

КОНЕЧНО-РАЗНОСТНАЯ МОДЕЛЬ ПЛАСТИЧЕСКОГО ТЕЧЕНИЯ МЕТАЛЛА ПРИ ПРОКАТКЕ ВЫСОКИХ ПОЛОС

А.В. Пилюшенко (ОАО «Днепропетровский трубный завод», г. Днепропетровск), Е.Н. Смирнов (ДонНТУ, г. Донецк)

Представлена конечно-разностная модель пластического течения металла, применимая для случая исследования особенностей процесса прокатки высоких полос. Показано, что использование биполярной системы координат позволяет, в отличие от представлений в декартовой системе, учитывать внеконтактную деформацию и тем самым повысить точность модели.

Исследования процессов прокатки высоких полос получило новый толчок в связи с реализацией как технологии «мягкого» обжата непрерывнолитых блюмов, так и их исследующим перекатом в заготовку [1]. Однако применение аналитических методов для исследований столь наукоёмких процессов крайне затруднительно, а в ряде случаев просто не возможно. В этой связи дальнейший прогресс решения задач пластического течения наметился в направлении использования дискретных методов.

В данной работе представлена разработанная конечно-разностная модель пластического течения металла при прокатке высоких полос, позволяющая исследовать напряженно-деформированное состояние с учетом неравномерного температурного поля.

В общем виде плоское стационарное напряженно-деформированное состояние в очаге деформации при прокатке определяется тремя компонентами тензора напряжений: σ_x , σ_y , τ_{xy} и двумя компонентами вектора скорости V_x и V_y , которые удовлетворяют дифференциальным уравнениям [2]:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

$$\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} = 0 \quad (2)$$

Для описания свойств прокатываемого металла целесообразно принять модель вязко-пластической среды (среды Бингама) [3]:

$$S_{xy} = \left(\mu + \frac{K}{H} \right) \dot{\epsilon}_{xy}, \quad (3)$$

где S_{xy} - девиатор напряжений;
 μ - динамическая вязкость;
 K – сопротивление сдвигу;
 H – интенсивность скоростей деформации;
 $\dot{\epsilon}_{xy}$ - тензор скоростей деформации.

Среда Бингама объединяет в себе свойства линейно-вязкой жидкости и идеально пластического тела, а также может рассматриваться как линейная вязкая жидкость с эквивалентной вязкостью $\mu' = \mu + \frac{k}{H}$.

Подставляя в систему (1) соотношение (3), исключаем из уравнений равновесия составляющие девиатора напряжений. Кроме того, дополнительно вводим функцию напряженности вихря ω , которая определяет мгновенную скорость вращения материальной частицы в каждой точке очага деформации:

$$\omega = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} \right), \quad (4)$$

В дальнейшем, следуя рекомендациям работы [4], систему уравнений (1) преобразовываем к виду:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\mu' \frac{\partial \sigma}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu' \frac{\partial \sigma}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\gamma_{xy} \frac{\partial \mu'}{\partial x} - \epsilon_x \frac{\partial \mu'}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\epsilon_x \frac{\partial \mu'}{\partial x} - \gamma_{xy} \frac{\partial \mu'}{\partial y} \right) = 0, \quad (5)$$

Выразим скорости течения металла V_x и V_y через функцию тока ψ , тождественно удовлетворяющую условию несжимаемости (2):

$$V_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}; V_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (6)$$

Подставив (6) в выражение (4), получим дифференциальное уравнение для функции тока:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + 2\omega = 0, \quad (7)$$

Полученная система дифференциальных уравнений (5) и (7) описывает вязко-пластическое течение металла при деформации.

Решение данной системы удобно проводить в ортогональной системе координат, в которой геометрические границы очага деформации совпадают с координатными линиями, что позволяет существенно упростить задание граничных условий и численное решение. Для случая прокатки такой криволинейной системой координат является биполярная система координат [5].

Схема прокатки в биполярных системах координат ξ и η представлена на рисунке 1. Связь декартовых координат X и Y с биполярными выражается соотношениями:

$$X = a \frac{\sin \xi}{ch\eta - \cos \xi}; Y = \frac{sh\eta}{ch\eta - \sin \xi}, \quad (8)$$

где a – расстояние от начала декартовых координат по оси OX до полюса F .

