МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
КРАСНОАРМІЙСЬКИЙ ІНДУСТРІАЛЬНИЙ ІНСТИТУТ
ДЕРЖАВНОГО ВИЩОГО НАВЧАЛЬНОГО ЗАКЛАДУ
„ДОНЕЦЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ”

Навчально – методичний посібник
з дисципліни

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

Затверджено на засіданні кафедри
„Природничі науки”
протокол № 33 від 23.04.07 р.

Затверджено
науково-видавничою Радою Дон НТУ
протокол № 7 від 20.06.2007 р.

Красноармійськ – 2007

УДК – 51

Навчально–методичний посібник з дисципліни „Диференціальні рівняння”/ Укл. В.Д. Мальцева, С.В. Волков – Красноармійськ: КІІ ДВНЗ ДонНТУ, 2007р. – 72с.

Мета посібника – надати методичну допомогу для організації та реалізації самостійної роботи студентів всіх форм та напрямків навчання з дисципліни „Диференціальні рівняння”.

Посібник містить теоретичний матеріал з дисципліни „Диференціальні рівняння”, приклади розв’язання задач, завдання для самостійного опрацювання матеріалу студентами денної форми навчання та для контрольних робіт студентів заочної форми навчання, вимоги до їх виконання та оформлення, методичні вказівки щодо розв’язання, орієнтовні питання до модульного контролю, перелік рекомендованої літератури.

Рецензент – О.Д. Петренко, д-р фіз.мат.н.,
професор кафедри „Вища математика” ДонНТУ

ЗМІСТ

1. МЕТА І ЗАВДАННЯ ДИСЦИПЛІНИ

Основна мета дисципліни „Диференціальні рівняння” полягає в удосконаленні загальної культури мислення, в розвитку логічного мислення у майбутніх спеціалістів, стимуляції студентів до навчання та оволодіння математичним апаратом. Цей апарат повинен бути достатнім для того, щоб успішно засвоїти такі дисципліни, як-от: теоретична механіка, фізика, теорія автоматичного управління, електромеханіка та ін., щоб майбутні фахівці могли опрацьовувати математичні моделі пов’язані з їх подальшою практичною діяльністю, а при необхідності і складати такі моделі.

Основними задачами дисципліни являються: побудова математичних моделей фізичних, хімічних, біологічних, механічних, електротехнічних і ін. процесів у вигляді диференціальних рівнянь та їх розв’язання – знаходження закону, за яким протікає той чи інший процес.

2. ОРІЄНТОВНІ ПИТАННЯ ДО МОДУЛЬНОГО КОНТРОЛЮ ТА ІСПИТУ

Блок 1:

Диференціальні рівняння першого порядку

1. Що називають диференціальним рівнянням, як визначається його порядок?
2. Що називають розв’язком диференціального рівняння (загальним, частинним)?
3. У чому суть задачі та теореми Коші для рівнянь першого порядку?
4. Як знаходити частинний розв’язок диференціального рівняння першого порядку за даних початкових умов ?
5. Яке диференціальне рівняння першого порядку називається рівнянням із змінними, що розділяються? Укажіть алгоритм розв'язання такого рівняння.
6. Яке диференціальне рівняння першого порядку називається однорідним? Укажіть алгоритм його розв'язання.
7. Яке диференціальне рівняння першого порядку називається лінійним? Укажіть алгоритм розв'язання лінійного диференціального рівняння першого порядку.
8. Який вигляд має рівняння Бернуллі? Укажіть алгоритми його розв'язання.

Блок 2:

Диференціальні рівняння вищого порядку

1. У чому суть задачі та теореми Коші для рівнянь другого порядку?
2. Як знайти частинний розв'язок диференціального рівняння другого порядку за даними початковими умовами?
3. Які диференціальні рівняння вищого порядку називаються рівняннями, що допускають зниження порядку? Укажіть алгоритми їх розв'язання.
4. Що розуміють під фундаментальною системою розв’язків лінійного диференціального рівняння. Сформулюйте та доведіть теорему про структуру розв'язку лінійного диференціального рівняння.
5. Які диференціальні рівняння другого порядку називаються лінійними однорідними рівняннями зі сталими коефіцієнтами? Укажіть та обґрунтуйте алгоритми їх розв'язання.
6. Які диференціальні рівняння другого порядку називаються лінійними неоднорідними зі сталими коефіцієнтами? Укажіть алгоритми їх розв'язання у випадку спеціального та довільного виду правої частини (метод варіації).
7. Що називають системою лінійних однорідних та неоднорідних диференціальних рівнянь? Укажіть алгоритми розв'язання однорідної системи методом виключення та матричним методом.

3. ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ ТА МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ ЩОДО РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ

3.1 Загальні поняття.

$[O_1]$ Звичайним диференціальним рівнянням називається рівність, що містить, у загальному випадку, незалежну змінну, невідому функцію цієї змінної та хоча б одну похідну невідомої функції або диференціали аргументу і функції.

Так, якщо $y = y(x) -$ невідома функція, то згідно $[O_1]$ звичайне диференціальне рівняння має загальний вигляд:

$$F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0, n \in N \tag{3.1}$$

$[O_2]$ Порядком диференціального рівняння називається порядок старшої похідної, що до нього входить.

Отже, диференціальне рівняння (3.1) є рівнянням n-го порядку, бо старша похідна, яку воно містить, має n-й порядок.

$[O_3]$ Функція $y = \varphi(x)$, диференційована на деякому інтервалі (a, b), називається частинним розв'язком або інтегралом диференціального рівняння $[3.1]$, якщо після заміни y на $\varphi(x)$, y' на $\varphi'(x), ..., y^{(n)} -$ на $\varphi^{(n)}(x)$ воно перетворюється в тотожність на (a, b). Графік розв'язку диференціального рівняння називається інтегральною кривою цього рівняння.

(Тут і надалі $[O_i] -$ означення поняття, $i -$ його номер.)

Приклад 1. Переконатися, що функція $y = 3\cos x$ є розв'язком рівняння $y'' + y = 0$.

Розв'язання:

Знайдемо y', y'' і підставимо в задане рівняння: $y' = (3\cos x)' = -3\sin x,\ y'' = (y')' = -3\cos x$,

$-\cancel{3\cos x} + \cancel{3\cos x} = 0,\ 0 \equiv 0$. Як бачимо, функція $y = 3\cos x$ перетворює задане рівняння в тотожність. Згідно $[O_3]$ вона являється розв'язком рівняння.

<u>*Завдання*</u> 1. Переконатися, що функції $y = \sqrt{x},\ y = \sqrt{x + C}$, де $C -$ довільна стала, є розв'язками рівняння $2yy' = 1$.

Основною задачею теорії диференціальних рівнянь являється знаходження всіх розв'язків даного диференціального рівняння.

$[O_4]$ Множина функцій $\varphi(x, C_1, C_2, ...C_n) = 0$, де C_i $\forall i = \overline{1,n}$ являються незалежними між собою сталими величинами $(C_i - const)$, називається загальним розв'язком рівняння (3.1), якщо вона перетворює його в тотожність і при заданих початкових умовах із неї можна виділити єдиний частинний розв'язок.

3.2. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ, ЩО ІНТЕГРУЮТЬСЯ В КВАДРАТУРАХ

3.2.1. Загальні поняття та означення. Задача та теорема Коші.

$[O_5]$ Диференціальним рівнянням першого порядку називається рівняння виду

$$F(x, y, y') = 0 \tag{3.2}$$

Рівняння (3.2) може в окремому випадку не містити явно x і (чи) y, але обов'язково має містити похідну y' чи dx і dy, так як $y' = \frac{dy}{dx}$.

Так, прикладами диференціальних рівнянь першого порядку являються рівняння: $2xy - 3y' = x;\ (4x - y)dx = x^2 dy.$

Якщо рівняння $[3.2]$ можна розв'язати відносно y', то його записують у вигляді:

$$y' = f(x, y) \tag{3.3}$$

і (3.3) називають рівнянням в нормальній формі.

Відповідь на запитання про те, за яких умов рівняння (3.3) має частинний розв'язок, дає теорема Коші (теорема про існування та єдиність розв'язку диференціального рівняння першого порядку).

<u>Теорема</u> 1 (Коші).

Нехай функція $f(x, y)$ і її частинна похідна $f'_y(x, y)$ визначені і неперервні у відкритій області D площини xOy і точка $(x_0, y_0) \in D$.

Тоді існує єдиний розв'язок $\varphi = \varphi(x, C_0)$ рівняння (3.3), який задовольняє умову: $\varphi\left(x_0\right) = y_0$.

Цей розв'язок називається частинним розв'язком рівняння (3.3). Задача знаходження частинного розв'язку називається задачею Коші.

Геометричний зміст теореми: при виконанні умов теореми із сімейства інтегральних кривих (з загального розв'язку) завжди можна виділити єдину криву, що проходить через точку $\left(x_0, y_0\right)$.

Приклад 2 Переконатися, що множина функцій $y = x\ln x + Cx$ являється розв'язком рівняння $xy' - x - y = 0$ та розв'язати задачу Коши за умови $y(1) = 2$.

Розв'язання:

Дана функція $y = x\ln x + Cx$, диференційована на відрізку $(0;\infty)$. При підстановці y і $y' = x'\ln x + x\left(\ln x\right)' + Cx' = \ln x + 1 + C$ в дане рівняння одержуємо: $x\left(\ln x + 1 + C\right) - x - x\ln x - Cx = 0$. Після розкриття дужок і зведення подібних одержимо тотожність $0 \equiv 0$.

Отже, множина функцій $y = x\ln x + Cx -$ загальний розв'язок, оскільки являється множиною функцій $y = \varphi(x, C)$ такою, що перетворює дане рівняння в тотожність $x\varphi'(x, C) - x - \varphi(x, C) \equiv 0$.

Із даної множини розв'язків виділимо частинний розв'язок (розв'язуємо задачу Коші) за даними початковими умовами $y(1) = 2$. Підставимо в загальний розв'язок $x = 1,\ y = 2$; маємо

$2 = 1\ln 1 + C\cdot 1 \Rightarrow C = 2 \Rightarrow y = x\ln x + 2x -$ частинний розв'язок даного рівняння.

При знаходженні частинного розв'язку користуємося алгоритмом:

– знаходимо загальний розв'язок;
– підставляємо в нього початкові значення x_0, y_0 замість x і y;
– знаходимо з одержаного рівняння відповідне значення $C = C_0$;
– підставляємо в загальний розв'язок C_0 замість C, одержуємо частинний розв'язок.

Завдання 2 Переконатись, що множина функцій $y = x\left(e^x + C\right)$ є розв'язком рівняння $xy' - y = x^2 e^x$. Розв'язати задачу Коші за умови $y(1) = e$.

3.2.2. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ З ВІДОКРЕМЛЮВАНИМИ ЗМІННИМИ

$[O_6]$ Рівняння виду

$$y' = X(x) \cdot Y(y) \tag{3.4}$$

називається диференціальним рівнянням з відокремлюваними змінними.

Характерна ознака: похідна невідомої функції являє собою добуток двох функцій, одна з яких залежить тільки від аргументу x, друга – тільки від невідомої функції y. У окремому випадку можливо $X(x) = const$ або $Y(y) = const$.

Розв'язуємо його за алгоритмом:

– записуємо y' як $\frac{dy}{dx}$, праву частину рівняння (3.4) залишаємо без зміни, маємо рівняння $\frac{dy}{dx} = X(x)Y(y)$;

– помножимо обидві частини цього рівняння на $\frac{dx}{Y(y)}$, зауваживши, що $Y(y) \neq 0$, одержимо рівняння з відокремленими змінними.

$$\frac{dy}{Y(y)} = X(x)dx. \tag{3.5}$$

– оскільки рівняння (3.5) містить тотожно рівні диференціали, то відповідні невизначені інтеграли відрізняються між собою на сталу величину. Інтегруємо обидві частини

$$\int \frac{dy}{Y(y)} = \int X(x)dx + C. \tag{3.6}$$

Зауваження: не забути розглянути випадок $Y(y)=0$ і знайти при цьому розв'язок, який може бути частинним, коли його можна одержати із загального розв'язку при певному значенні C, або особливим розв'язком, коли його не можна одержати із загального.

Таким чином, рівняння (3.4) розв'язано в квадратурах, а рівність (3.6) визначає його загальний розв'язок.

Приклад 3. Знайти загальний розв'язок рівняння $xy' = 2y-3$.

Розв'язання:

Оскільки це рівняння можна записати у вигляді $y' = \frac{1}{x}\cdot(2y-3)$, то воно є рівнянням з відокремлюваними змінними. Представимо y' як $\frac{dy}{dx}$, тоді маємо рівняння $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}(2y-3)$. Помноживши обидві його частини на $\frac{dx}{2y-3}$ при $2y-3 \neq 0$, отримаємо $\frac{dy}{2y-3} = \frac{dx}{x}$.

Інтегруючи останнє співвідношення, одержимо

$$\frac{1}{2}\ln|2y-3| = \ln|x| + \ln|C| \Rightarrow \ln|2y-3| = \ln|Cx^2|.$$

Потенціюючи, одержимо

$2y-3 = Cx^2 \Rightarrow 2y = Cx^2+3 \Rightarrow y = \frac{C}{2}x^2 + \frac{3}{2}$ – загальний розв'язок.

Розглянемо випадок: $2y-3=0 \Rightarrow y=\frac{3}{2}-$ частинний розв'язок даного рівняння, так як його можна отримати із загального при $C=0$.

