (6; 5)?

Ответ: не может.

225. Доказать, что выражение $S=\frac{y'''}{y'}-\frac{3}{2}(\frac{y''}{y'})^2$ не изменится, если заменить y на $\frac{1}{y}$.

226. Доказать, что $x>\ln(1+x)$, где $x>0$.

227. Доказать, что $e^x>1+\ln(1+x)$.

1.9 Дифференциальные уравнения

228*. Решить уравнение $y^{'}=\frac{1}{2x-y^2}$.

Ответ: $x=\frac{y^2}{2}+\frac{y}{2}+\frac{1}{4}+C\cdot e^{2y}$.

229*. Найти общее решение дифференциального уравнения $y^{''}(x)=y^{'}(x)\cdot y(0)$.

Ответ: $y(x)=\frac{1}{y(0)}e^{y(0)x+C}+C_1;\quad y(0)\ne 0;\quad y(x)=C_1x;\quad y(0)=0.$

230*. Решить задачу Коши

$$\left(y+2\left(\frac{x}{y}\right)\ln y\right)dx+\left(2x+\left(\frac{x}{y}\right)^2\right)dy=0;\quad y(2)=1.$$

Ответ: $x(y^2+x\ln y)=2.$

231*. Найти общее решение $(y')^{15}+tg(10y')=2007$.

Ответ: $\left(\frac{y-C}{x}\right)^{15}+tg\frac{10(y-C)}{x}=2007.$

232*. Решить задачу Коши $y'(y+\cos x)=\left(y-2\sin^2\frac{x}{2}\right)\sin x;\quad y\left(\frac{\pi}{2}\right)=1.$

Ответ: $y=\sqrt{2\cos x+1}-\cos x.$

233*. Решить задачу Коши $(y+x^2)y'=(y+x^2-1)x$; $y(0)=0.$

Ответ: $\frac{1}{3}\left(y+x^2\right)+\frac{1}{9}\ln\left|3y+3x^2-1\right|=\frac{x^2}{2}.$

234*. Решить уравнение $2yy'+\sin^2(x+y^2)=0$.

Ответ: $tg\left(x+y^2\right)=x+C.$

235*. Решить уравнение $yy'+x=tg^2(x^2+y^2)$.

Ответ: $-ctg(x^2+y^2)-x^2-y^2=2x-\frac{\pi}{4}-1.$

236*. Решить задачу Коши $x^2y^3+y+(x^3y^2+x)y'=0$; $y(1)=1$.

Ответ: $xy=1.$

237*. Решить задачу Коши $y'\cos y=x-\sin y$; $y(0)=\frac{\pi}{2}$.

Ответ: $\sin y=2e^{-x}+x-1.$

238*. Решить задачу Коши $(x^2\ln y-x)y'=y;\quad y(1)=1$.

Ответ: $x=\frac{1}{y(\ln y+1)}.$

239*. Решить задачу Коши $y'x(y+\ln x)+y=0;\ \ y(1)=1$.

Ответ: $(y+\ln x)^2=2\ln^2 x+1.$

240*. Решить уравнение $y'+4y^2=0,5x^{-2}$.

Ответ: $\dfrac{1-2xy}{1+4xy}=\dfrac{C}{x^3}.$

241*. Решить задачу Коши $y''\sin 2y'+\cos(x+2y')=\cos(x-2y')$; $y(0)=0$; $y'(0)=\pi$.

Ответ: $y=-2\sin x+(\pi+2)x;\ \ y=\pi x.$

242*. Решить задачу Коши $y''=\sin y;\ \ y(0)=\dfrac{\pi}{2}$; $y'(0)=\sqrt{2}$.

Ответ: $2\ln tg\left(\dfrac{y}{4}+\dfrac{\pi}{4}\right)=2x+C.$

243*. В уравнении $y''+py'+qy=0$ p и q действительные числа. При каких p и q каждое решение уравнения обращается в нуль в бесконечном числе точек?

Ответ: $p^2-4q<0;\ \ y=e^{\varepsilon x}(C_1\sin\beta x+C_2\cos\beta x).$

244*. Составить линейное однородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами, имеющее частное решение $y_1=e^{-x}\cdot\cos\dfrac{x}{2}$.

Ответ: $4y''+8y'+5y=0.$

245*. Составить линейное однородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами, имеющее частное решение $y_1=xe^{2x}$.

Ответ: $y''-4y=0.$

246*. Составить линейное однородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами, имеющее частное решение $y_1=2+e^x$.

Ответ: $y''-y'=0.$

247*. Уравнение $y''+py'+qy=0$ (p и q действительные числа) имеет решение $y_1=e^{-\frac{x}{2}}\cos x$. Найти решение уравнения $y''+py'+qy=e^{\frac{x}{2}}$, которое при $x = 0$ удовлетворяет тем же начальным условиям, что и $y_1(x)$.

Ответ: $4y'' + 4y' + 5y = e^{\frac{x}{2}}$.

248*. Решить уравнение $y'\sin x - y\cos x = -\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2$; $\lim\limits_{x\to\infty} y(x) = 0$.

Ответ: $y = \frac{\sin x}{x}$.

249*. Решить уравнение $xy' + y - xy^2 = \frac{1}{x}$; $y(1) = 1$.

Ответ: $xy = tg\left(\ln|x| + \frac{\pi}{4}\right)$.

250*. Решить уравнение $xy' + y - x^2y^2 = 1$; $\lim\limits_{x\to 0} y(x) = 1$.

Ответ: $y = \frac{tgx}{x}$.

251*. Решить уравнение $y'x - y + y^2 = x^2$; $y(1) = 0$.

Ответ: $\left|\frac{x-y}{x+y}\right| = e^{2(x-1)}$.

252*. Решить уравнение $\frac{y'x}{\cos^2 y} + tgy = 3x^2$; $y(1) = \frac{\pi}{4}$.

Ответ: $tg\,y = x^2$.

253*. Решить уравнение $y' + y = |x|$; $|x| \le 1$.

Ответ: $y = \begin{cases} C_1e^{-x} + x - 1; & 0 \le x \le 1 \\ (C_1 - 2)e^{-x} + 1 - x; & -1 \le x < 0. \end{cases}$

254*. Решить уравнения $y' + y = e^{|x|}$; $y(0) = 1$.

Ответ: $y = \begin{cases} \frac{1}{2} + e^{-x}; & x \ge 0 \\ e^{-x}(x+1); & x < 0. \end{cases}$

255*. Решить уравнение $y''\sin 2y' + \cos(x+2y') = \cos(x-2y')$; $y(0)=0$; $y'(0)=\pi$.

Ответ: $y=\pi x$; $y=-\sin x+(\pi+2)x$.

256*. Решить уравнение $xy'+y+2xy=1$; $y(1)=1$.

Ответ: $y=\dfrac{1}{2x}+\dfrac{e^{2-2x}}{2x}$.

257*. Найти *y(x)* из уравнения $y(x)+x\int_0^x y(t)dt = x$.

Ответ: $y(x)=x\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$.

258*. Найти *y(x)* из уравнения $y'(x)+ay(t)=\int_0^1 y(t)dt$; *a>0; y(0)=1.*

Ответ: $y=e^{-ax}+\dfrac{C(1-e^{-ax})}{a}$; $C=\dfrac{1-e^{-a}}{a^2-a+1-e^{-a}}$.

259. Решить уравнение $y''(x)+y(0)y(x)=x$.

Ответ: при $y(0)=0$ $y=\dfrac{x^3}{6}+Cx$;

при $y(0)=m^2>0$ $y=m^2\cos mx + C_1\sin mx+\dfrac{x}{m^2}$;

при $y(0)=-m^2<0$ $y=C\left(e^{mx}-e^{-mx}\right)-m^2e^{-mx}-\dfrac{x}{m^2}$.

1.10 Интегралы и их приложения

Вычислить:

260. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{x+\sin^2 x}{1+\cos x}dx$ Ответ: $\pi-1-\ln 2$.

261. $\int\limits_0^1 \frac{x+tg^2 x}{(2\cos^2\frac{x}{2}-1)^2}dx$ Ответ: $\frac{\pi}{4}+\frac{1}{3}-\frac{\ln 2}{2}$.

262. $\int\limits_0^1 \arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}}dx$ Ответ: $\frac{\pi}{2}-1$.

263. $\int\limits_0^{\frac{1}{2}} \arcsin x\cdot\arccos(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}dx$ Ответ: $\frac{7\pi^3}{1296}$.

264. $\int\limits_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} (x+\cos x)\ln\frac{1+x}{1-x}dx$ Ответ: $1-\frac{3\ln 3}{4}$.

265. $\int\limits_0^{\pi} \frac{dx}{(2+\cos x)(3+\cos x)}$. Ответ: *0.*

266. $\int\limits_0^{\pi} \arccos(\sin x)dx$ Ответ: $\frac{\pi^2}{4}$.

267. $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{x^2-4x\sin x+4\sin^2 x}dx$ Ответ: $4-\frac{\pi^2}{4}$.

268. $\int\limits_0^{\pi} \sin^{2004} x\cdot\cos 2006x dx$ Ответ: 0.

269. $\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} x^{-2}(x\sin x+\cos x)dx$ Ответ: $\frac{3}{2\pi}$.

270. $\int\limits_0^2 \frac{\cos\pi x}{e^x+e}dx$ Ответ: 0.

271. $\int\limits_0^{\infty} \frac{x^{2005}}{(1+x^2)(1+x^{2005})}dx$ Ответ: $\frac{\pi}{4}$.

272. $\int\limits_0^{\infty} \frac{e^{-x^2}}{(x^2+\frac{1}{x})}dx$ Ответ: $\sqrt{\pi}$.

273*. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x+\sin x}{1+\cos x}dx$ Ответ: $\frac{\pi}{2}$.

274*. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{\cos^4 x+\cos^2 x+1}dx$ Ответ: $-\frac{\pi}{\sqrt{3}}$.

275*. $\int_0^{1,5} \frac{dx}{(9+x^2)\sqrt{9-x^2}}$ Ответ: $\frac{\sqrt{2}}{18} arctg \frac{\sqrt{6}}{3}$.

276*. $\int_1^2 \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2-2x}dx$ Ответ: $-\frac{\pi}{3}+\ln tg\frac{\pi}{12}$.

277*. $\int_0^{\frac{\pi^2}{4}} \cos^2\sqrt{x}dx$ Ответ: $\frac{\pi^2}{8}-\frac{1}{2}$.

278. $\int_{-1}^1 \frac{dx}{(e^x+1)(x^2+1)}$ Ответ: $\frac{\pi}{4}$.

279*. $\int_0^1 \frac{x\ln(x^2+x)+\ln(x+1)}{x(x+1)}dx$ Ответ: 0.

280. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(1+ctgx)dx$ Ответ: $\frac{\pi\ln 2}{8}$.

281*. $\int_0^2 \frac{x^2e^x}{(x+2)^2}dx$ Ответ: 1.

282. $\int_{-1}^1 \left(1+\left(2^{\frac{1}{2}}\right)^{tgx}\right)^{-1}dx$ Ответ: 1.

283*. $\int_{-1}^1 \frac{e^x}{(1+e^x)(x^4+1)}dx$ Ответ: $0,5\cdot 2^{-\frac{1}{2}}\left(\ln\left(2^{\frac{1}{2}}+1\right)+\frac{\pi}{4}\right)$.

284. $\int_{-\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{8}} x^{10}\sin^9 xdx$ Ответ: 0.

285*. $\int\limits_0^\infty x^2 e^{-x^2}\,dx$ Ответ: $\dfrac{\sqrt{\pi}}{4}$.

286*. $\int\limits_0^\infty \dfrac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\,dx$ Ответ: $\sqrt{\pi}$.

287*. $\int\limits_0^\infty \dfrac{\sin 2x}{x}\,dx$ Ответ: $\dfrac{\pi}{2}$.

288*. $\int\limits_0^\infty \dfrac{\sin^2 x}{x^2}\,dx$ Ответ: 0.

289*. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x\,ctgx\,dx$ Ответ: 0.

Решить уравнения:

290*. $\int\limits_{\sqrt{2}}^{x} \dfrac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \dfrac{\pi}{12}$. Ответ: 2.

291*. $\int\limits_{\ln 2}^{x} \dfrac{dx}{\sqrt{e^x-1}} = \dfrac{\pi}{6}$. Ответ: $\ln 4$.

Доказать:

292*. $\int\limits_x^1 \dfrac{dt}{1+t^2} = \int\limits_1^{\frac{1}{x}} \dfrac{dt}{1+t^2};\quad x>0.$

293*. $\int\limits_0^x e^{zx} e^{-z^2}\,dz = e^{\frac{x^2}{4}} \int\limits_0^x e^{-\frac{z^2}{4}}\,dz$.

294*. $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^b f(a+b-x)dx$.

295. Воспользовавшись равенством $\int\limits_0^\pi x f(\sin x)dx = \dfrac{\pi}{2}\int\limits_0^\pi f(\sin x)dx$, вычислить $\int\limits_0^\pi x\dfrac{\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx$.

Ответ: $\dfrac{\pi^2}{4}$.

296*. Доказать, что $\int_0^{\infty} \frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}dx = 0.$

297. Доказать, что $\int_1^e \sqrt{\ln x}dx + \int_0^1 e^{x^2}dx = e.$

298. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{2\pi} |\sin nx|dx = 4.$

299*. Вычислить $\int_0^{\infty} e^{-ax^2}dx;\ a>0$. Ответ: $\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{a}}.$

300. Оценить интеграл $J = \int_2^3 \frac{x^2}{1+x^2}dx$.

Ответ: $\frac{17}{20} < J < \frac{9}{10}.$

301. Убедившись, что $\frac{x}{e} > \ln x > 1$ при $x > e$, показать, что $0,92 < \int_3^4 \frac{dx}{\sqrt[3]{\ln x}} < 1.$

302*. Решить уравнение $\int_{-1}^1 \frac{dt}{(1+e^t)(t^2+x)} = \frac{\pi}{4}$. Ответ: $x = 1$.

303*. Пусть $f(x)$ – непрерывная функция на $[0;1]$; $f(1)-f(0)=1$. Сравнить числа *1* и $J = \int_0^1 (f'(x))^2 dx$.

Ответ: $J \ge 1$.

304*. Доказать, что $\int_0^1 \sqrt{1+x^3}dx < \frac{\sqrt{5}}{2}.$

305*. Вычислить среднее значение функции $f(x) = \sin x$ на $[0;\pi]$.

Ответ: $\frac{2}{\pi}.$

306. Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\int_1^n \ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx.$ Ответ: 2.

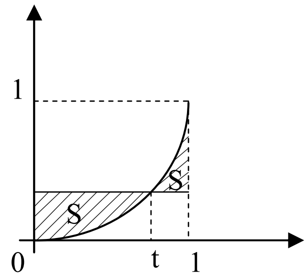
307. Четная функция $f(x)$ непрерывна на $\left[-1;1\right]$. Доказать, что

$$\int_0^{\pi} xf(\cos x)dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\cos x)dx.$$

308. Функция $y(x)$ удовлетворяет уравнению:

$y' = \frac{1}{\pi}arctg(xy+1) + \frac{1+2xy}{2+2x^2+2y^2}$; $y(0)=0$. Доказать, что для любого $x>0$ $y(x)<x$.

309. На отрезке $\left[0;1\right]$ задана функция $y=x^2$. При каком положении точки t, сумма площадей S_1 и S_2 имеет наибольшее и наименьшее значения?



Ответ: $f_{\max} = \frac{2}{3}$; $t=1$. $f_{\min} = \frac{1}{4}$; $t = \frac{1}{2}$.

310. Четная функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $\left[-1;1\right]$. Доказать, что $\int_0^{\pi} xf(\cos x)dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\cos x)dx.$

311. Функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $\left[0;1\right]$. Доказать, что

$$\int_0^{\pi} xf(\sin x)dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)dx.$$

312. Доказать, что $\int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^{\alpha})}$ не зависит от α.

313. Доказать, что уравнение $\int_0^{a} e^{-x}(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+...+\frac{x^{100}}{100!})dx = 50$ имеет корень a, где $a \in \left(50;100\right)$.

314. Доказать, что $\int_0^1 \frac{\sin x}{\sqrt{1-x^2}}dx < \int_0^1 \frac{\cos x}{\sqrt{1-x^2}}dx.$

315. При каких $a \in R$, $I_1 \geq I_2$, где $I_1 = \int_0^a xe^{0,5x^2-x}dx$, $I_2 = \int_0^a e^{0,5x^2-x}dx$.

Ответ: $a \in (-\infty; 0] \cup [2; \infty)$.

316. Доказать, что $\lim_{n\to\infty} \int_0^{2\pi} |\sin nx| dx = 4.$

1.11 Ряды

317*. Исследовать на абсолютную сходимость

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln(n+1) - \ln n}{\ln^2 n}; \quad n \geq 2.$$

318*. Исследовать на абсолютную сходимость

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{4\pi n}{n^2+n+2}.$$

319*. Доказать, что ряд $\sqrt{2} + \sqrt{2-\sqrt{2}} + \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}} + \ldots.$ сходится и его сумма $S \leq \pi$.