Линии $\xi = \text{const}$ являются окружностями, включающими хорду FF' , а линии $\eta = \text{const}$ – ортогональными окружностями радиусом $r = \pm \frac{a}{8h\eta}$.

Геометрический очаг деформации со стороны входа в валки ограничен координатой ξ_0 , стороны выхода – координатой ξ_1 . Окружность валков являются координатными линиями $\pm\eta$.

Величины a, η_0 и ξ_0 определяются зависимостями:

$$\eta_0 = \ln \left(1 + \frac{h_1}{R} \pm \sqrt{\left(1 + \frac{h_1}{R} \right)^2 - 1} \right); \quad (9)$$

$$\xi_0 = \arccos \left(ch\eta_0 - a \frac{sh\eta_0}{h_0} \right); \quad (10)$$

$$a = \sqrt{h_1(2R + h_1)} \quad (11)$$

где $2h_1$ – толщина полосы на выходе из очага деформации;

$2h_2$ – толщина полосы на входе в очаг деформации;

R – радиус валков.

Последовательность графического построения биполярной системы координат следующая. После определения межфокусного расстояния $2a$ на

оси OX отмечаются точки F и F' через которые проводится серия окружностей с центрами на оси OY. Затем, изменяя координату η от 0 до η_0 с выбранным шагом, определяются радиусы ортогональных окружностей r. Проведение этого семейства окружностей завершает построение криволинейной системы координат. Геометрический очаг деформации в биполярной системе координат представляю собой область $\{0 \leq \eta \leq \eta_0; -\pi \leq \xi \leq \xi_0\}$.

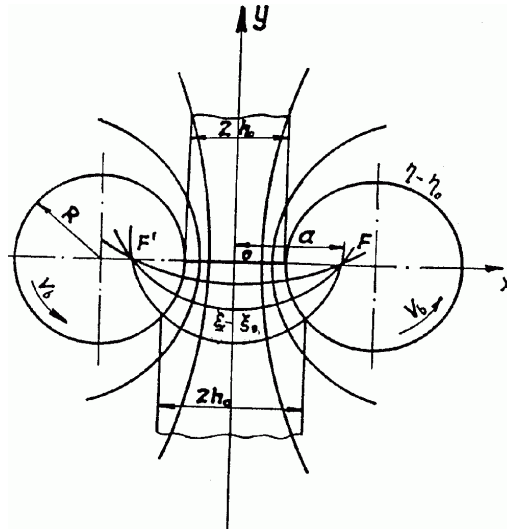


Рисунок 1 – Схема прокатки в биполярной системе координат.

Существенное преимущество биполярной системы координат связано с тем, что входная граница очага деформации охватывает значительную область прокатываемого металла за пределами входного сечения, обозначенного прямой линией в декартовой системе координат, что позволяет учитывать внеконтактную деформацию при прокатке высоких полос[6].

В итоге такого подхода основная система кинематических уравнений в биполярных координатах приобретает следующий вид:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} + 2H^2 \omega = 0 \quad (12)$$

$$\frac{\partial^2 (\mu' \omega)}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 (\mu' \omega)}{\partial \eta^2} = 0 \quad (13)$$

Для расчета напряжений в очаге деформации используются выражения:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial \xi} &= -\mu' \frac{\partial \omega}{\partial \eta} + \frac{\partial \mu'}{\partial \xi} \varepsilon_\xi + \frac{\partial \mu'}{\partial \eta} \gamma_{\xi\eta} \\ \frac{\partial P}{\partial \eta} &= -\mu' \frac{\partial \omega}{\partial \xi} + \frac{\partial \mu'}{\partial \eta} \varepsilon_\xi + \frac{\partial \mu'}{\partial \xi} \gamma_{\xi\eta} \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Путем ввода безразмерных параметров:

$$\bar{\xi} = \frac{\xi + \pi}{\xi_0 + \pi}; \bar{\eta} = \frac{\eta}{\xi_0 + \pi}; \bar{V}_\xi = \frac{V_\xi - V_\epsilon}{V_\epsilon}; \bar{V}_\eta = \frac{V_\eta}{V_\epsilon}; \bar{\psi} = \frac{\psi}{aV_\epsilon(\xi_0 + \pi)}; \bar{H} = \frac{H}{a};$$

$$\bar{\omega} = \frac{a(\xi_0 + \pi)}{V_\epsilon} \omega; \bar{\epsilon} = \frac{a(\xi_0 + \pi)}{V_\epsilon} \epsilon; \bar{P} = \frac{P}{K}$$

