МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
АВТОМОБІЛЬНО-ДОРОЖНІЙ ІНСТИТУТ
ДЕРЖАВНОГО ВИЩОГО НАВЧАЛЬНОГО ЗАКЛАДУ
«ДОНЕЦЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ»

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до самостійної роботи
з курсу “Вища математика”.
Розділ “Елементи векторної алгебри”
(для студентів всіх спеціальностей денної форми навчання)

Затверджено на засіданні
навчально-методичної
комісії факультету
“Економіка та управління”
Протокол № 8 від 21.05.2008

Затверджено на засіданні кафедри
“Вища математика”
Протокол № 12 від 25.03.2008

Горлівка – 2008

УДК 512.6 (071)
Методичні вказівки до самостійної роботи з курсу “Вища математика”. Розділ “Елементи векторної алгебри” (для студентів всіх спеціальностей денної форми навчання) /Укл.: М.Ф. Єфремов, – Горлівка: АДІ ДВНЗ ДонНТУ, 2008. – 53 с.

Містять короткі відомості з теорії векторів та їх практичних застосувань. Наведені розв’язки типових прикладів, запитання для самоконтролю, вправи для самостійної роботи та індивідуальні домашні завдання.

Укладач: М.Ф. Єфремов, ст. викл.

Рецензент: Г.Б. Вайс, к.ф-м.н., доц.

Відповідальний за випуск: Л.П. Вовк, д.т.н., проф.

ЗМІСТ

ВСТУП

Векторна алгебра – розділ математики, в якому вивчаються величини, що характеризуються не тільки їх числовим значенням, а й напрямком. Такі величини досить часто зустрічаються в механіці, фізиці, електротехніці, гідравліці, теорії механізмів і задаються у вигляді вектора. У векторній алгебрі вектори розглядаються як математичні об'єкти, визначаються дії над ними, з'ясовуються їх властивості та практичні застосування. Апарат векторної алгебри широко використовується як в подальших розділах математики, так і в інженерних дисциплінах. Змінні векторні величини вивчаються в *векторному аналізі*, знайомство з якими відбудеться пізніше.

1 ВЕКТОР. ВИДИ ВЕКТОРІВ

Векторні величини (сила, швидкість, прискорення) задають за допомогою вектора. *Вектор* – це направлений відрізок, в якому названі його початок і кінець. Позначається вектор символами $\overline{AB}$ або $\overline{a}$, де A – початок, B – кінець вектора.

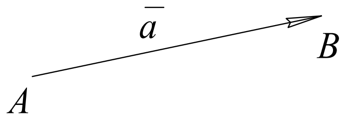


Рисунок 1.1

Довжина вектора називається його *модулем* і позначається $\left|\overline{AB}\right|$, $\left|\overline{a}\right|$. Вектор, модуль якого дорівнює одиниці, називають *одиничним.* Одиничний вектор, напрямок якого співпадає з напрямком вектора $\overline{a}$, називається *ортом* вектора $\overline{a}$ і позначається $\overline{a^\circ}$. Вектор називається *нульовим*, якщо його початок і кінець співпадають.

Вектори називаються:

– *колінеарними*($\overline{a} \, // \, \overline{b}$), якщо вони лежать на одній або паралельних прямих;

– *рівними*, якщо вони колінеарні, однаково напрямлені і мають рівні модулі;

– *протилежними*, якщо вони колінеарні, рівні по модулю і протилежно напрямлені;

– *компланарними*, якщо вони лежать в одній або паралельних площинах.

Приклад 1. Нехай ABC – довільний трикутник; M, N, P – середини його сторін (*рис. 1.2*). Навести приклади колінеарних, рівних та протилежних векторів.

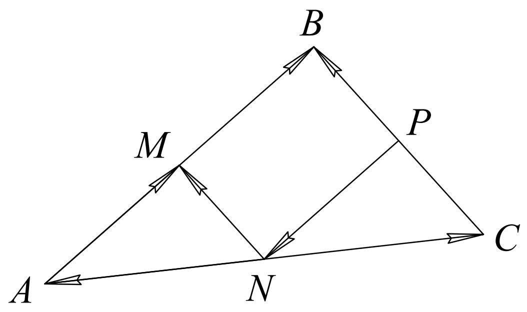


Рисунок 1.2

Розв'язання. Виходячи з означення колінеарних, рівних, та протилежних векторів, маємо:

а) колінеарні: $\overline{AM} \parallel \overline{AB} \parallel \overline{PN}$; $\overline{NM} \parallel \overline{CB}$

б) рівні: $\overline{AM} = \overline{MB}$; $\overline{NM} = \overline{PB} = \overline{CP}$;

в) протилежні: $\overline{MB}$ і $\overline{PN}$; $\overline{NA}$ і $\overline{NC}$, тобто $\overline{MB} = -\overline{PN}$; $\overline{NA} = -\overline{NC}$.

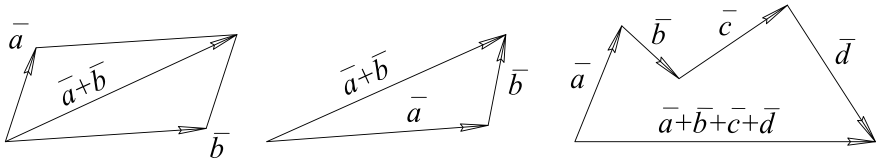
Запитання для самоконтролю

1. Які величини називаються скалярними, векторними? Навести приклади.
2. Що називається вектором, ортом, одиничним та нульовим вектором?
3. Які вектори називаються колінеарними, рівними, протилежними, компланарними?

2 ЛІНІЙНІ ОПЕРАЦІЇ З ВЕКТОРАМИ

До лінійних дій над векторами відносять додавання і віднімання векторів, множення вектора на число.

Сумою векторів є вектор. Додавання двох векторів здійснюється за правилом паралелограма (*рис. 2.1, а*) або трикутника (*рис. 2.1, б*) Додавання n векторів $(n \geq 2)$ виконується за правилом многокутника (*рис. 2.1, в*).

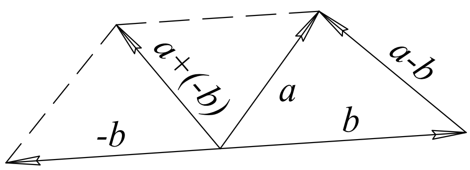


а) *б)* *в)*

Рисунок 2.1

Різницею векторів $(\bar{a} - \bar{в})$ є такий вектор $\bar{c}$, що $\bar{c} + \bar{в} = \bar{a}$ (*рис. 2.2*), або $\bar{c} = \bar{a} + (-\bar{в})$.

Добутком вектора $\bar{a}$ на число λ є вектор $\lambda\bar{a}$ такий, що $|\lambda\bar{a}| = |\lambda| \cdot |\bar{a}|$ і напрям якого збігається з напрямком $\bar{a}$, якщо $\lambda > 0$, або протилежний $\bar{a}$, якщо $\lambda < 0$ (*рис. 2.3*).



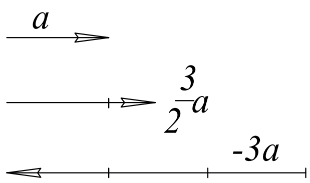


Рисунок 2.2 *Рисунок 2.3*

Властивості лінійних операцій над векторами:

1. Комутативність відносно додавання векторів

$$\bar{a} + \bar{в} = \bar{в} + \bar{a}$$

2. Асоціативність відносно додавання векторів

$$(\bar{a} + \bar{в}) + \bar{c} = \bar{a} + (\bar{в} + \bar{c})$$

3. Асоціативність відносно множення чисел

$$\lambda(\mu\overline{a}) = (\lambda\mu)\overline{a}$$

4. Дистрибутивність відносно додавання чисел

$$(\lambda + \mu)\cdot\overline{a} = \lambda\overline{a} + \mu\overline{a}$$

5. Дистрибутивність відносно додавання векторів

$$\lambda(\overline{a} + \overline{в}) = \lambda\overline{a} + \lambda\overline{в}$$

Зауваження. Із наведених властивостей слідує, що тотожні перетворення при лінійних операціях з векторами виконують так само, як у звичайній алгебрі: векторні доданки можна переставляти місцями, об'єднувати їх дужками, виносити за дужки як скалярні так і векторні множники.

Якщо $\overline{a}\,//\,\overline{в}$, то виходячи з операції множення вектора на число, маємо:

$$\overline{a} = \lambda\overline{в} \qquad (2.1)$$

Вірно і навпаки, якщо $\overline{a} = \lambda\overline{в}$, то $\overline{a}\,//\,\overline{в}$. Отже (2.1) – умова колінеарності векторів.

Якщо $\overline{a}$ – не нульовий вектор, то його орт

$$\overline{a}^{\circ} = \frac{1}{|\overline{a}|}\cdot\overline{a} \qquad (2.2)$$

Приклад 1. В трапеції $ABCD$ (*рис. 2.4*) $BC=AP=PQ=QD$; MN – середня лінія; $\overline{AB} = \overline{a}$, $\overline{AC} = \overline{в}$. Виразити через $\overline{a}$ та $\overline{в}$ вектори: $\overline{BC}$, $\overline{AD}$, $\overline{MN}$, $\overline{AN}$, $\overline{CD}$.

Розв'язання. 1) За правилом віднімання векторів із ΔABC маємо: $\overline{BC} = \overline{AC} - \overline{AB} = \overline{в} - \overline{a}$.

2) Користуючись правилом множення вектора на число та означенням рівних векторів, маємо: $\overline{AD} = 3\overline{AP} = 3\overline{BC} = 3(\overline{в} - \overline{a})$.

3) Виходячи з означення середньої лінії трапеції, поняття модуля та напрямку вектора, маємо:

$$\overline{MN} = \frac{\overline{BC} + \overline{AD}}{2} = \frac{\overline{в} - \overline{a} + 3(\overline{в} - \overline{a})}{2} = \frac{4(\overline{в} - \overline{a})}{2} = 2(\overline{в} - \overline{a}).$$

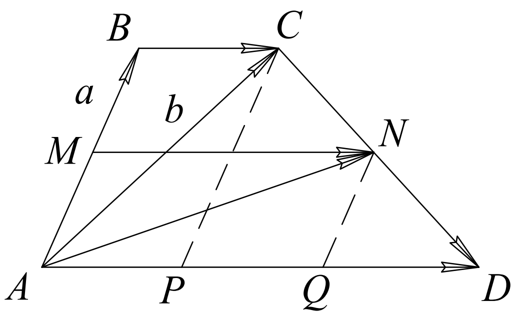


Рисунок 2.4

4) Із ΔAMN (або паралелограма $AMNQ$), за правилом додавання векторів маємо:

$$\overline{AN} = \overline{AM} + \overline{MN} = \frac{1}{2}\overline{AB} + \overline{MN} = \frac{1}{2}\overline{a} + 2(\overline{в} - \overline{a}) = 2\overline{в} - \frac{3}{2}\overline{a}.$$

5) Користуючись додаванням векторів за правилом многокутника, маємо: $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} = \overline{AD}$. Звідки:

$$\overline{CD} = \overline{AD} - \overline{AB} - \overline{BC} = 3(\overline{в} - \overline{a}) - \overline{a} - (\overline{в} - \overline{a}) = 2\overline{в} - 3\overline{a}.$$

Зауважимо, що пошук вищеназваних векторів може бути виконаний і іншим шляхом. Самостійно знайдіть інші варіанти розв’язування прикладу.

Запитання для самоконтролю

1) Чому операції додавання, віднімання та множення вектора на число називаються лінійними?

2) Як визначається сума та різниця двох векторів, сума кількох векторів, добуток вектора на число?

3) Назвати властивості лінійних операцій над векторами, та вказати на їх значення.

Вправи

2.1 На некомпланарних векторах $\overline{OA} = \overline{a}$, $\overline{OB} = \overline{в}$, $\overline{OC} = \overline{c}$, як на ребрах, побудовано паралелепіпед. Вказати вектори відповідно рівні: $\overline{a} + \overline{в} - \overline{c}$, $\overline{a} - \overline{в} + \overline{c}$, $\overline{a} - \overline{в} - \overline{c},$ $\overline{в} - \overline{a} - \overline{c}$.

2.2 Задано правильний шестикутник $OABCDE$ в якому $\overline{OA}^{\circ} = \overline{e}_1$, $\overline{AB}^{\circ} = \overline{e}_2$, $\overline{BC}^{\circ} = \overline{e}_3$. Знайти залежність між одиничними векторами $\overline{e}_1$, $\overline{e}_2$, $\overline{e}_3$. Розглянути аналогічну задачу для правильного трикутника.

2.3 Точка B ділить дугу кола $AC = 90^o$ у відношенні $1:2$. O – центр кола. Розкласти геометрично вектор $\overline{OC} = \overline{c}$ за векторами $\overline{OA} = \overline{a}$ та $\overline{OB} = \overline{в}$.

2.4 Задані компланарні вектори $\overline{m}, \overline{n}, \overline{p}$. Побудувати вектор $\overline{a} = \overline{m} + 2\overline{n} - 3\overline{p}$, та знайти його модуль, якщо $(\overline{m} \wedge \overline{n}) = 30^{\circ}$, а $(\overline{n} \wedge \overline{p}) = 60^{\circ}$.

2.5 До кола з центром O проведені із точки M дві дотичні; A і B – точки дотику. Розкласти вектор $\overline{MO}$ по векторам $\overline{MA} = \overline{a}$ та $\overline{MB} = \overline{в}$, якщо $\angle AMB = \alpha$.

2.6 Задані вектори $\overline{OA} = \overline{a}$, $\overline{OB} = \overline{b}$. Побудувати множину векторів $\overline{OC} = \overline{c}$ таких, що

а) $(\overline{a} + \overline{c}) // (\overline{a} + \overline{в})$,

б) $(\overline{a} - \overline{c}) // (\overline{a} - \overline{в})$.

Скласти рівняння геометричного місця точок – кінців вектора $\overline{C}$.

2.7 В трикутнику ABC вектори $\overline{AB} = \overline{a}$, $\overline{AC} = \overline{c}$. AM – бісектриса. Розкласти вектор $\overline{AM}$ по векторам $\overline{a}$ та $\overline{b}$.

3 ПРОЕКЦІЯ ВЕКТОРА НА ВІСЬ

Проекцією вектора $\overline{a}$ на вісь U $(пр_u \overline{a})$ називається довжина відрізка, обмеженого проекціями кінця і початку вектора, взята зі знаком “+”, якщо кут між вектором і віссю гострий, і зі знаком “–”, якщо цей кут тупий (*рис. 3.1*). Тобто

$$пр_u \overline{AB} = U_B - U_A ,$$

де U_B та U_A – проекції кінця і початку вектора на вісь.