320*. Вычислить дробь $\frac{p}{q}$, если

$$p = 1 - 2^{-2} + 4^{-2} - 5^{-2} + 7^{-2} - 8^{-2} + \ldots.,$$
$$q = 1 + 2^{-2} - 4^{-2} - 5^{-2} + 7^{-2} + 8^{-2} - \ldots.$$

Ответ: $\frac{p}{q} = \frac{2}{3}$.

321*. Найти область сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) x^n$.

Ответ: $x \in (-1; 1]$.

322*. Найти область сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \tilde{n}\hat{\imath}\, s(n!)(x+1)^{2n} . \frac{1}{(2n)!}$.

Ответ: $x \in (-\infty; \infty)$.

323*. Найти область сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}\left(\frac{x}{2x+1}\right)^n$.

Ответ: $x\in(-\infty;-1)\cup\left(-\frac{1}{2};-\frac{1}{3}\right)$.

324*. Найти область сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}(x-1)^{3n}$.

Ответ: $x\in\left(1-\frac{1}{\sqrt[3]{e}};1+\frac{1}{\sqrt[3]{e}}\right)$.

325*. Исследовать на абсолютную сходимость и найти сумму ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{(n+1)!}.$$

Ответ: $S=4-e$.

326*. Найти $y(4)$, если $y(1)=0$ и $x=1-2y+3y^2-4y^3+\ldots$.

Ответ: $y(4)=-0,5$.

328*. Найти $y(x)$ из уравнения $y^2-4y+x^2=0$ в виде ряда Маклорена и определить интервал сходимости этого ряда, если $y(0)=0$.

Ответ: $y=2-\sqrt{4-x^2}=2\left(\frac{x^2}{8}+\sum\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots(2n-1)}{8^n\cdot n!}x^{2n}\right)$, сходится при $|x|<2$.

329*. Доказать тождество $\frac{x}{1}+\frac{x^3}{1\cdot3}+\frac{x^5}{1\cdot3\cdot5}+\ldots=e^{\frac{x^2}{2}}\cdot\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt$.

330*. Ряд $f(x)-f'(x)+f''(x)-f'''(x)+\ldots$ сходится равномерно для любого $x\in R$. Выразить сумму ряда $S(x)$ через $f(x)$, если $S(0)=0$.

Для какой функции $f(x)$ сумма $S(x)=x^2$?

Ответ: $S(x)=e^{-x}\int_0^x f(t)e^t dt$, $f(x)=x^2+2x$.

2 УКАЗАНИЯ К РЕШЕНИЯМ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ

1. Воспользоваться тем, что при $k \geq 1 \quad k! = (k+1)k! - k!$.
2. Представить левую часть уравнения в виде $(x^2-2)^2 = 5x^3 + 7x$.
3. Домножить данное выражение на $1 = \frac{1}{2}\left(3^{2^0} - 1\right)$..
4. В числителе вынести за скобки $1 \cdot 2 \cdot 3$, а в знаменателе вынести $1 \cdot 3 \cdot 9$.
5. Воспользоваться тем, что если $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, то $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$, а так же тем, что $1^3 + 2^3 + \ldots + m^3 = \frac{m^2(m+1)^2}{4}$.
6. Данный ряд обозначить S и вычесть из него ряд $x \cdot S$. Затем использовать формулу суммы бесконечной геометрической прогрессии.
7. Воспользоваться тем, что $n! < (n+1)^n$, отсюда $(n!)^n \cdot n! < (n!)^n \cdot (n+1)^n$ или $(n!)^{n+1} < \sqrt[n+1]{(n+1)!}$. Извлечем корень степени *n(n+1)* и сделаем вывод.
8. Домножить числитель и знаменатель дроби на $1 - \tilde{o} \neq 0$.
9. Воспользоваться формулой суммы *n* членов геометрической прогрессии.
10. Рассмотреть случай $m = 0$, затем $m \geq 1$. Воспользоваться тем, что

$$\left(1+\frac{a}{b}\right)^m + \left((1+\frac{b}{a}\right)^m \geq 2\sqrt{\left(1+\frac{a}{b}\right)^m\left(1+\frac{b}{a}\right)^m}.$$

11. Вынести a_i из всех скобок.
12. Воспользоваться тем, что

$$1+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\ldots+\frac{1}{n^3} < 1+\frac{1}{2^3-2}+\frac{1}{3^3-3}+\ldots+\frac{1}{n^3-n} =$$
$$= 1+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{(n-1\cdot n\cdot(n+1))}.$$

13. Положить $y = x$. Тогда $f(x) = f^2(x)$. Если $x \neq 0$, то $f(x) = 0$ или $f(x) = 1$.

Если $x = a \neq 0 \quad f(a) = 0$ и $a \cdot f(y) = 0$ для всех y, т. е. $f(x) \equiv 0$.

Если $x = a \neq 0 \quad f(a) = 1$, тогда $y = y \cdot f(y)$, т. е. $f(y) = 1$ при $y \neq 0$, а при $y = 0 \qquad f(0) = C$. Итак, $f(x) \equiv 0$.

14. Раскрыть скобки и приравнять коэффициенты при одинаковых степенях.
15. Воспользоваться тем, что

$$n^3 + 3n^2 - n - 3 = (n-1)(n+1)(n+3).$$

16. Представить неравенство в виде $\dfrac{\sqrt[n+1]{n+1}}{\sqrt[n]{n}} \le 1$. Корни привести к одному показателю.
17. Воспользоваться методом доказательства от противного.
18. Воспользоваться тем, что

$$\sin 1 = \sin(k-(k-1)) = \sin k \cdot \cos(k-1) - \cos k \cdot \sin(k-1).$$

19. а) ввести функцию $y = \sqrt{2} + \sqrt{3}$, откуда $\sqrt{3} = y - \sqrt{2}$. Последнее равенство возвести в квадрат; б) ввести функцию $z = \sqrt{2} + \sqrt[3]{3}$, отсюда $\sqrt[3]{3} = z - \sqrt{2}$, которое возвести в куб.
20, 21, 22. Воспользоваться методом индукции (см. раздел 4.1).
23. Воспользоваться тем, что $2^n \ge n+1$ при $n \ge 1$. Затем применить метод математической индукции.
24. Использовать неравенство Коши (см. 4.5), положив

$$a_1 = a_2 = n, \;\; a_3 = \ldots = a_n = 1.$$

25. Применить неравенство Коши (см. 4.5) к числам

$$\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \ldots, \frac{1}{a_n}.$$

26. Рассмотреть функцию $f(x) = \sqrt{x}$, положив затем

$$x_0 = a^2; \;\; \Delta x = x.$$

Затем использовать формулу $f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x.$
27. Преобразовать сумму к виду

$$S = 2(1 + (1+10) + (1+10+10^2) + (1+10+10^2+\ldots.+10^{k+1})).$$

Затем применить формулу суммы k членов геометрической прогрессии.

28. Вначале рассмотреть случай, когда n четное, тогда

$$S_n = (1^2 - 2^2) + (3^2 - 4^{2)} + ... + ((2k-1)^2 - (2k)^2).$$

Применить формулу разности квадратов и найти сумму. Для случая, когда n нечетное воспользоваться тем, что $S_n = S_{n-1} + n^2$.

29. Вначале рассмотреть случай, когда n четное. Тогда

$$S_n = (1-2) + (3-4) + ... + (2k-1-2k) = -1-1-...-1 = -\frac{n}{2}.$$

При n нечетном $S_n = S_{n-1} + n$.

30. Раскрыть квадраты суммы и применить формулу суммы членов геометрической прогрессии при $q = x^2$.

31. Сумму представить в виде

$$S = x + (x^2 + x^2) + (x^3 + 2x^3) + ... + (x^n + (n-1)x^n)$$

$$= x + x^2 + ... + x^n (x + 2x^2 + ... + nx^n) - nx^{n+1} = \frac{x(x^n - 1)}{x-1} - S \cdot x - nx^{n+}.$$

Из этого уравнения найти искомую сумму.

32. Разложить каждую дробь на простейшие дроби.

33. Числа 1; $\frac{n}{2}$; $\frac{n(n-1)}{2}$ образуют арифметическую прогрессию, потому $n = \frac{n(n-1)}{8} + 1 \Rightarrow n^2 - 9n + 8 = 0 \Rightarrow n_1 = 8;\ \ n_2 = 1$.

Второй корень не имеет смысла. Общий член разложения бинома $T_{k+1} = C_8^k \sqrt{x}^k \left(\frac{1}{2\sqrt[4]{x}} \right)^{8-k} = 2^{k-8} C_8^k x^{\frac{3k-8}{4}}$. Рациональными будут те члены разложения, для которых $\frac{3k-8}{4}$ – целые положительные числа, т. е. $k = 4;\ \ 8$.

34. Перемножить два комплексных числа и приравнять действительную часть нулю.

35. Раскрыть скобки и приравнять действительные и мнимые части.

36. Применить к правой части формулы сокращенного умножения.

37. а), б), в) домножить числитель и знаменатель дроби на выражение, сопряженное знаменателю.

38. Решать квадратные уравнения, преобразовывая при этом дискриминант к полному квадрату.
39. а), б) перейти к тригонометрической форме; в) перейти к половинному углу.
40. Убедиться, что $z=\cos\theta\pm i\sin\theta;\ \frac{1}{z}=\cos\theta\mp i\sin\theta.$ Воспользоваться формулой Муавра.
41. а), б) воспользоваться разложением по формуле бинома Ньютона (см. 4.11) $(1-i)^n$; в) воспользоваться разложением по формуле бинома Ньютона $\left(1+i\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^n$.
42. Пусть $\grave{O}=\sin x+\sin 2x+....+\sin nx;\ \ S=\cos x+\cos 2x+...+\cos nx.$ Ввести $z=\cos\frac{x}{2}+i\sin\frac{x}{2}$ и найти $z^2,z^4,...$ Выразить $S+Ti$ через $z^2,z^4,...$ и воспользоваться формулой суммы n членов геометрической прогрессии.
43. Пусть $z=\cos\frac{\pi}{11}+i\sin\frac{\pi}{11}.$ Далее, как в № 35.
44. Воспользоваться тем, что $\cos^2\alpha=\frac{1}{2}+\frac{\cos 2\alpha}{2}.$
45. Воспользоваться тем, что $\sin^2\alpha=\frac{1}{2}-\frac{\cos 2\alpha}{2}.$
46. Воспользоваться формулами:
$$\cos^3\alpha=\frac{\cos 3\alpha}{4}+\frac{3\cos\alpha}{4};\ \ \sin^3\alpha=\frac{3\sin\alpha}{4}-\frac{\sin 3\alpha}{4}.$$
47. Использовать второй замечательный предел.
48. Вычесть из второго столбца первый.
49. Вычесть первую строку из второй и третьей.
50. К первому и третьему столбцам прибавить второй, затем из второй строки отнять первую.
51. Привести определитель к виду $-x^2\cdot(x^2-1)^2$.
52. Привести определитель к виду $3abc-a^3-b^3-c^3$ и воспользоваться тем, что $\sqrt[3]{a^3b^3c^3}\le\frac{a^3+b^3+c^3}{3}.$
53. Определитель привести к виду *(x -1)(4 – 2x)* и решить иррациональное неравенство.

54. Из каждого столбца вычесть первый столбец.
55. Все столбцы прибавить к первому.
56. Определитель привести к виду $(\alpha+\beta)(\alpha^2+\beta^2-\alpha\beta)-3\alpha\beta-1$ и воспользоваться теоремой Виета (см. 4.2).
57. Определитель привести к виду $3\alpha\beta\gamma-\alpha^3-\beta^3-\gamma^3$ и воспользоваться теоремой Виета для кубического уравнения (см. 4.2).
58. Воспользоваться теоремой Виета для кубического уравнения (см. 4.2).
59. Привести определитель к виду $(\hat{a}-\grave{a})(\tilde{o}^2-\hat{a}\tilde{o}-\grave{a}\tilde{o}+\grave{a}\hat{a})$. Рассмотреть два случая: *а < в и а > в.*
60. Вычесть из второй и третьей строк первую.
61. Прибавить к первому столбцу второй, третий и четвертый; вынести общий множитель за знак определителя и воспользоваться теоремой Виета для уравнения четвертой степени.
62. От каждого столбца, начиная с последнего, отнимаем предыдущий; прибавляем к каждой строке, начиная с последней, первую строку; разлагаем по элементам последней строки.
63. Смотри указания к задаче № 62.
64. Смотри указания к задаче № 62.
65. Из второй и третьей строк вычесть первую.
66. Третью строку вычесть из первой и второй.
67. Из третьего столбца вычесть первый.
68. Смотри указания к № 70.
69. Третью строку вычесть из первой и второй.
70. Первый столбец умножить на 1000, второй на 100, третий на 10 и прибавить к последнему столбцу.
71. Разложить по элементам первой строки и показать, что $\Delta_n = x\Delta_{n-1}-\Delta_{n-2}$.
73. Заметить, что при $x=1; x=2; ...; x=n-1$ определитель имеет две одинаковых строки.
74. Заметить, что при $x=0; x=1; ...; x=n-2$ определитель имеет две одинаковых строки.
75. Вычесть первую строку из остальных строк и заметить, что $\Delta_1 = 1-x_1y_1$; $\Delta_2=(y_2-y_1)(x_2-x_1)$; $\Delta_n=0$ при $n>2$.
76. Доказать, что $\Delta_n=\Delta_{n-1}$; $n\geq 2$.
77. Вычесть первую строку из остальных.
78. Использовать свойство определителя.
79. Прибавить первую строку к остальным.

80. Вычесть первую строку из остальных.

81. Разложить определитель Δ_n по элементам первой строки, получить рекуррентную формулу
$\Delta_n = (\alpha+\beta)\Delta_{n-1} - \alpha\beta\Delta_{n-2}$; $n \ge 3$. Вычислить Δ_2 и Δ_3 и применить метод математической индукции (см. 4.1).

82. Вычесть из первого столбца остальные, умножив их, соответственно, на *1, 2, …, n.*

83. Первую строку вычесть из остальных.

84. Вторую строку вычесть из остальных.

86. Убедиться в том, что $A^2 = -E$, где E – единичная матрица.

88. Дополнить слева матрицу до полного квадрата и перейти в полученном равенстве к определителям.

89. Найти несколько первых степеней матрицы и использовать метод математической индукции (см. 4.1).

90. Найти несколько первых степеней матрицы и использовать метод математической индукции (см. 4.1).

91. Записать левую часть в виде матрицы из № 89.

92. Рассмотреть матрицу $A = \begin{pmatrix} a & S-a \\ b & S-b \end{pmatrix}$. Найти $A^2; A^3$ и применить метод индукции (см. 4.1).

95. Записать левую часть в виде произведения.

98. Записать $AX = AXE$.

99. Записать $AX = AXE$ и перейти к определителям в преобразованном уравнении.

100. Применить метод математической индукции (см. 4.1).

101. Применить метод Гаусса.

102. Рассмотреть систему как линейную относительно неизвестных и учесть, что $x^2 \ge 0$.

103. Исследовать систему и рассмотреть случаи: $\Delta \ne 0$ и $\Delta = 0$.

106. Смотреть указание к № 103.

107. Положить $x_1 = \cos \pi x$; $y_1 = 2^y$; $z_1 = z^2$ и решить полученную систему.

108. Сложить все уравнения системы и найти сумму всех неизвестных. Последовательно вычесть из найденной суммы уравнения исходной системы и найти решение.

109. Сложить все уравнения, а затем вычесть из *к*-го уравнения $(к+1) - i$; $i = \overline{1, n-1}$.

110. Выразить медианы через векторы, совпадающие с двумя из сторон треугольника АВС.

111. Использовать свойство медиан треугольников в точке их пересечения.

112. Вынести вектор $\overline{\grave{A}\tilde{N}}$ за скобки.

113. Вынести вектор $\overline{\grave{A}\tilde{N}}$ за скобки.

114. Записать вектор $\overline{\hat{A}\tilde{N}}$ как разность векторов.

115. Выразить медианы через векторы, совпадающие с двумя из сторон треугольника ABC.

116. Использовать формулу $\left|\overline{\grave{A}\tilde{N}}\right| = \sqrt{\overline{\grave{A}\tilde{N}}^2}$.

117. Записать $\overline{BD}$ в виде $\overline{BD} = \alpha \cdot \overline{AC} - \overline{AB}$ и найти α.

118. Записать $\overline{BD}$ в виде $\overline{BD} = \alpha \cdot \overline{AC} - \overline{AB}$ и найти α.

119. Использовать ортогональность векторов $\overline{AB}$ и $\overline{BC}$, $\overline{BO}$ и $\overline{OC}$, где O – центр квадрата.

120. Для нахождения координат третьей вершины квадрата использовать равенство и перпендикулярность смежных сторон квадрата. Для нахождения координат четвертой вершины можно использовать свойство диагоналей квадрата.

121. Поместить начало координат в центр окружности. Выразить координаты векторов слагаемых через координаты произвольной точки окружности.

135. Выразить площадь треугольника через координаты т. $C(x; y)$ и использовать ее принадлежность к окружности.