уравнения (12), (13) и (14) примут следующий вид:

$$\frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial \bar{\xi}^2} + \frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial \bar{\eta}^2} + 2\bar{H}^2 \bar{\omega} = 0 \quad (15)$$

$$\frac{\partial^2 \left[\left(Se + \frac{1}{\bar{\epsilon}} \right) \bar{\omega} \right]}{\partial \bar{\xi}^2} + \frac{\partial^2 \left[\left(Se + \frac{1}{\bar{\epsilon}} \right) \bar{\omega} \right]}{\partial \bar{\eta}^2} = 0 \quad (16)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \bar{P}}{\partial \bar{\xi}} &= - \left(Se + \frac{1}{\bar{\epsilon}} \right) \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial \bar{\eta}} + \frac{\partial}{\partial \bar{\xi}} \left(\frac{1}{\bar{\epsilon}} \right) \bar{\epsilon}_\xi + \frac{\partial}{\partial \bar{\eta}} \left(\frac{1}{\bar{\epsilon}} \right) \bar{\gamma}_{\xi\eta} \\ \frac{\partial \bar{P}}{\partial \bar{\eta}} &= \left(Se + \frac{1}{\bar{\epsilon}} \right) \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial \bar{\xi}} + \frac{\partial}{\partial \bar{\eta}} \left(\frac{1}{\bar{\epsilon}} \right) \bar{\epsilon}_\xi + \frac{\partial}{\partial \bar{\xi}} \left(\frac{1}{\bar{\epsilon}} \right) \bar{\gamma}_{\xi\eta} \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

где $Se = \frac{\mu V_\epsilon}{Ka(\xi_0 + \pi)}$ - видоизмененный критерий Сен-Венана.

Система уравнений (15), (16) решается конечно-разностным методом. Область интегрирования $\bar{\Omega}$ представляет собой криволинейный прямоугольник:

$$\bar{\Omega} = \{0 \leq \bar{\xi} \leq 1; 0 \leq \bar{\eta} \leq \bar{\eta}_0\}.$$

Сторона $0 \leq \bar{\xi} \leq 1$ разбивается на N равных частей с шагом $h=1/N$, а сторона $0 \leq \bar{\eta} \leq \bar{\eta}_0$ - на M равных частей с шагом $d = \bar{\eta}_0/M$. Приведенным выше способом строится сетка, состоящая из двух семейств координатных кривых в биполярной системе. Точки пересечения кривых (ξ_i, η_j) являются узлами разностной сетки, причем $\xi_i = i \cdot h$ и $\eta_j = j \cdot d$, где $i=0.1, \dots, N$; $j=0.1, \dots, M$. Полученная сетка имеет равномерный шаг по каждой переменной.

С заменой каждой из первых и вторых производных, входящих в уравнения (15), (16) и (17) разностными уравнениями вида:

$$\frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial \bar{\xi}^2} \approx \frac{\bar{\psi}_{i+1,j} - 2\bar{\psi}_{ij} + \bar{\psi}_{i-1,j}}{h^2};$$

$$\frac{\partial P}{\partial \xi} = \frac{P_{i,j+1} - 2P_{ij}}{d}$$

дифференциальные уравнения (15) и (16) будут иметь следующие разностные аналоги:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\psi_{i+1,j} - 2\psi_{ij} + \psi_{i-1,j}}{h^2} + \frac{\psi_{i,j+1} - 2\psi_{ij} + \psi_{i,j-1}}{d^2} + 2H_{ij}^2 \omega_{ij} &= 0 \\ \frac{(\bar{\mu}\omega)_{i+1,j} - 2(\bar{\mu}\omega)_{ij} + (\bar{\mu}\omega)_{i-1,j}}{h^2} + \frac{(\bar{\mu}\omega)_{i,j+1} - 2(\bar{\mu}\omega)_{ij} + (\bar{\mu}\omega)_{i,j-1}}{d^2} &= 0 \end{aligned} \right\} (18)$$

Замена дифференциальных уравнений разностными (18) приводит к погрешности аппроксимации, которая характеризуется величиной невязки и определяется при подстановке точного решения исходной задачи в разностную. Наиболее простой алгоритм для вычисления разностного решения системы. (18) у явных схем. При этом одним из методов решения стационарных задач является метод установления [7]. Сущность его заключается в том, что исследуемое равновесное состояние рассматривается как результат установления развивающегося во времени процесса.