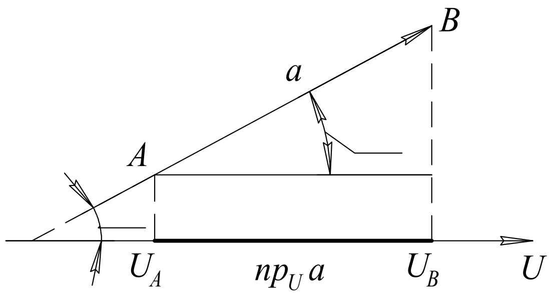


Рисунок 3.1

Властивості проекції вектора:

1) $$пр_u\overline{a} = |a|\cos\varphi , \tag{3.1}$$

де φ – кут між вектором і віссю.

2) $$пр_u(\overline{a} + \overline{в}) = пр_u\overline{a} + пр_u\overline{в} , \tag{3.2}$$

3) $$пр_u(\lambda\overline{a}) = \lambda пр_u\overline{a} , \tag{3.3}$$

Приклад 1. На площині XOY вектор $\overline{a}$ утворює з віссю OX кут $\alpha = 30°$. Знайти проекції вектора на координатні осі, якщо $|\overline{a}| = 6$ (*рис. 3.2*).

Розв'язання. За формулою (3.1) маємо:

$пр_{ox}\overline{a} = |\overline{a}|\cos\alpha = 6\cos 30° = 6\frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$. Так як $\beta = 90° - \alpha = 60°$, то $пр_{oy}\overline{a} = |\overline{a}|\cos\beta = 6\cos 60° = 6\frac{1}{2} = 3$.

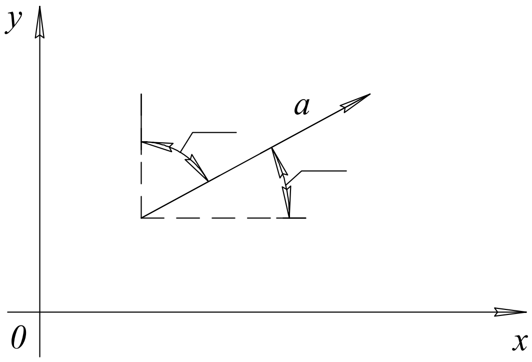


Рисунок 3.2

Приклад 2. На векторах $\overline{AB} = \overline{a}$ і $\overline{AC} = \overline{в}$, як на сторонах, побудовано ΔABC (*рис. 3.3*). Знайти довжину висоти, опущеної із вершини B, користуючись поняттями модуля вектора та проекції вектора на вектор.

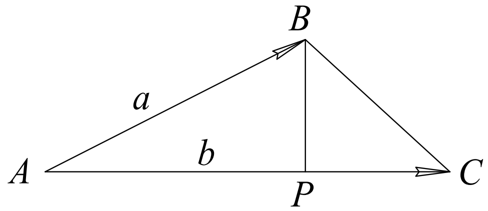


Рисунок 3.3

Розв'язання. Із ΔABP маємо: $BP = \sqrt{AB^2 - AP^2}$. Так як $AB = |\overline{a}|$, $AP = |пр_{\overline{в}}\overline{a}|$, то $BP = \sqrt{|\overline{a}|^2 - |пр_{\overline{в}}\overline{a}|^2}$.

Запитання для самоконтролю

1. Що називається проекцією вектора на вісь?
2. Назвати властивості проекцій вектора на вісь.
3. Назвати способи знаходження проекції вектора на вісь.

Вправи

3.1 З'ясувати, чи можливі рівності: $пр_{\overline{a}}\overline{в} = |\overline{a}|$, $пр_{\overline{a}}\ \overline{в} = |\overline{в}|$, $пр_{\overline{a}}\overline{в} = пр_{\overline{в}}\overline{a}$?

3.2 Довжина сторони правильного шестикутника $ABCDEF$ дорівнює m, $\overline{AB} = \overline{a}, \overline{BC} = \overline{в}, \overline{CD} = \overline{c}$. Знайти: 1) $пр_{\overline{a}}\overline{в}$, 2) $пр_{\overline{a}}(\overline{в} + \overline{c})$, 3) $пр_{\overline{a}}(\overline{a} + \overline{в} + \overline{c})$, 4) $пр_{\overline{a}}(2\overline{в} - 3\overline{c})$.

3.3 Знайти проекції вектора $\overline{AB}$ на осі координат, якщо $A(-1;\ 3)$, $B(7;9)$.

3.4 Скласти рівняння *Г.М.Т.*, які утворюють циліндричну кругову поверхню з віссю OZ та радіусом R.

3.5 Скласти рівняння *Г.М.Т.*, які утворюють кругову конічну поверхню з віссю OZ і вершиною в точці O.

4 ЛІНІЙНА ЗАЛЕЖНІСТЬ ВЕКТОРІВ. РОЗКЛАД ВЕКТОРА ЗА БАЗИСОМ

Лінійна комбінація векторів $\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_n$ – це вектор $\lambda_1\overline{a}_1 + \lambda_2\overline{a}_2 + ... + \lambda_n\overline{a}_n = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i\overline{a}_i$, одержаний внаслідок лінійних операцій над заданими векторами.

Вектори $\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_n$ називаються *лінійно залежними,* якщо хоча б один з них є лінійною комбінацією решти.

Вектори $\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_n$ – *лінійно незалежні,* якщо жоден з них не може бути лінійною комбінацією будь-якої решти.

Для того, щоб вектори $\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_n$ були лінійно незалежними, необхідно і достатньо, щоб рівність $\lambda_1\overline{a}_1 + \lambda_2\overline{a}_2 + ... + \lambda_n\overline{a}_n = 0$ виконувалась лише за умови, що $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_n = 0$.

Із означень лінійно залежних та незалежних векторів слідує: якщо $\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_n$ – лінійно незалежні і $\{\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_n\} \cup \overline{a}$ – лінійно залежні, то

$$a = \lambda_1\overline{a}_1 + \lambda_2\overline{a}_2 + ... + \lambda_n\overline{a}_n. \quad (4.1)$$

В такому випадку вектори $\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_n$ утворюють *базис* і називаються базисними.

Означення: Максимальна сукупність лінійно незалежних векторів, через які лінійно виражається довільний вектор простору, називається *базисом* цього простору.

Рівність (4.1) визначає *розклад вектора* $\overline{a}$ по зазначеному базису; доданки $\lambda_1\overline{a}_1, \lambda_2\overline{a}_2, ..., \lambda_n\overline{a}_n$ називаються *компонентами* вектора $\overline{a}$ в цьому базисі; дійсні числа $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ – *координатами* вектора $\overline{a}$ в базисі $\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_n$. Запровадження базису $\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_n$ дає змогу встановити взаємно-однозначну відповідність між вектором $\overline{a}$ і упорядкованою сукупністю чисел. Тобто, кожний вектор $\overline{a}$ однозначно задається числами $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ – координатами цього вектора, або, що те ж саме, розкладом вектора в цьому базисі (4.1). Навпаки, кожній упорядкованій сукупності чисел $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ однозначно відповідає єдиний вектор $a = \lambda_1\overline{a}_1 + \lambda_2\overline{a}_2 + ... + \lambda_n\overline{a}_n$.

Базисом на прямій (одновимірний простір) є довільний ненульовий вектор на цій прямій $\overline{a} = \lambda_1\overline{a}_1$ (*рис. 4.1*).

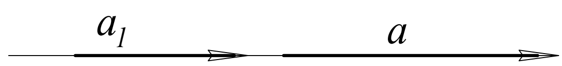


Рисунок 4.1

Базисом на площині (двовимірний простір) є довільна пара неколінеарних векторів цієї площини $\overline{a} = \overline{OB} + \overline{OA} = \lambda_1\overline{a}_1 + \lambda_2\overline{a}_2$ (*рис. 4.2*).

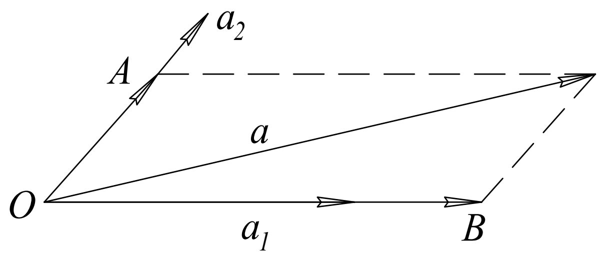


Рисунок 4.2

Базисом у тривимірному просторі є довільна трійка некомпланарних векторів $\overline{a} = \overline{ON} + \overline{OM} = (\overline{OB} + \overline{OA}) + \overline{OM} = \lambda_1 \overline{a}_1 + \lambda_2 \overline{a}_2 + \lambda_3 \overline{a}_3$ (*рис. 4.3*).

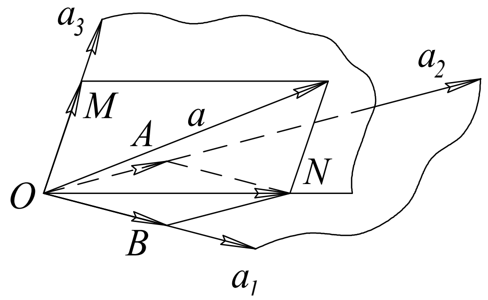


Рисунок 4.3

Приклад 1. В прямокутнику $ABCD$ (*рис. 4.4*) M і N середини сторін, $\overline{AM} = \overline{a}$, $\overline{AN} = \overline{в}$. Розкласти вектор $\overline{AD}$ за базисом $\overline{a}, \overline{в}$. Назвати компоненти та координати вектора $\overline{AD}$ в цьому базисі.

Розв'язання. Вектори $\overline{a}$ і $\overline{в}$ не колінеарні, тому в площині прямокутника вони утворюють базис $\overline{AD} = \overline{AO} + \overline{OD}$. Виходячи з властивостей середньої лінії трикутника, маємо:

$$\overline{OD} = \overline{MN} = \overline{в} - \overline{a} ,$$

$$\overline{AO} = \overline{AP} + \overline{AE} = \frac{1}{3}\overline{a} + \frac{1}{3}\overline{в} .$$

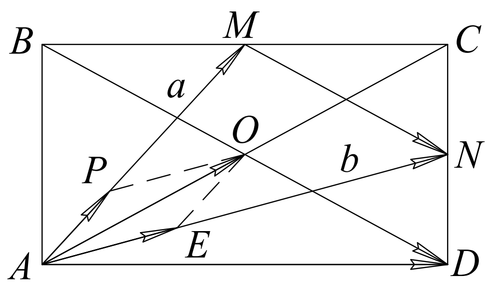


Рисунок 4.4

Тоді, $\overline{AD} = \frac{1}{3}\overline{a} + \frac{1}{3}\overline{в} + \overline{в} - \overline{a} = -\frac{2}{3}\overline{a} + \frac{4}{3}\overline{в}$ Отже, $-\frac{2}{3}\overline{a}$; $\frac{4}{3}\overline{в}$ – компоненти; $\left(-\frac{2}{3}; \frac{4}{3}\right)$ – координати вектора $\overline{AD}$ в базисі $\overline{a}, \overline{в}$.

Запитання для самоконтролю

1. З'ясувати поняття лінійної залежності та незалежності векторів. Назвати умову лінійної незалежності векторів.
2. Дати означення базису.
3. Які вектори утворюють базис на прямій, на площині, в просторі?
4. Охарактеризувати роль базисних векторів.
5. Записати векторну рівність яка задає розклад вектора в даному базисі; назвати компоненти та координати вектора.

Вправи

4.1 В трикутнику ABC $\overline{AB} = \overline{a}$, $\overline{AC} = \overline{c}$. Знайти розклад векторів, які співпадають з медіанами трикутника за базисом $\overline{a}, \overline{в}$.

4.2 В паралелограмі $ABCD$ точки M і N є серединами сторін BC та DC. Розкласти вектор $\overline{DC}$ за базисом $\overline{a} = \overline{AM}$ і $\overline{в} = \overline{AN}$. Назвати компоненти та координати вектора $\overline{DC}$ в цьому базисі.

4.3 Довести, що будь-які два неколінеарні вектори в двовимірному просторі утворюють базис; будь-які три некомпланарні вектори в тривимірному просторі утворюють базис.

4.4 На векторах $\overline{CA} = \overline{a}$, $\overline{CB} = \overline{b}$, як на катетах, побудовано прямокутний трикутник. CM, CH, CK – відповідно медіана, висота та бісектриса, проведені до гіпотенузи. Знайти вектори $\overline{CM}$, $\overline{CH}$, $\overline{CK}$.

5 ДЕКАРТІВ БАЗИС

Зручним і найпростішим є базис, складений із трьох (в тривимірному просторі) одиничних взаємоперпендикулярних векторів $\overline{i}; \overline{j}; \overline{k}$ (*рис. 5.1*)

$$\left|\overline{i}\right| = \left|\overline{j}\right| = \left|\overline{k}\right| = 1, \qquad \overline{i} \perp \overline{j} \perp \overline{k}.$$

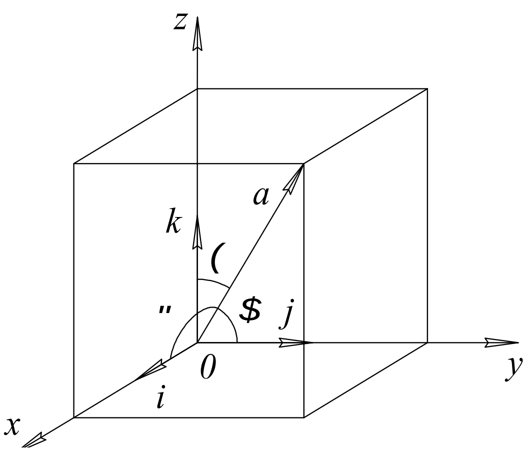


Рисунок 5.1

Зведені до спільної точки O ці вектори визначають прямокутну декартову систему координат. Напрям осей OX, OY, OZ співпадає відповідно з напрямком векторів $\bar{i}; \bar{j}; \bar{k}$.