136. Найти точку B и угол B как угол между прямыми, на которых лежат катет BC и гипотенуза.

137. Найти координаты вершин треугольника, используя свойство его медиан, и точку пересечения серединных перпендикуляров к двум его сторонам.

142. Разложить дроби на простейшие.

143. Воспользоваться тем, что $k^2 + 3k + 1 = (k^2 + 3k + 2) - 1$, и разделить почленно.

148. Воспользоваться тем, что

$$k^3 + 6k^2 + 11k + 5 = (k+1)(k+2)(k+3) - 1.$$

155. Воспользоваться вторым замечательным пределом.

156. Смотри указание к № 155.

159. Воспользоваться тем, что $tgx \approx x + \frac{x^3}{3}$, а $\sin x \approx x - \frac{x^3}{6}$ при $x \to 0$.

160. Представить числитель в виде квадратного трехчлена.

161. Смотри указания к № 155.

162. Найти предел их отношения при $\tilde{o} \to \infty$, воспользовавшись правилом Лопиталя.

163. Рассмотреть случаи, когда $n = 1,\ n = 2, \ldots$ Воспользоваться ограниченностью, монотонностью полученной последовательности и теоремой Вейерштрасса.

164. Преобразовать числитель и знаменатель дроби, вынося x за скобки; воспользоваться тем, что $\frac{\sin x}{x} \to 0;\ \frac{\cos x}{x} \to 0$ при $x \to \infty$.

165. Вынести в числителе и знаменателе $\mathring{a}^{\div}$ за скобки.

166. Воспользоваться формулой преобразования разности косинусов в произведение, а также ограниченностью функции $\sin x$.

167. Смотри указания к № 166.

168. Воспользоваться формулой преобразования разности синусов в произведение, а также ограниченностью функции $\cos x$.

169. Домножить числитель и знаменатель дроби на выражение, сопряженное знаменателю и применить правило Лопиталя.

170. Воспользоваться правилом Лопиталя, предварительно найдя производную числителя методом логарифмирования.

171. Воспользоваться правилом Лопиталя дважды.

172. Смотри указания № 171.

173. Найти предел правой части по правилу Лопиталя.

174. Воспользоваться формулой преобразования разности синусов в произведение.

175. Смотри указание к № 174.

176. Сделать замену $\frac{1}{x} = t$ и воспользоваться вторым замечательным пределом.

177. Воспользоваться вторым замечательным пределом и правилом Лопиталя.

178. Воспользоваться правилом Лопиталя и тем, что

$$1 + 2 + \ldots + n = \frac{(1+n)n}{2}.$$

179. Смотри указания к № 178.
180. Смотри указания к № 166.
182. Умножить и разделить функцию на $\sin\frac{x}{2^n}$.
183. Воспользоваться формулой $arctgb - arctga = arctg\frac{b-a}{1-ab}$.
184. Представить функцию в виде $f(x) = e^{\frac{\ln x}{x}}$.
185. Представить функцию в виде $f(x) = 2x^2 - 1$.
186. Воспользоваться тем, что при $-\frac{\pi}{2} \le \tilde{o} \le \frac{\pi}{2}$ $y = x$, а при $\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{3\pi}{2}$ $y = \pi - x$.
187. Представить функцию в виде $f(x) = e^{x \cdot \ln x}$ и провести исследование.
189. Использовать метод доказательства от противного.
190. Найти производную и вычислить ее при $x = \frac{\pi}{9}$.
191. Разложить $\cos 2x$ в степенной ряд.
192. Исследовать функцию $\phi(x) = e^x - 1 - x$.
194. Сделать замену $\frac{1}{x} = t$.
195. Найти производную функции.
196. Воспользоваться условиями перегиба графика функции.
197. Использовать замену $x = \sqrt{3}tgt$.
198. Если $P(x)$ имеет кратный корень x_0, то этот корень имеют и многочлены $P'(x)$ и $q(x) = P(x) - P'(x) = \frac{x^n}{n!}$. Последний многочлен имеет единственный корень $x = 0$, который не является корнем исходного многочлена.
199. Рассмотреть функцию $f(t) = t + x - e^{-(t^{20}+x^2)}$.
200. Из условия следует, что $f(t) = 2 - tf(t^2)$; $t \in [-1;1]$. Подставляем $t = 0$; $t = \Delta x$ и $t = (\Delta x)^2$, получаем $f(0) = 2$.
Используем $\Delta f(0) = f(\Delta x) - f(0) = -2 \cdot \Delta x + (\Delta x)^3 f(\Delta x)^4$.
230. Домножим уравнение на $y \neq 0$. Получим уравнение в полных дифференциалах.

231. Сделать замену $y' = t$. Решить уравнение
$t^{15} + tg10t - 2007 = 0,$ которое имеет множество корней.
232. Сделать замену $y + \cos x = z.$
233. Сделать замену $y + x^2 = z.$
234. Сделать замену $y + x^2 = z.$
235. Сделать замену $y + x^2 = z.$
236. Привести к виду $(x^2 y^2 + 1)(y + xy') = 0.$
237. Сделать замену $x - \sin y = z.$
238. Привести к виду $x^2 \ln y - x = yx'$ и решить уравнение Бернулли.
239. Сделать замену $y + \ln x = u.$
240. Заменой $y = \frac{1}{z}$ свести уравнение к однородному.
241. Понизить порядок уравнения.
242. Понизить порядок уравнения.
243. Характеристическое уравнение должно иметь комплексные корни.
244. С помощью теоремы Виета составить характеристическое уравнение.
245. Составить характеристическое уравнение.
246. Составить характеристическое уравнение.
247. Составить характеристическое уравнение.
248. Использовать равенства $\left(\frac{y}{\sin x}\right)' = \frac{y'\sin x - y\cos x}{\sin^2 x}$; $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}.$
Тогда уравнение примет вид $\left(\frac{y}{\sin x}\right)' = \left(\frac{1}{x}\right)'.$
249. Уравнение привести к виду $(xy)' = xy^2 + \frac{1}{x};\ \ x \neq 0;\ \ xy = u.$
250. Решение искать в виде $u = xy.$
251. Поскольку $x^2 \neq 0,$ уравнение приведем к виду $\left(\frac{y}{x}\right)' + \left(\frac{y}{x}\right)^2 = 1.$
252. Сделать замену $tg\, y = u.$
253. Рассмотреть два случая: $-1 \le x < 0$ и $0 < x < 1.$
254. Рассмотреть три случая: $x > 0;\ \ x < 0;\ \ x = 0.$

255. Разность косинусов представить в виде произведения.
256. Сделать замену $z = xy$.
257. Интеграл обозначить $u(x)$ и решить линейное уравнение $u'(x) + xu(x) = x$
258. Интеграл обозначить через C и решить линейное уравнение.
273. Разложить на сумму интегралов и в первом применить метод интегрирования по частям.
274. Выделить полный квадрат в знаменателе.
275. Сделать замену $x = 3\sin t$.
276. Избавиться от иррациональности в знаменателе.
277. Сделать замену $\sqrt{x} = t$ и понизить степень косинуса.
279. Применить теорему логарифмирования произведения и разбить на два интеграла.
281. Разложить x^2 по степеням $(x+2)$ и применить интегрирование по частям.
283. Применить формулу $\int\limits_{-a}^{a} f(x)dx = \int\limits_{0}^{a} \left(f(x) + f(-x) \right) dx$.
285. Интегрировать по частям.
286. Сделать замену $x = t^2$.
287. Использовать интеграл Дирихле (см. 4.9).
288. Интегрировать по частям.
289. Интегрировать по частям.
290. Сделать замену $x = \dfrac{1}{\cos x}$.
291. Сделать замену $e^x - 1 = t^2$.
292. Сделать замену $t = \dfrac{1}{z}$.
293. Сделать замену $z = \dfrac{x+t}{2}$.
294. Сделать замену $a + b - x = t$.
296. Разбить на два интеграла, выбрав в качестве точки разбиения $x=1$, во втором сделать замену $x = \dfrac{1}{y}$.
299. Воспользоваться интегралом Пуассона (см. 4.8), сделав замену $\sqrt{a}x = t$.
302. Смотреть указание к № 283.

303. Воспользоваться неравенством Коши-Буняковского (см. 4.6).
304. Воспользоваться неравенством Коши-Буняковского (см. 4.6).

305. Воспользоваться формулой $S=\dfrac{\int\limits_a^b f(x)dx}{b-a}$.

317. Записать общий член ряда в виде $a_n=\dfrac{(-1)^n\ln\frac{n+1}{n}}{\ln^2 n}$ и рассмотреть ряд $|a_n|$, в сходимости которого убедиться с помощью признака сравнения.
318. Воспользоваться эквивалентностью синуса бесконечно малого аргумента самому аргументу.
319. Воспользоваться тем, что $\sqrt{2}=2\tilde{n}os\dfrac{\pi}{4}$, тогда $a_n=2\sin\dfrac{\pi}{2^{n+1}}$.
320. Оба ряда сходятся абсолютно. Найти разность $q-p$.
321. Воспользоваться признаком Даламбера.
322. Воспользоваться признаком Даламбера.
323. Воспользоваться признаком Даламбера.
324. Воспользоваться радикальным признаком Коши.
325. Записать числитель в виде $2(n+1)-3$ и использовать ряд Маклорена для $\mathring{a}^{\tilde{o}}$.(раздел 4.13).
326. Почленно продифференцировать ряд и найти $y(x)$ с учетом $y(1)=0$.
327. Решить сначала уравнение как квадратное относительно $y(x)$ с учетом $y(0)=0$.
328. Пусть $S(x)$ – сумма ряда. Умножить обе части тождества на $e^{-\frac{x^2}{2}}$ и продифференцировать его, получив дифференциальное уравнение для нахождения $S(x)$.
329. Используя возможность почленного дифференцирования ряда, получить дифференциальное уравнение для нахождения его суммы $S(x)$.

3 ЗАДАЧИ ВСЕУКРАИНСКИХ ОЛИМПИАД (УСЛОВИЯ И РЕШЕНИЯ)

Задача 1

Решить уравнение $\lim\limits_{n\to\infty} arctg(x+arctg(x+...arctgx)))=\dfrac{\pi}{4}.$

Решение

Пусть $a_n = arctg(x+arctg(x+...arctgx)))$. Тогда

$$a_{n+1} = arctg(x+a_n), n\in N. \qquad (1)$$

Из формулы (1) следует, что последовательность $\{a_n\}$ является ограниченной и монотонной (возрастающей при $x > 0$, убывающей при $x < 0$, постоянной при $x = 0$). Таким образом, согласно теореме Вейерштрасса (раздел 4.3), последовательность $\{a_n\}$ имеет конечный предел a, который по условию задачи должен быть равен $\dfrac{\pi}{4}$, т. е. $\grave{a}=\dfrac{\pi}{4}.$

Переходя к пределу при $n\to\infty$ в (1), получаем $a = arctg(x+a)$. Отсюда $x = tga - a$, или, окончательно, $x = 1-\dfrac{\pi}{4}.$

Ответ: $x = 1-\dfrac{\pi}{4}.$

Задача 2

Могут ли все шесть членов в разложении определителя третьего порядка быть одновременно положительными?

Решение

Если среди элементов определителя есть нули, то в разложении этого определителя есть члены, равные нулю, т. е. неположительные. Предположим, что среди элементов определителя нет нулей. Рассмотрим разложение произвольного определителя 3-го порядка:

$$\begin{vmatrix} \grave{a}_{11} & \grave{a}_{12} & \grave{a}_{13} \\ \grave{a}_{21} & \grave{a}_{22} & \grave{a}_{23} \\ \grave{a}_{31} & \grave{a}_{32} & \grave{a}_{33} \end{vmatrix} = \qquad (1)$$

$$= \grave{a}_{11}\grave{a}_{22}\grave{a}_{33} + \grave{a}_{12}\grave{a}_{23}\grave{a}_{31} + \grave{a}_{13}\grave{a}_{21}\grave{a}_{32} - \grave{a}_{13}\grave{a}_{22}\grave{a}_{31} - \grave{a}_{12}\grave{a}_{21}\grave{a}_{33} - \grave{a}_{11}\grave{a}_{23}\grave{a}_{32}.$$

Из очевидного равенства

$$(\grave{a}_{11}\grave{a}_{22}\grave{a}_{33}) \cdot (\grave{a}_{12}\grave{a}_{23}\grave{a}_{31}) \cdot (\grave{a}_{13}\grave{a}_{21}\grave{a}_{32}) = -(-\grave{a}_{13}\grave{a}_{22}\grave{a}_{31}) \cdot (-\grave{a}_{12}\grave{a}_{21}\grave{a}_{33}) \cdot (-\grave{a}_{11}\grave{a}_{23}\grave{a}_{32})$$

следует, что при $a_{ij} \neq 0$ в разложении (1) есть члены противоположных знаков, т. е. как положительные, так и отрицательные.

Ответ: не могут.

Задача 3

В продажу поступили одинакового диаметра трубы трех типов длиной 4, 7, и 10 м стоимостью 4, 6 и 9 ден. ед., соответственно. Сколько труб каждого типа можно купить ровно за 100 ден. ед., чтобы суммарная длина их была наибольшей?

Решение

Пусть x, y, z – количество труб первого, второго и третьего типов соответственно. Из условия задачи следует, что необходимо найти целые неотрицательные x, y, z, удовлетворяющие условию

$$4x + 6y + 9z = 100, \qquad (1)$$

и при которых функция

$$f = 4x + 7y + 10z \qquad (2)$$

принимает наибольшее значение.

С учетом (1) функцию (2) можно представить в виде $f = 100 + (y + z)$. Это значит, что функция принимает наибольшее значение, когда $(y + z)$ принимает наибольшее значение. Из уравнения (1) имеем

$$4x + 3z + 6(y + z) = 100,$$

т. е. $6(y + z) \leq 100$ или $y + z \leq 16$, поскольку $(y + z)$ – целое. Следовательно, наибольшее целое значение $(y+z)$ равно 16. При этом уравнение (1) принимает вид $4x+3z=4$. Отсюда, $z=0; x=1$ и поэтому $y=16$.

Ответ: 1 труба длиною 4 м и 16 труб длиною 7 м.

Задача 4

Доказать, что функция f является периодической, если существует такое $c \neq 0$, что для любого $x \in D(f)$ $(x+c),(x-c) \in D(f)$ и выполняется условие

$$f(x+c)=\frac{2005^2}{2005-f(x)}.$$

Решение

Из условия задачи следует, что

$$f(x+2c)=\frac{2005^2}{2005-f(x+c)},$$

$$f(x+3c)=\frac{2005^2}{2005-f(x+2c)}=\frac{2005^2}{2005-\dfrac{2005^2}{2005-f(x+c)}}=$$

$$=\frac{2005^2(2005-f(x+c)}{-2005\cdot f(x+c)}=\frac{2005^2(2005-\dfrac{2005^2}{2005-f(x)}}{-2005\cdot\dfrac{2005^2}{2005-f(x)}}=$$

$$=\frac{2005^2(-2005f(x))}{-2005^3}=f(x).$$

А это значит, что функция $f(x)$ является периодической с периодом $3c$, что и требовалось доказать.

Задача 5

Четная функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[-1;1]$. Доказать, что

$$\int_0^{\pi} xf(\cos x)dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\cos x)dx.$$

Решение

Используя замену переменной интегрирования, а также четность функции $f(x)$, последовательно имеем

$$\int_0^{\pi} xf(x)dx = \left[x = t + \frac{\pi}{2}, dx = dt\right] = -\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (t + \frac{\pi}{2})f(\cos(t + \frac{\pi}{2}))dt =$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} tf(-\sin t)dt + \frac{\pi}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(-\sin t)dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} tf(\sin t)dt + \frac{\pi}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(\sin t)dt =$$

$$\frac{\pi}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(\sin t)dt = \left[t = x + \frac{\pi}{2}, dt = dx\right] = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin(x + \frac{\pi}{2}))dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\cos x)dx,$$

что и требовалось доказать.

Задача 6

Доказать, что если корни квадратного трехчлена принадлежат отрезку $[-1;1]$, причем $\max\limits_{|x\le 1|}|P(x)| = 1,$ то справедливо неравенство $\max\limits_{|x\le 1|}|P'(x)| \ge 1.$

Решение

Из условия задачи следует, что $P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$, где $-1 \le x_1 \le x_2 \le 1,$ причем без ограничения общности можно считать, что $a > 0.$ Тогда $P'(x) = a(2x - x_1 - x_2).$

Функция $|P(x)|$ на $[-1;1]$ принимает наибольшее значение либо в т. $x = 1$ $(x = -1),$ либо в т. $x = x_0 = \dfrac{x_1 + x_2}{2}.$

1) Пусть $\max\limits_{|x\le 1|}|P(x)| = P(1).$ Тогда из соотношения $P(1) = 1$ следует, что $a = \dfrac{1}{(1 - x_1)(1 - x_2)}$ и поэтому

$$P'(1)=\frac{2-x_1-x_2}{(1-x_1)(1-x_2)}=\frac{1}{1-x_1}+\frac{1}{1-x_2}\geq\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1.$$

Аналогично рассматривается случай, когда $|P(x)|$ принимает максимальное значение в т. $x=-1$.