В нашем случае метод установления предполагает решение следующей задачи:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial t} &= \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} + 2H\omega \\ \frac{\partial (\bar{\mu}\omega)}{\partial t} &= \frac{\partial^2 (\bar{\mu}\omega)}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 (\bar{\mu}\omega)}{\partial \eta^2} \end{aligned} \right\}, (19)$$

которая приводит к получению явной разностной схемы:

$$\left. \begin{aligned} \psi_{i,j}^{P+1} &= \psi_{i,j}^P + \tau \left[\frac{\psi_{i+1,j}^P - 2\psi_{i,j}^P + \psi_{i-1,j}^P}{h^2} + \frac{\psi_{i,j+1}^P - 2\psi_{i,j}^P + \psi_{i,j-1}^P}{d^2} + 2H_{ij}^2 \omega_{ij}^P \right] \\ \omega_{i,j}^{P+1} &= \omega_{i,j}^P + \frac{\tau}{\mu_{ij}} \left[\frac{(\bar{\mu}\omega)_{i+1,j}^P - 2(\bar{\mu}\omega)_{i,j}^P + (\bar{\mu}\omega)_{i-1,j}^P}{h^2} + \frac{(\bar{\mu}\omega)_{i,j+1}^P - 2(\bar{\mu}\omega)_{i,j}^P + (\bar{\mu}\omega)_{i,j-1}^P}{d^2} \right] \end{aligned} \right\} (20)$$

где P - номер итерации;

τ - итерационный параметр.

Для решения системы разностных уравнений (20) применялся итерационный метод Зейделя, заключающийся в том, что на очередном итерационном шаге в правой части уравнения наряду со значениями ψ^P и ω^P , полученными в предыдущем итерационном цикле, используются значения ψ^{P+1} и ω^{P+1} , рассчитанные на данном итерационном шаге. Итерационный процесс решения системы начинается с задания первого приближения для функции тока и напряженности вихря. В настоящей работе за первое приближение приняли линейное распределение функции тока вдоль координаты ξ от значения ψ и ω на границах $\eta=0$ до значений $\psi=\psi(\xi, \eta_0)$. Расчет заканчивали после выполнения условия сходимости:

$$\frac{1}{MN} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M \left[\left| \frac{\psi_{i,j}^P - \psi_{i,j}^{P+1}}{\psi_{i,j}^P} \right| + \left| \frac{\omega_{i,j}^P - \omega_{i,j}^{P+1}}{\omega_{i,j}^P} \right| \right] < \Delta, \quad (21)$$

где Δ - задаваемая точность расчетов.

Задание граничных условия для полученной конечно-разностной модели пластического течения рассматривали на области интегрирования, представляющей собой половину геометрического очага деформации, а ограниченной координатными линиями $\eta=0$ (ось симметрии), $\eta=\eta_0$ (дуга окружности валка), $\xi=\xi_0$ (входное сечение), $\xi=-\pi$ (выходное сечение). На указанных границах определяли значения и выражения для функции тока ψ и напряженности вихря ω .

На линии оси симметрии ($\eta=0$), полагая, что функция тока имеет постоянное значение, граничное условие выглядит:

$$\psi|_{\eta=0} = 0, \quad (22)$$

граничное условие для напряженности вихря:

$$\omega|_{\eta=0} = 0, \quad (23)$$

Граничное значение функции тока на линии контакта с валком ($\eta=\eta_0$) соответствует половине расхода металла Q в данном сечении очага деформации ξ :

$$\psi|_{\eta=\eta_0} = -\frac{1}{2} V_s \int_0^{\eta_0} [H(\xi_H, \eta) - H(\xi, \eta)] d\eta, \quad (24)$$

где ξ_H - сечение очага деформации, в котором относительный расход металла.