Відповідь: $y=C\frac{x^2}{2}+\frac{3}{2}-$загальний розв'язок

<u>*Завдання*</u> 3 Розв'язати рівняння $y'tgx=y$.

Відповідь: $y=C\sin x-$загальний розв'язок.

3.2.3. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ, ЩО ЗВОДЯТЬСЯ ДО РІВНЯНЬ З ВІДОКРЕМЛЮВАНИМИ ЗМІННИМИ

Рівняння виду $y'(x) = f(ax+by+c)$ шляхом заміни $z(x) = ax+by+c$, $z'(x) = a+by'$ зводиться до рівняння $\frac{z'}{b} - \frac{a}{b} = f(z) -$ рівняння з відокремлюваними змінними.

Приклад 4. Розв'язати рівняння $y' = \left(x+y+1\right)^2$

Розв'язання:

Виконаємо заміну $x+y+1 = z$ і, диференціюючи, одержимо $y' = z'-1$. Задане рівняння прийме вигляд: $z'-1 = z^2 \Rightarrow \frac{dz}{dx} = z^2+1 \Rightarrow \frac{dz}{z^2+1} = dx$. Проінтегрувавши останню рівність, отримаємо $arctg(z) = x+C \Rightarrow z = tg(x+C)$. Враховуючи введену заміну, одержимо $x+y+1 = tg(x+C)$, або $y = tg(x+C) - x - 1$.

Відповідь: $y = tg(x+C) - x - 1$ - загальний розв'язок.

<u>*Завдання*</u> 4. Розв'язати рівняння $y' = \left(y-x+1\right)^2$.

Відповідь: $y = x + \frac{2Ce^{2x}}{1-Ce^{2x}} -$ загальний розв'язок.

3.2.4. Однорідні диференціальні рівняння першого порядку

$[O_7]$ Функція $f(x,y)$ називається однорідною функцією $n-$го виміру відносно змінних x та y, якщо для довільного числа $t \neq 0$ виконується тотожність $f(xt,yt)=t^n f(x,y)$.

Так, наприклад, функція $f(x,y)=\dfrac{x^2-2y^2}{3x+y}$ являється однорідною функцією першого виміру, так як $f(tx,ty)=\dfrac{t^2x^2-2t^2y^2}{3tx+ty}=\dfrac{t^2(x^2-2y^2)}{t(3x+y)}=t\cdot f(x,y)$.

$[O_8]$ Диференціальне рівняння

$$y'=f(x,y) \tag{3.7}$$

називається однорідним, якщо функція $f(x,y)$ є однорідною функцією нульового виміру, тобто $f(xt,yt)=f(x,y)$.

Так, наприклад, рівняння $(4x-y)dx=(x+5y)dy$ являється однорідним, тому що $y'=\dfrac{4x-y}{x+5y}$ і функція $f(x,y)=\dfrac{4x-y}{x+5y}$ – однорідна функція нульового виміру. Дійсно,

$$f(xt,yt)=\frac{4xt-yt}{xt+5yt}=\frac{t(4x-y)}{t(x+5y)}=\frac{4x-y}{x+5y}=t^0 f(x,y).$$

Рівняння (3.7) можна, зокрема, представити у одному з виглядів:

$$\text{а) } y'=\varphi(\frac{y}{x}), \text{ б) } y'=\gamma(\frac{x}{y}), \text{ в) } y'=\frac{Q_n(x,y)}{P_n(x,y)} \tag{3.8}$$

де $Q_n(x,y)$ і $P_n(x,y)$ – однорідні многочлени $n-$го виміру, інакше кажучи: всі члени $Q_n(x,y), P_n(x,y)$ $n-$го степеня відносно x та y.

Розв’язуємо (3.8 а, б, в) за алгоритмом.

– робимо підстановку $y = u \cdot x$, звідки $y' = u'x + u$, де $u = u(x) -$ невідома функція.

– дане рівняння зводимо до рівняння з відокремлюваними змінними. Дійсно, якщо функція $y = ux$ є розв’язком однорідного рівняння, то вона задовольняє рівняння $y' = \varphi(\frac{y}{x})$, тобто $\left(ux\right)' = \varphi\left(u\right) \Rightarrow u'x + u = \varphi(u) \Rightarrow u' = \frac{1}{x}(\varphi(u) - u)$ - це рівняння з відокремлюваними змінними відносно функції u. Розв’язавши його, одержимо загальний розв’язок $\varphi(x,u,c) = 0$. Враховуючи, що $u = \frac{y}{x}$, дістанемо $\varphi(x,\frac{y}{x},c) = 0 -$ загальний розв’язок рівняння $y' = \varphi(\frac{y}{x})$.

Приклад 5. Знайти частинний розв’язок рівняння $xy' = y + xtg\frac{y}{x}$, що задовольняє умові $y(1) = \frac{\pi}{6}$.

Розв'язання:

Розв'яжемо дане рівняння відносно y', враховуючи, що $x \neq 0$: $y' = \frac{y}{x} + tg\frac{y}{x}$. Очевидно, рівняння має вигляд $y' = \varphi(\frac{y}{x})$, а значить є однорідним. Застосуємо заміну: $y = ux$, $y' = u'x + u$. Тоді $u'x + u = u + tgu \Rightarrow u'x = tgu \Rightarrow u' = \frac{1}{x} tgu$. Розділимо змінні за умови, що $tgu \neq 0$ та проінтегруємо: $\frac{du}{tgu} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \int ctgu\, du = \int \frac{dx}{x}$ звідки $\ln\left|\sin u\right| = \ln\left|x\right| + \ln C \Rightarrow Cx = \sin u$. Враховуючи, що $u = \frac{y}{x}$, одержимо загальний розв’язок $Cx = \sin\frac{y}{x}$. Підставимо в загальний розв'язок початкові умови $x = 1,\ y = \frac{\pi}{6}$, тоді $C = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$. Підставимо значення C в загальний розв'язок: $\frac{x}{2} = \sin\frac{y}{x} \Rightarrow \frac{y}{x} = \arcsin\frac{x}{2} \Rightarrow y = x\arcsin\frac{x}{2} -$ шуканий частинний розв'язок даного рівняння.

Розглянемо: $tg\ u = 0 \Rightarrow u = k\pi, k \in Z \Rightarrow \frac{y}{x} = k\pi \Rightarrow y = k\pi x -$ частинний розв’язок, так як його можна одержати із загального $Cx = \sin\frac{y}{x}$ при $C = 0$.

Відповідь: $y = x\arcsin\frac{x}{2} -$ шуканий частинний розв’язок.

<u>*Завдання*</u> 5. Розв’язати рівняння $xy + y^2 = \left(2x^2 + xy\right) y'$.

Відповідь: $y = Cxe^{\frac{y}{x}}$.

3.2.5. ЛІНІЙНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ І ПОРЯДКУ

$[O_9]$ Лінійним диференціальним рівнянням першого порядку називається рівняння виду

$$y' + p(x)y = q(x) \tag{3.9}$$

де $p(x)$ і $q(x)$ – задані і неперервні на деякому проміжку (a,b) функції.

Термін „лінійне рівняння” зобумовлюється тим, що невідома функція y і її похідна y' входять до рівняння тільки в першому степені, тобто лінійно.

Розглянемо один із існуючих методів інтегрування рівняння (3.9)– метод Бернуллі, який полягає в тому, що розв’язок цього рівняння шукають у вигляді добутку

$$y = u \cdot v\,, \tag{3.10}$$

де $u = u(x)$ і $v = v(x)$ – невідомі функції від x, одна з яких знаходиться за нашим бажанням і не рівна тотожно нулю, а друга знаходиться в залежності від першої.

Диференціюючи (3.10), знаходимо $y' = u'v + uv'$ і підставляємо в рівняння (3.9), дістанемо:

$$u'v + uv' + p(x)uv = q(x) \tag{3.11}$$

Групуємо в лівій частині рівняння (3.11) третій доданок з першим або другим і виносимо спільний множник за дужки.

$$u'v + u(v' + p(x)v) = q(x) \tag{3.12}$$

Користуючись довільністю у виборі однієї із функцій, доберемо функцію v так, щоб

$$v' + p(x)v = 0\,. \tag{3.13}$$

Твердження (3.13) дозволяє знайти функцію v, так як являється диференціальним рівнянням відносно v, і звести рівняння (3.12) до більш простого рівняння

$$u'v = q\left(x\right) \tag{3.14}$$

Розв’яжемо систему рівнянь (3.13) і (3.14):

$$\begin{cases} v' + p(x)v = 0, \\ u'v = q(x). \end{cases}$$

З першого рівняння системи знаходимо v:

$$v' = -p(x)v \Rightarrow \frac{dv}{dx} = -p(x)v \Rightarrow \frac{dv}{v} = -p(x)dx \Rightarrow \ln|v| = -\int p(x)dx + C_1$$

$v = e^{-\int p(x)dx + C_1}$ - множина функцій.

Візьмемо одну довільну функцію, наприклад, при $C_1 = 0$, $v = e^{-\int p(x)dx}$ і, підставивши її в друге рівняння системи, одержимо:

$$u' e^{-\int p(x)dx} = q(x) \Rightarrow u' = q(x)e^{\int p(x)dx} \Rightarrow u = \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + C.$$

Підставляючи u і v в (3.10), знаходимо загальний розв'язок рівняння (3.9) $y = uv = \left(\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + C \right) e^{-\int p(x)dx}$.

Приклад 6. Розв'язати рівняння $y' + ytgx = x\cos x$.

Розв'язання:

Очевидно, задане рівняння має вигляд (3.9), є лінійним. Використаємо заміну (3.10) і матимемо систему $\begin{cases} y = uv, \\ u'v + uv' + uvtgx = x\cos x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = uv, \\ u'v + u(v' + vtgx) = x\cos x \end{cases}$.

Нехай v буде такою, що $v' + vtgx = 0$. Тоді $\frac{dv}{v} = -tgxdx$ і $\int \frac{dv}{v} = -\int tgxdx \Rightarrow \ln|v| = \ln|\cos x| \Rightarrow v = \cos x$. Підставимо v в систему: $\begin{cases} y = u\cos x, \\ u'\cos x + 0 = x\cos x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = u\cos x, \\ u' = x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = u\cos x, \\ u = \frac{x^2}{2} + C \end{cases} \Rightarrow$

$y = uv = (0,5x^2 + C)\cos x$ - загальний розв'язок.

Відповідь: $y = (0,5x^2 + C)\cos x -$ загальний розв'язок.

<u>*Завдання*</u> 6. Знайти загальний розв'язок рівняння $y' - x^2 y = e^{\frac{x^3}{3}} \cdot ctgx$

Відповідь: $e^{\frac{x^3}{3}}\left(\ln|\sin x| + C\right) -$ загальний розв'язок.

3.2.5. Диференціальні рівняння Бернуллі

$[O_{10}]$ Рівнянням Бернуллі називають рівняння виду

$$y'+p(x)y=q(x)y^{\alpha},\alpha\in R,\alpha\neq 0,\alpha\neq 1 \qquad (3.15)$$

Очевидно, при $\alpha=0$ рівняння (3.15) є лінійне, а при $\alpha=1$ є рівняння з відокремлюваними змінними.

Рівняння (3.15) заміною $z=y^{1-\alpha}$ можна звести до лінійного рівняння відносно z, розв'язавши яке, знаходимо z, тобто $y^{1-\alpha}$, а потім y.

Зручнішим методом являється метод Бернуллі, тобто заміна (3.10).

Зауваження: при $\alpha>0$ рівняння (3.15) крім розв'язку $y=uv\neq 0$ має розв'язок $y=0$.

Приклад 7. Розв'язати рівняння $y'+y=x\sqrt{y}$.

Розв'язання:

Задане рівняння має вигляд (3.15) при $\alpha=\dfrac{1}{2}$, а значить згідно $[O_{10}]$ є диференціальним рівнянням Бернуллі. Для розв'язання використаємо метод Бернуллі, за яким: $y=u(x)v(x)$,

$$y'=u'v+uv'\Rightarrow u'v+uv'+uv=x\sqrt{uv}\Rightarrow$$

$$u'v+u(v'+v)=x\sqrt{uv}\Rightarrow\begin{cases}v'+v=0,\\ u'v=x\sqrt{uv}.\end{cases}$$

Знайдемо v з першого рівняння системи:

$$v'+v=0\Rightarrow\frac{dv}{v}=-dx\Rightarrow\int\frac{dv}{v}=-\int dx\Rightarrow\ln|v|=-x\Rightarrow v=e^{-x}.$$

Підставимо v в друге рівняння системи і одержимо рівняння відносно u зі змінними, що розділяються. Розв'яжемо його:

$$u'e^{-x}=x\sqrt{u}e^{\frac{-x}{2}}\Rightarrow u^{-\frac{1}{2}}du=xe^{\frac{x}{2}}dx\Rightarrow\int u^{-\frac{1}{2}}du=\int xe^{\frac{x}{2}}dx\Rightarrow$$

$$2\sqrt{u}+2C=2e^{\frac{1}{2}x}(x-2)\Rightarrow u=(e^{\frac{1}{2}x}(x-2)+C)^2$$

Згідно підстановки $y = uv$ маємо $y = (e^{\frac{1}{2}x}(x-2)+C)^2 e^{-x} \Rightarrow$ $y = (x-2+Ce^{-\frac{x}{2}})^2 -$ шуканий загальний розв'язок.

Відповідь: $y = (x-2+Ce^{-\frac{x}{2}})^2 -$ загальний розвязок.