2) Пусть $\max\limits_{|x\leq 1|}|P(x)|=\left|P\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\right|\Rightarrow -1=P\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right).$

Тогда $a=\dfrac{4}{(x_2-x_1)^2}$ и, следовательно,

$$P'(x_2)=\frac{4}{(x_2-x_1)^2}(x_2-x_1)=\frac{4}{x_2-x_1}\geq\frac{4}{2}=2.$$

Таким образом, в обоих случаях $\max\limits_{|x\leq 1|}|P'(x)|\geq 1$, что и требовалось доказать.

Задача 7

Вычислить интеграл $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x^{2005}dx}{(1+x^2)(1+x^{2005})}$.

Решение

$$\int_0^{+\infty}\frac{x^{2005}dx}{(1+x^2)(1+x^{2005})}=\int_0^{1}\frac{x^{2005}dx}{(1+x^2)(1+x^{2005})}+\int_1^{+\infty}\frac{x^{2005}dx}{(1+x^2)(1+x^{2005})}. \qquad (1)$$

Преобразуем второй интеграл в правой части формулы (1) к интегралу по отрезку $[0;1]$:

$$\int_1^{+\infty}\frac{x^{2005}dx}{(1+x^2)(1+x^{2005})}=\left[x=\frac{1}{t}\right]=\int_1^{0}\frac{-dt}{t^{2005}t^2\left(1+\frac{1}{t^2}\right)\left(1+\frac{1}{t^{2005}}\right)}$$

$$=\int_0^{1}\frac{dt}{(1+t^2)(1+t^{2005})}.$$

Таким образом

$$\int_1^{+\infty}\frac{x^{2005}dx}{(1+x^2)(1+x^{2005})}=\int_0^{1}\frac{dx}{(1+x^2)(1+x^{2005})}. \qquad (2)$$

Подставляя (2) в (1), получаем

$$\int_0^{+\infty}\frac{x^{2005}dx}{(1+x^2)(1+x^{2005})}=\int_0^1\frac{x^{2005}dx}{(1+x^2)(1+x^{2005})}+\int_0^1\frac{dx}{(1+x^2)(1+x^{2005})}=$$

$$=\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}=arctgx\Big|_0^1=\frac{\pi}{4}.$$

Ответ: $\frac{\pi}{4}$.

Задача 8

Решить дифференциальное уравнение

$$(x^2-y)dx+x(y+1)dy=0.$$

Решение

Преобразуем данное уравнение следующим образом:

$$x^2dx-ydx+xydy+xdy=0 \text{ или } x\left(d\frac{x^2}{2}+d\frac{y^2}{2}\right)+xdy-ydx=0.$$

Очевидно, что $x=0$ – решение данного уравнения.

Пусть $x\neq 0$. Тогда дифференциальное уравнение может быть приведено к виду $\frac{1}{x}d\frac{x^2+y^2}{2}+\frac{xdy-ydx}{x^2}=0$ или

$$\frac{1}{x}d\frac{x^2+y^2}{2}+d\frac{y}{x}=0. \qquad (1)$$

Сделаем замену $u=\frac{x^2+y^2}{2}$, $v=\frac{y}{x}$. Тогда $x=\pm\sqrt{\frac{2u}{1+v^2}}$ и уравнение (1) принимает вид $\pm\frac{\sqrt{1+v^2}}{\sqrt{2u}}du+dv=0$ или

$$\pm\frac{du}{\sqrt{2u}}+\frac{dv}{\sqrt{1+v^2}}=0. \qquad (2)$$

Интегрируя уравнение (2), получаем $\pm\sqrt{2u}+\ln\left(v+\sqrt{1+v^2}\right)=C$,
где C – произвольная постоянная.
Перейдем к старым переменным и получим ответ.

Ответ: $\pm\sqrt{x^2+y^2}+\ln\left(\dfrac{y\pm\sqrt{x^2+y^2}}{x}\right)=C.$

Задача 9

Последовательность положительных чисел $\{a_n\}$ удовлетворяет условию $a_n^2<a_n-a_{n-1}, n\in N$. Доказать, что данная последовательность является сходящейся и найти ее предел.

Решение

Из условия задачи следует, что $a_n>0$ и $a_{n+1}<a_n$, т. е. последовательность $\{a_n\}$ является убывающей и ограничена снизу, а значит, имеет конечный предел $\grave{A}$. Переходя к пределу при $n\to\infty$ в исходном неравенстве, получаем $A^2\le A-A$ или $A^2\le 0$. Отсюда $A=0$.

Ответ: предел равен 0**.**

Задача 10

Дана треугольная пирамида $SABC$ с прямыми плоскими углами при вершине S. Найти множество точек *M*, для которых выполняется условие $MA^2+MB^2+MC^2=3MS^2$.

Решение

Выберем прямоугольную декартову систему координат $Oxyz$ так, чтобы вершина S тетраэдра оказалась в начале координат, а точки *A, B, C* на осях Ox, Oy, Oz соответственно:
$S(0,0,0)$, $A(x_A,0,0)$, $B(0,y_B,0)$, $C(0,0,z_C)$.

Пусть $M(x,y,z)$ – произвольная точка, удовлетворяющая условию

$$MA^2+MB^2+MC^2=3MS^2. \qquad (1)$$

В координатной форме уравнение (1) имеет вид

$$(x-x_A)^2+y^2+z^2+(y-y_B)^2+z^2+x^2+y^2+(z-z_C)^2=$$
$$=3x^2+3y^2+3z^2$$

или

$$x_A\left(x-\frac{x_A}{2}\right)+y_B\left(y-\frac{y_B}{2}\right)+z_C\left(z-\frac{z_C}{2}\right)=0\,. \qquad (2)$$

Таким образом, точка $M(x,y,z)$ удовлетворяет уравнению плоскости (2). Наоборот, произвольная точка плоскости (2) удовлетворяет соотношению (1). Следовательно, искомым множеством является плоскость, проходящая через точку $\left(\frac{x_A}{2},\frac{y_B}{2},\frac{z_C}{2}\right)$ с нормальным вектором $\overline{n}=\{x_A,y_B,z_C\}$ (эта плоскость проходит через середину диагонали прямоугольного параллелепипеда, построенного на векторах $\overline{SA}$, $\overline{SB}$, $\overline{SC}$, перпендикулярно этой диагонали).

Задача 11

Длина вектора, равного сумме данных 10 векторов, больше, чем длина суммы любых девяти из них. Доказать, что существует такая ось, что проекция каждого из данных десяти векторов на нее положительна.

Решение

Пусть $\overline{b}=\overline{a_1}+\overline{a_2}+...+\overline{a_{10}}$, где $\overline{a_i}$, $i=\overline{1,10}$ – данные 10 векторов. Из условия следует, что $\left|\overline{b}\right|>\left|\overline{b}-\overline{a_i}\right|$, $i=1,2,...,10$. Возводя обе части данного неравенства в квадрат, получаем $\overline{b}^2>(\overline{b}-\overline{a_i})^2$ или $\overline{b}^2>\overline{b}^2-2\overline{b}\cdot\overline{a_i}+\overline{a_i}^2$.

Отсюда $2\overline{b}\cdot\overline{a_i}>\overline{a_i}^2$ или $\overline{b}\cdot\overline{a_i}>\frac{1}{2}\overline{a_i}^2$, $i=1,2,...,10$. Это значит, что $пр_{\overline{b}}\overline{a_i}>0$, $i=1,2,...,10$, что и требовалось доказать.

Задача 12

Найти все многочлены $P(x)$, для которых справедливо тождество $(x-2006)P(x)=xP(x-1)$.

Решение

Подставляя в данное уравнение последовательно $x=0;1;2;...;2005$, нетрудно убедиться, что эти числа являются корнями данного многочлена, а поэтому

$$P(x) = Q(x)x(x-1)(x-2)...(x-2005), \qquad (1)$$

где $Q(x)$ – некоторый многочлен. Покажем, что $Q(x)$ – многочлен нулевой степени, т. е. $Q(x) = A$, где $A = const$. Подставляя (1) в исходное уравнение, получаем, что $Q(x)$ удовлетворяет тождеству $Q(x) = Q(x-1)$. Очевидно, что многочлен нулевой степени $Q(x) = A$ удовлетворяет данному тождеству. Предположим, что $Q(x)$ – многочлен степени $k \neq 0$, т. е.

$$Q(x) = a_0 x^k + a_1 x^{k-1} + ... + a_k, \quad a_0 \neq 0.$$

Тогда $Q(x-1) = a_0(x-1)^k + a_1(x-1)^{k-1} + ... + a_k$.

Так как многочлены $Q(x)$ и $Q(x-1)$ тождественно равны, то равны и коэффициенты при соответствующих степенях x. Приравнивая коэффициенты при x^{k-1}, получаем: $a_1 = -a_0 k + a_1$. Отсюда $a_0 = 0$. Пришли к противоречию. Следовательно, $Q(x)$ – многочлен нулевой степени, т. е.
$Q(x) = A$. Значит, $P(x) = Ax(x-1)(x-2)...(x-2005)$.

Ответ: $P(x) = Ax(x-1)(x-2)...(x-2005)$, где $A = const$.

Задача 13

Вычислить определитель $\Delta = \left|a_{ij}\right|$, где

$$a_{ij} = \left|i - j\right|, \quad i = 1,2,...,n; \quad j = 1,2,...,n,$$

Если: а) $n = 5$, б) n – произвольное натуральное число.

Решение

Выполним последовательно следующие элементарные преобразования:

1) вычтем из каждого столбца, начиная с последнего, предыдущий столбец;
2) прибавим к каждой строке, начиная со второй, первую строку;
3) разложим определитель по элементам последней строки;
4) вычислим определитель треугольной матрицы.

В результате получим:

$$\Delta=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & ... & n-2 & n-1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & ... & n-3 & n-2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & ... & n-4 & n-3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & ... & n-5 & n-4 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ n-2 & n-3 & n-4 & n-5 & ... & 0 & 1 \\ n-1 & n-2 & n-3 & n-4 & ... & 1 & 0 \end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & ... & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & ... & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 1 & ... & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & -1 & ... & 1 & 1 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ n-2 & -1 & -1 & -1 & ... & -1 & 1 \\ n-1 & -1 & -1 & -1 & ... & -1 & -1 \end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & ... & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 2 & ... & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 2 & ... & 2 & 2 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & ... & 2 & 2 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ n-2 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 2 \\ n-1 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 \end{vmatrix}=(-1)^{n+1}(n-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & ... & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & ... & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & ... & 2 & 2 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 2 \end{vmatrix}=$$

$$=(-1)^{n-1}(n-1)\cdot 2^{n-2}.$$

Ответ: $\Delta=(-1)^{n-1}(n-1)\cdot 2^{n-2}$.

Задача 14

Функция $f(x)$ определена и дифференцируема на отрезке $[0;a]$, причем $f(0)=0$. Доказать, что на отрезке $[0;a]$ найдется точка x_0 такая, что $f(x_0)=(a-x_0)f'(x_0)$.

Решение

Рассмотрим функцию $g(x)=(a-x)^b f(x)$. Очевидно, что $g(0)=g(a)=0$. Кроме того, функция $g(x)$ дифференцируема в рассматриваемом промежутке, причем

$g'(x)=-b(a-x)^{b-1}f(x)+(a-x)^b f'(x) \quad \forall x\in(0;a)$.

Следовательно, согласно теореме Ролля существует точка $x_0\in(0;a)$ такая, что $g'(x_0)=0$, то есть

$-b(a-x_0)^{b-1}f(x_0)+(a-x_0)^b f'(x_0)=0$ или $bf(x_0)=(a-x_0)f'(x_0)$,

что и требовалось доказать.

Задача 15

Найти все функции $f:[0;1]\to R$, удовлетворяющие равенству $3f(2uv)+4f(u^2-v^2)=2uv$ при $u^2+v^2=1$ и $u\ge v\ge 0$.

Решение

Из условия задачи следует, что $0\le 2uv\le 1;\ \ 0\le u^2-v^2\le 1$.

Пусть $2uv=x$. Тогда, так как $u^2+v^2=1$, то

$(u^2-v^2)^2=(u^2)^2+(v^2)^2-2u^2v^2=(u^2+v^2)^2 4u^2v^2=1-x^2$

и, следовательно, $u^2-v^2=\sqrt{1-x^2}$. Поэтому исходное уравнение принимает вид

$$3f(x)+4f(\sqrt{1+x^2})=x. \qquad (1)$$

Заменим в данном уравнении x на $\sqrt{1-x^2}$. В результате получим уравнение

$$3f(\sqrt{1-x^2})+4f(x)=\sqrt{1-x^2}. \qquad (2)$$

Из системы уравнений (1), (2) нетрудно найти функцию

$f(x)=\dfrac{4}{7}\sqrt{1-x^2}-\dfrac{3}{7}x.$

Проверка показывает, что найденная функция удовлетворяет всем условиям задачи.

Ответ: $f(x)=\dfrac{4}{7}\sqrt{1-x^2}-\dfrac{3}{7}x.$

Задача 16

Доказать, что несобственный интеграл $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2 + a^2} dx$, $a > 0$ сходится и найти его значение.

Решение

Сходимость данного несобственного интеграла равносильна сходимости интегралов $J_1 = \int\limits_0^1 \frac{\ln x}{x^2 + a^2} dx$ и $J_2 = \int\limits_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2 + a^2} dx.$

Пусть $0 < \lambda < 1$. Тогда $\frac{\ln x}{x^2 + a^2} : \frac{1}{x^\lambda} = \frac{x^\lambda \ln x}{x^2 + a^2} \to 0$ при $x \to 0$. Если же

$1 < \lambda < 2$, то $\frac{\ln x}{x^2 + a^2} : \frac{1}{x^\lambda} = \frac{x^2 \ln x}{(x^2 + a^2)x^{2-\lambda}} \to 0$ при $x \to +\infty$. Поэтому согласно признаку сравнения интегралы J_1 и J_2 сходятся, а это значит, что сходится и данный несобственный интеграл. Найдем его значение:

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2 + a^2} dx = [x = at] = \int\limits_0^{+\infty} \frac{(\ln t + \ln a) a dt}{a^2(t^2 + 1)} = \frac{1}{a}\left(\int\limits_0^{+\infty} \frac{\ln t dt}{t^2 + 1} + \int\limits_0^{+\infty} \frac{\ln a dt}{t^2 + 1} \right) =$$

$$= \frac{1}{a}\left(\int\limits_0^1 \frac{\ln t dt}{t^2 + 1} + \int\limits_1^{+\infty} \frac{\ln t dt}{t^2 + 1} + \ln a \cdot arctgt \Big|_0^{+\infty} \right) = \frac{\pi \ln a}{2a}, \text{ т. к.}$$

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{\ln t dt}{t^2 + 1} = \left[t = \frac{1}{s} \right] = -\int\limits_0^1 \frac{\ln s ds}{s^2 + 1} = -\int\limits_0^1 \frac{\ln t dt}{t^2 + 1}.$$

Ответ: $\frac{\pi \ln a}{2a}$

Задача 17

Решить дифференциальное уравнение $y' = \left(\frac{3x + y^3 - 1}{y} \right)^2$.

Решение

Представим данное уравнение в виде $y^2 dy = (3x + y^3 - 1)^2 dx$ или $\frac{1}{3} d(y^3 - 1) = (3x + y^3 - 1)^2 dx$. Пусть $y^3 - 1 = z$, где $z = z(x)$ – новая искомая функция. Тогда исходное дифференциальное уравнение принимает вид

$$\frac{1}{3}dz = (3x+z)^2 dx. \qquad (1)$$

Сделаем еще одну замену переменной: $3x+z=t \Rightarrow z=t-3x, \quad dz=dt-3dx.$

Тогда уравнение (1) может быть преобразовано следующим образом:

$$(1+t^2)dx = \frac{1}{3}dt.$$

Разделяем переменные и интегрируем. В результате получаем $arctgt = 3x+C,$ где C – произвольная постоянная, или так как $t=3x+z=y^3+3x-1,$ то $arctg(y^3+3x-1)=3x+C.$

Окончательно получаем общий интеграл данного дифференциального уравнения в виде $y^3+3x-1=tg(3x+C).$

Ответ: $y^3+3x-1=tg(3x+C).$

Задача 18

При изготовлении из листового металла закрытого бака объёмом 0,25 м^3, имеющего форму прямоугольного параллелепипеда, производится сварка швов, проходящих по рёбрам обоих оснований и одному боковому ребру, а по остальным рёбрам осуществляется изгиб листового металла. Стоимость одного метра сварочного шва – 13 ден. ед., а стоимость 1 м^2 листового металла – 26 ден. ед. Определите размеры бака так, чтобы его стоимость была наименьшей.