Якщо, для довільного $\bar{a}$:

$$a_x = np_{ox}\bar{a},$$

$$a_y = np_{oy}\bar{a},$$

$$a_z = np_{oz}\bar{a},$$

то $\bar{a} = a_x\bar{i} + a_y\bar{j} + a_z\bar{k}$, (5.1)

або $\bar{a} = (a_x, a_y, a_z)$, (5.2)

Завдання вектора його координатами (5.2), або розкладом за координатним базисом (5.1), дає можливість аналітичними розрахунками одержувати будь-які параметри векторів, а також виконувати дії над векторами.

5.1 Координати вектора, заданого його початком і кінцем

Нехай точки $A(x_a, y_a, z_a)$ і $B(x_в, y_в, z_в)$ визначають вектор $\bar{a} = \overline{AB}$ (*рис. 1.1*). Тоді, виходячи з означення координат вектора та властивостей його проекцій, маємо:

$$a_x = x_в - x_a; \quad a_y = y_в - y_a; \quad a_z = z_в - z_a .$$

Тобто:

$$\overline{a} = \overline{AB} = (x_в - x_a, y_в - y_a, z_в - z_a), \tag{5.3}$$

5.2 Модуль і напрямні косинуси вектора

Нехай $\overline{a} = (a_x, a_y, a_z)$,
тоді:

$$|a| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}, \tag{5.4}$$

Якщо α, β, γ – кути, які утворює $\overline{a}$ відповідно з осями OX, OY, OZ, то:

$$a_x = |\overline{a}|\cos\alpha;\ a_y = |\overline{a}|\cos\beta;\ a_z = |\overline{a}|\cos\gamma, \tag{5.5}$$

$\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ – називають напрямними косинусами вектора $\overline{a}$.

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{|\overline{a}|};\ \cos\beta = \frac{a_y}{|\overline{a}|};\ \cos\gamma = \frac{a_z}{|\overline{a}|}, \tag{5.6}$$

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1, \tag{5.7}$$

$$\overline{a}^\circ = (\cos\alpha; \cos\beta; \cos\gamma) = \left(\frac{a_x}{|\overline{a}|}; \frac{a_y}{|\overline{a}|}; \frac{a_z}{|\overline{a}|}\right), \tag{5.8}$$

5.3 Лінійні операції з векторами

Нехай: $\overline{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $\overline{в} = (в_x, в_y, в_z)$, $\lambda \in R$.

а) Якщо $\overline{a} = \overline{в}$, то із означення рівних векторів та (5.5), маємо:

$$\begin{cases} a_x = в_x \\ a_y = в_y \\ a_z = в_z \end{cases}, \tag{5.9}$$

Вірно і навпаки, тобто із (5.9) випливає $\overline{a} = \overline{в}$. Порівняння $\overline{a} < \overline{в}$ або $\overline{a} > \overline{в}$ для векторів не мають змісту.

б) Виходячи з поняття координат вектора та властивостей проекцій, маємо:

$$\overline{a} \pm \overline{в} = (a_x \pm в_x; a_y \pm в_y; a_z \pm в_z), \tag{5.10}$$

$$\lambda\overline{a} = \left(\lambda a_x; \lambda a_y; \lambda a_z\right), \tag{5.11}$$

Тобто, лінійні операції з векторами зводяться до відповідних операцій над їх координатами.

в) Якщо $\overline{a}$ і $\overline{в}$ *колінеарні*, то $\overline{a} = \lambda\overline{в}$, тобто: $(a_x, a_y, a_z) = (\lambda в_x, \lambda в_y, \lambda в_z)$, а це значить, що:

$$\begin{cases} a_x = \lambda в_x \\ a_y = \lambda в_y \\ a_z = \lambda в_z \end{cases}, \tag{5.12}$$

або

$$\frac{a_x}{в_x} = \frac{a_y}{в_y} = \frac{a_z}{в_z} = \lambda, \tag{5.13}$$

Кожна з рівностей (5.12) та (5.13) визначає умову колінеарності векторів.

Приклад 1. Задано точки $A(1;\ 2;\ 3)$ та $B(3; -4; 6)$. Знайти координати, довжину, напрямні косинуси та орт вектора $\overline{a} = \overline{AB}$.

Розв'язання.

1) Згідно (5.3) маємо: $\overline{a} = \overline{AB} = (3-1; -4-2; 6-3) = (2; -6; 3)$, або $\overline{a} = 2\overline{i} - 6\overline{j} + 3\overline{k}$.

2) За формулою (5.4) обчислюємо $|\overline{a}| = \sqrt{2^2 + (-6)^2 + 3^2} = 7$.

3) Користуючись формулами (5.6) знаходимо:

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{|\overline{a}|} = \frac{2}{7}; \quad \cos\beta = \frac{a_y}{|\overline{a}|} = -\frac{6}{7}; \ \cos\gamma = \frac{a_z}{|\overline{a}|} = \frac{3}{7}.$$

4) Так як $\overline{a}^\circ = (\cos\alpha; \cos\beta; \cos\gamma)$, то $\overline{a}^\circ = \left(\frac{2}{7}; -\frac{6}{7}; \frac{3}{7}\right)$.

Приклад 2. Задано точки $A(0;\ 0;\ 5)$, $B(3;\ 1;\ 2)$, $D(6;\ 7;\ -2)$. Знайти точку C за умови, що $ABCD$ – паралелограм (*рис. 5.2)*.

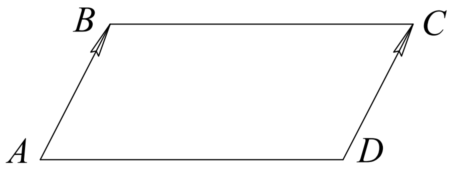


Рисунок 5.2

Розв'язання. Скористуємося умовою рівності векторів (5.9).

$$\overline{AB} = (3-0; 1-0; 2-5) = (3; 1; -3),\ \ \overline{DC} = (x_c - 6;\ y_c - 7;\ z_c + 2).$$

Так як $\overline{DC} = \overline{AB}$, то, виходячи з рівності координат рівних векторів, маємо:

$$\begin{cases} x_c - 6 = 3, \\ y_c - 7 = 1, \\ z_c + 2 = -3, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_c = 9 \\ y_c = 8 \\ z_c = -5 \end{cases} \Rightarrow C(9; 8; -5).$$

Приклад 3. На векторах $\overline{AB} = (2; 6; -4)$ та $\overline{AC} = (4; 2; -2)$, як на сторонах, побудовано *ΔABC*. Знайти довжину сторони BC і медіани AM (*рис. 5.3*).

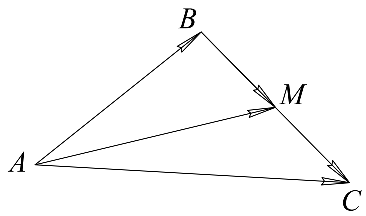


Рисунок 5.3

Розв'язання. Використовуючи правила лінійних операцій з векторами, заданими своїми координатами (5.10; 5.11), знаходимо:

1) $\overline{BC} = \overline{AC} - \overline{AB} = (4-2;\, 2-6;\, -2+4) = \left(2;\, -4;\, 2\right)$.

Отже, $BC = \left|\overline{BC}\right| = \sqrt{2^2 + (-4)^2 + 2^2} = \sqrt{24}.$

2) $\overline{AM} = \overline{AB} + \overline{BM} = \overline{AB} + \dfrac{1}{2}\overline{BC} = (2;\, 6;\, -4) + \dfrac{1}{2}(2;\, -4;\, 2) =$

$$= (2;\, 6;\, -4) + (1;\, -2;\, 1) = (3;\, 4;\, -3).$$

$$AM = \sqrt{3^2 + 4^2 + (-3)^2} = \sqrt{34}.$$

Приклад 4. З'ясувати вид чотирикутника $ABCD$, якщо $A(3;\, -1;\, 2)$, $B(1;\, 2;\, -1)$, $C(-1;\, 1;-3)$, $D(3;\, -5;\, 3)$.

Розв'язання. Розглянемо вектори, які співпадають з протилежними сторонами чотирикутника:

$\overline{AB} = (-2;\, 3;\, -3)$, $\quad \overline{CD} = (4;\, -6;\, 6)$. За умовою (5.13) перевіримо колінеарність цих векторів. Маємо: $\dfrac{4}{-2} = \dfrac{-6}{3} = \dfrac{6}{-3} = -2$.

Отже вектори $\overline{AB}$ і $\overline{CD}$ колінеарні і $\overline{CD} = -2\overline{AB}$, а це значить, що $ABCD$ – трапеція.

Приклад 5. Знайти орт вектора направленого по бісектрисі кута між векторами $\overline{a} = (-3;\, 0;\, 4)$ та $\overline{в} = (5;\, 2;\, 14)$.

Розв'язання. Очевидно, що уздовж зазначеної бісектриси (*рис. 5.4*) направлений вектор $\overline{OM} = \overline{a}^\circ + \overline{в}^\circ$. Користуючись (5.8) знайдемо орти $\overline{a}^\circ$ та $\overline{в}^\circ$.

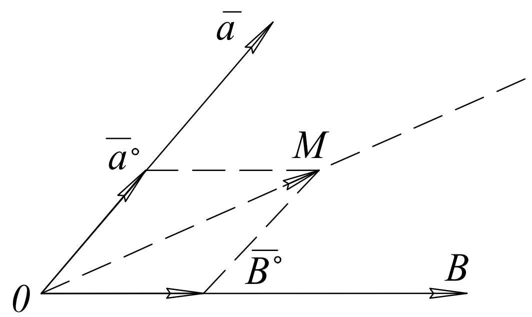


Рисунок 5.4

$$\left|\overline{a}\right| = \sqrt{(-3)^2 + 0^2 + 4^2} = 5; \quad \left|\overline{в}\right| = \sqrt{5^2 + 2^2 + 14^2} = 15.$$

Отже, $\overline{a}^\circ = \left(-\frac{3}{5}; 0; \frac{4}{5}\right)$ і $\overline{в}^\circ = \left(\frac{5}{15}; \frac{2}{15}; \frac{14}{15}\right)$.

Тоді,

$$\overline{OM} = \overline{a}^\circ + \overline{в}^\circ = \left(-\frac{3}{5} + \frac{5}{15}; 0 + \frac{2}{15}; \frac{4}{5} + \frac{14}{15}\right) = \left(-\frac{4}{15}; \frac{2}{15}; \frac{26}{15}\right).$$

Користуючись (5.8), знаходимо $\overline{OM}^\circ$.

$$\left|\overline{OM}\right| = \sqrt{\left(-\frac{4}{15}\right)^2 + \left(\frac{2}{15}\right)^2 + \left(\frac{26}{15}\right)^2} = \frac{\sqrt{696}}{15} = \frac{2\sqrt{174}}{15}.$$

$$\overline{OM}^\circ = \frac{1}{\left|\overline{OM}\right|}\overline{OM} = \frac{15}{2\sqrt{174}}\left(-\frac{4}{15}; \frac{2}{15}; \frac{26}{15}\right) = \left(-\frac{2}{\sqrt{174}}; \frac{1}{\sqrt{174}}; \frac{13}{\sqrt{174}}\right).$$

Приклад 6. Переконатись, що вектори $\overline{e}_1 = (1; -1; 2)$, $\overline{e}_2 = (10; 1; 1)$, $\overline{e}_3 = (2; -1; 6)$ утворюють базис, та знайти координати вектора $\overline{a} = (-3; -6; 17)$ в цьому базисі.

Розв'язання.

1) У тривимірному просторі вектори $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3$ утворюють базис якщо вони лінійно незалежні, тобто рівність

$$\lambda_1\overline{e}_1 + \lambda_2\overline{e}_2 + \lambda_3\overline{e}_3 = 0, \tag{5.14}$$

виконується лише за умови, що $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

В лівій частині (5.14) виконаємо послідовно лінійні операції, а також врахуємо, що координати нульового вектора дорівнюють нулю.

$$\lambda_1(1; -1; 2) + \lambda_2(10; 1; 1) + \lambda_3(2; -1; 6) = (0; 0; 0),$$
$$(\lambda_1; -\lambda_1; 2\lambda_1) + (10\lambda_2; \lambda_2; \lambda_2) + (2\lambda_3; -\lambda_3; 6\lambda_3) = (0; 0; 0),$$
$$(\lambda_1 + 10\lambda_2 + 2\lambda_3; -\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3; 2\lambda_1 + \lambda_2 + 6\lambda_3) = (0; 0; 0).$$

Прирівнюючи відповідні координати рівних векторів, одержимо систему рівнянь.

$$\begin{cases} \lambda_1 + 10\lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ -\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 + 6\lambda_3 = 0 \end{cases}, \qquad \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 10 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 6 \end{vmatrix} = 41 \neq 0 .$$

Оскільки визначник системи відмінний від нуля, то система має єдиний розв'язок $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Отже, задані вектори лінійно незалежні, а значить утворюють базис.

2) Нехай $(x_1; x_2; x_3)$ – координати вектора $\overline{a}$ в базисі $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3$. Тоді маємо розклад вектора $\overline{a}$ по зазначеному базису:

$$\overline{a} = x_1\overline{e}_1 + x_2\overline{e}_2 + x_3\overline{e}_3 , \tag{5.15}$$

У векторній рівності (5.15) переходимо до координат

$$(-3; -6; 17) = x_1(1; -1; 2) + x_2(10; 1; 1) + x_3(2; -1; 6) ,$$
$$(-3; -6; 17) = (x_1 + 10x_2 + 2x_3; -x_1 + x_2 - x_3; 2x_1 + x_2 + 6x_3) .$$

Прирівнюємо координати рівних векторів

$$\begin{cases} x_1 + 10x_2 + 2x_3 = -3 \\ -x_1 + x_2 - x_3 = -6 \\ 2x_1 + x_2 + 6x_3 = 17 \end{cases}, \qquad \Delta = 41 \neq 0 .$$

Розв'язуємо систему за формулами Крамера:

$$\Delta x_1 = \begin{vmatrix} -3 & 10 & 2 \\ -6 & 1 & -1 \\ 17 & 1 & 6 \end{vmatrix} = 123, \quad \Delta x_2 = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -1 & -6 & -1 \\ 2 & 17 & 6 \end{vmatrix} = -41,$$

$$\Delta x_3 = \begin{vmatrix} 1 & 10 & -3 \\ -1 & 1 & -6 \\ 2 & 1 & 17 \end{vmatrix} = 82 .$$

Тоді: $x_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta} = \frac{123}{41} = 3;\ x_2 = \frac{-41}{41} = -1;\ x_3 = 2$.

Отже, $\overline{a} = (3;-1;2) = 3\overline{e}_1 - \overline{e}_2 + 2\overline{e}_3$.