<u>*Завдання*</u> 7. Розв’язати рівняння: $y' + ytgx = y^{-1} \cdot \sin 2x$.

Відповідь: $y = \cos x \cdot \sqrt{2\ln\frac{C}{\cos x}}$.

3.3 ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ВИЩИХ ПОРЯДКІВ

3.3.1 Основні поняття та означення. Задача Коши.

Диференціальне рівняння $F(x,y,y',...,y^{(n)})=0$ при $n\geq 2$ називають диференціальним рівнянням вищого порядку.

$\left[O_{11}\right]$ Диференціальним рівнянням другого порядку називають рівняння виду

$$F\left(x,y,y',y''\right)=0\,. \tag{3.16}$$

У рівняння (3.16) обов'язково повинна входити похідна y'' і не обов'язково $-x,y,y'$.

$\left[O_{12}\right]$ Розв'язком рівняння (3.16) на інтервалі $\left(a,b\right)$ називається неперервна, двічі диференційована функція $y=\varphi(x)$, яка при підстановці у дане рівняння перетворює його в тотожність, тобто $\forall x\in(a;b)\Rightarrow F(x,\varphi(x),\varphi'(x),\varphi''(x))\equiv 0.$

Задача Коши: серед усіх розв'язків рівняння (3.16) знайти такий розв'язок $y=y(x)$, який при $x_0\in(a;b)$ задовольняє такі умови:

$$y(x_0)=y_0\,,\ y'(x_0)=y'_0, \tag{3.17}$$

Умови (3.17) називають початковими умовами.

Існування і єдиність розв'язку задачі Коши визначаються теоремою Коши.

<u>Теорема</u> 2. Якщо $y''=f\left(x,y,y'\right)$ і функція $f\left(x,y,y'\right)$ з її частинними похідними $\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial y'}$ неперервні в деякій відкритій області $G\in R_3$, то для всякої точки $(x_0,y_0,y_0^{'})\in G$ існує єдиний розв’язок $y = y(x)$ рівняння (3.16), який задовольняє початкові умови (3.17).

Єдиність розв’язку означає, що із всіх ліній, що проходять через точку $\left(x_0, y_0\right)$ тільки єдина має кутовий коефіцієнт $k = y'\left(x_0\right)$

Зрозуміло, що у загальному випадку для знаходження розв’язку рівняння (3.16) необхідно виконати два послідовних інтегрування, тому загальний розв’язок рівняння (3.16) має вигляд: $y = \varphi(x, C_1, C_2)$ - в явній формі і $\Phi(x, y, C_1, C_2) = 0$ - у неявній формі.

Алгоритм розв’язання задачі Коші для рівняння (3.16):

- знайти загальний розв’язок даного рівняння;
- із загального розв’язку виділити частинний розв’язок, який задовольняє задані початкові умови: підставимо їх у систему

$$\begin{cases} y = \varphi\left(x, C_1, C_2\right), \\ y' = \varphi'\left(x, C_1, C_2\right) \end{cases}$$

і одержимо

$$\begin{cases} y_0 = \varphi(x_0, C_1, C_2), \\ y_0' = \varphi'(x_0, C_1, C_2), \end{cases}$$

розв’язавши яку, знайдемо C_{10} і , C_{20};

- підставити в загальний розв'язок C_{10}, C_{20} замість C_1 і C_2 та записати $y = \varphi(x, C_{10}, C_{20}) -$ частинний розв’язок.

3.3.2 Диференціальні рівняння, що допускають зниження порядку.

Одним з методів розв’язування диференціальних рівнянь вищих порядків, і другого порядку зокрема, є метод зниження порядку – за допомогою відповідної заміни змінної дане диференціальне рівняння $n-$ го порядку зводиться до рівняння $(n-1)-$ го порядку.

Розглянемо два типи рівнянь, які допускають зниження порядку.

Перший тип – це рівняння виду $F(x, y', y'')=0$, яке не містить явно шуканої функції.

Виконавши заміну $y'=p(x)$, $y''=p'(x)$, зводимо дане рівняння до системи рівнянь $\begin{cases} y'=P(x) \\ F(x,p,p')=0 \end{cases}$. Розв’язуємо її і приходимо до рівняння $\Phi(x, y', C_1)=0$ - рівняння першого порядку.

Приклад 8. Розв'язати рівняння $xy''=y'$.

Розв'язання:

Очевидно, дане рівняння можна записати у вигляді $F(x,y',y'')=0$, тобто маємо рівняння I типу. Рекомендована заміна у цьому випадку: $y'=p(x)$, $y''=p'(x)$.

У результаті маємо систему $\begin{cases} xp'=p(x) \\ p(x)=y' \end{cases}$.

Перше рівняння системи – рівняння зі змінними, що розділяється, і розв’язується так:

$$xp'=p \Rightarrow p'=\frac{p}{x}(x\neq 0) \Rightarrow \frac{dp}{dx}=\frac{p}{x} \Rightarrow \frac{dp}{p}=\frac{dx}{x}, p\neq 0 \Rightarrow$$

$$\ln|p| = \ln|x| + \ln|C_1| \Rightarrow p = C_1 x \Rightarrow \begin{cases} p(x) = C_1 x \\ p(x) = y' \end{cases} \Rightarrow y' = C_1 x \Rightarrow$$

$$y = \int C_1 x dx \Rightarrow y = C_1 \frac{x^2}{2} + C_2 .$$

Із умови $p = 0 \Rightarrow y' = 0 \Rightarrow y = C -$ тривіальний розв'язок.

Відповідь: $y = C_1 \frac{x^2}{2} + C_2 -$ загальний розв'язок.

<u>*Завдання*</u> 8. Розв'язати рівняння: $xy'' = 2y' - 3$.

Відповідь: $y = C_1 \frac{x^3}{6} + \frac{3}{2} x + C_2$.

Другий тип – це рівняння виду $F\left(y, y', y''\right) = 0$, яке не містить явно аргументу x.

Виконавши заміну $y' = p\left(y\right)$, $y''_{x^2} = p'_y p$ зводимо дане рівняння до рівняння першого порядку $F\left(y, p, p'p\right) = 0$ та розв'язуємо систему

$$\begin{cases} y' = p(y) \\ F(x, p, p'p) = 0 \end{cases}.$$

Приклад 9. Знайти розв'язок рівняння $y'' = 2yy'$, який задовольняє умові $y\left(0\right) = y'\left(0\right) = 1$.

Розв'язання:

Очевидно, дане рівняння можна записати у вигляді $F(y, y', y'') = 0$, тобто маємо рівняння II типу.

Заміна: $y' = p\left(y\right),\ y'' = p'_y p \Rightarrow \begin{cases} p'p = 2yp \\ p(y) = y' \end{cases}.$

Перше рівняння системи – рівняння зі змінними, що розділяються та розв'язується так: $p(p'-2y)=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} p=0, \\ p'-2y=0. \end{array}\right.$

Розв'язок першого рівняння тривіальний: $p=0,\ y'=0 \Rightarrow y=C$ і не задовольняє початковим умовам. З другого рівняння слідує, що $p'=2y, \dfrac{dp}{dy}=2y, dp=2ydy, \Rightarrow p(y)=y^2+C_1$. Повернемося до системи $\begin{cases} p(y)=y^2+C_1 \\ p(y)=y' \end{cases} \Rightarrow y'=y^2+C_1$. Враховуючи те, що $y(0)=y'(0)=1$, маємо $1=1+C_1 \Rightarrow C_1=0$. Тоді $y'=y^2 \Rightarrow$ $\dfrac{dy}{dx}=y^2 \Rightarrow \dfrac{dy}{y^2}=dx(y\neq 0) \Rightarrow -\dfrac{1}{y}=x+C_2 \Rightarrow y=-\dfrac{1}{x+C_2}$.

Враховуємо початкову умову $y(0)=1$: $1=-\dfrac{1}{0+C_2} \Rightarrow C_2=-1$,

$y=-\dfrac{1}{x-1}-$ шуканий частинний розв'язок.

Відповідь: $y=-\dfrac{1}{x-1}$.

<u>*Завдання*</u> 9: Знайти загальний розв'язок рівняння: $yy'=2y''$.

Відповідь: $\dfrac{2}{C_1} arctg \dfrac{y}{C_1}=x+C_2$.

3.3.3 Лінійні однорідні диференціальні рівняння другого порядку.

$\left[O_{13}\right]$ Лінійним однорідним диференціальним рівнянням другого порядку називається рівняння виду

$$y'' + p(x)\,y' + q(x)\,y = 0. \qquad (3.18)$$

Очевидно, функція $y=0$ являється його тривіальним розв'язком. Розглянемо теореми, які є підґрунтям для знаходження нетривіального розв'язку.

Теорема 3. Якщо функції $y_1(x), y_2(x)$ – розв'язки рівняння (3.18), то його розв'язком являється також функція

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x), \qquad (3.19)$$

де $C_1, C_2 -$ довільні сталі.

Доведення.

Підставимо функцію (3.19) в рівняння (3.18):

$$C_1 y_1'' + C_2 y_2'' + p(x)\left(C_1 y_1' + C_2 y_2'\right) + q(x)\left(C_1 y_1 + C_2 y_2\right) = 0 \Rightarrow$$

$$C_1\left(y_1'' + p(x)\,y_1' + q(x)\,y_1'\right) + C_2\left(y_2'' + p(x)\,y_2' + q(x)\,y_2'\right) = 0 \Rightarrow 0 \equiv 0,$$

так як вирази в дужках тотожно дорівнюють нулю, бо $y_1(x), y_2(x)$ – розв'язки за умовою. Отже, функція (3.19) є розв'язком рівняння (3.18).

Для того щоб функція (3.19) була загальним розв'язком рівняння (3.18) необхідно і достатньо, щоб вона перетворювала його в тотожність, і при заданих початкових умовах з неї можна було виділити єдиний частинний розв'язок. Для з'ясування того, якими при цьому мають бути функції $y_1(x)$, $y_2(x)$, розглянемо лінійну залежність та незалежність двох функцій.

$[O_{14}]$ Функції $y_1(x), y_2(x)$ називаються лінійно залежними на(a,b), якщо

$$\frac{y_2(x)}{y_1(x)} = \lambda - const$$

Так, функції $y_1(x) = 2\sin x$ $y_2(x) = 3\sin x$ згідно $[O_{14}]$ лінійно залежні, так як

$$\frac{y_2(x)}{y_1(x)} = \frac{3\sin x}{2\sin x} = \frac{3}{2} - const$$

$[O_{15}]$ Функції $y_1(x), y_2(x)$ називаються лінійно незалежними на(a,b), якщо відношення $\dfrac{y_2(x)}{y_1(x)}$ не являється сталою величиною.

Так функції $y_1 = e^{3x}, y_2 = e^{5x}$ лінійно незалежні, бо $\dfrac{y_2(x)}{y_1(x)} = \dfrac{e^{5x}}{e^{3x}} = e^{2x} \neq const$.

Перевірку на лінійну залежність чи незалежність можна виконати за допомогою визначника Вронського.

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}. \tag{3.20}$$

Переконаємося, що $W(x) = 0$ коли $y_1(x), y_2(x)$ диференційовані і лінійно залежні на (a,b) функції.

За умовою $\dfrac{y_2}{y_1} = \lambda \Rightarrow y_2 = \lambda y_1, y_2' = \lambda y_1'$. Обчислимо (3.20):

$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & \lambda y_1 \\ y_1' & \lambda y_1' \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} y_1 & y_1 \\ y_1' & y_1' \end{vmatrix} = 0$, так як має два однакові стовпці.

У випадку, коли $y_1(x), y_2(x)$ диференційовані і лінійно незалежні на $(a;b)$ $W(x) \neq 0$ при $x \in (a,b)$.

<u>Теорема</u> 4. *(Про структуру загального розв'язку однорідного рівняння).*

Якщо функції $y_1(x), y_2(x) -$ два лінійно незалежних на проміжку $(a;b)$ розв'язки рівняння (3.18), то множина функцій $y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$ є його загальним розв'язком.

Те, що (3.19) являється розв'язком, доведено (теорема 3). Покажемо, що з множини функцій (3.19) можна виділити єдиний частинний розв'язок, який задовольняє заданим початковим умовам

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_0', \tag{3.21}$$

де $x_0 \in (a;b)$.

Підставимо умови (3.21) в рівність (3.19) і в рівність $y' = C_1 y_1'(x) + C_2 y_2'(x)$, яку одержимо, продиференціювавши рівність (3.19), та запишемо систему лінійних рівнянь відносно C_1, C_2:

$$\begin{cases} C_1 y_1(x_0) + C_2 y_2(x_0) = y_0, \\ C_1 y_1'(x_0) + C_2 y_2'(x_0) = y_0'. \end{cases} \tag{3.22}$$

Визначник системи (3.22) $W\left(x\right)=\begin{vmatrix} y_1\left(x_0\right) & y_2\left(x_0\right) \\ y_1'\left(x_0\right) & y_2'\left(x_0\right)\end{vmatrix}\neq 0$, так як згідно умови функції $y_1\left(x\right), y_2\left(x\right)$ лінійно незалежні. Отже, система (3.22) має єдиний розв'язок, тобто знаходимо єдину пару C_{10} і C_{20}, а значить єдиний частинний розв'язок.

Функції $y_1\left(x\right), y_2\left(x\right)$, що задовольняють умові теореми 4, утворюють, так звану, фундаментальну систему розв'язків

Приклад 10. Переконатися, що функції $y_1=e^x$ і $y_2=e^{-2x}$ задовольняють рівняння $y''+y'-2y=0$, та сконструювати його загальний розв'язок.