Решение

Пусть x (м) и y (м) – соответственно длины оснований бака, тогда его высота будет $\frac{0,25}{xy}$ (м). Если стоимость бака обозначить через $S(x,y)$ ден. ед., то

$$S(x,y) = 26\left(2xy + \frac{2\cdot 0,25}{y} + \frac{2\cdot 0,25}{x}\right) + 13\left(4x+4y+\frac{0,25}{xy}\right)$$

или

$$S(x,y)=13\left(4xy+\frac{1}{y}+\frac{1}{x}+4x+4y+\frac{0,25}{xy}\right),\quad x>0,\quad y>0.$$

Вычислим частные производные первого порядка этой функции по переменным x и y:

$$S'_x=13\left(4y-\frac{1}{x^2}+4-\frac{0,25}{x^2y}\right),\quad S'_y=\left(4x-\frac{1}{y^2}+4-\frac{0,25}{xy^2}\right).$$

Запишем необходимое условие экстремума функции $S(x,y)$:

$$\begin{cases}4x^2y^2-y+4x^2y-\dfrac{1}{4}=0,\\ 4x^2y^2-x+4xy^2-\dfrac{1}{4}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x-y)(1+4xy)=0,\\ 4x^2y^2-x+4xy^2-\dfrac{1}{4}=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}y=x,\\ 4x^4-x+4x^3-\dfrac{1}{4}=0.\end{cases}$$

Второе уравнение системы преобразуем следующим образом:

$$x^4-\frac{1}{16}+x^3-\frac{x}{4}=0\Leftrightarrow\left(x^2-\frac{1}{4}\right)\left(x^2+\frac{1}{4}\right)+x\left(x^2-\frac{1}{4}\right)=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left((x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x^2+\frac{1}{4}+x\right)=0.$$

Так как $x>0$, то $x=0,5$; $y=0,5$. Легко проверить, что при этих значениях выполняется достаточное условие минимума функции $S(x,y)$, и так как точка минимума одна, то в ней дифференцируемая функция $S(x,y)$ принимает наименьшее значение в области $\{(x,y)|x>0,y>0\}$. Соответствующее значение высоты равно 1.

Ответ: 0,5; 0,5; 1.

Задача 19

Найти все непрерывные функции $f:R\to R$, которые для всех действительных $x\neq 1$ удовлетворяют уравнению

$$(x-1)f\left(\frac{x+1}{x-1}\right)-f(x)=x.$$

Решение

Пусть $\frac{x+1}{x-1} = y$, тогда $x = \frac{y+1}{y-1}$, и уравнение примет вид

$$\frac{2}{y-1} f(y) - f\left(\frac{y+1}{y-1}\right) = \frac{y+1}{y-1}.$$

Таким образом, для определения функции $f(x)$ имеем систему двух уравнений:

$$\begin{cases} (x-1)\cdot f\left(\frac{x+1}{x-1}\right) - f(x) = x, \\ \frac{2}{x-1}\cdot f(x) - f\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = \frac{x+1}{x-1}. \end{cases}$$

Умножая обе части второго уравнения на $(x-1)$ и складывая с первым уравнением, получаем $f(x) = 2x+1,\ \ x \neq 1$. В силу непрерывности функции $f(x)$ имеем $f(x) = 2x+1\ \ \forall x \in R$. Проверка показывает, что полученная функция удовлетворяет всем условиям задачи.

Ответ: $f(x) = 2x+1$.

Задача 20

Выяснить, существует ли действительное число $x > 0$ такое, что выполняется неравенство $x^e > e^x$.

Решение

Докажем, что $\forall x > 0$ справедливо неравенство $e^x \geq x^e$, причем равенство имеет место лишь при $x = e$. Данное неравенство равносильно неравенству $x \geq e \cdot \ln x$ или $x - e \cdot \ln x \geq 0$. Пусть $f(x) = x - e \cdot \ln x,\ \ x > 0$. Тогда $f'(x) = 1 - \frac{e}{x}$ и, следовательно, $f'(x) = 0$ при $x = e$. Нетрудно проверить, что $x = e$ является точкой минимума функции $f(x)$, а значит, при $x = e$ функция принимает наименьшее значение $f(e) = 0$. Для всех остальных точек $x > 0$ имеем $f(x) > 0$, т. е. $x - e \cdot \ln x \geq 0$, а значит, $e^x \geq x^e$.

Следовательно, не существует действительного числа x такого, что $x^e > e^x$.

Ответ: не существует.

Задача 21

Найти неопределенный интеграл $\int \frac{dx}{\cos^3 x + \sin^3 x}$.

Решение

Преобразуем подынтегральную функцию:

$$\frac{1}{\cos^3 x + \sin^3 x} = \frac{1}{(\cos x + \sin x)(1 - \cos x \cdot \sin x)} =$$

$$= \frac{(\cos x + \sin x)^2 - 2\cos x \cdot \sin x}{(\cos x + \sin x)(1 - \cos x \cdot \sin x)} =$$

$$= \frac{(\cos x + \sin x)^2 - 2\cos x \cdot \sin x + 2}{3(\cos x + \sin x)(1 - \cos x \cdot \sin x)} =$$

$$= \frac{(\cos x + \sin x)^2 + 2(1 - \cos x \cdot \sin x)}{3(\cos x + \sin x)(1 - \cos x \cdot \sin x)} =$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{\cos x + \sin x}{1 - \cos x \cdot \sin x} + \frac{2}{\cos x + \sin x}\right).$$

Поэтому $\int \frac{dx}{\cos^3 x + \sin^3 x} = \frac{1}{3}\int \frac{(\cos x + \sin x)dx}{1 - \cos x \cdot \sin x} + \frac{2}{3}\int \frac{dx}{\cos x + \sin x} =$

$$= \frac{2}{3}\int \frac{d(\sin x - \cos x)}{1 + (\sin x - \cos x)^2} + \frac{2}{3\sqrt{2}}\int \frac{dx}{\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)} =$$

$$= \frac{1}{3}\left(2arctg(\sin x - \cos x) + \sqrt{2}\ln\left|tg\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{8}\right)\right|\right) + C.$$

Ответ: $\frac{1}{3}\left(2arctg(\sin x - \cos x) + \sqrt{2}\ln\left|tg\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{8}\right)\right|\right) + C.$

Задача 22

Решить дифференциальное уравнение $(y^4 - 3x^2)dy + xydx = 0.$

Решение

Очевидно, что исходное уравнение имеет решение $y = 0.$

Пусть $y > 0$. Сделаем замену переменных:

$y = \sqrt{z} \Rightarrow z = y^2, \quad z > 0.$

Тогда данное уравнение преобразуется к виду

$$(z^2-3x^2)\frac{dz}{2\sqrt{z}}+x\sqrt{z}dx=0 \text{ или}$$

$$(z^2-3x^2)dz+xzdx=0. \qquad (1)$$

Уравнение (1) является однородным и при помощи замены $z=uv$ может быть приведено к уравнению с разделяющимися переменными

$$\frac{dx}{x}+\frac{u^2-3}{u^3-u}du=0. \qquad (2)$$

Интегрируя уравнение (2), получаем $\ln\frac{|xu^3|}{|u^2-1|}=-\ln|C|$ или

$$Cxu^3=u^2-1. \qquad (3)$$

Возвращаясь к переменной y, соотношение (3) можно записать в виде $y^4-x^2=Cy^6$, где C – произвольная действительная постоянная. Значению $C = 0$ соответствует решение $u=1$ $(y^2=x)$, которое было утеряно при разделении переменных.

Полученное решение имеет место и при $y<0$.

Ответ: $y^4-x^2=Cy^6$, где C – произвольная действительная постоянная; $y=0$.

Задача 23

Нужно перевести по железной дороге 20 больших и 250 малых контейнеров. Один вагон вмещает 30 малых контейнеров, вес каждого из которых составляет 2 тонны. Большой контейнер занимает место 9 малых и весит 30 тонн. Грузоподъёмность вагона – 80 тонн. Найти минимальное число вагонов, необходимое для перевозки всех контейнеров.

Решение

Выясним, как можно загрузить вагон. По весу уже три больших контейнера не войдут в вагон, поскольку вместе весят 90 тонн. Значит, есть три типа загрузки вагона: нуль больших и не более 30 малых;

один большой и не более 21 малых (по весу вошло бы 25 малых контейнеров, но в вагоне всего 30 мест и 9 из них занято большим контейнером); два больших контейнера и не более 10 малых. Пусть загружено x вагонов по первому типу, y – по второму и z – по третьему. Тот факт, что перевезены 20 больших и 250 малых контейнеров, означает, что

$$\begin{cases} y+2z \ge 20, \\ 30x+21y+10z \ge 250. \end{cases}$$

Умножив первое неравенство на 9 и сложив со вторым, получаем

$$30x+30y+28z \ge 430 \Leftrightarrow 30(x+y+z) \ge 430+2z.$$

Отсюда $x+y+z \ge \dfrac{430}{30} = 14\dfrac{1}{3}$. Так как $x+y+z$ – целое число, то $x+y+z \ge 15$. Легко проверить, что $x=2$; $y=6; z=7$ подходят и дают в сумме 15. Поскольку доказано, что $x+y+z \ge 15$, получаем, что минимальное число вагонов, необходимое для транспортировки всех контейнеров, равно 15.

Ответ: 15 вагонов.

Задача 24

Доказать, что отрезок любой касательной к равнобочной гиперболе, заключенный между ее асимптотами, делится точкой касания пополам.

Решение

Выберем прямоугольную декартову систему координат Oxy так, чтобы оси Ox и Oy являлись асимптотами равнобочной гиперболы, а ветви гиперболы располагались в первом и третьем квадрантах. Тогда уравнение равнобочной гиперболы будет иметь вид $y=\dfrac{1}{x}$. Составим уравнение касательной к гиперболе в произвольной точке $\tilde{N}\left(x_0, \dfrac{1}{x_0}\right)$, принадлежащей гиперболе: $y=\dfrac{1}{x_0}-\dfrac{1}{x_0^2}(x-x_0)$ или $y=\dfrac{2}{x_0}-\dfrac{1}{x_0^2}x.$

Пусть x_1 и x_2 – абсциссы точек пересечения касательной с осями координат Oy и Ox (асимптотами гиперболы), соответственно. Тогда $x_1 = 0,\ \ x_2 = 2x_0$. Поэтому $x_0 = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$, а это значит, что отрезок любой касательной к равнобочной гиперболе, заключенный между ее асимптотами, делится точкой касания пополам, что и требовалось доказать.

Задача 25

Последовательность $\{a_n\}$, $n \in N$, задана рекуррентной формулой: $a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2}$, $n \ge 3$, $a_1 = a$, $a_2 = b$. Найти $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{2^n}$.

Решение

а) Первый способ:

Рекуррентную формулу $a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2}$, т.е.

$a_n = (2+1)a_{n-1} - (2\cdot 1)a_{n-2}$ можно записать в виде

$a_n - 2a_{n-1} = a_{n-1} - 2a_{n-2}$ или в виде $a_n - a_{n-1} = 2(a_{n-1} - a_{n-2})$. Отсюда следует, что

$$\begin{cases} a_n - 2a_{n-1} = b - 2a, \\ a_n - a_{n-1} = 2^{n-2}(b-a). \end{cases}$$

Исключая из этой системы a_{n-1}, получаем: $a_n = 2^n \dfrac{b-a}{2} + 2a - b.$

Поэтому $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{2^n} = \dfrac{b-a}{2}$.

б) Второй способ:

Из условия задачи следует, что

$$a_3 = 3a_2 - 2a_1 = 3b - 2a,$$

$$a_4 = 3a_3 - 2a_2 = 3(3b-2a) - 2b = 7b - 6a,$$

$$a_5 = 3a_4 - 2a_3 = 3(7b-6a) - 2(3b-2a) = 15b - 14a, \ldots \text{ или}$$

$$a_3 = \left(2^2 - 1\right)b - \left(2^2 - 2\right)a,$$

$$a_4 = \left(2^3 - 1\right)b - \left(2^3 - 2\right)a,$$

$$a_5 = \left(2^4 - 1\right)b - \left(2^4 - 2\right)a, \ldots$$

Методом математической индукции нетрудно доказать, что

$$a_n = \left(2^{n-1} - 1\right)b - \left(2^{n-1} - 2\right)a.$$

Эту формулу можно преобразовать к виду $a_n = 2^n \dfrac{b-a}{2} + 2a - b,$ откуда следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{2^n} = \dfrac{b-a}{2}.$

Ответ: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{2^n} = \dfrac{b-a}{2}.$

Задача 26

Найти все функции $f : R \to R,$ которые при любых действительных x, y удовлетворяют уравнению $f(x - f(y)) = 1 - x - y.$

Решение

Если в функциональное уравнение подставить $x = f(y),$ то получим уравнение $f(0) = 1 - f(y) - y$ или $f(y) = 1 - f(0) - y.$

Полагая в этом уравнении $y = 0,$ получаем $f(0) = 1 - f(0),$ т. е. $f(0) = \dfrac{1}{2}.$

Следовательно, $f(y) = \dfrac{1}{2} - y,$ т. е. $f(x) = \dfrac{1}{2} - x \quad \forall x \in R.$

Проверка показывает, что функция $f(x) = \dfrac{1}{2} - x$ удовлетворяет условию задачи.

Ответ: $f(x) = \dfrac{1}{2} - x \quad \forall x \in R.$

Задача 27

Известно, что функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[0;1]$, дифференцируема в промежутке $(0;1)$

$f(0) = 4,\ f(1) = 2,\ f'(x) \ge -2\ \forall x \in (0;1).$

Определить функцию $f(x)$ и доказать, что не существует других функций, удовлетворяющих условиям задачи.

Решение

Нетрудно проверить, что линейная функция $f(x) = -2x + 4$

удовлетворяет всем условиям задачи. Пусть $g(x)$ – любая другая функция, удовлетворяющая всем условиям задачи. Рассмотрим функцию $h(x) = g(x) - f(x)$. Функция $h(x)$ удовлетворяем условиям: $h(0) = 0$; $h(1) = 0$.

Кроме того, $h'(x) = g'(x) + 2 \geq 0$, так как $g'(x) \geq -2$. Следовательно, функция $h(x)$ является неубывающей функцией на отрезке $[0;\ 1]$, а на концах отрезка принимает одинаковые значения $h(0) = h(1) = 0$. Поэтому $h(x) = 0 \quad \forall x \in [0;1]$, т. е.

$g(x) = f(x) \quad \forall x \in [0;1]$.

Ответ: $f(x) = -2x + 4$

Задача 28

Найти наименьшее значение функции

$$f(x) = \int_{-1}^{1} \left| \sqrt[3]{u} - x \right| du, \quad x \in R.$$

Решение

Определим функцию $f(x)$.

1) Если $x \leq -1$, то $f(x) = \int_{-1}^{1} \left(\sqrt[3]{u} - x \right) du = -2x.$

2) Если $x \geq 1$, то $f(x) = \int_{-1}^{1} \left(x - \sqrt[3]{u} \right) du = 2x.$

3) Если $-1 \leq x \leq 1$, то

$$f(x) = \int_{-1}^{x^3} \left(x - \sqrt[3]{u} \right) du + \int_{x^3}^{1} \left(\sqrt[3]{u} - x \right) du = \frac{1}{2}x^4 + \frac{3}{2}.$$

Таким образом, наименьшее значение функции $f(x)$. равно $\frac{3}{2}$.

$$\left(f(0) = \frac{3}{2};\ \ f(x) > \frac{3}{2} \quad \forall x \neq 0 \right).$$

Ответ: $\frac{3}{2}$.

Задача 29

Двое рабочих изготовили более 29 одинаковых деталей. Число деталей, изготовленных первым рабочим, уменьшенное на 2, более чем в 3 раза превосходит число деталей, изготовленных вторым рабочим. Утроенное число деталей, изготовленное первым рабочим, превосходит удвоенное число деталей, изготовленных вторым рабочим, но не менее чем на 60. Сколько деталей изготовил каждый рабочий?

Решение

Пусть x и y – число деталей, изготовленных первым и вторым рабочим соответственно. Тогда целые неотрицательные переменные x и y удовлетворяют следующей системе неравенств:

$$\begin{cases} x + y > 29, \\ x - 2 > 3y, \\ 3x > 2y, \\ 3x - 2y < 60. \end{cases}$$

Из этой системы последовательно получаем:

$$\begin{cases} x > 29 - y, \\ x > 3y + 2, \\ x > \dfrac{2}{3}y, \\ x < 20 + \dfrac{2}{3}y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 29 - y < 20 + \dfrac{2}{3}y, \\ 3y + 2 < 20 + \dfrac{2}{3}y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{5}{3}y > 9, \\ \dfrac{7}{3}y < 18 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 6, \\ y = 7, \end{array} \right.$$

т. к. y – целочисленная переменная. Если $y = 6,$ то исходная система неравенств не имеет целочисленных решений. Если $y = 7,$ то исходная система неравенств имеет единственное целочисленное решение $x = 24.$

Ответ: $x = 24, \quad y = 7.$

Задача 30

Найти матрицу $\tilde{O}$, удовлетворяющую уравнению

$$\left(2\tilde{O}^2\right)^{-1} = 2\tilde{O}^{-1}.$$

Решение

Из условия задачи и определения обратной матрицы следует, что

$$\left(2X^{-1}\right)\left(2X^{2}\right)=E,$$

где E – единичная матрица того же порядка, что и матрица X.