Запитання для самоконтролю

1. Який базис називається декартовим?
2. Як одержати координати вектора, заданого його початком і кінцем?
3. Як знайти модуль вектора, заданого координатами?
4. Що називається напрямними косинусами вектора? Як вони знаходяться?
5. Як знайти орт вектора?
6. Назвати умови рівності і колінеарності двох векторів, заданих координатами.
7. Сформулювати правила додавання, віднімання та множення вектора на число в разі, коли вектори задані координатами. З яких властивостей випливають правила, за якими виконують лінійні операції?

Вправи

5.1 В паралелограмі $ABCD$ задані вершини $A(2;-3;-5)$, $B(-1;3;2)$, $D(9;-5;12)$. Знайти довжини сторін та діагоналей.

5.2 Задані точки $A(-1;5;-10)$, $B(5;-7;8)$, $C(2;2;-7)$ та $D(5;-4;2)$. Переконатись, що вектори $\overline{AB}$ і $\overline{CD}$ колінеарні; з'ясувати, який із них довший та у скільки раз; як вони направлені – в одну чи протилежні сторони?

5.3 Знайти координати одиничного вектора, направленого по бісектрисі кута, утвореного векторами $\overline{a} = (2;-3;6)$ та $\overline{в} = (-1;2;-2)$.

5.4 Якій умові задовольняють координати будь-якої точки, яка лежить на прямій, що проходить через точки $M(2;-1;3)$ та $N(0;5;2)$. Знайти одну із таких точок.

5.5 Переконатись, що трикутник, побудований на векторах $\overline{AH} = (-5;3;-1)$ та $\overline{AM} = (-11;-9;3)$ є прямокутним. Побудувати прямокутний ΔPAN за умови, що AN – його висота, а AM – медіана. Знайти вектор $\overline{PN}$.

5.6 Знайти координати вектора $\overline{a} = (16; 6; 15)$ в базисі $\overline{e}_1 = (3; 1; 2)$, $\overline{e}_2 = (-7; -2; -4)$, $\overline{e}_3 = (-4; 0; 3)$.

6 ІНДИВІДУАЛЬНЕ ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ (ІДЗ-3)

Згідно з умовами, наведеними в *табл. 6.1* та на рис. 6.1, 6.2, 6.3, виконати завдання.

1) Побудувати схематичний рисунок.

2) За точками, зазначеними на рисунку, навести приклади векторів рівних, протилежних та колінеарних векторам, заданим в стовбці 3.

3)Вектори, вказані в стовбцях 5, 6, 7, 8, виразити геометрично через задані.

4) Знайти координати тих же векторів, використовуючи точки, зазначені в стовбці 4.

5) Знайти координати точки, вказаної в стовбці 9.

6) Знайти координати орта, вказаного в стовбці 10.

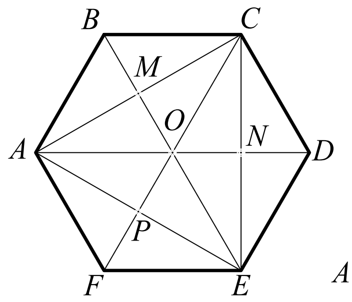


Рисунок 6.1 – $ABCDEF$ – правильний шестикутник

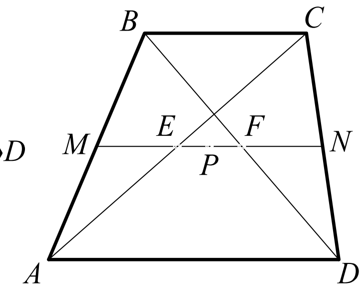


Рисунок 6.2 – $ABCD$ – трапеція; MN – середня лінія; $MP=PN$

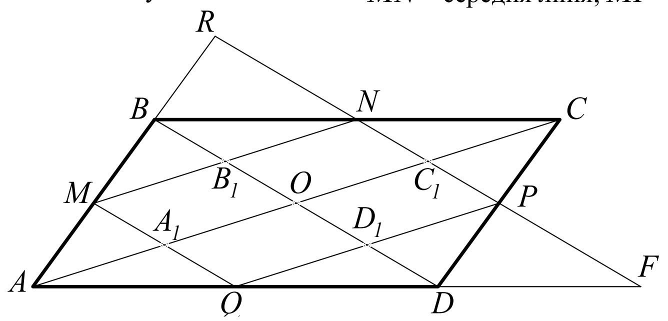


Рисунок 6.3. $ABCD$ – паралелограм; M, N, P, Q – середини сторін.

Таблиця 6.1

№	Рис.	Дано		Знайти					
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	6.1	$\overline{AB}=\overline{a}$, $\overline{BC}=\overline{в}$	$A(0;0)$, $B(1;\sqrt{3})$, $C(3;\sqrt{3})$	$\overline{BO}$	$\overline{CE}$	$\overline{CD}$	$\overline{MN}$	O	$\overline{CE}^{\circ}$
2	6.2	$\overline{AB}=\overline{a}$, $\overline{BC}=\overline{в}$, $\overline{AD}=\overline{c}$	$A(2;1)$, $B(4;5)$, $C(8;6)$, $D(10;3)$	$\overline{AF}$	$\overline{MN}$	$\overline{CD}$	$\overline{PC}$	F	$\overline{MN}^{\circ}$
3	6.1	$\overline{AB}=\overline{a}$, $\overline{AC}=\overline{s}$	$A(1;\sqrt{3})$, $B(3;\sqrt{3})$, $C(4;0)$	$\overline{FO}$	$\overline{CD}$	$\overline{CP}$	$\overline{MN}$	D	$\overline{CD}^{\circ}$
4	6.3	$\overline{AB}=\overline{a}$, $\overline{AD}=\overline{в}$	$A(1;2)$, $B(3;4)$, $D(5;3)$	$\overline{AC}$	$\overline{MQ}$	$\overline{CA_1}$	$\overline{QB_1}$	A	$\overline{MQ}^{\circ}$
5	6.1	$\overline{AB}=\overline{a}$, $\overline{AE}=\overline{e}$	$A(\sqrt{3};1)$, $E(0;-2)$, $B(2\sqrt{3};0)$	$\overline{AO}$	$\overline{BC}$	$\overline{CD}$	$\overline{PM}$	C	$\overline{BC}^{\circ}$
6	6.2	$\overline{AB}=\overline{a}$, $\overline{BC}=\overline{в}$, $\overline{AD}=\overline{c}$	$A(1;2)$, $B(3;1)$, $C(6;3)$, $D(7;6)$	$\overline{ME}$	$\overline{AE}$	$\overline{EC}$	$\overline{AN}$	E	$\overline{AE}^{\circ}$
7	6.1	$\overline{BC}=\overline{в}$, $\overline{MP}=\overline{m}$	$B(6;2\sqrt{3})$, $C(8;0)$, $M(5;\sqrt{3})$, $P(2;0)$	$\overline{BF}$	$\overline{BE}$	$\overline{CD}$	$\overline{FD}$	E	$\overline{BE}^{\circ}$
8	6.3	$\overline{MN}=\overline{p}$, $\overline{MQ}=\overline{c}$	$M(1;1)$, $N(3;5)$, $Q(4;2)$	$\overline{AB}$	$\overline{BD}$	$\overline{AD}$	$\overline{QC_1}$	B	$\overline{BD}^{\circ}$

Продовження таблиці 6.1

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
9	6.1	$\overline{BC}=\overline{в}$, $\overline{MN}=\overline{p}$	$B(6;0)$, $C(4;-2\sqrt{3})$, $M(4;0)$, $N(1;-\sqrt{3})$	$\overline{AE}$	$\overline{CD}$	$\overline{CE}$	$\overline{AC}$	D	$\overline{CD}°$
10	6.2	$\overline{CB}=\overline{r}$, $\overline{CM}=\overline{s}$, $\overline{CN}=\overline{в}$	$C(4;0)$, $B(1;1)$, $M(-1;-2)$, $N(5;-4)$	$\overline{CD}$	$\overline{BD}$	$\overline{AB}$	$\overline{AD}$	D	$\overline{BD}°$
11	6.1	$\overline{MN}=\overline{p}$, $\overline{MP}=\overline{m}$	$M(3\sqrt{3};-1)$, $P(\sqrt{3};0)$, $N(2\sqrt{3};-4)$	$\overline{ME}$	$\overline{NE}$	$\overline{AC}$	$\overline{AB}$	E	$\overline{NE}°$
12	6.3	$\overline{AB}=\overline{a}$, $\overline{AD}=\overline{в}$	$A(2;-1)$, $B(4;3)$, $D(8;-2)$	$\overline{AR}$	$\overline{A_1C}$	$\overline{RF}$	$\overline{FD}$	R	$\overline{A_1C}°$
13	6.1	$\overline{CD}=\overline{c}$, $\overline{DE}=\overline{q}$	$C(2;\sqrt{3})$, $E(5;0)$, $D(4;\sqrt{3})$	$\overline{BF}$	$\overline{DO}$	$\overline{EF}$	$\overline{NP}$	F	$\overline{DO}°$
14	6.2	$\overline{BF}=\overline{m}$, $\overline{BC}=\overline{в}$, $\overline{BM}=\overline{p}$	$B(0;3)$, $C(4;7)$, $M(-1;-2)$, $F(7;6)$	$\overline{BD}$	$\overline{AD}$	$\overline{AF}$	$\overline{AC}$	D	$\overline{AD}°$
15	6.1	$\overline{CE}=\overline{r}$ $\overline{CD}=\overline{c}$,	$C(0;\sqrt{3})$, $D(1;2\sqrt{3})$, $E(3;2\sqrt{3})$	$\overline{EO}$	$\overline{EF}$	$\overline{EM}$	$\overline{NP}$	F	$\overline{EF}°$
16	6.3	$\overline{PC_1}=\overline{s}$, $\overline{PD_1}=\overline{e}$	$P(6;8)$, $C_1(3;9)$, $D_1(1;5)$	$\overline{PO}$	$\overline{PN}$	$\overline{DC}$	$\overline{FB}$	N	$\overline{PN}°$

Продовження таблиці 6.1

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
17	6.1	$\overline{CD} = \bar{c}$, $\overline{CA} = \bar{f}$	$C(0;2)$, $D(\sqrt{3};3)$, $A(\sqrt{3};1)$	$\overline{CF}$	$\overline{DE}$	$\overline{EF}$	$\overline{MN}$	E	$\overline{DE}^{\circ}$
18	6.2	$\overline{AM} = \bar{a}$, $\overline{AE} = \bar{в}$, $\overline{AD} = \bar{c}$	$A(-3;1)$, $M(-2;4)$, $D(3;-2)$, $E(0;3)$	$\overline{AC}$	$\overline{BC}$	$\overline{BE}$	$\overline{BD}$	C	$\overline{BC}^{\circ}$
19	6.1	$\overline{DE} = \bar{d}$, $\overline{NM} = \bar{n}$	$D(8;0)$, $E(6;-2\sqrt{3})$, $N(6;0)$, $M(1;\sqrt{3})$	$\overline{DB}$	$\overline{DA}$	$\overline{EF}$	$\overline{BF}$	B	$\overline{DB}^{\circ}$
20	6.3	$\overline{AN} = \bar{e}$, $\overline{AD} = \bar{s}$	$A(1;1)$, $D(7;-1)$, $N(2;4)$	$\overline{NC}$	$\overline{AC}$	$\overline{DC}$	$\overline{AD_1}$	C	$\overline{AC}^{\circ}$
21	6.1	$\overline{DE} = \bar{d}$, $\overline{NP} = \bar{p}$	$D(-6;0)$, $E(-4;2\sqrt{3})$, $N(-4;0)$, $P(-2;\sqrt{3})$	$\overline{CA}$	$\overline{EF}$	$\overline{EO}$	$\overline{CE}$	F	$\overline{EF}^{\circ}$
22	6.2	$\overline{DF} = \bar{c}$, $\overline{DA} = \bar{m}$, $\overline{DC} = \bar{p}$	$D(4;7)$, $C(-1;7)$, $A(-5;1)$, $F(0;6)$	$\overline{DB}$	$\overline{BC}$	$\overline{MN}$	$\overline{EF}$	B	$\overline{BC}^{\circ}$
23	6.1	$\overline{NM} = \bar{m}$, $\overline{NP} = \bar{p}$	$N(-2\sqrt{3};0)$, $M(-3\sqrt{3};3)$, $P(-\sqrt{3};3)$	$\overline{NA}$	$\overline{MA}$	$\overline{CF}$	$\overline{CD}$	A	$\overline{MA}^{\circ}$
24	6.3	$\overline{RB} = \bar{r}$, $\overline{RN} = \bar{f}$	$R(4;5)$, $B(3;4)$, $N(5;3)$	$\overline{RM}$	$\overline{MN}$	$\overline{AP}$	$\overline{NA_1}$	P	$\overline{MN}^{\circ}$

Продовження таблиці 6.1

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
25	6.1	$\overline{EF}=\overline{p}$, $\overline{FA}=\overline{q}$	$E(4;-9\sqrt{3})$, $F(0;-2\sqrt{3})$, $A(-2;0)$	$\overline{FO}$	$\overline{AC}$	$\overline{AB}$	$\overline{PM}$	C	$\overline{AC}^{\circ}$
26	6.2	$\overline{MB}=\overline{m}$, $\overline{MC}=\overline{n}$, $\overline{MN}=\overline{p}$	$M(3;6)$, $N(9;2)$, $B(4;8)$, $C(7;6)$	$\overline{AB}$	$\overline{CD}$	$\overline{AD}$	$\overline{ME}$	A	$\overline{CD}^{\circ}$
27	6.1	$\overline{EF}=\overline{e}$, $\overline{EA}=\overline{s}$	$E(5;0)$, $F(4;-\sqrt{3})$, $A(2;-\sqrt{3})$	$\overline{EO}$	$\overline{AB}$	$\overline{AN}$	$\overline{PM}$	B	$\overline{AB}^{\circ}$
28	6.3	$\overline{A_1B_1}=\overline{n}$, $\overline{A_1D_1}=\overline{m}$	$A_1(-1;1)$, $B_1(3;3)$, $D_1(5;0)$	$\overline{A_1O}$	$\overline{A_1C}$	$\overline{BF}$	$\overline{AP}$	C	$\overline{A_1C}^{\circ}$
29	6.1	$\overline{EF}=\overline{e}$, $\overline{FC}=\overline{k}$	$E(8;0)$, $F(6;-2\sqrt{3})$, $C(0;0)$	$\overline{EO}$	$\overline{FA}$	$\overline{AB}$	$\overline{NP}$	A	$\overline{FA}^{\circ}$
30	6.1	$\overline{FA}=\overline{q}$, $\overline{PN}=\overline{n}$	$F(-2\sqrt{3};4)$, $A(0;6)$, $P(0;4)$, $N(\sqrt{3};1)$	$\overline{FD}$	$\overline{FC}$	$\overline{AB}$	$\overline{DB}$	C	$\overline{FC}^{\circ}$

Зразок розв'язання варіанта ІДЗ-3

Задача. У правильному шестикутнику $ABCDEF$ $\overline{EF}=\overline{m}$, $\overline{EA}=\overline{n}$, $A(3;0)$, $F(4;\sqrt{3})$, $E(3;2\sqrt{3})$.