Розв'язання:

Підставимо y_1, y_1', y_1'' в задане рівняння, одержимо $e^x+e^x-2e^x=0\Rightarrow 0\equiv 0\Rightarrow y_1=e^x-$розв'язок. Аналогічно підставимо y_2, y_2', y_2'' в дане рівняння, одержимо $4e^{-2x}-2e^{-2x}-2e^{-2x}=0\Rightarrow 0\equiv 0\Rightarrow y_2=e^{-2x}-$розв'язок. Крім того, $y_1\left(x\right), y_2\left(x\right)$ лінійно незалежні. Отже, множина функцій $y=C_1e^x+C_2e^{-2x}$ – загальний розв'язок даного рівняння.

<u>*Завдання*</u> 10. Переконатися, що функції $y_1=e^{-2x}$ *і* $y_2=e^{3x}$ задовольняють рівняння $y''-y'-6y=0$, та сконструювати його загальний розв'іязок.

3.3.4. Лінійні однорідні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами.

Розглянемо вільні затухаючі коливання (Рис. 1.)

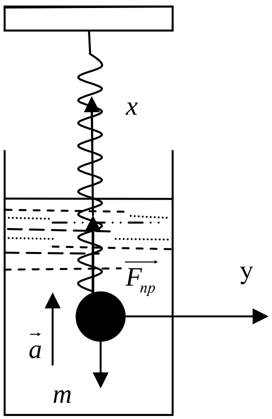


Рис. 1.

Підвісимо кульку масою m та занурімо її в рідину. На кульку діють сила пружності та сила тертя.

Рівняння рівноваги системи відоме:

$$F_{пр} - F_{тер} = ma$$

де $F_{пр} = -kx$, $F_{тер} = \tau x'$.

$$-kx - \tau x' = mx''$$

$$x'' + \frac{\tau}{m}x' + \frac{k}{m}x = 0$$

$x'' + 2\beta x' + \omega_0^2 x = 0 -$ модель розглянутого процесу є лінійним однорідним диференціальним рівнянням другого порядку зі сталими коефіцієнтами.

$\left[O_{16}\right]$ Рівняння виду

$$y'' + py' + qy = 0 \tag{3.23}$$

де $p, q \neq 0 - const$, називається лінійним однорідним диференціальним рівнянням другого порядку зі сталими коефіцієнтами.

Ейлером було запропоновано шукати розв'язок рівняння (3.23) у вигляді $y = e^{kx}$. Знайдемо значення k, при якому б функція $y = e^{kx}$ задовольняла рівняння (3.23). Підставимо $y = e^{kx}$, $y' = ke^{kx}$ та $y'' = k^2e^{kx}$ у рівняння (3.23), отримаємо $e^{kx}\left(k^2 + pk + q\right) = 0$, звідки

$$k^2 + pk + q = 0. \tag{3.24}$$

Рівняння (3.24) називають характеристичним для (3.23). Можливі три випадки розв'язання (3,24):

$$1)\quad D>0,\, k_1 \neq k_2,$$
$$2)\quad D=0,\, k_1 = k_2 = k, \qquad (3.25)$$
$$3)\quad D<0,\, k_{1,2} = \alpha \pm \beta i,$$

де $D-$ дискримінант характеристичного рівняння, а $k_{1,2}-$його корені.

Відповідні три випадки запису загальних розв'язків (3.23):

$$1)\quad y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x},$$
$$2)\quad y = e^{kx}\left(C_1 + C_2 x\right), \qquad (3.26)$$
$$3)\quad y = e^{\alpha x}\left(C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x\right).$$

Приклад 11 Розв'язати рівняння $y'' - y' - 2y = 0$.

Розв'язання:

Нам дано лінійне однорідне диференціальне рівняння зі сталими коефіцієнтами, характеристичне рівняння якого $k^2 - k - 2 = 0$. Його корені: $k_1 = -1, k_2 = 2 \Rightarrow y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x}$.

Відповідь: $y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{3x}$ – шуканий загальний розв'язок.

Приклад 12 Розв'язати рівняння $y'' - 10y' + 25y = 0$.

Розв'язання:

Характеристичне рівняння, $k^2 - 10k + 25 = 0 \Rightarrow (k-5)^2 = 0$, $k_{1,2} = 5 \Rightarrow y = e^{5x}(C_1 + C_2 x)$.

Відповідь: $y = e^{5x}(C_1 + C_2 x)$ – шуканий загальний розв'язок.

Приклад 13 Розв'язати рівняння $y'' - 4y' + 13y = 0$.

Розв'язання:

Характеристичне рівняння: $k^2 - 4k + 13 = 0$. Його дискримінант $D = b^2 - 4ac \Rightarrow D = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 13 = 16 - 52 = -36 = (6i)^2 < 0 \Rightarrow$ $k_{1,2} = 2 \pm 3i \Rightarrow \alpha = 2, \beta = 3$. Отже, $y = e^{2x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x)$.

Відповідь: $y = e^{2x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x)$ – загальний розв'язок.

Завдання 11. Розв'язати рівняння:

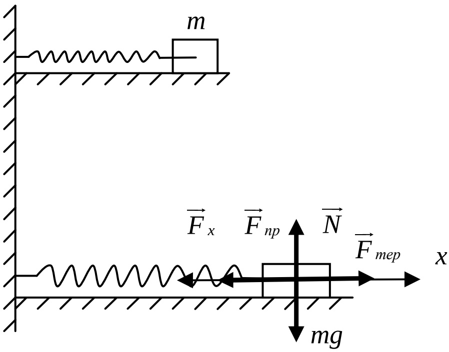
$a)$ $y'' - 2y' - 3y = 0.$ Відповідь: $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x}$

$b)$ $y'' - 6y' + 9y = 0.$ Відповідь: $y = e^{3x}(C_1 + C_2 x)$

$c)$ $y'' + 4y = 0.$ Відповідь: $y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$

3.3.5 Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами.

Розглянемо вимушені механічні коливання (Рис. 2.)



(Рис. 2.)

На тіло маси m діють сила пружності $F_{пр} = -kx$, сила тертя $F_{тер} = \tau x'$, де $x = x(t)$ – зміщення тіла в залежності від часу, $x' = x'(t)$ – швидкість зміщення, та сила $F_x = F_0 \cos(\omega t)$ – зовнішня періодична сила, що змінюється за гармонічним законом. Тоді рівняння рівноваги запишеться:

$$F_{пр} + F_x - F_{тер} = ma$$

$$-kx + F_0 \cos(\omega t) - \tau x' = mx''$$

$$mx'' + \tau x' + kx = F_0 \cos(\omega t)$$

$x'' + \dfrac{\tau}{m} x' + \dfrac{k}{m} x = \dfrac{F_0}{m} \cos(\omega t)$ – модель розглянутого процесу є лінійним неоднорідним диференціальним рівнянням другого порядку

$[O_{17}]$ Лінійним неоднорідним диференціальним рівнянням другого порядку зі сталими коефіцієнтами називається диференціальне рівняння виду

$$y'' + py' + qy = f(x), \tag{3.27}$$

де $p, q - const$, а $f(x) \not\equiv 0$ - дана функція.

Загальний розв'язок рівняння (3.27) можна знайти методом Лагранжа (методом варіації довільних сталих), тобто у вигляді:

$$y = C_1(x)\cdot y_1 + C_2(x)\cdot y_2 \qquad (3.28),$$

де $C_1(x), C_2(x) -$ функції, що задовольняють систему

$$\begin{cases} C_1' y_1 + C_2' y_2 = 0, \\ C_1' y_1' + C_2' y_2' = f(x), \end{cases} \qquad (3.29)$$

яку отримаємо підставляючи (3.28) в (3.27) та роблячи певні домовленості.

Розв'язавши (3.29), одержимо:

$$C_1(x) = \int \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ f(x) & y_2' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}} dx, \quad C_2(x) = \int \frac{\begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y' & f(x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}} dx \quad (3.30)$$

Алгоритм розв'язання лінійних неоднорідних рівнянь методом Лагранжа:

- знаходимо загальний розв'язок лінійного однорідного рівняння $y'' + py' + qy = 0$ відповідного даному неоднорідному у вигляді $y = C_1y_1 + C_2y_2 (C_1, C_2 - const)$;
- знаходимо $C_1(x)$ і $C_2(x)$ за формулами (3.30);
- записуємо загальний розв'язок даного рівняння (3.28).

Приклад 14. Розв'язати методом Лагранжа рівняння:

$$y'' - 7y' + 12y = e^x.$$

Розв'язання: $y'' - 7y' + 12y = 0$ - лінійне однорідне рівняння зі сталими коефіцієнтами, відповідне даному лінійному неоднорідному рівнянню. $k^2 - 7k + 12 = 0$ - його характеристичне рівняння, що має корені $x_1 = 3, \quad x_2 = 4$.

Загальний розв'язок лінійного однорідного рівняння:

$$y_{зо} = C_1 e^{3x} + C_2 e^{4x} \quad (C_1, C_2 - const).$$

Маємо фундаментальну систему розв'язків $y_1 = e^{3x}$, $y_2 = e^{4x}$. Знаходимо $C_1(x)$ і $C_2(x)$ за формулами (3.31):

$$W = \begin{vmatrix} e^{3x} & e^{4x} \\ 3e^{3x} & 4e^{4x} \end{vmatrix} = 4e^{7x} - 3e^{7x} = e^{7x} \neq 0,$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ f(x) & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & e^{4x} \\ e^{x} & 4e^{4x} \end{vmatrix} = -e^{5x}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & f(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{3x} & 0 \\ 3e^{3x} & e^{x} \end{vmatrix} = e^{4x},$$

$$C_1(x) = \int \frac{\Delta_1 dx}{W} = \int \frac{-e^{5x} dx}{e^{7x}} = -\int e^{-2x} dx = \frac{1}{2} e^{-2x} + C_1,$$

$$C_2(x) = \int \frac{\Delta_2 dx}{W} = \int \frac{e^{4x} dx}{e^{7x}} = \int e^{-3x} dx = -\frac{1}{3} e^{-3x} + C_2 .$$

Загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння зі сталими коефіцієнтами:

$$y_{зо} = (\frac{1}{2} e^{-2x} + C_1) e^{3x} + (-\frac{1}{3} e^{-3x} + C_2) e^{4x} \Rightarrow$$

$$y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{4x} + \frac{1}{2} e^{x} - \frac{1}{3} e^{x} \Rightarrow$$

$$y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{4x} + \frac{1}{6} e^{x}.$$

Як бачимо, загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння зі сталими коефіцієнтами містить функцію $y_{зо}$ і функцію $\varphi(x) = \frac{1}{6} e^{x}$. Чи не являється вона частинним розв'язком даного рівняння? Перевіримо:

$$12\left|\varphi(x)=\frac{1}{6}e^x\right.$$

$$-7\left|\varphi'(x)=\frac{1}{6}e^x \Rightarrow 2e^x-\frac{7}{6}e^x+\frac{1}{6}e^x=e^x\Rightarrow e^x\Rightarrow e^x.\right.$$

$$1\left|\varphi''(x)=\frac{1}{6}e^x\right.$$

Як бачимо, функція $\varphi(x)=\frac{1}{6}e^x$ - частинний розв’язок даного неоднорідного рівняння.

Гіпотеза: загальний розв’язок лінійного неоднорідного рівняння зі сталими коефіцієнтами

$$y=y_{зо}+y_{чн} \tag{3.31}$$

де $y_{зо}-$ загальний розв’язок лінійного однорідного рівняння зі сталими коефіцієнтами, відповідного даному лінійному неоднорідному рівнянню зі сталими коефіцієнтами;

$y_{чн}-$ частинний розв’язок даного лінійного неоднорідного рівняння зі сталими коефіцієнтами.

Дійсно підставивши (3.31) в (3.27), одержимо

$$y''_{зо}+y''_{чн}+p\left(y'_{зо}+y'_{чн}\right)+q\left(y'_{зо}+y'_{чн}\right)\equiv f(x)\Rightarrow$$

$$\left(y''_{зо}+py'_{зо}+qy_{зо}\right)+y''_{чн}+py'_{чн}+qy_{чн}\equiv f(x)$$

Згідно означення розв’язку диференціального рівняння перший доданок дорівнює нулю, другий - $f(x)$. Отже, маємо тотжність, що підтверджує структуру загального розв’язку рівняння (3.27) у вигляді (3.31).

Приклад 15 Розв'язати рівняння $y''+y=tgx$.

Розв'язання:

Знайдемо $y_{зо}=C_1y_1+C_2y_2$: $y''+y=0-$ лінійне однорідне рівняння відповідне даному, $k^2+1=0-$його характеристичне рівняння, $k_{1,2}=\pm i-$корені. Шуканий загальний розв'язок $y_{зо}=C_1\cos x+C_2\sin x$, де $C_1,C_2-const$, .

Знайдемо $y = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2$, використовуючи метод Лагранжа. Складемо систему (3.30)

$$\begin{cases} C_1' \cos x + C_2' \sin x = 0, \\ C_1'(-\sin x) + C_2' \cos x = tgx, \end{cases}$$

та застосуємо формули (3.31).