Используя законы матричной алгебры, преобразуем левую часть полученного равенства:

$$4\left(X^{-1}X^{2}\right)=E \Leftrightarrow \left(X^{-1}X\right)X=\frac{1}{4}E \Leftrightarrow X=\frac{1}{4}E.$$

Ответ: $X=\dfrac{1}{4}E.$

Задача 31

Упростить матричное выражение

$$\left(2E-A\right)^{-1}+\left(E+A\right)^{-1}-3\left(2E+A-A^{2}\right)^{-1},$$

где A – квадратная матрица порядка n, E – единичная матрица того же порядка; A^{-1} – матрица, обратная для матрицы A.

Решение

Поскольку $\left(2E+A-A^{2}\right)=\left(2E-A\right)\left(E+A\right)=\left(E+A\right)\left(2E-A\right)$, то

$$\left(2E+A-A^{2}\right)=\left(E+A\right)^{-1}\left(2E-A\right)^{-1}=\left(2E-A\right)^{-1}\left(E+A\right)^{-1}.$$

Следовательно,

$$\left(2E-A\right)^{-1}+\left(E+A\right)^{-1}-3\left(2E+A-A^{2}\right)^{-1}=$$

$$=\left(E+A\right)\left(E+A\right)^{-1}\left(2E-A\right)^{-1}+\left(2E-A\right)\left(2E-A\right)^{-1}\left(E+A\right)^{-1}-$$

$$-3\left(E+A\right)^{-1}\left(2E-A\right)^{-1}=$$

$$=\left(E+A+2E-A-3E\right)\left(E+A\right)^{-1}\left(2E-A\right)^{-1}=O\left(E+A\right)^{-1}\left(2E-A\right)^{-1}=O,$$

где O – нуль-матрица порядка n.

Задача 32

Упростить матричное выражение

$$\left(3E-A\right)^{-1}+\left(2E+A\right)^{-1}-5\left(6E+A-A^{2}\right)^{-1},$$

где A – квадратная матрица порядка n, E – единичная матрица того же порядка; A^{-1} – матрица, обратная для матрицы A.

Решение

Поскольку $\left(6E + A - A^2\right) = (3A - A)(2E + A) = (2E + A)(3E - A)$,

то $\left(6E + A - A^2\right)^{-1} = (2E + A)^{-1}(3E - A)^{-1} = (3E - A)^{-1}(2E + A)^{-1}$.

Следовательно,

$$(3E - A)^{-1} + (2E + A)^{-1} - 5\left(6E + A - A^2\right)^{-1} = (2E + A)(2E + A)^{-1}(3E - A)^{-1} +$$

$$+(3E - A)(3E - A)^{-1}(2E + A)^{-1} - 5(3E - A)^{-1}(2E + A)^{-1} =$$

$$= (2E + A + 3E - A - 5E)(2E + A)^{-1}(3E - A)^{-1} = O(2E + A)^{-1}(3E - A)^{-1} = O,$$

где O – нуль-матрица порядка n.

Задача 33

Точки A_1, A_2, A_3, A_4 разбивают окружность диаметром 1 на 4 равные дуги; B – произвольная точка этой же окружности. Найти модуль суммы векторов $\overline{BA_1} + \overline{BA_2} + \overline{BA_3} + \overline{BA_4}$.

Решение

Пусть O – центр данной окружности. Тогда

$\overline{BA_1} = \overline{BO} + \overline{OA_1}$, $\overline{BA_2} = \overline{BO} + \overline{OA_2}$, $\overline{BA_3} = \overline{BO} + \overline{OA_3}$, $\overline{BA_4} = \overline{BO} + \overline{OA_4}$.

Поэтому $\overline{BA_1} + \overline{BA_2} + \overline{BA_3} + \overline{BA_4} = 4\overline{BO} + \overline{OA_1} + \overline{OA_2} + \overline{OA_3} + \overline{OA_4}$.

Поскольку $\overline{OA_1} + \overline{OA_3} = 0$ и $\overline{OA_2} + \overline{OA_4} = 0$,

то $\overline{BA_1} + \overline{BA_2} + \overline{BA_3} + \overline{BA_4} = 4\overline{BO}$.

Тогда $\left|\overline{BA_1} + \overline{BA_2} + \overline{BA_3} + \overline{BA_4}\right| = 4\left|\overline{BO}\right| = 2$.

Задача 34

Доказать, что середины параллельных хорд эллипса лежат на одной прямой, которая проходит через центр эллипса. Хордой эллипса называется отрезок, соединяющий любые две его точки.

Решение

Пусть прямая $y = kx + d$ пересекает эллипс $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ в двух точках A и B. Тогда координаты этих точек удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1, \\ y=kx+d. \end{cases}$$

Исключая из этой системы $y,$ получаем квадратное уравнение

$$\left(b^2+a^2k^2\right)x^2+2a^2kdx-a^2b^2+a^2d^2=0.$$

Корни этого уравнения x_1 и x_2 являются абсциссами точек A и B. Поэтому абсцисса x_C середины хорды AB равна $\dfrac{x_1+x_2}{2}$ и согласно теореме Виета может быть вычислена по формуле $x_C=-\dfrac{a^2kd}{b^2+a^2k^2}.$ Тогда ордината y_C этой же точки равна $y_C=kx_C+d$ или $y_C=\dfrac{db^2}{b^2+a^2k^2}.$

Пусть A_1B_1 – хорда эллипса, расположенная на прямой $y=kx+d_1,$ а A_2B_2 – любая другая хорда этого эллипса, параллельная хорде A_1B_1 , т. е. имеющая тот же угловой коэффициент $k,$ а, значит, расположенная на прямой $y=kx+d_2$. Пусть C_1 и C_2 – середины хорд A_1B_1 и A_2B_2 соответственно. Тогда

$$x_{C_1}=-\frac{a^2kd_1}{b^2+a^2k^2},\quad y_{C_1}=\frac{d_1b^2}{b^2+a^2k^2}.$$

$$x_{C_2}=-\frac{a^2kd_2}{b^2+a^2k^2},\quad y_{C_2}=\frac{d_2b^2}{b^2+a^2k^2}. \qquad (1)$$

Уравнение прямой C_1C_2: $\dfrac{x-x_{C_1}}{x_{C_2}-x_{C_1}}=\dfrac{y-y_{C_{11}}}{y_{C_2}-y_{C_{11}}}$ или с учетом формул (1)

$$a^2ky+b^2x=0. \qquad (2)$$

Очевидно, что координаты точки $O(0;0)$, т. е. координаты центра эллипса, удовлетворяют этому уравнению. Так как коэффициенты уравнения (2) не зависят от d_1 и d_2, то середины параллельных хорд эллипса лежат на одной прямой, которая проходит через центр эллипса, что и требовалось доказать.

Задача 35

Доказать, что середины параллельных хорд параболы лежат на одной прямой, которая параллельна оси параболы. Объяснить, как можно построить ось параболы, изображенной на листе бумаги. Хордой параболы называется отрезок, соединяющий любые две ее точки.

Решение

Пусть прямая $y = kx + b$ пересекает параболу $y = ax^2$ в двух точках: A и B. Тогда координаты этих точек удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} y = kx + b, \\ y = ax^2. \end{cases}$$

Исключая из этой системы y, получаем квадратное уравнение

$$ax^2 - kx - b = 0.$$

Корни этого уравнения x_1 и x_2 являются абсциссами точек A и B. Поэтому абсцисса середины хорды AB равна $\frac{x_1 + x_2}{2}$ и согласно теореме Виета может быть вычислена по формуле $x_C = \frac{k}{2a}$. Так как x_C не зависит от b, то середины всех параллельных хорд параболы, т. е. имеющих один и тот же угловой коэффициент k, лежат на прямой $x = \frac{k}{2a}$, т. е. на прямой, параллельной оси параболы.

Для построения оси параболы достаточно:

1) построить две параллельные хорды параболы;
2) провести прямую L через середины этих хорд;
3) построить прямую, параллельную прямой L, до пересечения с параболой в точках M и N;
4) провести прямую, проходящую перпендикулярно отрезку MN через его середину. Эта прямая и совпадает с осью данной параболы.

Задача 36

Выяснить, при каких действительных $a > 0$ последовательность $x_1 = a,\ \ x_{n+1} = a + x_n^2,\ \ n \in N$ сходится. В случае сходимости найти предел последовательности.

Решение

1) Пусть данная последовательность сходится и имеет предел, равный A.

Тогда, переходя в уравнении $x_{n+1} = a + x_n^2$ к пределу при $n \to \infty$, получим, что число A должно удовлетворять уравнению $A = a + A^2$. Это квадратное уравнение имеет действительные корни, если его дискриминант неотрицателен, т. е., если a удовлетворяет неравенству $1 - 4a \geq 0$ или $a \leq \frac{1}{4}$.

Таким образом, при $a > \frac{1}{4}$ данная последовательность является расходящейся.

2) Пусть $a \in \left(0; \frac{1}{4}\right]$. Из условия $x_1 = a,\ \ x_{n+1} = a + x_n^2,\ \ n \in N$ следует, что все члены последовательности положительны и удовлетворяют соотношению $x_{n+1} - x_n = x_n^2 - x_{n-1}^2 = (x_n - x_{n-1})(x_n + x_{n-1})$.

А так как $x_2 > x_1$, то из указанного соотношения следует, что последовательность $\{x_n\}$ является возрастающей.

Пусть c – меньший корень уравнения $A^2 - A + a = 0$, т. е.

$$c = \frac{1 - \sqrt{1 - 4a}}{2}.$$

Тогда $c > a$. Докажем, что $x_n < c$ при всех натуральных n. Очевидно, что $x_1 < c$. Пусть $x_n < c$. Тогда $x_{n+1} = a + x_n^2 < a + c^2 = c$. Согласно методу математической индукции $x_n < c$ при всех натуральных n. Таким образом, последовательность $\{x_n\}$ ограничена сверху. По теореме Вейерштрасса $\{x_n\}$ имеет конечный предел, который равен меньшему корню уравнения

$$A^2 - A + a = 0, \text{ т. е. } \quad \lim_{n \to \infty} x_n = c = \frac{1 - \sqrt{1 - 4a}}{2}.$$

Задача 37

Найти наименьшее значение функции

$$f(x)=\frac{\left(x+\frac{1}{x}\right)^{2n}-\left(x^{2n}+\frac{1}{x^{2n}}\right)-2}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^{n}+\left(x^{n}+\frac{1}{x^{n}}\right)},$$

$$x>0,\quad n\in N.$$

Решение

Поскольку

$$\frac{\left(x+\frac{1}{x}\right)^{2n}-\left(x^{2n}+\frac{1}{x^{2n}}\right)-2}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^{n}+\left(x^{n}+\frac{1}{x^{n}}\right)}=\frac{\left(\left(x+\frac{1}{x}\right)^{n}\right)^{2}-\left(x^{n}+\frac{1}{x^{n}}\right)^{2}}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^{n}+\left(x^{n}+\frac{1}{x^{n}}\right)}=$$

$$=\left(x+\frac{1}{x}\right)^{n}-\left(x^{n}+\frac{1}{x^{n}}\right),$$

то $f(x)=\left(x+\frac{1}{x}\right)^{n}-\left(x^{n}+\frac{1}{x^{n}}\right),\ \ x>0,$ или

$$f(x)=C_n^1x^{n-2}+C_n^2x^{n-4}+\ldots+C_n^{n-1}x^{2-n}.$$

Так как $C_n^k=C_n^{n-k},\ \ n,k\in N,\ \ 0\le k\le n,$ то

$f(x)=C_n^1\left(x^{n-2}+\frac{1}{x^{n-2}}\right)+\tilde{N}_n^2\left(x^{n-4}+\frac{1}{x^{n-4}}\right)+\ldots+C_n^{\frac{n-1}{2}}\left(x+\frac{1}{x}\right),$ если n – нечетное, и

$f(x)=C_n^1\left(x^{n-2}+\frac{1}{x^{n-2}}\right)+\tilde{N}_n^2\left(x^{n-4}+\frac{1}{x^{n-4}}\right)+\ldots+C_n^{\frac{n}{2}-1}\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+C_n^{\frac{n}{2}},$ если n – четное.

Функция $g(x)=x^k+\frac{1}{x^k},\ \ x>0,\ \ k\in N$ принимает наименьшее значение, равное 2, при Поэтому и функция $f(x)$ принимает наименьшее значение при $x=1,$ равное

$$f_{\min}=\left(1+\frac{1}{1}\right)^n-\left(1^n+\frac{1}{1^n}\right)=2^n-2.$$

Ответ: $f_{\min}=2^n-2.$

Задача 38

Найти наименьшее значение функции

$$f(x)=\frac{\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^8-\left(x^8+\dfrac{1}{x^8}\right)-2}{\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^4+\left(x^4+\dfrac{1}{x^4}\right)},x>0.$$

Решение

В решении задачи 39 положить $n=4.$

Ответ: 14

Задача 39

Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[0;1].$ Доказать, что для любого натурального числа n существует точка $x_0\in[0;1]$ такая, что

$$\int_0^1 f(x)x^n dx=\frac{1}{n+1}f(x_0).$$

Решение

$$\int_0^1 f(x)x^n dx=\frac{1}{n+1}\int_0^1 f(x)dx^{n+1}=\begin{bmatrix} x^{n+1}=t, \\ x=\sqrt[n+1]{t}, \\ x=0\Rightarrow t=0, \\ x=1\Rightarrow t=1 \end{bmatrix}=\frac{1}{n+1}\int_0^1 f\left(\sqrt[n+1]{t}\right)dt.$$

Так как функция $f\left(\sqrt[n+1]{t}\right)$ непрерывна как функция t на отрезке $[0;1],$ то согласно теореме о среднем для определенного интеграла существует точка $t_0\in[0;1]$ такая, что

$$\int_0^1 f\left(\sqrt[n+11]{t}\right)dt = f\left(\sqrt[n+1]{t_0}\right).$$

Отсюда $\int_0^1 f(x)x^n dx = \dfrac{1}{n+1} f(x_0),$ где $x_0 = \sqrt[n=1]{t_0} \in [0;1],$ что и требовалось доказать.

Задача 40

Вычислить интеграл $\displaystyle\int_0^2 \frac{\sqrt{\sin(3-x)}dx}{\sqrt{\sin(3-x} + \sqrt{\sin(x+1)}}.$

Решение

$$\int_0^2 \frac{\sqrt{\sin(3-x)}dx}{\sqrt{\sin(3-x} + \sqrt{\sin(x+1)}} = \begin{bmatrix} x = 1-t, \\ dx = -dt, \\ x = 0 \Rightarrow t = 1, \\ x = 2 \Rightarrow t = -1 \end{bmatrix} =$$

$$= \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{\sin(2+t)}dt}{\sqrt{\sin(2+t)} + \sqrt{\sin(2-t)}} =$$

$$= \int_{-1}^0 \frac{\sqrt{\sin(2+t)}dt}{\sqrt{\sin(2+t)} + \sqrt{\sin(2-t)}} + \int_0^1 \frac{\sqrt{\sin(2+t)}dt}{\sqrt{\sin(2+t)} + \sqrt{\sin(2-t)}} =$$

$$= \int_0^1 \frac{\sqrt{\sin(2-t)}dt}{\sqrt{\sin(2+t)} + \sqrt{\sin(2-t)}} + \int_0^1 \frac{\sqrt{\sin(2+t)}dt}{\sqrt{\sin(2+t)} + \sqrt{\sin(2-t)}} = \int_0^1 dt = 1.$$

Ответ: 1.