1) Побудувати схематичний рисунок.

2) Навести приклади векторів рівних, протилежних та колінеарних векторам $\overline{EF}$ та $\overline{EA}$.

3) Вектори $\overline{AO}$, $\overline{AN}$, $\overline{AB}$, $\overline{PM}$ виразити через вектори $\overline{m}$ та $\overline{n}$.

4) Знайти координати векторів $\overline{AO}$, $\overline{AN}$, $\overline{AB}$, $\overline{PM}$.

5) Знайти координати точки B.

6) Знайти орт $\overline{AB}^{\circ}$.

Розв'язання. 1) Виконуємо схематичний рисунок правильного шестикутника. Відзначаємо на ньому задані вектори та точки (*рис. 6.4*).

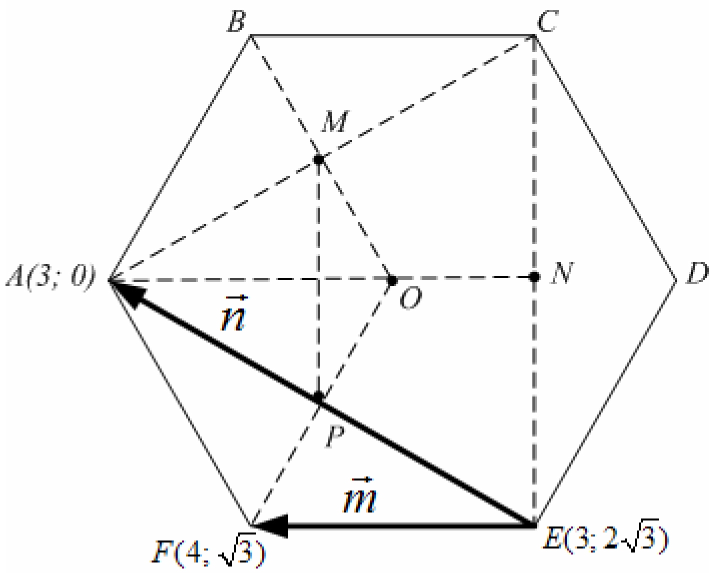


Рисунок 6.4

2) а) $\overline{m} = \overline{EF} = \overline{CB} = \overline{DO} = \overline{OA}$; $\overline{n} = \overline{EA} = \overline{DB}$.

б) Вектори, протилежні вектору $\overline{m}$: $\overline{FE}$, $\overline{BC}$, $\overline{AO}$, $\overline{OD}$.

Вектори, протилежні вектору $\overline{n}$: $\overline{AE}$, $\overline{BD}$.

в) Вектори, колінеарні вектору $\overline{m}$: $\overline{AD}$, $\overline{AO}$, $\overline{DA}$.

Вектори, колінеарні вектору $\overline{n}$: $\overline{BD}$, $\overline{DB}$, $\overline{MN}$, $\overline{EP}$.

3) Застосовуючи правила лінійних операцій над векторами та геометричні властивості правильного шестикутника, знаходимо:

$\overline{AO} = -\overline{m}$

$$\overline{AN}=\overline{AO}+\overline{ON}=\overline{AO}+\frac{1}{2}\overline{AO}=\frac{3}{2}\overline{AO}=\frac{3}{2}\cdot\left(-\overline{m}\right)=-\frac{3}{2}\overline{m}$$

$$\overline{AB}=\overline{FO}=2\overline{FP}=2\cdot\left(\overline{EP}-\overline{EF}\right)=2\cdot\left(\frac{1}{2}\overline{n}-\overline{m}\right)=\overline{n}-2\overline{m}$$

$$\overline{PM}=\overline{EN}=\overline{EA}+\overline{AN}=\overline{n}+\left(-\frac{3}{2}\overline{m}\right)=\overline{n}-\frac{3}{2}\overline{m}$$

4) Координати векторів $\overline{AO}$, $\overline{AN}$, $\overline{AB}$, $\overline{PM}$ знайдемо за правилами лінійних операцій над векторами, заданими своїми координатами. Попередньо знаходимо координати векторів $\overline{m}$ та $\overline{n}$.

$$\overline{m}=\overline{EF}=\left(x_F-x_E;\,y_F-y_E\right)=\left(4-3;\,\sqrt{3}-2\sqrt{3}\right)=\left(1;\,-\sqrt{3}\right).$$

$$\overline{n}=\overline{EA}=\left(x_A-x_E;\,y_A-y_E\right)=\left(3-3;\,0-2\sqrt{3}\right)=\left(0;\,-2\sqrt{3}\right).$$

Тоді:

$$\overline{AO}=-\overline{m}=-\left(1;\,-\sqrt{3}\right)=\left(-1;\,\sqrt{3}\right).$$

$$\overline{AN}=-\frac{3}{2}\overline{m}=-\frac{3}{2}\left(1;\,-\sqrt{3}\right)=\left(-\frac{3}{2};\,\frac{3\sqrt{3}}{2}\right).$$

$$\overline{AB}=\overline{n}-2\overline{m}=\left(0;\,-2\sqrt{3}\right)-2\cdot\left(1;\,-\sqrt{3}\right)=$$
$$=\left(0-2;\,-2\sqrt{3}+2\sqrt{3}\right)=\left(-2;\,0\right).$$

$$\overline{PM}=\overline{n}-\frac{3}{2}\overline{m}=\left(0;\,-2\sqrt{3}\right)-\frac{3}{2}\left(1;\,-\sqrt{3}\right)=$$
$$=\left(0-\frac{3}{2};\,-2\sqrt{3}+\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)=\left(-\frac{3}{2};\,-\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

5) Для знаходження координат точки B використаємо правило знаходження координат вектора, заданого його початком і кінцем.

$$\overline{AB}=\left(-2;\,0\right).\quad \overline{AB}=\left(x_B-x_A;\,y_B-y_A\right)=\left(x_B-3;\,y_B-0\right).$$

Отже:

$$\begin{cases}x_B-3=-2,\\ y_B-0=0.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_B=1\\ y_B=0\end{cases}\Rightarrow B\left(1;\,0\right).$$

6) Орт $\overline{AB}^{\circ}$ знаходимо, виходячи з умови, що

$$\overline{a}^{\circ}=\left(\frac{a_x}{|\overline{a}|};\frac{a_y}{|\overline{a}|}\right),\ |\overline{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2}\ .$$

Маємо:

$$\left|\overline{AB}\right|=\sqrt{x_{AB}^2+y_{AB}^2}=\sqrt{(-2)^2+0^2}=2\,.$$

$$\overline{AB}^{\circ}=\left(\frac{-2}{2};\frac{0}{2}\right)=(-1;0).$$

7 СКАЛЯРНИЙ ДОБУТОК ВЕКТОРІВ

Скалярним добутком векторів $\overline{a}$ і $\overline{в}$ називається скаляр, який дорівнює добутку модулів цих векторів на косинус кута між ними:

$$\overline{a}\cdot\overline{в}=|\overline{a}|\cdot|\overline{в}|\cos\varphi\,, \tag{7.1}$$

де $\varphi=(\overline{a}\wedge\overline{в})$ - кут між векторами $\overline{a}$ і $\overline{в}$ (*рис. 7.1*).

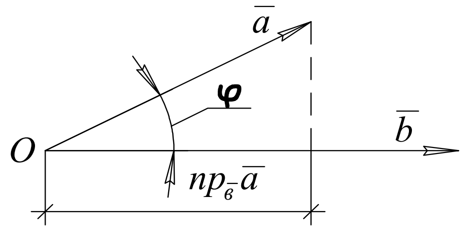


Рисунок 7.1

Якщо $\overline{a}=(a_x,a_y,a_z),\ \overline{в}=(в_x,в_y,в_z)$, то

$$\overline{a}\cdot\overline{в}=a_xв_x+a_yв_y+a_zв_z\,, \tag{7.2}$$

Властивості скалярного добутку векторів:

1) $\overline{a}\cdot\overline{в}=\overline{в}\cdot\overline{a}$ - комутативність.

2) $\lambda(\overline{a}\cdot\overline{в})=(\lambda\overline{a})\cdot\overline{в}=\overline{a}\cdot(\lambda\overline{в})$ - асоціативність відносно скалярного множника.

3) $\overline{a}\cdot(\overline{в}+\overline{c})=\overline{a}\cdot\overline{в}+\overline{a}\cdot\overline{c}$ - дистрибутивність.

4) $\overline{a} \cdot \overline{a} = (\overline{a})^2 = |\overline{a}|^2$, (7.3)

5) Якщо $\overline{a} \perp \overline{в}$, то $\overline{a} \cdot \overline{в} = 0$ і навпаки.

6) $\overline{a} \cdot \overline{в} = |\overline{a}| \cdot пр_{\overline{a}}\overline{в} = |\overline{в}| \cdot пр_{\overline{в}}\overline{a}$, (7.4)

Властивості 1, 2 і 3 називають *алгебраїчними.* Із них випливає, що скалярне множення двох векторів виконується за правилами множення многочленів. Властивість 5 виражає *ознаку перпендикулярності векторів:*

$$\overline{a} \cdot \overline{в} = 0, \tag{7.5}$$

Із (7.1) та (7.4) маємо слідства:

$$\cos\varphi = \frac{\overline{a} \cdot \overline{в}}{|\overline{a}| \cdot |\overline{в}|}, \tag{7.6}$$

$$пр_{\overline{в}}\overline{a} = \frac{\overline{a} \cdot \overline{в}}{|\overline{в}|}, \tag{7.7}$$

Приклад 1. Знайти скалярний добуток векторів $\overline{a} = 5\overline{i} + 4\overline{j} - 6\overline{k}$ та $\overline{в} = \overline{i} + 3\overline{k}$.

Розв'язання. За формулою (7.2) маємо:

$$\overline{a} \cdot \overline{в} = a_x в_x + a_y в_y + a_z в_z = 5 \cdot 1 + 4 \cdot 0 - 6 \cdot 3 = -13$$

Приклад 2. Знайти проекцію вектора $\overline{в} = (1; -2; 3)$ на вектор $\overline{a} = (4; 6; 0)$.

Розв'язання. За формулою (7.7) маємо:

$$пр_{\overline{a}}\overline{в} = \frac{\overline{a} \cdot \overline{в}}{|\overline{a}|} = \frac{4 \cdot 1 - 2 \cdot 6 + 0 \cdot 3}{\sqrt{4^2 + 6^2 + 0^2}} = \frac{-8}{52} = \frac{-4}{\sqrt{13}}.$$

Приклад 3. Трикутник, заданий вершинами $A(0; -1; 2)$, $B(-1; -2; 7)$, $C(1; -2; 6)$. Знайти його зовнішній кут при вершині B (*рис. 7.2*).

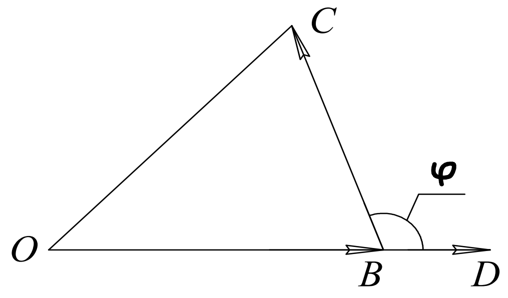


Рисунок 7.2

Розв'язання. Невідомим є кут φ між векторами

$$\overline{BC}=(1+1;-2+2;6-7)=(2;0;-1) \text{ та } \overline{BD}=\overline{OB}=(-1;-1;5).$$

За формулою (7.6) маємо:

$$\cos\varphi=\cos(\overline{BC}\,^\wedge\,\overline{BD})=\frac{\overline{BC}\cdot\overline{BD}}{\left|\overline{BC}\right|\cdot\left|\overline{BD}\right|}.$$

Користуючись формулами (7.2) та (5.4), дістанемо

$$\overline{BC}\cdot\overline{BD}==-2\cdot1-0\cdot1-1\cdot5=-7;$$

$$\left|\overline{BC}\right|=\sqrt{2^2+0^2+1^2}=\sqrt{5};\quad \left|\overline{BD}\right|=\sqrt{27}\,.$$

Отже,

$$\cos\varphi=\frac{-7}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{27}}=\frac{-1}{\sqrt{135}};\ \ \varphi=\arccos\frac{-1}{\sqrt{135}}=\pi-\arccos\frac{1}{\sqrt{135}}\,.$$

Приклад 4. Трикутник, заданий вершинами $A(-1;-2;4)$, $B(-4;-2;0)$, $C(3;2;2)$. Знайти довжину висоти, опущеної із вершини B.

Розв'язання. В прямокутному ΔABN (*рис. 7.3*)

$$AN=\left|np_{\overline{AC}}\overline{AB}\right|,\quad \overline{AB}=(-3;0;-4),\quad \overline{AC}=(4;4;-2).$$

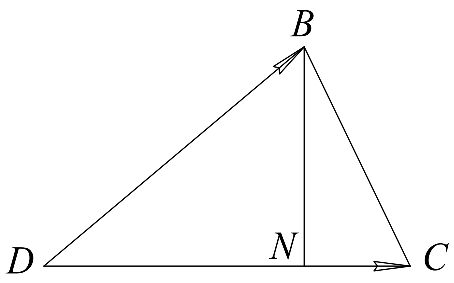


Рисунок 7.3

За формулою (7.7)

$$пр_{\overline{AC}}\overline{AB} = \frac{\overline{AB}\cdot\overline{AC}}{\left|\overline{AC}\right|} = \frac{-3\cdot 4 + 0\cdot 4 + 4\cdot 2}{\sqrt{4^2+4^2+2^2}} = \frac{-4}{6} = -\frac{2}{3}.$$

$$AB = \left|\overline{AB}\right| = \sqrt{3^2+0^2+4^2} = 5,\;\; AN = \left|-\frac{2}{3}\right| = \frac{2}{3}.$$

Отже,

$$BN = \sqrt{AB^2 - AN^2} = \sqrt{5^2 - \left(\frac{2}{3}\right)^2} = \sqrt{25 - \frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{221}}{3}$$

Приклад 5. Довести теорему косинусів.