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = 1 \neq 0,$$

$$\begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ f(x) & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \sin x \\ tgx & \cos x \end{vmatrix} = -\frac{\sin^2 x}{\cos x}, \quad \begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & f(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos x & 0 \\ -\sin x & tgx \end{vmatrix} = \sin x;$$

$$C_1(x) = -\int \frac{\sin^2 x}{\cos x} dx = \int \left(\cos x - \frac{1}{\cos x} \right) dx = \sin x - \ln\left| tg\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + C_1$$

$$C_2(x) = \int \sin x dx = -\cos x + C_2.$$

Отже, загальний розв’язок

$$y_{чн} = \left(\sin x - \ln\left| tg\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + C_1 \right) \cos x + (C_2 - \cos x)\sin x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \left(\sin x - \ln\left| tg\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| \right) \cos x + (-\cos x)\sin x$$

Пропонуємо самостійно переконатися, що функція

$$\varphi(x) = \left(\sin x - \ln\left| tg\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| \right) \cos x + (-\cos x)\sin x$$

є частинним розв’язком даного рівняння.

Коли права частина має спеціальний вид, тобто

$$f(x) = e^{\alpha x}\left(P_k(x)\cos \beta x + Q_k(x)\sin \beta x \right), \tag{3.32}$$

де $P_k(x), Q_k(x) -$ многочлени $k -$ ої степені відповідно, то доцільно користуватися методом підбору.

У цьому випадку $y_{чн}$ знаходиться у вигляді

$$y_{чн} = x^r e^{\alpha x}\left(U_k(x)\cos \beta x + V_k(x)\sin \beta x \right) \tag{3.33}$$

де $r-$ кількість коренів характеристичного рівняння рівних $\alpha+\beta i$, а $U_k(x), V_k(x)-$ многочлени з невизначеними коефіцієнтами того ж степеня, що й $P_k(x), Q_k(x)$ відповідно.

Розглянемо окремі види $f(x)$.

Якщо $f(x)=a_k x^k+\ldots+a_1 x+a_0-$ деякий многочлен, тобто в (3.32) відсутні тригонометричні та показникова функції, $(\alpha=0, \beta=0)$, то $y_{чн}=x^r U_k(x)$, де $U_k(x)=A_k x^k+\ldots+A_1 x+A_0-$ многочлен з невизначеними коефіцієнтами того ж степеня, що й $P_k(x)$, а $r-$ кількість коренів характеристичного рівняння рівних нулю.

Якщо $f(x)=ae^{\alpha x}$, $(\beta=0, U_k(x)-const)$, то $y_{чн}=Ax^r e^{\alpha x}$, де $r-$ кількість коренів характеристичного рівняння рівних α, а $A-$ невизначений коефіцієнт.

Якщо $f(x)=a\cos\beta x+b\sin\beta x$, $(\alpha=0, U_k(x), V_s(x)-const)$, то $y_{чн}=x^r(A\cos\beta x+B\sin\beta x)$, де $r-$ кількість коренів характеристичного рівняння рівних βi, $A, B-$ невизначені коефіцієнти.

У кожному із розглянутих випадків невизначені коефіцієнти знаходимо, виходячи з означення розв'язку диференціального рівняння. А саме: підставимо $y_{чн}$ відповідної конструкції в дане рівняння, одержимо тотожність і використаємо означення тотожності або теорему про тотожну рівність многочленів.

Приклад 16. Знайти загальний розв’язок рівняння

$$y''-y'-6y=5e^{3x}.$$

Розв'язання: Відомо, що загальний розв’язок $y=y_{зо}+y_{чн}$.

Знайдемо $y_{зо}$. Відповідне лінійне однорідне рівняння $y''-y'-6y=0$. Його характеристичне рівняння $k^2-k-6=0$ має корені $k_1=-2, k_2=3 \Rightarrow y_{зо}=C_1e^{-2x}+C_2e^{3x}$.

Знайдемо $y_{чн}$. Оскільки права частина є функцією спеціального виду $f(x)=ae^{\alpha x}$, тоді $y_{чн}=Ax^r e^{\alpha x}$. Так як $\alpha=3, \beta=0$ і $r=1$

($\alpha = 3$ є коренем характеристичного рівняння один раз), то $y_{чн} = Axe^{3x}$. A знайдемо в результаті підстановки сконструйованого $y_{чн}$ у задане рівняння:

$y_{чн} = Axe^{3x}$, $y'_{чн} = Ae^{3x}(1+3x)$, $y''_{чн} = Ae^{3x}(6+9x)$.

$y''_{чн} - y'_{чн} - 6y_{чн} = 5e^{3x} \Rightarrow Ae^{3x}(6+9x) - Ae^{3x}(1+3x) - 6xe^{3x} = 5e^{3x}$.

Розкриємо дужки та зведемо подібні

$Ae^{3x}\left(6+9x-1-3x-6x\right) = 5e^{3x} \Rightarrow Ae^{3x}5 = 5e^{3x} \Rightarrow A=1$.

Отже, $y_{чн} = xe^{3x}$, а $y = y_{зо} + y_{чн} = C_1e^{-2x} + C_2e^{3x} + xe^{3x}$ − шуканий загальний розв'язок.

Відповідь: $y = C_1e^{3x} + C_2e^{-2x} + xe^{3x}$.

Завдання 12. Розв'язати рівняння методом підбору $y'' - y' = 3\cos 2x$.

Відповідь: $y = C_1 + C_2e^{x} - \dfrac{3}{5}\cos 2x - \dfrac{3}{10}\sin 2x$.

3.4 Системи диференціальних рівнянь.

$[O_{18}]$ Однорідною системою лінійних диференціальних рівнянь із сталими коефіцієнтами називається система виду

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \\ .... \\ \dfrac{dx_n}{dt} = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n \end{cases} \qquad (3.34)$$

де $x_i = x_i(t)$ - невідомі функції, $a_{ij} -$ сталі коєфіцієнти $i, j = \overline{1, n}$, $n -$ порядок системи.

$[O_{19}]$ Розв'язком системи диференціальних рівнянь називають набір функцій, що задовольняє кожному рівнянню системи, тобто перетворює кожне рівняння системи в тотожність.

$[O_{20}]$ Загальним розв'язком нормальної системи лінійних диференціальних рівнянь називають розв'язок, що містить довільні сталі, кількість яких дорівнює порядку системи.

$[O_{21}]$ Частинним розв'язком системи лінійних диференціальних рівнянь називається розв'язок, отриманий із загального за даних початкових умов:

$$x_1(t_0) = x_{10}, ..., x_n(t_0) = x_{n0}.$$

Розглянемо два способи розв'язання системи (3.34): метод виключення та матричний метод.

Метод виключення полягає у зведенні даної системи до системи лінійних однорідних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами n порядку.

Алгоритм застосування методу виключення стосовно нормальної системи другого порядку:

– виразити з одного із рівнянь одну невідому функцію через іншу;
– підставити одержаний вираз у інше рівняння – одержимо лінійне диференціальне рівняння другого порядку;
– розв'язати одержане лінійне диференціальне рівняння – отримати одну з невідомих функцій;

– підставити одержаний розв'язок у вираз, яким визначається друга невідома функція;
– зробити перевірку отриманих результатів;
– записати відповідь.

Приклад 17 . Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} x_t' = 2x - y \\ y_t' = -6x + y \end{cases}$ методом виключення.

Розв'язання:

Виразимо з першого рівняння невідому функцію $y(t)$ та підставимо її в друге рівняння, $\begin{cases} y = 2x - x' \\ (2x - x')' = -6x + 2x - x' \end{cases} \Rightarrow$

$$\begin{cases} y = 2x - x' \\ 2x' - x'' = -6x + 2x - x' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2x - x' \\ x'' - 3x' - 4x = 0 \end{cases}.$$

Розв'яжемо лінійне однорідне диференціальне рівняння другого порядку $x'' - 3x' - 4x = 0$ відносно функції $x(t)$:

його характеристичне рівняння $k^2 - 3k - 4 = 0$ має корені $k_1 = -1,\ k_2 = 4$. Згідно (3.26) $x(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{4t}$. У результаті система прийме вигляд $\begin{cases} y(t) = 2x - x' \\ x(t) = c_1 e^{4t} + c_2 e^{-t} \end{cases}$. Виконуючи підстановку знайденої функції $x(t)$ в перше рівняння, отримаємо

$$y(t) = 2\left(C_1 e^{-t} + C_2 e^{4t}\right) - \left(C_1 e^{-t} + C_2 e^{4t}\right)' = 3C_1 e^{-t} - 2C_2 e^{4t}.$$

Відповідь: $\begin{cases} x(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{4t} \\ y(t) = 3C_1 e^{-t} - 2C_2 e^{4t} \end{cases}$.

Зазначимо, що розв'язок будь–якої системи можна перевірити шляхом безпосередньої підстановки отриманих результатів у задану систему. При цьому знайдений розв'язок повинен кожне рівняння системи перетворювати в тотожність.

Приклад 18 Для системи з *прикладу* 17 знайти частинний розв'язок,

що задовольняє умовам $\begin{cases} x(0) = 3, \\ y(0) = -1. \end{cases}$

Розв'язання:

Враховуючи загальний розв'язок системи і початкові умови, складемо систему з невідомими C_1, C_2:

$$\begin{cases} 3 = C_1 e^{-0} + C_2 e^{4\cdot 0} \\ -1 = 3C_1 e^{-0} - 2C_2 e^{4\cdot 0} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3 = C_1 + C_2 \\ -1 = 3C_1 - 2C_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 1, \\ C_2 = 2. \end{cases}.$$

Відповідь: $\begin{cases} x(t) = e^{-t} + 2e^{4t} \\ y(t) = 3e^{-t} - 4e^{4t} \end{cases}$ частинний розв'язок системи.

$[O_{22}]$ Система виду

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n + f_1(t) \\ .... \\ \dfrac{dx_n}{dt} = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n + f_2(t) \end{cases} \qquad (3.35)$$

де $a_{ij} - const$, $x_j(t) -$ невідомі функції, $f_i(t) -$ задані функції тотожно не рівні нулю, називається неоднорідною системою лінійних диференціальних рівнянь із сталими коефіцієнтами.

Систему (3.35) можна теж розв’язати методом виключення.

Розглянемо матричний метод розв’язання системи однорідних рівнянь. Систему (3.34) можна записати у матричній формі:

$$X' = AX\ , \qquad (3.36)$$

де $A = \begin{pmatrix} a_{11} & . & a_{1n} \\ . & . & . \\ a_{1n} & . & a_{nn} \end{pmatrix} -$ матриця коефіцієнтів,

$X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ . \\ x_n(t) \end{pmatrix}, X'(t) = \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ . \\ x_n'(t) \end{pmatrix} -$ матриці–стовпці невідомих функцій та похідних відповідно.

Очевидно, (3.36) є рівнянням зі змінними, що розділяються. Загальний розв'язок його знаходимо у вигляді

$$X(t) = X_1 C_1 e^{k_1 t} + X_2 C_2 e^{k_2 t} + \ldots + X_n C_n e^{k_n t}, \qquad (3.37)$$

де $k_i -$ власні значення матриці A, які є коренями характеристичного рівняння $\det(A - kE) = 0$ $i = \overline{1, n}$;

$X_i -$ власні вектори матриці A, що отримані з рівняння $(A - k_i E) X_i = 0$, $X_i \neq \overline{0}$, $i = \overline{1, n}$.

Приклад 19. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} x' = 2x - y \\ y' = -6x + y \end{cases}$ матричним методом.

Розв'язання:

Запишемо дану систему у вигляді (3.36)

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -6 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}.$$

Знайдемо власні значення $k_{1,2}$ матриці A із характеристичного рівняння $\det(A - kE) = 0$:

$$\det\left(\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -6 & 1 \end{pmatrix} - k \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 2-k & -1 \\ -6 & 1-k \end{vmatrix} = 0.$$

Розкривши визначник, отримаємо $k^2 - 3k - 4 = 0 \Rightarrow$ корені $k_1 = -1,\ k_2 = 4 -$ власні значення матриці A.

Власні вектори $X_i = \begin{pmatrix} \alpha_i \\ \beta_i \end{pmatrix}$ отримаємо із системи $(A - k_i E) X_i = 0$ $i = \overline{1, 2}$. Знайдемо перший власний вектор X_1, який відповідає першому власному значенню $k_1 = -1$

$$\begin{pmatrix} 2+1 & -1 \\ -6 & 1+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} 3\alpha_1 - \beta_1 = 0 \\ -6\alpha_1 + 2\beta_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \beta_1 = 3\alpha_1.$$ Нехай $\alpha_1 = 1$,

тоді $\beta_1 = 3$ і $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$. Власний вектор X_2 для $k_2 = 4$ знайдемо аналогічно:

$$\begin{pmatrix} 2-4 & -1 \\ -6 & 1-4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} -2\alpha_2 - \beta_2 = 0 \\ -6\alpha_2 - 3\beta_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \beta_2 = -2\alpha_2 .$$

Нехай $\alpha_2 = 1$, тоді $\beta_2 = -2$ і $X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$. Згідно (3.38) загальний розв'язок системи можна записати так:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = X_1 C_1 e^{k_1 t} + X_2 C_2 e^{k_2 t} .$$

Враховуючи власні значення та власні вектори маємо

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} C_1 e^{-t} + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} C_2 e^{4t} \Rightarrow \begin{cases} x(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{4t}, \\ y(t) = 3C_1 e^{-t} - 2C_2 e^{4t}. \end{cases}$$

Відповідь: $\begin{cases} x(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{4t} \\ y(t) = 3C_1 e^{-t} - 2C_2 e^{4t} \end{cases}$ шуканий загальний розв'язок.