Задача 41

Найти производную решения задачи Коши
$y'' + y = \varepsilon y'^2;$ $y(0) = 1,$ $y'(0) = 0$ по параметру ε при $\varepsilon = 0.$

Решение

Решение данной задачи Коши будем искать в виде степенного ряда по целым неотрицательным степеням ε с коэффициентами, зависящими от x.

$$y = y_0(x) + \varepsilon y_1(x) + \varepsilon^2 y_2(x) + \ldots \tag{1}$$

Тогда $y'_\varepsilon(\varepsilon = 0) = y_1(x).$

Подставим (1) в исходное дифференциальное уравнение и начальные условия и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях ε в левых и правых частях полученных уравнений. Тогда для определения функции $y_1(x)$ получаем задачу Коши:

$$y_1'' + y_1 = y_0'^2; \tag{2}$$

$$y_0'(0) = 1, \quad y_0'(0) = 0, \tag{3}$$

где y_0 является, в свою очередь, решением задачи Коши

$$y_0'' + y_0 = 0; \quad y_0(0) = 1, \quad y_0'(0) = 0. \tag{4}$$

Так как функция $y_0 = \cos x$ является решением задачи (4), то дифференциальное уравнение (2) принимает вид

$$y_1'' + y_1 = \sin^2 x,$$

откуда $y_1(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \dfrac{1}{6}\cos 2x.$

Константы C_1, C_2 можно определить, используя начальные условия (3):

$$\begin{cases} C_1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{6} = 0, \\ C_2 = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = -\dfrac{2}{3}, \\ C_2 = 0. \end{cases}$$

Таким образом, $y_1(x) = -\dfrac{2}{3}\cos x + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{6}\cos 2x.$

Ответ: $y_\varepsilon'(\varepsilon = 0) = -\dfrac{2}{3}\cos x + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{6}\cos 2x.$

Задача 42

Существуют ли функции $f(x)$, не равные тождественно 0, и $g(x)$, для которых в некотором промежутке выполняется равенство

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)}{g'(x)}?$$

Решение

Пользуясь правилом нахождения производной частного, равенство

$\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ запишем в виде

$$\frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{\left(g(x)\right)^2} = \frac{f'(x)}{g'(x)}, \quad g(x) \neq 0, g'(x) \neq 0, \text{ или}$$

$$g(x)\left(g'(x) - g(x)\right)f'(x) - \left(g'(x)\right)^2 f(x) = 0. \ (1)$$

Будем считать, что $g'(x) - g(x) \neq 0$ для любого x из рассматриваемой области. Тогда уравнение (1) может быть преобразовано к уравнению

$\dfrac{df(x)}{f(x)} = \dfrac{\left(g'(x)\right)^2 dx}{g(x)\left(g'(x) - g(x)\right)}$, решив которое, получим формулу для нахождения функции $f(x)$ при заданной функции $g(x)$, удовлетворяющей указанным выше условиям

$$f(x) = C\exp\left(\int \frac{\left(g'(x)\right)^2}{g(x)\left(g'(x) - g(x)\right)} dx\right), \qquad (2)$$

где $\tilde{N}$ – произвольная постоянная, которую полагаем не равной 0.

Если, например, положить $g(x) = \tilde{o}$, то из формулы (2) следует, что $f(x) = \dfrac{Cx}{x-1}$ в промежутке $(1;\infty)$.

Вывод: функции $f(x) = \dfrac{x}{x-1}$ и $g(x) = \tilde{o}$ в промежутке $(1;\infty)$ удовлетворяют равенству $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

Задача 43

Из трех единиц, трех двоек и трех троек наудачу составляют девятизначное число. Найти вероятность того, что три одинаковые цифры не будут стоять рядом.

Решение

Элементарным исходом является девятизначное число, состоящее из трех единиц, трех двоек и трех троек. Все элементарные исходы равновозможны, а их общее число равно $n = C_9^3 \cdot C_6^3 \cdot C_3^3 = 1680$.

Пусть событие А – в наудачу составленном числе две одинаковые цифры не расположены рядом. Число элементарных исходов, благоприятствующих событию А, вычислим по формуле $n_A = n - n_{\overline{A}}$. Согласно формуле включений и исключений

$$n_{\overline{A}} = n_1 + n_2 + n_3 - n_{12} - n_{13} - n_{23} + n_{123},$$

где n_i – количество девятизначных чисел, составленных из трех единиц, трех двоек и трех троек, в которых три цифры i расположены рядом $i = 1,2,3;$

n_{ij} – количество девятизначных чисел, составленных из трех единиц, трех двоек и трех троек, в которых три цифры i и три цифры j расположены рядом, $i = 1,2,3;$ $j = 1,2,3;$ $i < j;$

n_{123} – количество девятизначных чисел, составленных из трех единиц, трех двоек и трех троек, в которых три единицы, три двойки и три тройки расположены рядом.

Очевидно, что

$$n_1 = n_2 = n_3 = 7 \cdot C_6^3 \cdot C_3^3 = 140; \quad n_{12} = n_{13} = n_{23} = = 2 \cdot 4 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 2 + 1 \cdot 2 = 20; \quad n_{123} = 6.$$

Поэтому $n_{\overline{A}} = 3 \cdot 140 - 3 \cdot 20 + 6 = 366;$ $n_A = 1680 - 366 = 1314.$

Следовательно, $P(A) = \dfrac{n_A}{n} = \dfrac{1314}{1680} \approx 0,78.$

Задача 44 (решить самостоятельно)

Из двух единиц, двух двоек и двух троек наудачу составляют шестизначное число. Найти вероятность того, что две одинаковые цифры не будут стоять рядом.

Ответ: $\dfrac{1}{3}$.

Задача 45

Матрица X является решением матричного уравнения $AX^2 + BX = 0$, где $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & 2\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 3 & 1\\ 1 & 2 & -1\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}$. Доказать, что $\det X=0.$

Решение

$AX^2=-BX$. $\det(AX^2)=\det(-BX)$. $\det A\cdot(\det X)^2=-\det B\cdot\det X.$ Так как $\det A=2\neq 0,$ а $\det B=0,$ то $(\det X)^2=0$ и $\det X=0.$

Задача 46

Найти длину вектора $\overline{p}=(\overline{a}\times\overline{b})+\overline{c},$ если

$$|\overline{a}|=|\overline{b}|=|\overline{c}|=1,\ \ (\overline{a}\,\hat{}\,\overline{b})=\frac{\pi}{2},$$

$$(\overline{a}\,\hat{}\,\overline{c})=(\overline{b}\,\hat{}\,\overline{c})=\frac{\pi}{3},\ \ (\overline{a}\times\overline{b})\cdot\overline{c}<0.$$

Решение

Векторы $\overline{a},\ \overline{b},\ \overline{a}\times\overline{b}$ образуют ортонормированный базис. Разложим по нему вектор $\overline{c}$: $\overline{c}=x\overline{a}+y\overline{b}+z(\overline{a}\times\overline{b}),$

где $x=\overline{a}\cdot\overline{c}=\dfrac{1}{2};$ $y=\overline{b}\cdot\overline{c}=\dfrac{1}{2};$ $z=(\overline{a}\times\overline{b})\cdot\overline{c}<0,$

$$(\overline{c})^2=x^2+y^2+z^2=1$$

и потому $z=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}.$ Теперь $\overline{p}=\dfrac{1}{2}\overline{a}+\dfrac{1}{2}\overline{b}+(1-\dfrac{1}{\sqrt{2}})(\overline{a}\times\overline{b})$ и

$$|\overline{p}|=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}=\sqrt{2-\sqrt{2}}.$$

Ответ: $|\overline{p}|=\sqrt{2-\sqrt{2}}.$

Задача 47

Доказать, что множество точек в R^3, задаваемое уравнением

$3x^2+4y^2+5z^2+xy-2yz-xz=0$, находится в шаре единичного радиуса с центром в начале координат.

Решение

Обозначим $f(x,y,z)$ левую часть уравнения. Тогда

$$f(x,y,z)\ge 3(x^2+y^2+z^2)-2(|xy|+|xz|+|yz|)-1\ge$$
$$\ge 3(x^2+y^2+z^2)-(x^2+y^2+x^2+z^2+y^2+z^2)-1=$$
$$=x^2+y^2+z^2-1.$$

Поэтому $f(x,y,z)=0\Rightarrow x^2+y^2+z^2\le 1.$

Задача 48

Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n} tg(k-1)tgk}{tg^2 n+n^{\alpha}}$, $\alpha>1$.

Решение

$$\sum_{k=1}^{n} tg(k-1)tgk=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{tgk-tg(k-1)}{tg(k-(k-1))}-1\right)=$$
$$=ctg1\cdot\sum_{k=1}^{n}(tgk-tg(k-1))-n=ctg1\cdot tgn-n.$$

Так как $\dfrac{|tgn|}{tg^2n+n^{\alpha}}\le\dfrac{|tgn|}{2|tgn|n^{\alpha/2}}=\dfrac{1}{2n^{\alpha/2}}$ и

$\dfrac{1}{2n^{\alpha/2}}\to 0$, $\dfrac{n}{tg^2n+n^{\alpha}}\le\dfrac{1}{n^{\alpha-1}}$ и $\dfrac{1}{n^{\alpha-1}}\to 0$, то искомый предел равен 0.

Задача 49

Пусть $f(x)$, $x\in[-1;1]$ – дважды дифференцируемая функция, $f(-1)=f(0)=f(1)=0$. Доказать, что существует такое число $x_0\in(-1;1)$, что $f(x_0)$, $f'(x_0)$, $f''(x_0)$ образуют арифметическую прогрессию.

Решение

Пусть $g(x)=e^{-x}f(x)$.

Тогда $g'(x)=-e^{-x}f(x)+e^{-x}f'(x)$;

$g''(x) = e^{-x}(f(x) - 2f'(x) + f''(x)).$

Так как $g(-1) = g(0) = g(1),$ то по теореме Ролля существуют $x_1 \in (-1,0)$ и $x_2 \in (0,1)$, что $g'(x_1) = g'(x_2) = 0.$ Снова по теореме Ролля существует $x_0 \in (-1,1)$, что $g''(x_0) = 0.$ Но тогда $f(x_0) - 2f'(x_0) + f''(x_0) = 0$ и $f(x_0),\ f'(x_0),\ f''(x_0)$ образуют арифметическую прогрессию.

Задача 50

Пусть $f(x)$ – дважды дифференцируемая на $(0,\infty)$ функция, $a \in R,\ a \neq 0.$ Доказать, что если $g(x) = xf(x^a)$ выпукла (вниз) на $(0,\infty)$, то и функция $h(x) = f\left(\frac{1}{x^a}\right)$ выпукла (вниз) на $(0,\infty)$.

Решение

Найдем $g'(x) = f(x^a) + ax^a f(x^a).$

$$g''(x) = ax^{a-1}f'(x^a) + a^2x^{a-1}f'(x^a) + a^2x^{2a-1}f''(x^a) =$$
$$= ax^{a-1}\Big[(a+1)f'(x^a) + ax^a f''(x^a)\Big].$$

Если $g(x)$ выпукла на $(0,\infty)$, то любого $x \in (0,\infty)$ $g''(x) \geq 0$ и потому

$$a\ \Big[(a+1)f'(x^a) + ax^a f''(x^a)\Big] \geq 0.$$

Поскольку $x \mapsto x^a$ биекция на $(0,\infty)$, то для любого $t \in (0,\infty)$

$$a\ \Big[(a+1)f'(t) + ax^a f''(t)\Big] \geq 0. \qquad (1)$$

Находим $h'(x) = -ax^{-a-1}f'(x^{-a}),\ \ h''(x) = ax^{-a-2}((a+1)f''(x^{-a}) + ax^{-a}f''(x^{-a})).$ Отсюда и из (1) при $t = x^{-a}$ получаем, что для любого $x \in (0,\infty)$ $h''(x) \geq 0,$ т. е. $h(x)$ выпукла на $(0,\infty).$

Задача 51

Вычислить интеграл $\int\limits_0^1 f(x)dx,$ где $f(x) = \min\limits_{y\in[0,1]} \max\{4x - y; y\}$.

Решение

Рассмотрим функцию

$$g(x,y)=\max\{4x-y;y\}=\begin{cases}4x-y & \text{ïðè} \quad y\le 2x,\\ y & \text{ïðè} \quad y\ge 2x.\end{cases}$$

Если $x\in[0;1/2]$, то $f(x)=\min\limits_{y\in[0;1]} g(x,y)=g(x,2x)=2x.$

Если $x\in[1/2;1]$, то $f(x)=4x-1.$

Поэтому

$$\int\limits_0^1 f(x)dx=\int\limits_o^{1/2} 2xdx+\int\limits_{1/2}^1 (4x-1)dx=1,25.$$

Задача 52

Доказать, что уравнение $X^2+2X-3E=0$ имеет на множестве квадратных матриц 2006-го порядка, по крайней мере, 2^{2006} решений. (Здесь E – единичная матрица).

Решение

Ищем $\tilde{O}$ в виде диагональной матрицы $X=diag(x_1,...,x_n)$. Тогда $x_i^2+2x_i-3=0$ и $x_i=1$ или $x_i=-3$ $(i=1,...,2006)$. Количество разных наборов таких чисел, а значит и разных матриц равно 2^{2006}.

Задача 55

Доказать, что функция $f(x)$, $x\in R$, удовлетворяющая условиям $(\forall x\in R)$ $f(x)\neq 0$, $(\exists a>0)(\forall x\in R)$ $f(x)=f(x-a)\cdot f(x+a)$, является периодической.

Решение

$$\forall x\in R \quad f(x+a)=\frac{f(x)}{f(x-a)};\quad f(x+2a)=\frac{f(x+a)}{f(x)};\quad f(x+2a)=$$

$$=\frac{f(x+2a)}{f(x+a)}=\frac{1}{f(x)};$$

$$f(x+6a)=f(x);$$

т. е. $f(x)$ периодическая функция с периодом $6a$.

Задача 53

Доказать, что для любых действительных чисел $a_1,a_2,...,a_n$ справедливо неравенство $\sum\limits_{k=1}^n\sum\limits_{m=1}^n \dfrac{a_k a_m}{k+m}\ge 0.$

Решение

Рассмотрим многочлен

$$p(x)=\sum_{k=1}^{n}\sum_{m=1}^{n}a_k a_m x^{k+m-1}=\frac{\left(\sum\limits_{k=1}^{n}a_k x^k\right)^2}{x}.$$

Ясно, что $p(x)\geq 0$ при $x\geq 0$. Поэтому

$$\int_0^1 p(x)dx=\sum_{k=1}^{n}\sum_{m=1}^{n}\frac{a_k a_m}{k+m}\geq 0.$$

Задача 54

Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(tgx)^{\sin x}-(\sin x)^{tgx}}{x^{\pi-1}}$.

Решение

$$\lim_{x\to 0}\frac{(tgx)^{\sin x}-(\sin x)^{tgx}}{x^{\pi-1}}=\lim_{x\to 0}e^{tgx\ln tgx}\frac{\left(e^{\sin x\ln tgx-tgx\ln\sin x}-1\right)}{x^{\pi-1}}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\ln tgx-tgx\ln\sin x}{x^{\pi-1}}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\lim_{x\to 0}\frac{\cos x(\ln\sin x-\ln\cos x)-\ln\sin x}{x^{\pi-2}}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x^{\pi-2}}-\lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos x}{x^{\pi-2}}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{x^2}{2}}{x^{\pi-2}}+\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{(\pi-2)x^{\pi-3}\cos x}=-\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}x^{4-\pi}+\frac{1}{\pi-2}\lim_{x\to 0}x^{4-\pi}=0.$$

Использовали стандартные эквивалентности и то, что

$$\lim_{x\to 0}tgx\ln\sin x=\lim_{x\to 0}\sin x\ln\sin x=\lim_{t\to 0}t\ln t=0;$$

$$\lim_{x\to 0}\sin x\ln tgx=\lim_{x\to 0}tgx\ln tgx=\lim_{t\to 0}t\ln t=0.$$

Задача 55

Сколько корней имеет уравнение $(\tilde{o}-1)\mathring{a}^{\tilde{o}}-10\tilde{o}+11=0$?

Решение

Введем функцию $f(x)=(\tilde{o}-1)\mathring{a}^{\tilde{o}}-10\tilde{o}+11$.

Ее производные $f'(x)=xe^x-10$; $f''(x)=(x+1)e^x$. При $x<0$ $f'(x)<0$, $f'(3)=3e^3-10>0$. Так как при $x\geq 0$ $f''(x)>0$, то при $x\geq 0$ $f'(x)$ возрастает. Поэтому существует точка $x_0\in(0;3)$ такая, что $f'(x)<0$ при $x<x_0$, $f'(x)>0$ при

$x>x_0$. В точке x_0 функция достигает наименьшего значения. Так как $f(1,5)=0,5\left(\sqrt{e}\right)^3-4<0,5\cdot 8-4=0$, то тем более $f(x_0)<0$. С другой стороны $f(0)=10>0$, $f(3)=2e^3-19>0$. Поэтому на каждом промежутке $(-\infty;x_0)$ и $(x_0;\infty)$ функция имеет по нулю.

Таким образом, уравнение имеет два решения.

Задача 56

Вычислить $\displaystyle\int_0^2\frac{\cos\pi x}{e^x+e}dx.$

Решение

$$\int_0^2\frac{\cos\pi x}{e^x+e}dx=\begin{bmatrix}x-1=t\\ x=1+t\end{bmatrix}=--\int_{-1}^1\frac{\cos\pi t}{e^{t+1}+e}dt=-\frac{1}{e}\int_{-1}^1\frac{\cos\pi t}{e^t+1}dt=0,$$

так как $\displaystyle\int_{-1}^1\frac{\cos\pi t}{e^t+1}dt=\left[t\mapsto -t\right]=\int_{-1}^1\frac{\cos\pi t}{e^{-t}+1}dt=\int_{-1}^1\frac{e^t\cos\pi t}{e^t+1}dt=$

$$=\int_{-1}^1\cos\pi t dt-\int_{-1}^1\frac{\cos\pi t}{e^t+1}dt=-\int_{-1}^1\frac{\cos\pi t}{e^t+1}dt.$$

Ответ: 0.