Доведення: Нехай в ΔABC (*рис. 7.4*) $\overline{CB} = \overline{a}$; $\overline{CA} = \overline{в}$; $\overline{AB} = \overline{c}$; $(\overline{CA}\,{}^\wedge\,\overline{CB}) = \varphi$. Тоді $\overline{c} = \overline{a} - \overline{в}$, звідки $\overline{c}^{\,2} = \overline{a}^{\,2} - 2\overline{a}\overline{в} + \overline{в}^{\,2}$.

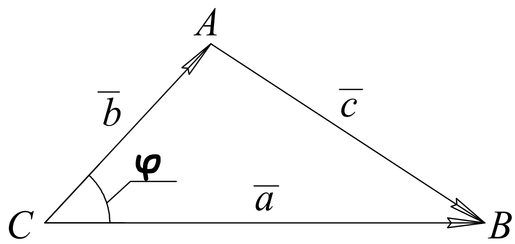


Рисунок 7.4

Використовуючи (7.3) та (7.1), одержимо:

$$\left|\overline{c}\right|^2 = \left|\overline{a}\right|^2 + \left|\overline{в}\right|^2 - 2\left|\overline{a}\right|\cdot\left|\overline{в}\right|\cdot\cos\varphi.$$

Приклад 6. Під дією сили $\overline{F} = (6;\,3;\,1)$ матеріальна точка переміщується прямолінійно від точки $M(0;\,2;\,8)$ до $N(12;\,20;\,24)$. Обчислити затрачену роботу (*рис. 7.5*).

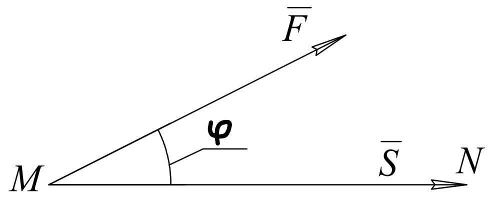


Рисунок 7.5

Розв'язання. З фізики відомо, що робота A сили $\overline{F}$ при переміщенні вздовж вектора $\overline{S}$, за умови, що $(\overline{F}\,\hat{}\,\overline{S}) = \varphi,$ обчислюється за формулою

$$A = \left|\overline{F}\right| \cdot \left|\overline{S}\right| \cdot \cos\varphi, \text{ тобто } A = \overline{F} \cdot \overline{S}\,.$$

Так як

$$\overline{S} = \overline{MN} = (12;\,18;\,16),$$

то $A = \overline{F} \cdot \overline{MN} = 6 \cdot 12 + 3 \cdot 18 + 1 \cdot 16 = 142$ (од. роботи).

Приклад 7. З'ясувати залежність між координатами взаємно перпендикулярних векторів, які лежать в площині XOY.

Розв'язання. Нехай $\overline{a} = (a_x, a_y)$ заданий вектор. Очевидно, що існує безліч колінеарних векторів $\overline{в} = (x;\,y),$ які перпендикулярні вектору $\overline{a}.$ Тоді $\overline{a} \cdot \overline{в} = 0,$ тобто $a_x x + a_y y = 0.$ Маємо $x = -a_y \cdot \dfrac{y}{a_x}$.

Нехай $\dfrac{y}{a_x} = \lambda$, де $\lambda \in R.$. Тоді $x = -\lambda a_y,\; y = \lambda \cdot a_x$.

Отже, $\overline{в} = \lambda(-a_y;\,a_x)$ де $\lambda \in R$. Тобто, вектори, які лежать у площині XOY та перпендикулярні вектору $\overline{a} = (a_x, a_y)$, мають вигляд $\overline{в} = \lambda(-a_y;\,a_x)$. Так, якщо $\lambda = 1,$ то одним із векторів перпендикулярних вектору $\overline{a}$ є вектор $\overline{в} = (-a_y;\,a_x).$

Запитання для самоконтролю

1. Що називається скалярним добутком двох векторів?

2. Записати формули для обчислення скалярного добутку: а) за означенням; б) через проекцію одного вектора на другий; в) через координати перемножуваних векторів.

3. Записати формулу для знаходження проекцій вектора на вектор; кута між векторами.

4. Назвати умову перпендикулярності двох векторів.

5. Назвати алгебраїчні властивості скалярного добутку та прокоментувати їх застосування.

6. Навести приклади геометричних та механічних задач, при розв'язуванні яких використовується скалярний добуток векторів.

Вправи

7.1 Знайти кут між діагоналями паралелограма $ABCD$, якщо $A(0;-1;2)$, $B(-1;-2;7)$, $D(1;-2;6)$.

7.2 Задані вершини чотирикутника $A(2;-2;2)$, $B(2;4;0)$, $C(-3;1;1)$, $D(-4;-5;3)$. Довести, що його діагоналі AC і BD взаємноперпендикулярні.

7.3 Під дією сили $\overline{F}=(3;1;2)$ матеріальна точка переміщується із початку координат вздовж діагоналі одиничного куба, ребра якого співпадають з осями координат. Обчислити затрачену роботу.

7.4 В трикутнику з вершинами в точках $A(1;3;0)$, $B(3;7;1)$, $C(9;5;2)$, проведені висота BH та медіана BM. Знайти сторони ΔBMH.

7.5 Із точки $P(2;4)$ на пряму, яка проходить через точки $A(1;2)$, та $B(4;-5)$ опущений перпендикуляр. Знайти залежність між координатами точок, які лежать на цьому перпендикулярі. Дати геометричне тлумачення одержаному результату.

7.6 В рівнобедреному трикутнику медіани, проведені до бічних сторін, взаємноперпендикулярні. Знайти кут між бічними сторонами трикутника.

7.7 Знайти кут між медіанами катетів рівнобедреного прямокутного трикутника

8 ВЕКТОРНИЙ ДОБУТОК ВЕКТОРІВ

Векторним добутком векторів $\overline{a}$ та $\overline{в}$ називається вектор $\overline{c} = \overline{a} \times \overline{в}$, який задовольняє умовам:

1) $|\overline{c}| = |\overline{a}| \cdot |\overline{в}| \cdot \sin(\overline{a} \,\hat{}\, \overline{в})$;

2) $\overline{c} \perp \overline{a},\ \overline{c} \perp \overline{в}$;

3) вектор $\overline{c}$ напрямлений у той бік, з якого поворот від $\overline{a}$ до $\overline{в}$ на найменший кут здійснюється проти руху стрілки годинника (*рис. 8.1*).

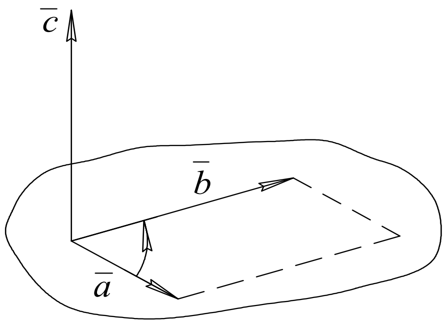


Рисунок 8.1

Якщо $\overline{a} = (a_x; a_y; a_z)$, $\overline{в} = (в_x; в_y; в_z)$ то

$$\overline{a} \times \overline{в} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ в_x & в_y & в_z \end{vmatrix}, \tag{8.1}$$

Властивості векторного добутку векторів:

1) $\overline{a} \times \overline{в} = -(\overline{в} \times \overline{a})$ - антикомутативність.

2) $\lambda(\overline{a} \times \overline{в}) = (\lambda\overline{a}) \times \overline{в} = \overline{a} \times (\lambda\overline{в})$ – асоціативність відносно скалярного множника.

3) $(\overline{a} + \overline{в}) \times \overline{c} = \overline{a} \times \overline{c} + \overline{в} \times \overline{c}$ – дистрибутивність.

4) Якщо $\overline{a} \parallel \overline{в}$, то $\overline{a} \times \overline{в} = 0$ і навпаки.

5) $|\overline{a} \times \overline{в}| = S$, де S – площа паралелограма побудованого на векторах $\overline{a}$ і $\overline{в}$, як на сторонах.

Із властивостей 1, 2 і 3 випливає, що розкривання дужок при векторному множенні виконується за правилами алгебри при умові, що порядок співмножників не змінюється. Властивість 5

$$\left|\bar{a} \times \bar{в}\right| = S, \tag{8.2}$$

широко застосовується при розв'язуванні геометричних задач. Відзначимо на майбутнє, що векторний добуток дає можливість знайти вектор, перпендикулярний двом заданим векторам (перпендикулярний площині, в якій лежать або їй паралельні два вектори).

Приклад 1. Знайти векторний добуток векторів $\bar{a} = (-2; 1; 4)$ та $\bar{в} = (3; 5; 0)$.

Розв'язання: Згідно (8.1) маємо

$$\bar{a} \times \bar{в} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -2 & 1 & 4 \\ 3 & 5 & 0 \end{vmatrix}.$$

Розкладаємо визначник за елементами першого рядка

$$\bar{a} \times \bar{в} = \bar{i} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} - \bar{j} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} + \bar{k} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = -20\bar{i} + 12\bar{j} - 13\bar{k}.$$

Приклад 2. Обчислити площу трикутника з вершинами $A(7; 3; 4)$, $B(1; 0; 6)$ та $C(4; 5; -2)$ (*рис. 8.2*).

Розв'язання.

$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} S_{ABCD}$. За властивістю (8.2) маємо: $S_{ABCD} = \left|\overline{AC} \times \overline{AB}\right|$.

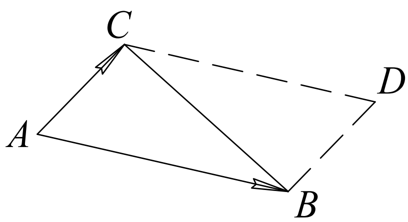


Рисунок 8.2

Оскільки $\overline{AC} = (-3; 2; -6)$ і $\overline{AB} = (-6; -3; 2)$, то

$$\overline{AC} \times \overline{AB} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -3 & 2 & -6 \\ -6 & -3 & 2 \end{vmatrix} = \bar{i} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -6 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} - j \cdot \begin{vmatrix} -3 & -6 \\ -6 & 2 \end{vmatrix} + \bar{k} \cdot \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 6 & -3 \end{vmatrix} =$$

$$= -14\bar{i} + 42\bar{j} - 21\bar{k} .$$

Отже, $\left|\overline{AC} \times \overline{AB}\right| = \sqrt{(-14)^2 + 42^2 + 21^2} = 49$ і $S_{\Delta\, ABC} = \dfrac{49}{2}$.

Приклад 3. Знайти вектор, перпендикулярний площині ΔABC, якщо $A(7; -1; -2)$, $B(1; 7; 8)$, $C(3; 7; 9)$ (*рис. 8.3*) Переконатись в тому, що вектор знайдено правильно.

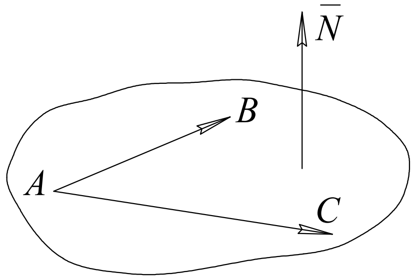


Рисунок 8.3

Розв'язання. Одним із шуканих є вектор $\overline{N} = \overline{AB} \times \overline{AC}$. Виконуючи необхідні обчислення, послідовно маємо: $\overline{AB} = (-6; 8; 10)$, $\overline{AC} = (-4; 8; 11)$.

$$\overline{N} = \overline{AB} \times \overline{AC} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -6 & 8 & 10 \\ -4 & 8 & 11 \end{vmatrix} = 8\bar{i} + 26\bar{j} - 16\bar{k} .$$

Отже, $\overline{N} = (8; 26; -16)$ – один із шуканих векторів. Очевидно, що і будь який вектор $\overline{n} \,//\, \overline{N}$, тобто $\overline{n} = \lambda(4;13;-8),$ також перпендикулярний площині ΔABC.

Для перевірки упевнимось, що $\overline{n}$ перпендикулярний двом векторам, які лежать в заданій площині .

Маємо:

$$\overline{n} \cdot \overline{AB} = \lambda(4; 13; -8) \cdot (-6; 8; 10) = \lambda(-24 + 104 - 80) = 0,$$

$$\overline{n} \cdot \overline{AC} = \lambda(4; 13; -8) \cdot (-4; 8; 11) = \lambda(-16 + 104 - 88) = 0.$$

Таким чином, результат розрахунків щодо вектора $\overline{n}$ підтверджується.

Приклад 4. За умовою попереднього прикладу знайти точку, яка лежала б в площині ΔABC.

Розв'язання. Очевидно, що задача має безліч розв'язків. Нехай $P(x; y; z)$ – шукана точка. Тоді $\overline{AP} = (x - 7; y + 1; z + 2)$ і $\overline{N} \perp \overline{AP}.$ А це значить, що $\overline{N} \cdot \overline{AP} = 0,$ тобто має місце рівняння $8(x - 7) + 26(y + 1) - 16(z + 2) = 0$, яке має безліч розв'язків. Надаючи двом невідомим довільні значення, наприклад $y = -1$, $z = 2$, одержимо $8(x - 7) - 64 = 0$, тобто $x = 15$. Отже, $P(15; -1; 2)$ – одна із точок, що лежить в площині ΔABC.

Приклад 5. З курсу фізики відомо, що момент сили $\overline{F}$, прикладеної в точці A, відносно точки O визначається векторним добутком $\overline{M} = \overline{OA} \times \overline{F}.$ Знайти момент рівнодіючої двох сил $\overline{F_1} = (3; -2; 4)$ та $\overline{F_2} = (-4; 4; -3),$ прикладеної в точці $B(1; -4; 3)$ відносно точки $C(4; 0; -2)$, величину моменту та його напрямні косинуси.