Завдання 13. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} x' = 7x + 3y \\ y' = 6x + 4y \end{cases}$.

Відповідь: $\begin{cases} x(t) = C_1 e^{t} + C_2 e^{10t}, \\ y(t) = -2C_1 e^{t} + C_2 e^{10t}. \end{cases}$

Варто відмітити, що застосування матричного методу являється зручним у випадку дійсних нерівних коренів характеристичного рівняння.

3.4 ПОБУДОВА МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ ТА РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ ПРАКТИЧНОГО ЗМІСТУ

Розв'язання задач практичного змісту з різних областей діяльності людини (механічної, фізичної, хімічної, економічної чи технічної) приводить до побудови математичної моделі у вигляді диференціального рівняння чи системи диференціальних рівнянь. Складання диференціального рівняння полягає у визначенні математичної залежності між змінними величинами та їх приростами.

Є випадки, коли диференціальні рівняння можуть бути отримані без розгляду приросту - за рахунок їх попереднього урахування.

Наприклад, швидкість можна представити виразом $v(t) = \frac{ds}{dt}$, не використовуємо $\Delta s, \Delta t$, бо вони враховані, тому що $v(t) = \frac{ds}{dt} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$. Прискорення в довільний час t виражається залежністю $a(t) = \frac{d^2 s}{d^2 t} = \frac{dv}{dt}$ і знову $\Delta v, \Delta t$ враховані.

Складанню диференціального рівняння передує глибоке вивчення процесу, що зводиться:

- до визначення його окремих моментів;
- установлення загального закону його протікання.

Окремий момент процесу, так званий елементарний процес, виражається рівнянням, що зв'язує змінні величини процесу з їхніми диференціалами або похідними–диференціальним рівнянням. Закон загального протікання процесу виражається рівнянням, що пов'язує змінні величини процесу, але вже без диференціалів цих величин.

Загальних правил, для складання диференціальних рівнянь немає. У більшості випадків методика розв'язання технічних задач із застосуванням теорії звичайних диференціальних рівнянь зводиться до наступного:

- докладне вивчення умови задачі і побудова малюнку, що пояснював би її суть;
- складання диференціального рівняння процесу, що розглядається (використовується фізичний або геометричний зміст похідної);

- інтегрування складеного диференціального рівняння і визначення загального розв’язку цього рівняння;
- визначення частинного розв’язку задачі на підставі даних початкових умов;
- визначення, в міру необхідності, допоміжних параметрів (коефіцієнта пропорціональності та ін.) з використанням для цього додаткових умов задачі;
- знаходження загального закону процесу, що розглядається та визначення невідомих величин;
- аналіз результатів та перевірка вихідних положень задачі.

Деякі з цих рекомендацій в залежності від характеру задач можуть бути відсутніми.

Задача 1. Швидкість розпаду радію в кожен момент часу пропорційна своїй масі. Визначити, який відсоток маси розпадеться через 200 років, якщо відомо, що період напіврозпаду, тобто період, за який розпадається половина присутньої маси, рівний 1590 років, при початковій кількості радію $m_0 = 1$ кг.

Розв'язок:

Враховуючи фізичний зміст похідної, як швидкості зміни функції $m(t)$, і виходячи з умови маємо $\frac{dm}{dt} = -km$, де $m(t)-$кількість радію в момент часу t, $\frac{dm}{dt}-$швидкість розпаду, тобто зміна маси m за одиницю часу t, $k-$коефіцієнт пропорційності, а знак мінус означає зменшення маси із зміною часу. Складене диференціальне рівняння $\frac{dm}{dt} = -km$ є рівнянням зі змінними, що розділяються.

Розв’язуємо його:

$$\frac{dm}{m} = -kdt \Rightarrow \int \frac{dm}{m} = \int -kdt \Rightarrow \ln m = -kt + C_1 \Rightarrow m(t) = Ce^{-kt}.$$

Значення C знайдемо з початкової умови $m(0) = m_0 = 1$.

Підставимо початкову умову в знайдений розв’язок $m(0) = Ce^0 = 1 \Rightarrow C = 1$. Отже, $m(t) = e^{-kt} -$ загальний закон зміни маси речовини в залежності від часу. Коефіцієнт k знайдемо, враховуючи час напіврозпаду: $0,5m_0 = m_0 e^{-1590k} \Rightarrow k \approx 0,00044$.

Маємо, закон розпаду радію $m(t) = e^{-0,00044t}$. Згідно якого через 200 років маса радію буде дорівнювати $m(200) = e^{-0,00044\cdot 200} = 0,915$ кг., а маса радію що розпався, становить $\frac{m(0) - m(200)}{m(0)} \cdot 100\% = 0,085\%$ початкової ваги.

Відповідь: через 200 років з 1кг радію залишиться $0,915$ кг, тобто буде втрачено $0,085\%$ усієї ваги.

Задача 2. Моторний човен рухається по озеру зі швидкістю $v_0 = 20$ *км/г*. На повній швидкості двигун вимикають, через 40 *с* після цього його швидкість зменшиться до $v_1 = 8$ *км/г*.
Відомо, що опір води пропорційний швидкості руху човна. Визначити швидкість човна через 2 *хв*. після вимикання двигуна.

Розв'язання:

Складемо математичну модель процесу. На човен, що рухається, (Рис. 3.) діють сили: за законом Ньютона сила, що дорівнює добутку маси на прискорення $F = m \cdot a$, де $a = v' = \dfrac{dv}{dt}$; та сила опору води $F = -k \cdot v$, де $k -$ коефіцієнт пропорційності. Отже, рівняння руху: $m \cdot \dfrac{dv}{dt} = -k \cdot v -$ рівняння із змінними, що розділяються. Очевидно,

$$\frac{dv}{v} = -\frac{k}{m} \cdot dt \Rightarrow \int \frac{dv}{v} = -\frac{k}{m} \int dt \Rightarrow ln(v) = -\frac{k}{m} t + c,$$

Потенціюючи останню рівність, одержимо $v(t) = e^{-\frac{k}{m}t + c} = e^{-\frac{k}{m}t} e^c = Ce^{-\frac{k}{m}t} -$ загальний розв'язок. Використовуючи початкові умови, знайдемо значення C. При $t = 0 \quad v_0 = 20$ км/г, звідки

$$20 = Ce^{-\frac{k}{m}0} \Rightarrow 20 = C \cdot 1 \Rightarrow C = 20.$$

Тоді загальний закон руху для заданих умов: $v(t) = 20e^{-\frac{k}{m}t}$.

Додаткові умови показують, що при $t = 40\,c = \dfrac{1}{90}$ год., швидкість човна складає $v_1 = 8$ *км/г*

$$\Rightarrow 8 = 20e^{-\frac{k}{m}\cdot\frac{1}{90}} \Rightarrow e^{-\frac{k}{m}\cdot\frac{1}{90}} = \frac{2}{5} \Rightarrow e^{-\frac{k}{m}} = \left(\frac{2}{5}\right)^{90}.$$

Використавши додаткові умови, одержимо закон руху човна:

$$v(t) = 20\left(\frac{2}{5}\right)^{90t}.$$

Для визначення швидкості човна через $t = 2\ хв. = \frac{1}{30} год.$ після вимикання двигуна скористаємося останньою формулою $v\left(\frac{1}{30}\right) = 20\left(\frac{2}{5}\right)^{90\frac{1}{30}} = 20\left(\frac{2}{5}\right)^{3} = \frac{160}{125} \approx 1,28$ *км/г.*

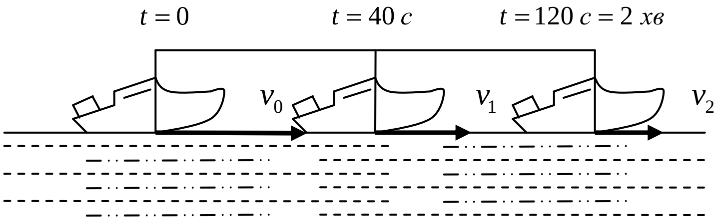


Рис. 3.(Рух човна)

Відповідь: $v\left(\frac{1}{30}\right) \approx 1,28 км/г.$

Задача 3 Траєкторія руху тіла є крива проходить через точку $(1;3)$ і володіє тією властивістю, що відрізок, який відтинає на осі ординат будь-яка дотична, дорівнює подвоєній абсцисі точки дотику. Знайти закон руху тала.

Розв'язання:

Побудуємо схематичний малюнок.

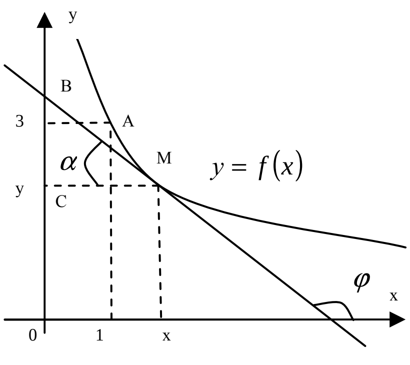


Рис. 4.

За умовою (рис.4): $OB = 2x$, так як $OB = OC + CB$, $OC = y, CB = CM \cdot tg\alpha$,

$CM = x,\ \alpha = 180^0 - \varphi,\ tg\alpha = tg\left(180^0 - \varphi\right) = -tg\varphi = -y'$, то отримаємо диференціальне рівняння $y - xy' = 2x$, яке можна записати у вигляді $y' = \dfrac{y-2x}{x}$. Очевидно, маємо однорідне диференціальне рівняння першого порядку. Для його розв'язку виконаємо заміну:

$$y = Zx,\ y' = Z'x + Z \Rightarrow Z'x + Z = \frac{Zx - 2x}{x} \Rightarrow Z'x = -2 \Rightarrow Z' = -\frac{2}{x} \Rightarrow$$

$$dZ = -\frac{2dx}{x} \Rightarrow \int dZ = -\int \frac{2}{x}dx \Rightarrow Z = -2\ln|x| + C \Rightarrow Z = C - \ln x^2.$$

Тоді $y = x\left(C - \ln x^2\right)-$ множина ліній, що задовольняє умові задачі. Виділимо з неї криву, що проходить через точку $(1;3)$, використовуючи початкові умови $y(1) = 3 \Rightarrow 3 = 1\left(C - \ln 1^2\right) \Rightarrow C = 3$

$y = x\left(3 - ln\,x^2\right)-$ закон руху тіла.

4. ВИМОГИ ДО ВИКОНАННЯ КОНТРОЛЬНИХ ТА ІНДИВІДУАЛЬНИХ ЗАВДАНЬ

1. Вивчити теоретичний курс даного розділу.
2. Виконувати завдання тільки відповідно до свого варіанту.
3. Кожну контрольну роботу чи кожне завдання виконувати в окремому зошиті.
4. Указати на титульному листі зошита предмет, спеціальність та форму навчання, навчальний заклад, своє прізвище ім’я та по – батькові, номер залікової книжки, дату здачі роботи, номер варіанту.
5. Записати умову завдання в повному об’ємі, вказавши відповідний номер завдання.
6. У випадку можливості дати геометричну інтерпретацію умови і розв’язання задачі.
7. Супроводжувати розв'язок завдань потрібними та вичерпними поясненнями.
8. Результати, які одержані під час виконання завдань, слід перевіряти та обґрунтовувати.
9. Записати повну відповідь.
10. З’ясувати результати перевірки виконаних завдань викладачем.
11. У разі необхідності допрацювати розв’язання в тому ж зошиті в кінці роботи з вказівкою „Доробка”, зберігаючи номер відповідного завдання.

5. ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО ОПРАЦЮВАННЯ

Блок №1

1. Установити тип диференціального рівняння першого порядку та розв'язати його. Для завдання в) зробити перевірку отриманого результату.

1. а) $(1+x)ydy - e^{y}dx = 0$, б) $y' = 2x\left(x^{2}+y\right)$,

   в) $ydx + 2\left(\sqrt{xy} - x\right)dy = 0, \quad y(1) = 1$.

2. а) $xy' = \left(x^{2}+1\right)e^{-y}$, б) $y' + y = \dfrac{e^{x}}{1+x}$,

   в) $y' = e^{\frac{-y}{x}} + \dfrac{y}{x}, \; y(1) = 0$.

3. а) $y'\sin^{2}x = y+1$, б) $y' + ytgx = \dfrac{1}{\cos x}$,

   в) $xdy = \left(y + \sqrt{x^{2}+y^{2}}\right)dx, \quad y(1) = 0$.

4. а) $\left(tg^{2}x+1\right)dy = \dfrac{dx}{\cos x}$, б) $y' - \dfrac{1}{x}y = xe^{x}$,

   в) $y' = \dfrac{y}{x}(\ln y - \ln x), \quad y(e) = 1$.

5. а) $e^{3y-x}dy = e^{-y}dx$, б) $y' - y = e^{x}$,

   в) $\left(y^{2}-2xy\right)dx + x^{2}dy = 0, \quad y(1) = 2$.

6. а) $\dfrac{xy'}{(2x+3)} = e^{-y}$, б) $xy' - 2y = 2x^{4}$,

   в) $xy' - y = xtg\dfrac{y}{x}, \; y(0) = 1$.

7. а) $\left(y^{2}+1\right)xdx = dy$, б) $\left(x^{2}+1\right)y' + 4xy = 3$,

   в) $2x^{3}y' = y\left(2x^{2}-y^{2}\right), \quad y(1) = 1$.

8. а) $(y+1)dx=\frac{dy}{tgx}$, б) $x^2y'+xy+1=0$,

в) $xy'\left(\ln\frac{y}{x}\right)=y,\ y(e)=1$.