Задача 57

Найти все ограниченные на промежутке $(0;\infty)$ решения $y(x)$ дифференциального уравнения

$$x^2y''-2xy'+(2-x^2)y=0.$$

Решение

При $x>0$ перепишем уравнение в виде

$$y'' - \frac{2}{x}y' + \left(\frac{2}{x^2} - 1\right)y = 0.$$

Сделаем замену $y = xz$. Тогда $y' = z + xz'$; $y'' = 2z' + xz''$;

$$xz'' + 2z' - \frac{2z}{x} - 2z' + \left(\frac{2}{x^2} - 1\right)xz = 0, \quad xz'' - xz = 0;$$

$$z''' - z' = 0; \quad z = C_1 e^x + C_2 e^{-x}.$$

Таким образом, любое решение на промежутке $(0;\infty)$ имеет вид $y = C_1 x e^x + C_2 x e^{-x}$. Решение ограничено на $(0;\infty)$ при $C_1 = 0$. Итак, формула $y = Cxe^{-x}$, где C – произвольная постоянная, дает все ограниченные на $(0;\infty)$ решения.

Ответ: $y = Cxe^{-x}$.

Задача 58

Доказать, что решение $y = y(x)$, $x \in R$, дифференциального уравнения $y'' + x^2 y = 0$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 1$; $y'(0) = 0$, обращается в нуль хотя бы в одной точке.

Решение

Предположим, что $y(x) > 0$ при всех $x > 0$. Тогда $y''(x) = -x^2 y(x) < 0$ при $x > 0$ и $y'(x)$ убывает при $x \geq 0$. Поэтому существует $x_0 > 0$ такое, что $y'(x_0) < 0$. Тогда $\forall x > x_0$ существует $c \in (x_0, x)$, что $y(x) = y(x_0) + y'(x_0)(x - x_0) + \dfrac{y''(c)}{2}(x - x_0)^2 < y(x_0) + y'(x_0)(x - x_0)$.

Поэтому $y(x) < 0$ для $x > x_0 - \dfrac{y(x_0)}{y'(x_0)} > x_0$ в противоречие с предположением. Значит, предположение неверно и существует $x_2 > 0$, что $y(x_2) \leq 0$. Поскольку $y(0) = 1 > 0$, то существует $x_1 \in (0; x_2]$, что $y(x_1) = 0$.

4 ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ МАТЕМАТИКИ

4.1 Метод математической индукции

Утверждение справедливо для всякого натурального n, если: а) оно справедливо для $n = 1$ и б) из справедливости утверждения для какого-либо произвольного натурального $n = k$ следует его справедливость для
$n = k + 1$.

Доказательство, основанное на принципе математической индукции, называется *методом математической индукции*. Такое доказательство должно состоять из двух частей, из доказательства двух самостоятельных теорем:

Теорема 1. Утверждение справедливо для $n = 1$.

Теорема 2. Утверждение справедливо для $n = k + 1$, если оно справедливо для $n = k$, где k – какое-либо произвольное натуральное число.

Пример. Вычислить сумму $S_n = \dfrac{1}{1\cdot 2} + \dfrac{1}{2\cdot 3} + \dfrac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \dfrac{1}{n(n+1)}$.

Решение

Заметим, что $S_1 = \dfrac{1}{2}$; $S_2 = \dfrac{2}{3}$; $S_3 = \dfrac{3}{4}$. Это позволяет высказать предположение (гипотезу), что при всяком натуральном n $S_n = \dfrac{n}{n+1}$. Заметим также, что при n = 1 гипотеза верна. Предположим, что гипотеза верна для n = k, т. е.
$S_k = \dfrac{1}{1\cdot 2} + \dfrac{1}{2\cdot 3} + \dfrac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \dfrac{1}{k(k+1)} = \dfrac{k}{k+1}$, где k – некоторое натуральное число. Докажем, что гипотеза обязана быть верной и для $n = k+1$, т. е. $S_{k+1} = \dfrac{k+1}{k+2}$.

Действительно,

$$S_{k+1} = S_k + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} =$$

$$= \frac{k^2 + 2k + 1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k+1}{k+2}.$$

Обе теоремы доказаны. Теперь на основании метода математической индукции мы утверждаем, $S_n = \dfrac{n}{n+1}$ при всяком натуральном n.

4.2 Теорема Виета

Для уравнения $x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0$ имеет место следующая зависимость между корнями уравнения (с учетом кратности) и его коэффициентами $\grave{a}_i \quad (i = 1, 2\ldots, n)$:

$$
\begin{aligned}
&x_1 + x_2 + \ldots + x_n = -a_1, \\
&x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n = a_2, \\
&x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + \ldots + x_{n-2}x_{n-1}x_n = -a_3, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&x_1x_2\ldots x_n = (-1)^n a_n.
\end{aligned}
$$

Таким образом, если уравнение имеет целочисленные коэффициенты и целочисленное решение, то это решение является делителем свободного члена.

а) Теорема Виета для квадратного уравнения $x^2 + px + q = 0$.

$$
\begin{aligned}
&x_1 + x_2 = -p \\
&x_1x_2 = q.
\end{aligned}
$$

б) Теорема Виета для кубического уравнения $x^3 + rx^2 + sx + t = 0$.

$$
\begin{aligned}
&x_1 + x_2 + x_3 = -r, \\
&x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = s, \\
&x_1x_2x_3 = -t.
\end{aligned}
$$

4.3 Методы вычисления определителей *n*-ого порядка

1) ***Метод приведения к треугольному виду***. Этот метод заключается в преобразовании определителя к такому виду, где все элементы, находящиеся по одну сторону одной из диагоналей, равны нулю. Полученный определитель равен произведению элементов главной диагонали.

Пример 1. Вычислить определитель порядка n:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \end{vmatrix}.$$

Решение: вычтем первую строку из всех остальных

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 \end{vmatrix} = (-1)^{n-1}.$$

2) ***Метод выделения линейных множителей***. Определитель рассматривается как многочлен от одной или нескольких входящих в него букв. Преобразуя его, обнаруживают, что он делится на ряд линейных множителей, а значит (если эти множители взаимно просты), и на их произведение. Сравнивая отдельные члены определителя с членами произведения линейных множителей, находят частное от деления определителя на это произведение и тем самым находят выражение определителя.

Пример 2. Вычислить определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & x & y & z \\ x & 0 & z & y \\ y & z & 0 & x \\ z & y & x & 0 \end{vmatrix}.$$

Решение. Если к первому столбцу прибавить остальные, то обнаружится, что определитель делится на $x+y+z$; если к первому столбцу прибавить второй и вычесть третий и четвертый, то выделится множитель $y+z-x$; если к первому столбцу прибавить третий и вычесть второй и четвертый, то выделится множитель $x-y+z$; наконец, если к первому столбцу прибавить четвертый и вычесть второй и третий, то выделится множитель $x+y-z$. Считая x, y, z независимыми неизвестными, заключаем, что эти четыре множителя попарно взаимно просты, и значит, определитель делится на их произведение $(x+y+z)(y+z-x)(x-y+z)(x+y-z)$. Это произведение содержит член z^4 с коэффициентом -1, а сам определитель содержит тот же член с коэффициентом +1. Значит,

$$\Delta = -(x+y+z)(y+z-x)(x-y+z)(x+y-z) =$$
$$= x^4 + y^4 + z^4 - 2x^2y^2 - 2x^2z^2 - 2y^2z^2.$$

3) ***Метод рекуррентных соотношений.*** Этот метод заключается в том, что данный определитель выражают, преобразуя и разлагая его по строке или столбцу, через определители того же вида, но более низкого порядка. Полученное равенство называется рекуррентным соотношением.

Затем вычисляют непосредственно по общему виду определителя столько определителей низших порядков, сколько их было в правой части рекуррентного соотношения. Определители более высокого порядка вычисляются последовательно.

Пример 3. Вычислить определитель

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_1 & x & x & \dots & x \\ x & a_2 & x & \dots & x \\ x & x & a_3 & \dots & x \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x & x & x & \dots & a_n \end{vmatrix}.$$

Решение. Представив элемент в правом нижнем углу в виде $a_n = x + (a_n - x)$, мы можем определитель разбить на сумму двух определителей:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_1 & x & \dots & x & x \\ x & a_2 & \dots & x & x \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x & x & \dots & a_{n-1} & x \\ x & x & \dots & x & a_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & x & \dots & x & 0 \\ x & a_2 & \dots & x & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x & x & \dots & a_{n-1} & 0 \\ x & x & \dots & x & a_n - x \end{vmatrix}.$$

В первом определителе последний столбец вычтем из остальных, а второй определитель разложим по последнему столбцу:
$\Delta_n = x(a_1 - x)(a_2 - x)...(a_{n-1}) + (a_n - x)\Delta_{n-1}$.

Это и есть рекуррентное соотношение. Вставляя в него аналогичное выражение для Δ_{n-1}, найдем

$$\Delta_n = x(a_1 - x)(a_2 - x)...(a_{n-1}) + x(a_1 - x)(a_2 - x)...(a_{n-2} - x)(a_n - x) + \\ +(a_{n-1} - x)(a_n - x)\Delta_{n-2}.$$

Повторяя то же рассуждение $n-1$ раз и замечая, что $\Delta_1 = a_1 = x + (a_1 - x)$,
получаем

$$\Delta_n = x(a_1 - x)(a_2 - x)...(a_{n-1}) + x(a_1 - x)(a_2 - x)...(a_{n-2} - x)(a_n - x) + ... = \\ = x(a_1 - x)(a_2 - x)...(a_n - x)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{a_1 - x} + ... + \frac{1}{a_n - x}\right).$$

4) ***Метод представления определителя в виде суммы определителей***

Некоторые определители легко вычисляются путем разложения их в сумму определителей того же порядка относительно строк (или столбцов).

Пример 4. Вычислить определитель

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_1 + b_1 & a_1 + b_2 & ... & a_1 + b_n \\ a_2 + b_1 & a_2 + b_2 & ... & a_2 + b_n \\ ... & ... & ... & ... \\ a_n + b_1 & a_n + b_2 & ... & a_n + b_n \end{vmatrix}.$$

Решение. Этот определитель относительно первой строки разлагается на два определителя, каждый из них относительно второй строки снова разлагается на два определителя и т. д. Дойдя до последней строки, получаем 2^n определителей.

Если при каждом разложении за первые слагаемые принимать числа a_i, а за вторые – числа b_j, то строки полученных определителей будут вида $a_i, a_i, ..., a_i$, либо вида $b_1, b_2, ..., b_n$. Две строки первого типа пропорциональны, а второго типа равны. При $n > 2$ в каждый получившийся определитель попадает по крайней мере две строки одного типа, и он обращается в нуль. То есть $\Delta_n = 0$ при $n > 2$.

Далее $\Delta_1 = a_1 + b_1$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_1 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ a_2 & a_2 \end{vmatrix} = (a_1 - a_2)(b_2 - b_1)$.

5) ***Метод изменения элементов определителя***. Этот метод применяется в тех случаях, когда путем изменения всех элементов определителя на одно и то же число он приводится к такому виду, в котором легко вычислить алгебраические дополнения всех элементов. Метод основан на следующем свойстве: если ко всем элементам определителя прибавить одно и то же число, то определитель увеличится на произведение этого числа на сумму алгебраических дополнений всех элементов исходного определителя.

Пример 5. Вычислить определитель

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_1 & x & x & \dots & x \\ x & a_2 & x & \dots & x \\ x & x & a_3 & \dots & x \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x & x & x & \dots & a_n \end{vmatrix}.$$

Решение. Вычитаем из всех элементов определителя число x. В результате получаем определитель

$$\begin{vmatrix} a_1 - x & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_2 - x & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_n - x \end{vmatrix}.$$

Алгебраические дополнения элементов этого определителя, не лежащих на главной диагонали, равны нулю, а каждого элемента на главной диагонали – произведению остальных элементов главной диагонали. Поэтому

$$\Delta_n = x(a_1 - x)(a_2 - x)\dots(a_n - x)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{a_1 - x} + \dots + \frac{1}{a_n - x}\right).$$

4.4 Неравенство Шварца

$$\left|\int_a^b f(x)\cdot g(x)dx\right| \le \sqrt{\int_a^b f(x)dx \cdot \int_a^b g(x)dx}\ .$$

4.5 Неравенство Коши

$$\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n} \le \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}.$$

4.6 Неравенство Коши-Буняковского

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \right)^2 \le \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2 \right).$$

4.7 Факториал

Функция $f(n)$, для которой

$$f(0) = 1, \quad f(n+1) = (n+1) f(n)$$

при всех целых неотрицательных n, называется n-факториалом и обозначается $n! = 1 \cdot 2 \cdot ... \cdot n$.

Для приближенного вычисления $n!$ пользуются формулой Стирлинга

$$n! \approx \left(\frac{n}{e} \right)^n \sqrt{2\pi n} \text{ или } \ln(n!) \approx \left(n + \frac{1}{2} \right) \ln n - n + \frac{1}{2} \ln(2\pi).$$

4.8 Интеграл Пуассона

$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

4.9 Интеграл Дирихле

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

4.10 Биномиальные коэффициенты

Для всех целых неотрицательных чисел n, k функция

$$C_n^k = \begin{cases} \dfrac{n!}{k!(n-k)!} & 0 \le k \le n, \\ 0 & 0 \le n < k \end{cases}$$

называется биномиальным коэффициентом.

4.11 Бином Ньютона

Для всех действительных чисел a, b и для всех натуральных чисел n

$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k a^{n-k}b^k.$$

Если заменить b на $-b$, то

$$(a-b)^n=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k a^{n-k}b^k.$$

4.12 Суммы некоторых числовых рядов

1) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}=e$; 2) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n!}=\frac{1}{e}$; 3) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{\grave{o}-1}\frac{1}{\grave{o}\,!}=\ln 2$; 4) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}=2$;

5) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2^n}=\frac{2}{3}$; 6) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=1$; 7) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$; 8) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{12}$.

4.13 Разложение в ряд некоторых элементарных функций

1) $e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\dots;\qquad |x|<\infty;$

2) $\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\dots;\qquad |x|<\infty;$

3) $\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\dots;\qquad |x|<\infty;$

4) $tgx=x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+\frac{17x^7}{315}+\dots;\qquad |x|<\frac{\pi}{2};$

5) $\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\dots;\qquad -1<x\le 1;$

6) $\ln(1-x)=-(x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\dots);\qquad -1\le x<1;$

7) $\arcsin x=x+\frac{x^3}{2\cdot 3}+\frac{1\cdot 3x^5}{2\cdot 4\cdot 5}+\frac{1\cdot 3\cdot 5x^7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 7}+\dots;\qquad |x|\le 1;$

8) $arctgx=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\dots;\qquad |x|\le 1.$

РЕКОМЕНДОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Садовничий В. А. Задачи студенческих олимпиад по математике / В. А. Садовничий, А. С. Подколзин. – М.: Наука, 1978. – 208 с.
2. Избранные задачи из журнала «American Mathematical Monthly»/ под редакцией Алексеева В. М. – М.: Мир, 1977. – 597 с.
3. Фаддеев Д. К. Сборник задач по математике / Д. К. Фаддеев, И. С. Соминский. – Киев: Вища школа, 1968. – 304 с.
4. Проскуряков И. В. Сборник задач по линейной алгебре / И. В. Проскуряков. – М.: Наука, 1984. – 336 с.
5. Кованцова Л. В. Сборник задач по математике / Л. В. Кованцова, И. Г. Малышев.– Киев.: Вища школа, 1980. – 286 с.
6. Дороговцев А. Я. Ряды / А. Я. Дороговцев. – Киев.: Вища школа, 1978. – 112 с.
7. Дороговцев А. Я. Избранные задачи по математическому анализу / А. Я. Дороговцев. – Киев: Вища школа, 1982. – 104 с.
8. Беркович Ф. Д. Задачи всероссийских и северокавказских математических олимпиад студентов / Ф. Д. Беркович, В. С. Федий. – Ростов-н/Д: Издательство Ростовского университета, 1991. – 108 с.
9. Беркович Ф. Д. Задачи студенческих математических олимпиад с указаниями и решениями: учеб. пособие / Ф. Д. Беркович, В. С. Федий. – Юж.-Рос. гос. техн. ун-т. – Новочеркасск: ЮРГТУ(НПИ), 2001. – 192 с.
10. Беркович Ф. Д. Задачи студенческих математических олимпиад с указаниями и решениями: учеб. пособие /Ф. Д. Беркович, В. С. Федий. – Юж.-Рос. гос. техн. ун-т. – Новочеркасск: ЮРГТУ(НПИ), 2006. – 184 с.
11. Булдыгин В. В. Задачи Всеукраинских студенческих олимпиад, проводившихся в НТТУ КПИ в 1997 – 2000 г./ В. В. Булдыгин. – Математика сегодня. – 2001. – Вып. 21.

Учебное пособие

Луценко Любовь Ивановна

Сборник задач повышенной трудности по высшей математике
для подготовки к студенческим олимпиадам

Подписано к печати ____г. Формат 70х90/16. Гарнитура Times New Roman.
Печать – ризография. Тираж 50 экз. Усл. печ. листов ___. Заказ. № ___.

Государственное высшее учебное заведение
«Донецкий национальный технический университет»
Автомобильно-дорожный институт
84646, г. Горловка, ул. Кирова, 51

Редакционно-издательский отдел

Свидетельство о внесении в Государственный реестр издателей, изготовителей и
распространителей издательской продукции ДК № 2982 від 21.09.2007 р.