Розв'язання. Якщо $\overline{R}$ – зазначена рівнодіюча, то $\overline{M} = \overline{CB} \times \overline{R}.$ Оскільки $\overline{CB} = (-3;-4;5)$ і $\overline{R} = \overline{F_1} + \overline{F_2} = (-1;2;1),$ то:

$$\overline{M} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ -3 & -4 & 5 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -14\overline{i} - 2\overline{j} - 10\overline{k}.$$

$$\left|\overline{M}\right| = \sqrt{(-14)^2 + (-2)^2 + (-10)^2} = \sqrt{320} = 8\sqrt{5}\,.$$

$$\cos\alpha = \frac{-14}{8\sqrt{5}} = -\frac{7}{4\sqrt{5}};\ \cos\beta = \frac{-2}{8\sqrt{5}} = -\frac{1}{4\sqrt{5}};\ \cos\gamma = \frac{-10}{8\sqrt{5}} = -\frac{5}{4\sqrt{5}}.$$

Запитання для самоконтролю

1. Що називається векторним добутком двох векторів?
2. Записати формулу для обчислення векторного добутку векторів заданих координатами.
3. Назвати властивості векторного добутку.
4. Навести приклади геометричних та фізичних задач, при розв’язуванні яких використовується векторний добуток векторів.

Вправи

8.1 Знайти площу діагонального перетину паралелепіпеда, побудованого на векторах $\overline{a} = (4;0;4)$, $\overline{в} = (-1;3;2)$, $\overline{c} = (3;5;0)$ як на ребрах.

8.2 Знайти одиничний вектор, перпендикулярний площині, яка проходить через точки $A(1;\ 2;\ 3)$, $\mathrm{B}(3;\ 2;\ -1)$ та $C(2;\ 0;\ 7)$.

8.3 Переконатись, що вектори $\overline{a} = 7\overline{i} + 6\overline{j} - 6\overline{k}$ та $\overline{в} = 6\overline{i} + 2\overline{j} + 9\overline{k}$ можна розглянути як ребра куба. Знайти його третє ребро.

8.4 Знайти векторний добуток $(\overline{a} + \overline{в}) \times (\overline{a} - \overline{в})$ та дати йому геометричне тлумачення.

9 МІШАНИЙ ДОБУТОК ВЕКТОРІВ

Мішаним добутком векторів $\overline{a}, \overline{в}$ і $\overline{c}$ називається число $(\overline{a} \times \overline{в}) \cdot \overline{c}$, одержане в результаті упорядкованого векторно-скалярного добутку.

Виходячи із властивостей скалярного та векторного добутків, одержимо *величину* мішаного добутку (*рис. 9.1*)

$$\left|(\overline{a} \times \overline{в}) \cdot \overline{c}\right| = \left|\left|\overline{a} \times \overline{в}\right| \cdot np_{\overline{a} \times \overline{в}}\, \overline{c}\right| = S_{\overline{a}, \overline{в}} \cdot H = V_{n-да}.$$

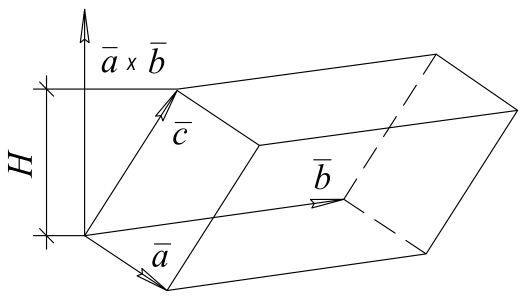


Рисунок 9.1

Якщо $\overline{a} = (a_x, a_y, a_z),\ \overline{в} = (в_x, в_y, в_z),\ \overline{c} = (c_x, c_y, c_z),$ то

$$(\overline{a} \times \overline{в}) \cdot \overline{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ в_x & в_y & в_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}, \tag{9.1}$$

Властивості мішаного добутку векторів:

1) $(\overline{a} \times \overline{в}) \cdot \overline{c} = \overline{a} \cdot (\overline{в} \times \overline{c})$.

2) Якщо $\overline{a}, \overline{в}, \overline{c}$ – компланарні, то $(\overline{a} \times \overline{в}) \cdot \overline{c} = 0$ і навпаки.

3) $\left|(\overline{a} \times \overline{в}) \cdot \overline{c}\right| = V_{n-да\ \overline{a}, \overline{в}, \overline{c}}$, (9.2)

В зв'язку з властивістю 1 мішаний добуток скорочено позначається так:

$$\overline{a}\,\overline{в}\,\overline{c}\,.$$

Властивість 2

$$\overline{a}\ \overline{в}\ \overline{c} = 0, \tag{9.3}$$

виражає *ознаку компланарності* векторів. Властивість 3 широко застосовується при розв'язуванні геометричних задач.

Приклад 1. Знайти мішаний добуток $\overline{a}\,\overline{в}\,\overline{c}$, якщо $\overline{a} = (3; 1; 0)$, $\overline{в} = (-5; -4; -5)$, $\overline{c} = (4; 2; 4)$. Зробити висновок щодо взаємного розташування цих векторів.

Розв'язання. За формулою (9.1) маємо:

$$\overline{a}\,\overline{в}\,\overline{c} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -5 & -4 & -5 \\ 4 & 2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 7 & -4 & -5 \\ -2 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 7 & -5 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = -18 .$$

Так як $\overline{a}\,\overline{в}\,\overline{c} \neq 0$, то вектори не компланарні.

Приклад 2. Знайти об'єм V трикутної призми, побудованій на векторах $\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}$, якщо $A(5; 2; 7)$, $B(7; -6; -9)$, $C(-7; -6; 3)$ і $D(1; -5; 2)$.

Розв'язання. Об'єм заданої призми (*рис. 9.2*) дорівнює половині об'єму паралелепіпеда, побудованого на тих же векторах.

Отже, $V = \dfrac{1}{2} V_{п-да} = \dfrac{1}{2} \cdot \left| \overline{AB} \cdot \overline{AC} \cdot \overline{AD} \right|$.

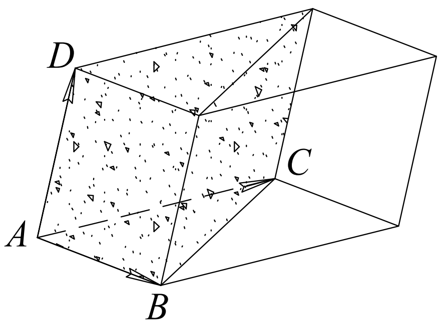


Рисунок 9.2

Виконуємо необхідні обчислення:

$\overline{AB} = (2; -8; -16)$, $\overline{AC} = (-12; -8; -4)$, $\overline{AD} = (-4; -7; -5)$,

$$(\overline{AB}\ \overline{AC}\ \overline{AD}) = \begin{vmatrix} 2 & -8 & -16 \\ -12 & -8 & -4 \\ -4 & -7 & -5 \end{vmatrix} = 2\cdot 4\cdot \begin{vmatrix} 1 & -4 & -8 \\ -3 & -2 & -1 \\ -4 & -7 & -5 \end{vmatrix} = 8\cdot(-57) = -456.$$

Об'єм призми $V = \dfrac{1}{2}\left|-456\right| = 228$ куб. од.

Приклад 3. Задані вершини піраміди $A(-6;\,4;\,5)$, $B(-3;\,2;\,11)$, $C(0;\,7;\,3)$, $D(2;\,8;\,-3)$. Знайти довжину висоти, опущеної із вершини D (*рис. 9.3*).

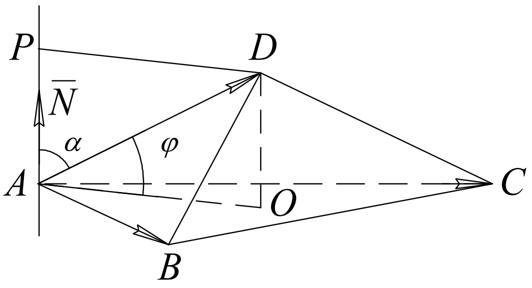


Рисунок 9.3

Розв'язання: Нехай $\overline{N}$ – вектор, перпендикулярний площині ΔABC. Тоді $DO = PA = \left|np_{\overline{N}}\,\overline{AD}\right|$. Виконуємо необхідні обчислення: $\overline{AD} = (8;\,4;\,-8)$, $\overline{AB} = (3;\,-2;\,6)$, $\overline{AC} = (6;\,3;\,-2)$.

$$\overline{N} = \overline{AB}\times\overline{AC} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 3 & -2 & 6 \\ 6 & 3 & -2 \end{vmatrix} = -14\bar{i} + 42\bar{j} + 21\bar{k}\,.$$

За формулою (7.7)

$$np_{\overline{N}}\,\overline{AD} = \frac{\overline{AD}\cdot\overline{N}}{\left|\overline{N}\right|} = \frac{-8\cdot 14 + 4\cdot 42 - 8\cdot 21}{\sqrt{(-14)^2 + 42^2 + 21^2}} = \frac{-122}{49}\,.$$

Отже

$$DO = \left| -\frac{122}{49} \right| = \frac{122}{49}.$$

Приклад 4. За умовою попереднього прикладу знайти кут між ребром AD та площиною ΔABC.

Розв'язання Шуканим є кут φ між ребром AD та його проекцією на площину ΔABC, тобто $\varphi = \angle DAO$. Очевидно, що кути φ та α задовольняють одній із умов: а) $\varphi = 90^\circ - \alpha$, якщо α – гострий; б) $\varphi = \alpha - 90^\circ$, якщо α – тупий. Використовуючи результати одержані в попередньому прикладі, знайдемо α. За формулою (7.6) маємо:

$$\cos\alpha = \frac{\overline{AD} \cdot \overline{N}}{\left|\overline{AD}\right| \cdot \left|\overline{N}\right|} = \frac{-122}{\sqrt{8^2 + 4^2 + (-8)^2} \cdot 49} = \frac{-122}{12 \cdot 49} = \frac{-61}{294}.$$

Тоді $\alpha = \arccos\left(-\frac{61}{294}\right) = \pi - \arccos\frac{61}{294}$ – тупий кут.

Отже,

$$\varphi = \alpha - 90^\circ = \pi - \arccos\frac{61}{294} - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} - \arccos\frac{61}{294} \approx$$

$$\approx \frac{\pi}{2} - \arccos 0{,}207 \approx 90^\circ - 78^\circ = 12^\circ$$

Запитання для самоконтролю

1. Що називається мішаним добутком трьох векторів?
2. Записати формулу для обчислення мішаного добутку векторів заданих координатами.
3. Назвати властивості мішаного добутку векторів.
4. Назвати умову компланарності трьох векторів.
5. Навести приклади геометричних задач, при розв'язуванні яких використовується мішаний добуток векторів.

Вправи

9.1 Перевірити, чи лежить точка $M(4;1;3)$ в площині ΔABC, якщо $A(1;\,2;\,-1)$, $B(4;\,1;\,5)$ і $C(-1;\,2;\,1)$. Якій умові задовольняють координати будь-якої точки, яка лежить в заданій площині? Знайти одну із таких точок.

9.2 На векторах $\overline{a}=(2;\,4;\,-6)$, $\overline{в}=(0;\,8;\,2)$, $\overline{c}=(4;\,6;\,0)$, як на ребрах побудована піраміда. Знайти об'єм цієї та зрізаної піраміди за умови, що площина перерізу проходить через середину висоти. Побудувати та знайти об'єм тіла, одержаного внаслідок аналогічного зрізання кожної із чотирьох вершин.

9.3 Знайти об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах

$$\overline{p}=\overline{a}+\overline{b}+\overline{c}\,,\quad \overline{q}=\overline{a}+\overline{b}-\overline{c}\,,\quad \overline{r}=\overline{a}-\overline{b}+\overline{c}\,.$$

9.4 Знайти висоту паралелепіпеда, побудованого на векторах

$$\overline{a}=3\overline{p}+2\overline{q}-5\overline{r}\,,\quad \overline{b}=\overline{p}-\overline{q}+4\overline{r}\,,\ \text{ і }\ \overline{c}=\overline{p}-3\overline{q}+\overline{r}\,,$$

якщо за основу взято паралелограм, побудований на $\overline{a}$ та $\overline{b}$. Крім того відомо, що $\overline{p}$, $\overline{q}$ і $\overline{r}$ – взаємноперпендикулярні орти.

10 ІНДИВІДУАЛЬНЕ ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ (ІДЗ-4)

Вершини піраміди знаходяться в точках A_m, A_n, A_p, A_q. Згідно з варіантом, взяти із *табл. 10.1* значення m, n, p, q та вибрати відповідну точку серед заданих: $A_1(1;\,1;\,6)$, $A_2(-2;\,1;\,0)$, $A_3(-4;\,2;\,-1)$, $A_4(-1;\,2;\,5)$, $A_5(2;\,-1;\,6)$, $A_6(-1;\,-1;\,0)$, $A_7(-3;\,0;\,-1)$, Виконати схематичний рисунок заданої піраміди $A_m\ A_n\ A_p\ A_q$ та знайти:

1) координати та модулі векторів $\overline{A_mA_n}$, $\overline{A_mA_p}$, $\overline{A_mA_q}$.

2) скалярний добуток $\overline{A_mA_n}\cdot\overline{A_mA_p}$.

3) векторний добуток $\overline{A_mA_n}\times\overline{A_mA_p}$.

4) мішаний добуток $\left(\overline{A_mA_n}\times\overline{A_mA_p}\right)\cdot\overline{A_mA_q}$

5) кут між ребрами A_mA_n та A_mA_p.

6) проекцію вектора $\overline{A_mA_n}$ на вектор $\overline{A_mA_p}$.

7) вектор, перпендикулярний грані $A_m\ A_n\ A_p$.

8) площу грані $A_m\ A_n\ A_p$.

9) об'єм піраміди $A_m\ A_n\ A_p\ A_q$.

10) кут між ребром $A_m A_q$ та гранню $A_m A_n A_p$.

11) кут між гранями $A_m A_n A_p$ та $A_m A_n A_q$.

12) довжину висоти $A_q O$, опущеної із вершини A_q.

13) орт вектора $\overline{A_q O}$.

14) вектор $\overline{A_q O}$.

15) точку O.

Таблиця 10.1

№	m	n	p	q	№	m	n	p	q	№	m	n	p	q
1	1	2	5	3	11	1	3	4	7	21	2	3	7	5
2	1	2	3	6	12	1	3	6	5	22	2	5	6	4
3	1	3	7	2	13	1	3	7	6	23	2	5	7	4
4	1	4	5	2	14	1	5	6	4	24	2	4	7	6
5	1	2	4	6	15	1	5	7	4	25	2	6	7	5
6	1	4	7	2	16	1	6	7	5	26	3	5	7	4
7	1	2	7	5	17	2	4	3	5	27	3	4	7	6
8	1	2	6	7	18	2	4	6	3	28	3	5	6	7
9	1	3	5	4	19	2	3	4	7	29	4	6	7	5
10	1	4	6	3	20	2	3	5	6	30	5	4	6	7

Зразок розв'язання варіанта ІДЗ-4

Варіант 30.