9. а) $(9+x^2)y'=3-y$, б) $(1-x)(y'+y)=e^{-x}$,

в) $y'=\frac{y^2}{2x^2}+4\frac{y}{x}+4,\quad y(1)=1$.

10. а) $dx=(2yx+x)dy$, б) $y'-2y=-e^x$,

в) $xy'=y\left(1+\ln\frac{y}{x}\right),\quad y(1)=\frac{1}{\sqrt{e}}$.

11. а) $y'\cos^2 x=y^2+1$, б) $xy'-y=x$,

в) $y^2+x^2y'=xyy',\quad y(3)=4$.

12. а) $xy'=2\cos^2 y$, б) $y'-2xy=2x^3$,

в) $xy'=y\ln\frac{y}{x},\quad y(e)=1$.

13. а) $(x+1)ydy=dx$, б) $xy'-y=x^2e^x$

в) $y'=4+\frac{y}{x}+\left(\frac{y}{x}\right)^2,\quad y(1)=2$

14. а) $y'=(2x-1)e^{-y}$, б) $x^2y'+xy=-1$

в) $xy'-y=xe^{\frac{y}{x}},\quad y(e)=1$.

15. а) $y'\sin x=y\ln y$, б) $y'-yctgx=ctgx$

в) $xy'=y+\sin\frac{2y}{x},\quad y(1)=\frac{\pi}{4}$.

16. а) $(1+y)e^xdy+y^3dx=0$, б) $y'\cos x+y\sin x=1$

в) $xy'=y+\cos\frac{2y}{x},\quad y(1)=\frac{\pi}{2}$.

17. а) $\frac{ydy}{\cos x} - xdy = 0$, б) $y' = 3x\left(x+y\right)$,

в) $\left(x+y\right)dx + xdy = 0, \quad y\left(1\right) = 1$.

18. а) $y' = \frac{y}{1+x^2}$, б) $y' - \frac{1}{x}y = x\cos x$,

в) $dy = \frac{\left(y^2+x^2\right)}{2xy}dx, \quad y\left(2\right) = 1$.

19. а) $y'\left(x^2-1\right) = y$, б) $y' + y = x$,

в) $\cos\frac{y}{x}dy = \left(-1+\frac{y}{x}\cos\frac{y}{x}\right)dx, y\left(1\right) = 0$.

20. а) $y'\left(x-1\right) = y-1$, б) $y' - y\frac{6}{x} = \frac{x+1}{x}$,

в) $x^2y' = y^2 + 6xy + 6x^2, \quad y\left(1\right) = 0$.

21. а) $xy' \neq y - 3 = 0$, б) $xy' + y = x^3$,

в) $ydx + 2(\sqrt{xy} - x)dy = 0, \quad y\left(1\right) = 1$.

22. а) $2xy^2dx - ydy = yx^2dy - 6xdx$, б) $y' + y = \sin x$,

в) $(y^2 - 2xy)dx + x^2dy = 0, \quad y\left(1\right) = 2$.

23. а) $xy' + 2y^2 = 0$, б) $xy' + 3x = y$,

в) $y' - \frac{1}{x}y = x\sin x, \quad y\left(\pi\right) = 0$.

24. а) $xy'\ln y - y = 0$, б) $xy' = y(\ln y - \ln x)$,

в) $y' + \frac{1}{x}y = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad y\left(1\right) = 2$.

25. а) $x(y^2+1)dx - y(x^2+1)dy = 0$, б) $xy' - y = xtg\frac{y}{x}$,

в) $y' - 4y = e^{2x}, \quad y(0) = 0$.

26. а) $y'\cos x = (y+2)\sin x$, б) $xy'(\ln y - \ln x) = y$,

в) $2x^2y' = y^2 + 8xy + 8x^2, \quad y(1) = 1$.

27. а) $y' ctgx = y$, б) $y' = ytgx + \sin 2x$,
в) $xy' = y - 2x, \quad y(1) = 3$.

28. а) $y' + e^x = yy'$, б) $y' - \dfrac{2y}{x+2} = (x+2)^3$,
в) $(x^2 + xy)y' = x\sqrt{x^2 - y^2} + xy + y^2, \quad y(1) = 1$.

29. а) $xy' - y^2 = y$, б) $y' x \ln x + y = x^3$,
в) $xy' = y + x\sin\dfrac{2y}{x}, \quad y(1) = \dfrac{\pi}{4}$.

30. а) $(2x^2 y - 3y)y' = 6x - 2x^2 y$, б) $y' \cos x + y \sin x = \cos^4 x$,
в) $xy' = y + x\cos\dfrac{y}{x}, \quad y(1) = \dfrac{\pi}{2}$.

Блок №2

2. Розв'язати диференціальні рівняння, що допускають зниження порядку.

1.	а) $12x^2 - y'' = 0$,	б) $2y' = xy''$.
2.	а) $6x - y'' = 4\sin x$,	б) $xy'' = y'$.
3.	а) $y'' + \cos x = e^x$,	б) $y'' = 5y'$.
4.	а) $4e^{2x} - y'' = 1$,	б) $(y')^2 - yy'' = 0$.
5.	а) $1 + y'' = 20x^3$,	б) $y'' + \frac{y'}{x} = x$.
6.	а) $\cos^2 x \cdot y'' = 1$,	б) $xy'' \ln x = y'$.
7.	а) $\frac{1}{x^2+1} - y'' = 0$,	б) $y'' = \frac{1}{2\sqrt{y}}$.
8.	а) $1 - y'' = 4\sin 2x$,	б) $x^2 y'' = y'$.
9.	а) $y'' + \frac{\cos x}{2} = 6x$,	б) $yy'' - 4 = -y'$.
10.	а) $4e^{2x} + y'' = x$,	б) $yy'' = (y')^2 + 1$.
11.	а) $x + y'' = 2\frac{1}{x^3}$,	б) $yy'' + (y')^2 = 0$.
12.	а) $y'' = x^{-1} + 1$,	б) $yy'' - y' = 0$.
13.	а) $y'' = \cos x + 1$,	б) $y'' = (y')^{-3}$.
14.	а) $\sin^2 x + y'' = 1$,	б) $xy'' = -y'$.
15.	а) $x - y'' = \sin x$,	б) $y'' = 128y^3$.
16.	а) $y'' + 3 = 12x$,	б) $xy'' + y' = 0$.
17.	а) $e^x + y'' = 6x$,	б) $(y-1)y'' = 2(y')^2$.
18.	а) $y'' = 2 - \cos x$,	б) $xy'' + 3y' = 0$.
19.	а) $y'' + \sin^2 x = 1$,	б) $y'' tgx = 2y'$.
20.	а) $y''\sqrt{1-x^2} = 1$,	б) $xy'' - y' = 1$.
21.	а) $2\sin x - y'' + x^3 = 0$,	б) $y'' x \ln x = y'$.

22. а) $y'' tgx = \sin 2x$, б) $4y^3 y'' = y^4 - 16$.

23. а) $x^3 y'' + x^2 - 7 = 0$, б) $2xy'' = y'$.

24. а) $y'' \sin x = \sin 2x$, б) $y'' y^3 + 1 = 0$.

25. а) $xy'' - 4 = x^3$, б) $(1 + x^2) y'' + 2xy' = x^2$.

26. а) $\sin x + y'' \cos^2 x = 0$, б) $1 + (y')^2 = 2yy''$.

27. а) $y'' x + 7 = 0$, б) $y'' = 2yy'$.

28. а) $y'' x = 4x^2 + 3$, б) $yy'' + (y')^2 = 1$.

29. а) $y'' = \ln x$, б) $xy'' + y' + x = 0$.

30. а) $xy'' = x \sin x + 7$, б) $y'' + \dfrac{2x}{x^2 + 1} y' = 2x$.

3. Розв'язати диференціальні рівняння другого порядку та систему. Для завдань а), в) зробити перевірку отриманого результату.

1. а) $y'' - 8y' + 16y = 0$,
б) $y'' - 4y' + 5y = 2x^2 e^x$,
$y(0) = 2, y'(0) = 3$.
в) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -x + 2y. \end{cases}$

2. а) $y'' + 6y' + 25y = 0$,
б) $y'' - 4y' + 4y = e^{2x}$,
$y(0) = 2, y'(0) = 8$.
в) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - 2y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x - y. \end{cases}$

3. а) $y'' - 2y' + 5y = 0$,
б) $y'' - y = 8e^x$,
$y(0) = 2, y'(0) = 4$.
в) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 6y. \end{cases}$

4. а) $y'' + 3y' + 2y = 0$,
б) $y'' + y = 2\cos x$,
$y(0) = 1, y'(0) = 0$.
в) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 4x - y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 2y. \end{cases}$

5. а) $y'' - 2y' - 3y = 0$,
б) $y'' - 2y' = e^x\left(x^2 + x - 3\right)$,
$y(0) = y'(0) = 2$.
в) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 4x - 3y. \end{cases}$

6. а) $y'' - 4y' + 13y = 0$,
б) $y'' - 3y' = 3\left(2 - x^2\right)$,
$y(0) = 0, y'(0) = 1$.
в) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 6x - y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + 2y. \end{cases}$

7. а) $y'' + 6y' + 10y = 0$,
б) $y'' - 4y' + 5y = 2x^2e^x$,
$y(0) = 2, y'(0) = 3$.
в) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x - 9y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 8y. \end{cases}$

8. а) $y'' - 12y' + 36y = 0$,
б) $y'' + y' = e^x$,
$y(0) = y'(0) = 1$.
в) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x - 2y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + 4y. \end{cases}$

9. а) $y'' + 3y' + 2y = 0$,
б) $y'' + 4y = \sin x$,
$y(0) = y'(0) = 1$.
в) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 4y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x. \end{cases}$

10. а) $y'' - 6y' + 9y = 0$,
б) $y'' + 4y' - 12y = 8\sin 2x$,
$y(0) = y'(0) = 0$.
в) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x - 5y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -7x - 3y. \end{cases}$

11. а) $y'' + 12y' + 36y = 0$,
б) $y'' - 4y' + 13y = 26x + 5$,
$y(0) = 1, y'(0) = 0$.
в) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -7x + 5y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 4x - 8y. \end{cases}$

12. а). $y'' - 4y' + 8y = 0$,
б) $y'' - 4y' = 6x^2 + 1$,
$y(0) = 2, y'(0) = 3$.
в) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -5x - 8y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -3x - 3y. \end{cases}$

13. а) $y'' - 6y' + 9y = 0$,
б) $y'' + 64y = 2\sin 8x + \cos 8x$,
$y(0) = y'(0) = 0$.
в) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} + 4x + 6y = 0, \\ \dfrac{dy}{dt} + 4x + 2y = 0. \end{cases}$

14. а) $y''-2y'-8y=0$,
б) $y''-4y'=32-384x^2$,
$y(1)=2, y'(1)=0$.
в) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=x+y, \\ \dfrac{dy}{dt}=-10x-y. \end{cases}$

15. а) $2y''-y'-3y=0$,
б) $y''-10y'+25y=10e^{5x}$,
$y(0)=5, y'(0)=1$.
в) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=3x+y, \\ \dfrac{dy}{dt}=8x+y. \end{cases}$

16. а) $y''-6y'+25y=0$,
б) $y''+9y=e^{-3x}$,
$y(0)=y'(0)=0$.
в) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=4x+6y, \\ \dfrac{dy}{dt}=4x+2y. \end{cases}$

17. а) $y''-4y'+13y=0$,
б) $y''-4y'+5y=\sin x+2\cos x$,
$y(0)=y'(0)=0$.
в) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=y, \\ \dfrac{dy}{dt}=2x+y. \end{cases}$

18. а) $4y''-4y'+17y=0$,
б) $y''+4y'+4y=e^{-2x}(12x+16)$,
$y(0)=0, y'(0)=2$.
в) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=-5x, \\ \dfrac{dy}{dt}=-x-3y. \end{cases}$

19. а) $4y''-12y'+9y=0$,
б) $y''-6y'+9y=4xe^x$,
$y(1)=3, y'(1)=0$.
в) $\begin{cases} {dx}/{dt}=x, \\ {dy}/{dt}=3x+4y. \end{cases}$

20. а) $3y''-9y'=0$,
б) $y''-13y'+12y=x-1$,
$y(1)=3, y'(1)=2$.
в) $\begin{cases} {dx}/{dt}=2x-3y, \\ {dy}/{dt}=3x+2y. \end{cases}$

21. а) $3y''-7y'+4y=0$,
б) $y''+4y=8\cos x$,
$y(\pi/2)=5; y'(\pi/2)=4$
в) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=x+5y, \\ \dfrac{dy}{dt}=x-3y. \end{cases}$

22. а) $4y''-7y'+3y=0$,

б) $y''+\pi^2 y=\pi^2\sin\pi x$,

$y(\frac{1}{2})=1,\ y'(\frac{1}{2})=\frac{\pi^2}{2}$.

в) $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=2x+3y,\\ \dfrac{dy}{dt}=-3x-4y.\end{cases}$

23. а) $3y''-y'-4y=0$,

б) $y''+y=(16-2x)e^{-x}$,

$y(0)=3$, $y'(0)=2$.

в) $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=2x+y,\\ \dfrac{dy}{dt}=-5x-2y.\end{cases}$

24. а) $y''-2y'-8y=0$,

б) $y''+6y'+13y=e^{-3x}\cos 4x$,

$y(0)=1$, $y'(0)=2$.