Значение вихря на линии контакта ($\eta=\eta_0$) определялось с учетом наличия зон прилипания и скольжения. Согласно [5] получили в разностной форме:

$$\omega_{i,m} = \frac{3}{2H_{i,m}^2 d^2} (\psi_{i,m-1} - \psi_{i,m}) - \frac{3}{2H_{i,m} d} V_{\xi_{i,m}} + \frac{3}{4H_{i,m}^2} \frac{\psi_{i+1,m} - 2\psi_{i,m} + \psi_{i-1,m}}{h^2} + \frac{d}{4H_{i,m}^2} \frac{(HV_{\eta})_{i+1,m} - 2(HV_{\eta})_{i,m} + (HV_{\eta})_{i-1,m}}{h^2} - \frac{\omega_{i,m-1}}{2}, \quad (25)$$

где $V_{\xi_{i,m}}$ - скорость на линии контакта металла с валком.

Постановка граничных условий во входном и выходном сечениях очага деформации ($\xi=\xi_0$; $\xi=-\pi$) для случая прокатки высоких полос затруднена вследствие того, что пластическая деформация металла начинается ранее входного сечения геометрического очага деформации. Автором [5] исследовано влияние на характер пластического течения граничных условий типа Дирихле и типа Неймана. Установлено, что для случая прокатки высоких полос с $ld/H_{cp} < 1$ наилучшее соответствие результатов расчета экспериментальным данным достигается при использовании граничных условий типа Неймана:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial \xi} &= 0 \\ \frac{\partial \omega}{\partial \xi} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

Расчет параметров напряженно-деформированного состояния с использованием конечно-разностной модели пластического течения проводился с учетом неравномерного распределения температуры по сечению прокатываемой полосы. Стационарное температурное поле в биполярной системе координат описывается уравнением [7]:

$$\frac{1}{H^2} \cdot \frac{1}{Pe} \left(\frac{\partial^2 t}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial \xi^2} \right) - \frac{1}{H} v_{\eta} \cdot \frac{\partial t}{\partial \xi} - \frac{1}{H} v_{\xi} \cdot \frac{\partial t}{\partial \eta} = -\frac{E}{Re} \Phi, \quad (27)$$

где Pe, E, Re – числа Пекле, Еккерта, Рейнольдса;

t – безразмерная температура металла;

$$\Phi = 2 \cdot \varepsilon^2,$$

причем:

$$Pe = P_r \cdot Re = \frac{C_p \mu'}{K_p} \cdot \frac{\rho v_B a (\xi_0 + \pi)}{\mu'}; \quad (28)$$

$$\frac{E}{Re} = \frac{v_B^2}{Cp(t_M - t_B)} \cdot \frac{\mu'}{\rho v_B a(\xi_0 + \pi)}, \quad (29)$$

где Pr – число Прандтля;
 Кр – коэффициент теплопроводности металла;
 Ср – теплоемкость металла;
 тм – некоторое базовое значение температуры металла перед прокаткой;
 тв – температура валка;
 ρ – плотность металла.

Граничные условия для температуры принимались следующие. На входе в очаг деформации температура имеет известное заранее распределение по сечению прокатываемой полосы:

$$t|_{\xi=\xi_0} = t_0(\eta), \quad (30)$$

На оси симметрии:

$$\frac{\partial t}{\partial \eta} \Big|_{\eta=0} = 0, \quad (31)$$

На выходе из очага деформации:

$$\frac{\partial t}{\partial \xi} \Big|_{\xi=\xi_1} = 0, \quad (32)$$

На границе металла с валком применены граничные условия типа Неймана:

$$\frac{1}{H} \cdot \frac{\partial t}{\partial \eta} \Big|_{\eta=\eta_0} = Nu \left(\frac{T - T_v}{T - T_m} \right), \quad (33)$$

где $Nu = \frac{\alpha \cdot a \cdot (\xi_c + \pi)}{\lambda}$ - число Нуссельта;

α – коэффициент теплоотдачи;

λ - теплопроводность прокатываемого металла.

Распределение температуры по сечению прокатываемой полосы задавалось на основании экспериментальных или расчетных данных.

Решение системы разностных уравнений (20) позволяет получить матрицу значений функции тока в узлах разностной сетки. Путем численного дифференцирования табличных данных функции тока с помощью разностных аналогов выражений (6) определяем значения компонент скорости течения в узлах разностной сетки, а в дальнейшем - скорости дефор-

мации.