$m = 5;\ n = 4;\ p = 6;\ q = 7.$

$A_5\ (2;\ -1;\ 6),\ A_4\ (-1;\ 2;\ 5),\ A_6\ (-1;\ -1;\ 0),\ A_7\ (-3;\ 0;\ -1)$ – вершини піраміди. Знайти:

1) координати та модулі векторів $\overline{A_5 A_4}$, $\overline{A_5 A_6}$, $\overline{A_5 A_7}$.

2) скалярний добуток $\overline{A_5 A_4}$, $\overline{A_5 A_6}$.

3) векторний добуток $\overline{A_5A_4} \times \overline{A_5A_6}$.

4) мішаний добуток $\left(\overline{A_5A_4} \times \overline{A_5A_6}\right) \cdot \overline{A_5A_7}$.

5) кут між ребрами A_5A_4 та A_5A_6.

6) проекцію вектора $\overline{A_5A_4}$ на $\overline{A_5A_6}$.

7) вектор, перпендикулярний грані $A_5A_4A_6$.

8) площу грані $A_5A_4A_6$.

9) об'єм піраміди $A_5A_4A_6A_7$.

10) кут між ребром A_5A_7 та гранню $A_5A_4A_6$.

11) кут між гранями $A_5A_4A_6$ та $A_5A_4A_7$.

12) довжину висоти A_7O, опущеної із вершини A_7.

13) орт вектора $\overline{A_7O}$.

14) вектор $\overline{A_7O}$.

15) точку O.

Розв'язання. Виконуємо схематичний рисунок заданої піраміди (*рис. 10.1*)

1) Координати та модуль вектора знаходимо відповідно за формулами (5.3) та (5.4)

$$\overline{A_5A_4} = \left(-1-2;\, 2+1;\, 5-6\right) = \left(-3;\, 3;\, -1\right),$$

$$\left|\overline{A_5A_4}\right| = \sqrt{\left(-3\right)^2 + 3^2 + \left(-1\right)^2} = \sqrt{19}\,.$$

$$\overline{A_5A_6} = \left(-1-2;\, -1+1;\, 0-6\right) = \left(-3;\, 0;\, -6\right),$$

$$\left|\overline{A_5A_6}\right| = \sqrt{\left(-3\right)^2 + 0^2 + \left(-6\right)^2} = \sqrt{45}\,.$$

$$\overline{A_5A_7} = \left(-3-2;\, 0+1;\, -1-6\right) = \left(-5;\, 1;\, -7\right),$$

$$\left|\overline{A_5A_7}\right| = \sqrt{75}\,.$$

2) Скалярний добуток векторів обчислюємо за формулою (7.2)

$$\overline{A_5A_4} \cdot \overline{A_5A_6} = -3 \cdot \left(-3\right) + 3 \cdot 0 + \left(-1\right) \cdot \left(-6\right) = 15\,.$$

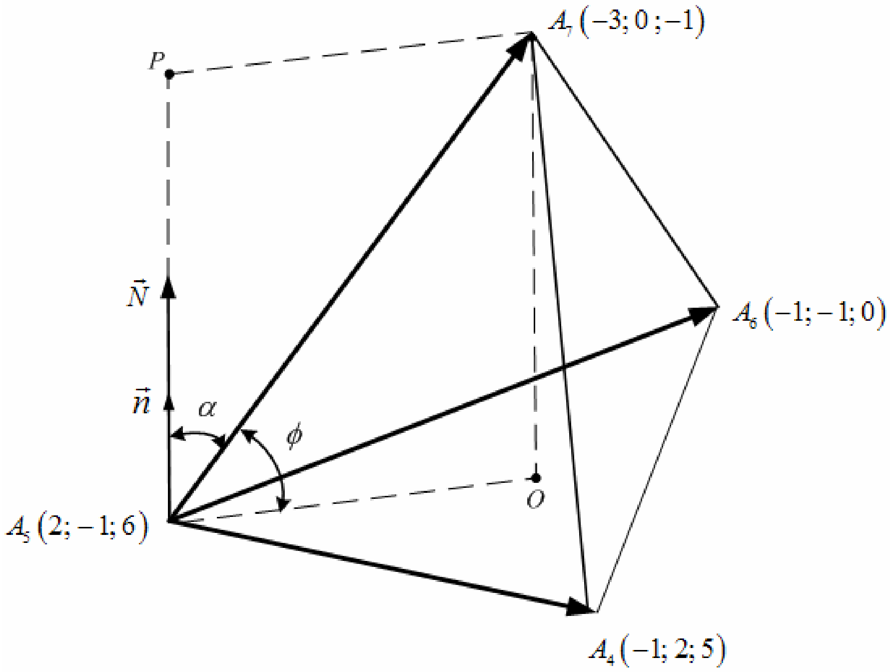


Рисунок 10.1

3) Векторний добуток векторів знаходимо за формулою (8.1)

$$\overline{A_5A_4}\times\overline{A_5A_6}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ -3 & 3 & -1\\ -3 & 0 & -6\end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix}3 & -1\\ 0 & -6\end{vmatrix}\cdot\bar{i}-\begin{vmatrix}-3 & -1\\ -3 & -6\end{vmatrix}\cdot\bar{j}+\begin{vmatrix}-3 & 3\\ -3 & 0\end{vmatrix}\cdot\bar{k}=-18\bar{i}-15\bar{j}+9\bar{k}$$

4) Мішаний добуток векторів обчислюємо за формулою (9.1)

$$\left(\overline{A_5A_4}\times\overline{A_5A_6}\right)\cdot\overline{A_5A_7}=\begin{vmatrix}-3 & 3 & -1\\ -3 & 0 & -6\\ -5 & 1 & -7\end{vmatrix}=0+90+3-0-18-63=12$$

5) Кут між ребрами A_5A_4 та A_5A_6 – це кут між вектором $\overline{A_5A_4}$ та $\overline{A_5A_6}$, який знаходимо за формулою (7.6)

$$\cos\left(A_5A_4{}^\wedge A_5A_6\right)=\frac{\overline{A_5A_4}\cdot\overline{A_5A_6}}{\left|A_5A_4\right|\cdot\left|A_5A_6\right|}=\frac{15}{\sqrt{19}\cdot\sqrt{45}}=\frac{5}{\sqrt{19}\cdot\sqrt{5}}=\frac{5}{\sqrt{95}}$$

$$A_5A_4{}^\wedge A_5A_6=\arccos\frac{5}{\sqrt{95}}\approx\arccos 0{,}531\approx 59^\circ .$$

6) Проекцію вектора на вектор знаходимо за формулою (7.7)

$$np_{\overline{A_5A_6}}\overline{A_5A_4}=\frac{\overline{A_5A_4}\cdot\overline{A_5A_6}}{\left|\overline{A_5A_6}\right|}=\frac{15}{\sqrt{45}}=\frac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5} .$$

7) Один з векторів, які перпендикулярні площині, можна одержати як векторний добуток векторів, що лежать у цій площині. Отже:

$$\overline{N}=\overline{A_5A_4}\times\overline{A_5A_6}=-18\bar{i}-15\bar{j}+9\bar{k} .$$

8) Площа грані $A_5A_4A_6$ дорівнює половині площі паралелограма, побудованого на векторах $\overline{A_5A_4}$ та $\overline{A_5A_6}$, як на сторонах. Тоді, згідно властивості векторного добутку, маємо:

$$S_{\Delta A_5A_4A_6}=\frac{1}{2}\left|\overline{A_5A_4}\times\overline{A_5A_6}\right|=\frac{1}{2}\sqrt{(-18)^2+(-15)^2+9^2}=\frac{1}{2}\sqrt{630}$$

9) Об'єм піраміди $A_5A_4A_6A_7$ дорівнює $1/6$ об'єму паралелепіпеда, побудованого на векторах $\overline{A_5A_4}$, $\overline{A_5A_6}$, $\overline{A_5A_7}$, як на ребрах. Тоді, згідно властивості мішаного добутку векторів, маємо:

$$V_{A_5A_4A_6A_7}=\frac{1}{6}V_{n-\partial a}=\frac{1}{6}\cdot\left|\left(\overline{A_5A_4}\times\overline{A_5A_6}\right)\cdot\overline{A_5A_7}\right|=\frac{1}{6}\cdot|12|=2 .$$

10) Нехай φ – кут між ребром A_5A_7 та гранню $A_5A_4A_6$; α – кут між векторами $\overline{N}$ та $\overline{OA_7}$. Тоді:

$\varphi = 90^\circ - \alpha$, якщо α – гострий;

$\varphi = \alpha - 90^\circ$, якщо α – тупий.

Знаходимо кут α за формулою (7.6)

$$\cos\alpha=\frac{\overline{N}\cdot\overline{A_5A_7}}{\left|\overline{N}\right|\cdot\left|\overline{A_5A_7}\right|}=\frac{-18\cdot(-5)+(-15)\cdot 1+9\cdot(-7)}{\sqrt{630}\cdot\sqrt{75}}\approx 0{,}055$$

$$\alpha = \arccos 0{,}055 \approx 87° \;\Rightarrow\; \varphi = 90° - 87° = 3° .$$

11) Кут між площинами – це кут між їх нормальними векторами. Знаходимо нормальний вектор $\overline{N}_1$ грані $A_5A_4A_7$

$$\overline{N} = \overline{A_5A_4} \times \overline{A_5A_7} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -3 & 3 & -1 \\ -5 & 1 & -7 \end{vmatrix} = -20\bar{i} - 16\bar{j} + 12\bar{k} .$$

Вектори

$$\bar{n} = \frac{1}{3}\overline{N} = -6\bar{i} - 5\bar{j} + 3\bar{k} ,$$

$$\bar{n}_1 = \frac{1}{4}\overline{N}_1 = -5\bar{i} - 4\bar{j} + 3\bar{k}$$

також є нормальними для граней $A_5A_4A_6$ та $A_5A_4A_7$. Тому, для знаходження кута β між гранями доцільніше скористуватися векторами $\bar{n}$ та $\bar{n}_1$

$$\cos\beta = \cos\left(\bar{n} \wedge \bar{n}_1\right) = \frac{\bar{n} \cdot \bar{n}_1}{|\bar{n}| \cdot |\bar{n}_1|} =$$

$$= \frac{-6\cdot(-5) + (-5)\cdot(-4) + 3\cdot 3}{\sqrt{(-6)^2 + (-5)^2 + 3^2} \cdot \sqrt{(-5)^2 + (-4)^2 + 3^2}} = \frac{59}{\sqrt{70} \cdot \sqrt{50}} \approx 0{,}997$$

$$\beta = \arccos\ 0{,}997 \approx 4°$$

12) Знаходимо довжину висоти A_7O

$$A_7O = PA_5 = \left| np_{\overline{N}}\, \overline{A_5A_7} \right| = \left| np_{\bar{n}}\, \overline{A_5A_7} \right| = \left| \frac{\overline{A_5A_7} \cdot \bar{n}}{|\bar{n}|} \right| =$$

$$= \left| \frac{-5\cdot(-6) + 1\cdot(-5) + (-7)\cdot 3}{\sqrt{70}} \right| = \frac{4}{\sqrt{70}} \approx 0{,}48$$

Оскільки кут α – гострий, то вектори $\overline{N}$ та $\overline{OA_7}$ мають однаковий напрямок, а $\overline{N}$ і $\overline{A_7O}$ – протилежно направлені. Значить, $\overline{A_7O}^{\circ} = -\overline{N}^{\circ}$. Орт вектора $\overline{N}$ знаходимо за формулою (5.8)

$$\overline{N}^{\circ} = \left(\frac{N_x}{\left|\overline{N}\right|}; \frac{N_y}{\left|\overline{N}\right|}; \frac{N_z}{\left|\overline{N}\right|} \right) =$$

$$= \left(-\frac{18}{\sqrt{630}}; -\frac{15}{\sqrt{630}}; \frac{9}{\sqrt{630}} \right) = \left(-\frac{6}{\sqrt{70}}; -\frac{5}{\sqrt{70}}; \frac{3}{\sqrt{70}} \right).$$

Отже,

$$\overline{A_7O}^{\circ} = \left(\frac{6}{\sqrt{70}}; \frac{5}{\sqrt{70}}; -\frac{3}{\sqrt{70}} \right).$$

14) Вектор $\overline{A_7O}$ знаходимо, виходячи з умови, що

$$\overline{a} = \left|\overline{a}\right| \cdot \overline{a}^{\circ}$$

$$\overline{A_7O} = \left|\overline{A_7O}\right| \cdot \overline{A_7O}^{\circ} = \frac{4}{\sqrt{70}} \cdot \left(\frac{6}{\sqrt{70}}; \frac{5}{\sqrt{70}}; -\frac{3}{\sqrt{70}} \right) = \left(\frac{12}{35}; \frac{10}{35}; -\frac{6}{35} \right)$$

15) Знаходимо координати точки O. Так як

$$\overline{A_7O} = \left(x_0 - x_{A_7}; y_0 - y_{A_7}; z_0 - z_{A_7} \right),$$

то маємо

$$\begin{cases} x_0 - x_{A_7} = \dfrac{12}{35}; \\ y_0 - y_{A_7} = \dfrac{10}{35}; \\ z_0 - z_{A_7} = -\dfrac{6}{35}; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0 = \dfrac{12}{35} + (-3) = -\dfrac{93}{35} \\ y_0 = \dfrac{10}{35} + 0 = \dfrac{10}{35} \\ z_0 = -\dfrac{6}{35} + (-1) = -\dfrac{41}{35} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow O\left(-\frac{93}{35}; \frac{10}{35}; -\frac{41}{35} \right)$$

ПЕРЕЛІК ПОСИЛАНЬ

1. Апатенок Р.Ф., Маркина А.М., Хейнман В.В. Сборник задач по линейной алгебре и аналитической геометрии. Мн.: Выш. шк., 1990 – 286 с.

2. Беклемешев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. М.: Наука, 1980 – 360 с.

3. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика: Навч. посібник. – К.: Видавництво А.С.К., 2003. – 648 с.

4. Рудавський Ю.К. Лінійна алгебра та аналітична геометрія. – Л.: 2002. – 262 с.

5. Рудавський Ю.К. Збірник задач з лінійної алгебри та аналітичної геометрії – Л.: 2002. – 256 с.

6. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике: Учебное пособие в 3 ч. Ч. 1/А.П. Рябушко, В.В. Бархатов, В.В. Державец, И.Е .Юруть. Под общ. ред. А.П. Рябушко. Мн.: Высш. шк., 1991. – 270 с.