в) $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=x+5y,\\ \dfrac{dy}{dt}=x-3y.\end{cases}$

25. а) $y''+2y'-8y=0$,

б) $y''-6y'+13y=e^{3x}\cos x$

$y(0)=0$, $y'(0)=3$.

в) $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=4x+9y,\\ \dfrac{dy}{dt}=x-4y.\end{cases}$

26. а) $y''-4y'+5y=0$,

б) $y''+2y'+2y=4\sin x+\cos x$,

$y(\pi)=0$, $y'(\pi)=2$.

в) $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=2x+4y,\\ \dfrac{dy}{dt}=-5x-2y.\end{cases}$

27. а) $y''-24y'+144y=0$,

б) $y''+4y=e^{x}(x^2-3)$,

$y(0)=1$, $y'(0)=4$.

в) $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=2y,\\ \dfrac{dy}{dt}=3x+y.\end{cases}$

28. а) $y''+12y'+36y=0$,

б) $y''-9y=xe^{3x}$,

$y(0)=2$, $y'(0)=1$.

в) $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=2x+9y,\\ \dfrac{dy}{dt}=x-3y.\end{cases}$

29. а) $y''+2y'+5y=0$,

б) $y''-7y'+10y=(x+3)e^{2x}$,

$y(0)=0$, $y'(0)=-1$.

в) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=3x+y, \\ \dfrac{dy}{dt}=4x. \end{cases}$

30. а) $y''+y'-30y=0$,

б) $y''+6y+10y=\cos x-2\sin x$,

$y(\frac{\pi}{2})=2$, $y'(\frac{\pi}{2})=0$

в) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=5x-9y, \\ \dfrac{dy}{dt}=x-5y. \end{cases}$

4. Побудова математичних моделей та розв'язання задач практичного змісту

1. Матеріальна точка рухається прямолінійно під дією сили, прямо пропорціональної часу від початку руху і обернено пропорціональної швидкості руху. Встановити залежність між швидкістю v і часом t, якщо при $t=0$, $v=0$ і при $t=2\,c$ $v=8$ метрам за годину.
2. У кімнаті при температурі $20^0\,C$ деяке тіло охололо за 20 хв. від $100^0\,C$ до $60^0\,C$. Через скільки хвилин воно охолоне до $30^0\,C$, якщо швидкість охолоджування пропорціональна різниці температур тіла і середовища?
3. Визначити шлях, пройдений тілом за час t, якщо відомо, що швидкість руху у кожний момент часу пропорціональна пройденому шляху. Тіло проходить $30\,м/хв$ і 90 м за 2 хв.
4. Швидкість випаровування речовини пропорціональна наявній його кількості. Якщо початкова кількість речовини рівна m, а через одну годину вона зменшилася удвічі, то яка кількість речовини залишиться через три години після початку випаровування?
5. Тіло рухається прямолінійно з прискоренням, пропорціональним добутку швидкості і часу. Знайти залежність між швидкістю і часом, якщо при $t=0$, $v=20\,м/с$, а при $t=2\,с$ $v=40\,м/с$.
6. Знайти криву, що проходить через точку $(0;1)$ та дотична до якої відтинає від осі абсцис відрізок у два рази більший ординати точки дотику.
7. Знайти лінію, що проходить через точку $(1;0)$ і якій характерне те, що ордината точки перетину дотичної з віссю ординат на п'ять одиниць більше абсциси точки дотику.
8. Знайти лінію, що проходить через точку $(1;1)$ і якій характерне те, що ордината точки перетину дотичної з віссю ординат дорівнює добутку координат точки дотику.
9. Знайти криву, що проходить через точку $(1;0)$ і якій характерне те, що кутовий коефіцієнт її будь-якої дотичної рівний

відношенню суми абсциси і ординати точки дотику до абсциси точки дотику.

10. Знайти криву, що проходить через точку $(3;1)$ та дотична до якої відтинає на осі Ox відрізок у три рази більший ординати точки дотику.

11. Матеріальна точка маси $m = 2$ г без початкової швидкості повільно занурюється в рідину. Опір рідини пропорціональний швидкості занурення з коефіцієнтом пропорційності $k = 2\ г/с$. Знайти швидкість точки через одну секунду після початку занурення.

12. Моторний човен рухається в спокійній воді із швидкістю $v_0 = 12\ км/год$. На повному ходу її двигун був вимкнений і через 10 с швидкість човна зменшилася до $v_1 = 6\ км/год$. Опір води пропорціональний швидкості руху човна. Знайти швидкість човна через одну хвилину після зупинки двигуна.

13. Куля, рухаючись із швидкістю $v_0 = 400\ м/с$, входить у достатньо товсту стіну. Опір стіни надає кулі від'ємне прискорення, пропорціональне квадрату її швидкості з коефіцієнтом пропорційності $k = 7\ м^{-1}$. Знайти швидкість кулі через $0,001$ с після входження кулі в стіну.

14. Матеріальна точка масою $m = 1$г рухається прямолінійно. На неї діє в напрямі руху сила, пропорціональна часу, що минув з моменту, коли швидкість точки дорівнювала нулю, з коефіцієнтом пропорційності $k_1 = 2\,(г \cdot см)/с^3$; крім того, на точку діє опір середовища, пропорційний швидкості руху з коефіцієнтом пропорційності $k_2 = 3\ г/с$. Знайти швидкість точки через три секунди після початку руху.

15. У ємності знаходиться 100 л водного розчину солі. У неї вливається чиста вода із швидкістю $q = 5\ л/хв$, а суміш виливається з тією ж швидкістю, причому концентрація розчину підтримується рівномірною шляхом перемішування. У початковий момент у розчині містилося $m_0 = 10$ кг солі. Скільки солі буде міститися в ємкості через 20 хвилин після початку процесу?

16. Крива проходить через точку $(2;-1)$ і відомо, що кутовий коефіцієнт дотичної в будь-якій її точці пропорційний квадрату ординати точки дотику, з коефіцієнтом пропорційності $k=3$. Знайти рівняння кривої.
17. Крива проходить через точку $(1;2)$ і володіє тією властивістю, що добуток кутового коефіцієнта дотичної в будь-якій її точці на суму координат точки дотику дорівнює подвоєній ординаті цієї точки. Знайти рівняння кривої.
18. Тіло, рухаючись, проходить через точку $(1;2)$. Відомо, що відношення ординати будь-якої траєкторії точки до абсциси пропорційне кутовому коефіцієнту дотичної до цієї траєкторії, проведеної в тій же точці, з коефіцієнтом пропорційності $k=3$. Знайти закон руху тіла.
19. Крива проходить через точку $(1;5)$ і відомо, що відрізок, який відтинає на осі ординат довільна дотична, дорівнює потроєній абсцисі точки дотику. Знайти рівняння кривої.
20. Крива проходить через точку $(2;4)$ і відомо, що відрізок, який відтинає на осі абсцис дотична, проведена в будь-якій точці кривої, дорівнює кубу абсциси точки дотику. Знайти рівняння кривої.
21. Знайдіть криву, у якої радіус кривизни дорівнює кубу довжини нормалі; шукана крива проходить через точку $A(0;1)$, а дотична в цій точці утворює з віссю OX кут 45^0.

$R=\dfrac{(1+y'^2)^{3/2}}{y''}$ – радіус кривизни; $N=y\sqrt{1+y'^2}$ – довжина нормалі).
22. Тіло масою $m=5$ г падає по вертикалі з деякої висоти без початкової швидкості. При цьому на нього діє сила опору повітря, пропорційна квадрату швидкості тіла. Знайти закон руху тіла.
23. Тіло занурюється в рідину під дією власної ваги без початкової швидкості. Опір рідини прямо пропорційний

швидкості тіла. Знайти закон руху тіла, якщо його маса $m = 5$ г, коефіцієнт опору $K = 0,2$.

24. Тіло масою m падає з деякої висоти з швидкістю V_0, при цьому на нього діє сила опору пропорційна квадрату швидкості. Знайти швидкість $V(t)$.
25. Знайти лінію, у якої квадрат довжини відрізка, що відтинається дотичною від осі ординат, дорівнює добутку координат точки дотику.
26. Знайти струм в котушці в момент t, якщо її опір R, коефіцієнт індуктивності L, початковий струм $I_0 = 0$, електрорушійна сила змінюється по закону $E = E_0 \sin wt$, а спад напруги вздовж провідника дорівнює $L\dfrac{di}{dt} + RI$.
27. Площа трикутника, утвореного дотичного до шуканої лінії і осями координат, є сталою величиною. Знайти лінію.
28. На тіло масою $m = 2$ г. діє сила, пропорціональна часу (коефіцієнт пропорційності дорівнює k_1). Крім того, на тіло діє середовище з силою пропорціональною швидкості тіла (коефіцієнт пропорціональності дорівнює k_2). Знайти закон руху тіла.
29. Швидкість знецінювання устаткування внаслідок його зносу пропорційна в кожен даний момент часу його фактичній вартості. Початкова вартість дорівнює 1 млн. грн. Знайти вартість устаткування через 15 років.
30. Тіло рухається прямолінійно з прискоренням, пропорційним добутку квадрата швидкості V на час t. Знайти швидкість в довільний час t, якщо $V(0) = 80 \, {}^{км}\!/\!_{год}$.

ПЕРЕЛІК ВИКОРИСТАНИХ ТА РЕКОМЕНДОВАНИХ ДЖЕРЕЛ ІНФОРМАЦІЇ

1. Бермант А. Ф. Краткий курс математического анализа для втузов. - М.: Печатный двор, 1964 г., 664 стр.
2. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах: Учеб. пособие для студентов втузов. В 2-х ч. Ч. I-II. -. 4-е изд., испр. и доп. – М.: Высш. шк., 1986 г. – 415 с.
3. Данко П.Е., Попов А.Г., Высшая математика в упражнениях и задачах: Учеб. пособие для студентов втузов. В 2-х ч. Ч. I – М.: Высш. шк., 1971 г. – 288 с.
4. Запорожец Г. И., Руководство к решению задач по математическому анализу. - 4-е изд., испр. и доп. – М.: Высш. шк., 1966 г. – 465 с.
5. Письменний Д. Т., Конспект лекций по высшей математике 1 часть. - М.: Рольф, 2000. – 228,256 с., с илл.
6. Самойленко А.М., Кривошия С.А., Перестюк Н.А. Дифференциальные уравнения. – К.: Высш.-шк., 1989. – 384 с.
7. Мантуров О.В. Курс высшей математики. – М.: Высшая шк., 1991. – 448 с.
8. Федорюк М. В. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Наука, 1985. – 447с.
9. К.К. Пономарев. Составление и решение дифференциальных уравнений инженерно-технических задач. - М.: ГУПН МП РСФСР, 1962. - 183 с.

ДОДАТОК А

ОСНОВНІ ФОРМУЛИ ІНТЕГРУВАННЯ

Основні властивості невизначеного інтегралу

1. $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x) \Rightarrow d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx;$
2. $\int dF(x) = F(x) + C;$
3. $\int (f_1(x) + f_2(x))dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx;$
4. $\int af(x)dx = a\int f(x)dx,$ де $a \neq 0$ $const$;

Таблиця інтегралів від елементарних функцій

1. $\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C, \ \ n \neq -1;$
2. $\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C;$
3. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \frac{x-a}{x+a} + C;$
4. $\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C;$
5. $\int e^u du = e^u + C;$
6. $\int \cos u du = \sin u + C;$
7. $\int \sin u du = -\cos u + C;$
8. $\int \sin kx dx = -\frac{1}{k} \cos kx + C;$
9. $\int \cos kx dx = \frac{1}{k} \sin kx + C;$
10. $\int \frac{du}{\cos^2 u} = tgu + C;$
11. $\int \frac{du}{\sin^2 u} = -ctgu + C;$
12. $\int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{u}{a} + C;$
13. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin \frac{u}{a} + C;$
14. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a}} = ln\left|u + \sqrt{u^2 \pm a}\right| + C.$

Формула інтегрування частинами: $\int udv = uv - \int vdu$.

ДОДАТОК Б

ОСНОВНІ ФОРМУЛИ ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ

Основні властивості похідних

1. $(u+v-w)' = u'+v'-w';$
2. $(u\cdot v)' = u'v+uv';$
3. $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \left(\dfrac{u'v-uv'}{v^2}\right);$
4. $(c)' = 0;$
5. $(c\cdot u)' = c\cdot u';$
6. $\left(\dfrac{u}{c}\right)' = \dfrac{u'}{c};$
7. $\left(\dfrac{c}{u}\right)' = -\dfrac{cu'}{u^2};$

Таблиця похідних елементарних функцій

1. $\left(u^n\right)' = nu^{n-1}\cdot u'$
2. $(\sin u)' = \cos u\cdot u'$
3. $(\cos u)' = -\sin u\cdot u'$
4. $(tgu)' = \dfrac{u'}{\cos^2 u}$
5. $(ctgu)' = \dfrac{-u'}{\sin^2 u}$
6. $\left(a^u\right)' = a^u \ln a\cdot u'$
7. $\left(e^u\right)' = e^u\cdot u'$
8. $(\log_a u)' = \dfrac{u'}{u}\cdot\log_a e = \dfrac{u'}{u}\cdot\dfrac{1}{\ln a}$
9. $(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$
10. $(\arccos u)' = -\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
11. $(\arcsin u)' = \dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
12. $(arctg(u))' = \dfrac{u'}{1+u^2}$

Формула похідної складної функції

Якщо $y = f(u)$, де $u = u(x)$ то $y' = f_u'(u)\cdot u'(x)$.