Степень деформации сдвига определялась по формуле:

$$\Lambda = \int_0^{\tau} H d\tau \quad (34)$$

Интегрирование выполнялось вдоль всей траектории движения материальной частицы от ее входа в очаг деформации ($\tau = 0$) до выхода ($\tau = \tau_1$), что существенно облегчается применением полярной системы координат, т.к. координатные линии η достаточно близки к линиям тока. В связи с этим величину Λ определяли численным интегрированием вдоль координаты η с шагом интегрирования:

$$\Delta\tau_{ij} = \frac{hH_{ij}}{v_{\xi_{ij}}} \quad (35)$$

Согласно уравнению (3) для определения напряженного состояния необходимыми кинематическими параметрами являются скорости деформации и степень деформации сдвига Λ в случае упрочняющейся среды. При этом компоненты тензора напряжений в каждой точке определяются из закона течения, с точностью до гидростатического давления P . Применяется следующая схема расчета.

На первом этапе расчета напряженного состояния в очаге деформации из уравнений системы (14) определяли гидростатическое давление на линии симметрии очага деформации. Поскольку на линии симметрии $\frac{\partial \bar{\mu}}{\partial \eta} = 0$ и $\gamma_{\xi\eta} = 0$, а членом $\frac{\partial \bar{\mu}}{\partial \xi} \varepsilon_{\xi}$ можно пренебречь, то расчет P на линии симметрии осуществляли по уравнению:

$$\frac{\partial P}{\partial \xi} = -\bar{\mu} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial \eta} + \frac{\partial \mu'}{\partial \xi} \varepsilon_{\xi}, \quad (36)$$

Определив значение гидростатического давления на линии симметрии очага деформации ($\eta=0$), по второму уравнению системы (17) находили распределение P в остальных узлах разностной сетки.

Алгоритм расчета параметров напряженно-деформированного состояния реализованы в виде программы. При этом результаты расчета параметров напряженно-деформированного состояния могут быть представлены как виде полей линий равного уровня (изолиний), так и в виде эпюр распределения параметров вдоль поперечных сечений очага деформации ($\xi = \text{const}$). Для наглядного представления расчетной информации в виде полей изолиний в физической плоскости очага деформации используется

программа пересчета информации из узлов криволинейной ортогональной сетки в узлы равномерной прямоугольной сетки, а также картирования информации на прямоугольную сетку произвольной размерности.

Выводы.

Разработана конечно-разностная математическая модель, алгоритм и программа расчета параметров деформации и напряжений при прокатке высоких полос. Использование биполярной системы координат позволяет учитывать внеконтактную деформацию и тем самым повысить точность модели. Совместное применение данной модели, с моделями реализованными методом конечных результатов, позволяет получать более достоверный результат.

Список литературы

1. Система технологического проектирования метода «мягкого» обжатия непрерывнолитых блюмов и заготовок в конце затвердевания. (А. А. Минаев, Е. Н. Смирнов, А. Н. Смирнов и др.) // Ресурсозберігаючи технології виробництва та обробки тиском матеріалів у машинобудуванні. Зб. наук. праць:– Луганськ, Вид-во СНУ ім. В.Даля.– 2002 – С. 55 – 60.
2. Соколовский В.В. Теория пластичности.– М.: Высшая школа, 1969.– 608 с.
3. Колмогоров В.Л. Механика обработки металлов давлением.– М.: Металлургия, 1986.– 688 с.
4. Неперешин А. И. О решении задач плоского пластического течения жестко-пластического тела с кинематическими граничными условиями // Расчеты пластического деформирования металлов.– М.: Наука, 1975.– С. 54 – 75.
5. Ноговицын А.В. Конечно-разностная модель вязко-пластического течения – эффективный инструмент исследования процесса прокатки // Теоретические проблемы прокатного производства: Тез. докл. IV Всесоюзн.науч.техн.конф., г. Днепропетровск, 1988.– С. 48 – 50.
6. Тарновский И.Я., Поздеев А.А, Ляшко В.Б.. Деформация металла при прокатке.– Свердловск: Metallurgizdat, 1956.– 288 с.
7. Годунов С.К., Рябенский В.С. Разностные схемы.– М.: Мир, 1980.– 616 с.

© Пилюшенко А.В., Смирнов Е.Н. 2005